Vorlesungen über

Partielle Differentialgleichungen

von

Rolf Leis

Vorwort

In den Jahren 1992–1996 habe ich eine Vorlesungsreihe zur Einführung in die Analysis für Studenten der Mathematik und Physik an der Universität Bonn gehalten. Diese Reihe begann mit den Vorlesungen über Infinitesimalrechnung I–IV für das Grundstudium. Daran schlossen sich im Hauptstudium jeweils zweisemestrige Vorlesungen über Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen an.

Im Anschluß an diese Vorlesungen habe ich meine Aufzeichnungen den Hörern in Form von Skripten zur Verfügung gestellt. Der vorliegende Text über Partielle Differentialgleichungen ist aus den entsprechenden Skripten entstanden. Dabei habe ich den Stoffumfang bewußt auf den einer zweisemestrigen Vorlesung beschränkt und mich bei der Auswahl darum bemüht, Anwendungen aufzuzeigen, die besonders auch für Studenten der Physik mit dem Nebenfach Mathematik interessant sein können. Der Text ist der zweite Band aus der Reihe dieser Vorlesungen für das Hauptstudium und baut auf der Vorlesung über Funktionalanalysis auf. Kenntnisse aus einer Vorlesung über Funktionalanalysis werden also vorausgesetzt. So finden sich im vorliegenden Text viele Verweise auf den ersten Band dieser Reihe. Natürlich kann man die zitierten Resultate auch in anderen Büchern über Funktionalanalysis finden.

Danken möchte ich vor allem Frau R. Müller für die hervorragende TEX-Niederschrift und vielen Hörern meiner Vorlesungen für ihre Kommentare zu den Skripten und für ihre Hilfe bei deren Erstellung. Herr F. Linke hat den Text der Skripten kritisch durchgesehen und das Sachverzeichnis erstellt.

Bonn, im Februar 1998

Rolf Leis

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Im Grundstudium sind Ihnen sicherlich gewöhnliche Differentialgleichungen begegnet. Denken Sie nur an die Gleichung

$$u'' = -g,$$

die den freien Fall einer punktförmigen Masse beschreibt. Dabei soll u'' die zweite Ableitung von u nach dem Parameter t, der Zeit, bedeuten, und es werden Anfangswerte, etwa $u(0)$ und $u'(0)$, vorgegeben. Erinnert sei an die Existenzsätze von Picard–Lindelöf und Peano oder auch an Sturm–Liouvillesche Randwertaufgaben.

Allgemein wird eine gesuchte Größe u jedoch nicht nur von der Zeit t, sondern auch von den Ortsvariablen x abhängen. Häufig treten weitere Variablen auf, zum Beispiel die Impulsvariablen. Dementsprechend werden bei der Beschreibung eines Vorganges auch die partiellen Ableitungen nach diesen Variablen eingehen, und man trifft auf *Partielle Differentialgleichungen.*

Die Beschäftigung mit partiellen Differentialgleichungen führt auf viele interessante mathematische Fragestellungen. Sie hat einen ungeheuren Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik insgesamt. So läßt sich am Beispiel des Problems der eingespannten schwingenden Saite der Länge l sehr schön die Entwicklung des Funktionsbegriffs verfolgen. Hier geht es um die Bestimmung einer Lösung $u(t, x)$ für $t \geq 0$ und $0 \leq x \leq l$, die der Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}$$

und der Randbedingung $u(t, 0) = u(t, l) = 0$ genügen soll. Transformiert man

$$\xi = x + t \text{ und } \eta = x - t,$$

dann folgt $u_{\xi\eta} = 0$. Hieraus erhielt Jean le Rond d'Alembert, 1717–83, im Jahre 1747 seine allgemeine Lösung, nämlich

$$u(t, x) = f(x + t) + \varphi(x - t).$$

Dabei ist wegen der Randbedingung für alle $s \geq 0$

$$f(s) + \varphi(-s) = 0, \quad f(l + s) + \varphi(l - s) = 0,$$

und folglich

$$f(s) = -\varphi(-s) = -\varphi\big(l - (l + s)\big) = f(2l + s).$$

Nach d'Alembert ist deshalb

$$u(t, x) = f(x + t) - f(t - x)$$

mit analytischen periodischen Funktionen f die allgemeine Lösung.

Schon ein Jahr später, 1748, wurde diese Aussage von Leonhard Euler, 1707–1783, in zwei Punkten entscheidend verbessert. Zunächst einmal bemerkte er, daß von der Natur des physikalischen Problems her u durch die Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = g(x) \text{ und } u_t(0, x) = h(x)$$

mit willkürlichen Funktionen g, h bestimmt wird. Es ist also

$$g(x) = f(x) + \varphi(x), \quad h(x) = f'(x) - \varphi'(x),$$

und folglich

$$f(x) - \varphi(x) = 2f(0) + \int_0^x h(s)ds.$$

Daraus folgt die heute meist nach d'Alembert benannte Darstellung der Lösung, nämlich

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\Big\{g(x + t) + g(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} h(s)\, ds\Big\}.$$

Hierin ließ Euler, und das ist der zweite Punkt, willkürliche Funktionen g, h zu, zum Beispiel stetige; im Gegensatz zu d'Alembert also nicht nur analytische. Damit war der Lösungsbegriff entscheidend verallgemeinert worden. Eine Differentialgleichung konnte nicht differenzierbare Lösungen besitzen!

Diese Erweiterung des Lösungsbegriffs ist in der Folgezeit äußerst wichtig geworden. Es gibt klassische, starke, schwache oder Distributionenlösungen. Darüber wird im Verlauf dieser Vorlesung mehr berichtet.

Eine zweite Entwicklung soll noch angedeutet werden: Vor d'Alembert hatte BROOK TAYLOR, 1685–1731, bereits erkannt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(t,x) = \cos\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Lösungen der Randwertaufgabe für die schwingende Saite sind, und er hatte daraus die Obertöne erklärt. Er hielt diese speziellen Lösungen für die allgemeinen. Dies führte DANIEL BERNOULLI, 1701–84, im Jahre 1753 zu der Bemerkung, daß auch eine Kombination solcher u_n die Randwertaufgabe löst und daß sich die allgemeine Lösung in Form einer Reihe

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n\cos\frac{n\pi t}{l} + \beta_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

mit Konstanten α_n, β_n darstellen läßt, also durch Superposition der speziellen Taylorschen Lösungen. Es hat recht lange gedauert, bis das mathematisch fundiert werden konnte. Es war zu zeigen, daß sich die zunächst willkürlichen Funktionen g, h durch trigonometrische Reihen darstellen lassen, etwa

$$g(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

und wie sich die Koeffizienten α_n, β_n aus g, h berechnen. Hier erzielte vor allem JEAN-BAPTISTE-JOSEPH FOURIER, 1766–1830, den Durchbruch. Ab 1807 entwickelte er Funktionen in die nach ihm benannten Reihen. Und auch dies wieder für nicht notwendig analytische oder differenzierbare Funktionen.

Diese zweite Entwicklung hat dazu geführt, allgemeinere partielle Differentialgleichungen beispielsweise der Form

$$u_{tt} + Au = 0$$

zu behandeln. Dabei soll A ein geeigneter Differentialoperator bezüglich der Ortsvariablen sein, im Falle der Saite $A = -\partial^2/\partial x^2$ mit einer Randbedingung. Man zeigt dann, daß A abzählbar unendlich viele „Eigenwerte" λ_n besitzt und dazugehörende „Eigenfunktionen" v_n mit

$$Av_n = \lambda_n v_n\,.$$

Die v_n bilden ein vollständiges Orthonormalsystem, und man erhält die allgemeine Lösung u in der Form

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n\cos\sqrt{\lambda_n}t + \beta_n\sin\sqrt{\lambda_n}t\right\}v_n(x).$$

Im Falle der Saite ist $\lambda_n = (n\pi/n)^2$ und $v_(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$.

Damit entstanden schöne Darstellungen der Lösungen vieler partieller Differentialgleichungen, und es wurde gleichzeitig die Theorie der Fourierreihen weiter verallgemeinert. Läßt man unbeschränkte Grundgebiete zu, zum Beispiel $x \in \mathbb{R}$, dann erhält man entsprechend Darstellungen durch Fourierintegrale.

Es sollen nun noch einige Beispiele partieller Differentialgleichungen genannt werden:

1. Die *Potentialgleichung*

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u = o.$$

Diese Gleichung ist Ihnen schon mehrfach begegnet, zum Beispiel in der Funktionentheorie. Erinnert sei an die Diskussion um den Riemannschen Abbildungssatz und an die Frage nach der Lösbarkeit der Dirichletschen Randwertaufgabe. Die Potentialgleichung tritt auch in den Anwendungen oft auf, so in der Elektrostatik. Der „Δ-Operator" links wird auch nach PIERRE SIMON LAPLACE, 1749–1827, benannt.

2. Die *Wellengleichung*

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = o$$

beschreibt viele Schwingungsvorgänge. Man findet sie als lineare Näherung bei der Diskussion der schwingenden Saite oder Membran. Bezüglich der Zeit sind hier Anfangswertaufgaben zu lösen, und im Gegensatz zu den Potentialfunktionen sind unstetige Lösungen mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit charakteristisch. Signale können scharf ein- und aussetzen, ein Phänomen, das durch das *Huygenssche Prinzip* beschrieben wird.

3. Auch die *Wärmeleitungsgleichung*

$$(\partial_t - \Delta)u = o$$

findet man als lineare Näherung beispielsweise bei der Beschreibung von Wärmeausbreitungsprozessen. Auch hier stellt man Anfangswertaufgaben bezüglich der Zeit. Die Lösungen sind aber mehr den Lösungen der Potentialgleichung verwandt. Sie sind glatt und haben unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

4. Interessant sind auch *Schrödingergleichungen*, zum Beispiel die für das Wasserstoffatom

$$\left(\partial_t - \mathrm{i}\Big(\Delta + \frac{1}{|x|}\Big)\right) u = o.$$

Die physikalisch Interessierten unter Ihnen wissen, daß die zugehörigen Operatoren charakteristische Spektren besitzen. Besonders wichtig ist hier auch die Diskussion des Verhaltens der Lösungen für große Werte des Zeitparameters. So ist das Arbeitsgebiet der *Streutheorie* entstanden, in dem solche Fragen untersucht werden.

5. Neben Differentialgleichungen gibt es auch viele interessante Differentialgleichungssysteme. Ich nenne hier nur das System der *Maxwellschen Gleichungen*

$$\varepsilon\,\partial_t E - \operatorname{rot} H = o,$$
$$\mu\,\partial_t H + \operatorname{rot} E = o.$$

Dabei sind E, H die Vektoren der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke und ε, μ die Dielektrizität bzw. Permeabilität. Natürlich treten in den Anwendungen noch viele andere Systeme und Gleichungen auf. Erinnert sei an die Elastizitätstheorie.

6. Die bisher vorgestellten Gleichungen und Systeme sind alle linear. Meist sind sie nur lineare Näherungen für die Beschreibung zugrundeliegender Phänomene. Für „kleine Daten" geben sie im allgemeinen eine recht gute Beschreibung dieser Phänomene. Trotzdem darf man nicht außer acht lassen, daß sehr viele Vorgänge erst durch nichtlineare Gleichungen richtig formuliert werden. Als Beispiel nenne ich die *Burgersgleichung*

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = o.$$

Auch die *Straßenverkehrsgleichung* ist von diesem Typ. Die Lösungen solcher nichtlinearer Gleichungen zeigen charakteristisches Verhalten. Aus einer zunächst glatten Lösung kann sich nach einiger Zeit eine *Stoßwelle* entwickeln; man erlebt das Phänomen ja im Straßenverkehr als Stau.

7. Allgemein ist dann mit $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ und $u \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$

$$F(x, u, \partial_x u, \partial_x^2 u, \dots, \partial_x^k u) = o$$

eine partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung bzw. ein Differentialgleichungssystem.

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist ein großes Gebiet mit vielen Querverbindungen in andere Zweige der Mathematik. Sie ist sehr lebendig, und in ihr wird auch heute noch viel gearbeitet. Sie ist keineswegs abgeschlossen. Man kann vielleicht sagen, daß lineare Probleme inzwischen recht gut verstanden sind, aber besonders bei den nichtlinearen gibt es noch viel zu tun.

Diese Vorlesung soll eine Einführung sein. Spezialvorlesungen oder Seminare sollten sich anschließen, wenn man sich näher für dieses Arbeitsgebiet interessieren will. Nicht behandelt werden zum Beispiel inverse Probleme, Verzweigungsaufgaben und insbesondere numerische Aspekte. Wir beginnen kurz mit Gleichungen erster Ordnung. Schwerpunkt sollen Gleichungen zweiter Ordnung sein, wenigstens im ersten Teil der Vorlesung. Dabei sollte man diese Unterscheidung nach der Ordnung aber nicht zu wichtig nehmen. Wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen läßt sich eine Gleichung zweiter Ordnung leicht als System erster Ordnung schreiben. Im Falle der Wellengleichung $u_{tt} = \Delta u$ kann man

$$v := Du \in \mathbb{R}^{1+\mathrm{n}}$$

mit

$$\nabla^{tr} := (\partial_1, \ldots, \partial_n) \quad \text{und} \quad D := \begin{pmatrix} \partial_t \\ \nabla \end{pmatrix}$$

wählen. Dann ist

$$\partial_t v = \begin{pmatrix} 0 & \nabla^{tr} \\ \nabla & o \end{pmatrix} v.$$

Zum Abschluß dieser Einführung möchte ich einige Bücher nennen, die ich bei der Vorbereitung dieser Vorlesung benutzt habe. Es gibt viel mehr, bitte stöbern Sie selbst in der Bibliothek.

R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. Springer-Verlag 1993. (Erste Auflage 1924 bzw. 1937)

D. Gilbarg und N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag 1977.

G. Hellwig: Partielle Differentialgleichungen. B.G. Teubner 1960.

L. Hörmander: The Analysis of Partial Differential Operators I–IV. Springer-Verlag, Berlin et al.

F. John: Partial Differential Equations. Springer-Verlag 1982.

R. Racke: Lectures on Nonlinear Evolution Equations. Vieweg 1992.

M. Reed und B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics I–IV. Academic Press 1972–78.

M. Renardy und R. C. Rogers: An Introduction to Partial Differential Equations. Springer-Verlag 1993.

J. Wloka: Partielle Differentialgleichungen. B.G. Teubner 1982.

Hinweisen möchte ich auch auf die beiden folgenden Übersichtsartikel, die in „*Ein Jahrhundert Mathematik, 1890–1990, Festschrift zum Jubiläum der DMV*“ im Verlag Friedr. Vieweg & Sohn 1990 erschienen sind:

J. Bemelmans, St. Hildebrandt und W. von Wahl: Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung.

R. Leis: Zur Entwicklung der angewandten Analysis und mathematischen Physik in den letzten hundert Jahren.

In diesen Artikeln befinden sich auch zahlreiche Literaturhinweise.

Weitere Angaben zur Literatur findet man im Literaturverzeichnis. Jahreszahlen in eckigen Klammern deuten auf diese Verweise. Auf die Vorlesung *Leis [1997]* wird oft Bezug genommen. Sie wird kurz in der Form *FA* ... zitiert.

1 Differentialgleichungen erster Ordnung

In diesem Kapitel sollen zur Einführung in die Problematik Differentialgleichungen erster Ordnung kurz behandelt werden. Dabei wählen wir zur Vereinfachung eine Darstellung in $\mathbb{R}^2$. In $\mathbb{R}^n$ gelten teilweise ähnliche Resultate. Außerdem setzen wir im ersten Teil die Daten als glatt voraus und frage nach glatten Lösungen. Im zweiten Teil werden auch schwache Lösungen zugelassen.

1.1 Glatte Lösungen

Wir beginnen mit Gleichungen der Form

$$a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u_y = b(x,y)u + c(x,y) \tag{1}$$

oder etwas allgemeiner

$$a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u_y = a_3(x,y,u). \tag{2}$$

Gleichung (1) ist linear in u, Gleichung (2) semilinear. Dabei sollen die Koeffizienten a_i, b, c glatte Funktionen sein (damit sind hier $\mathcal{C}_1$-Funktionen gemeint), und wir fragen nach glatten Lösungen u.

Eine Gleichung der Form

$$a(\,\cdot\,)\,\nabla u = f(\,\cdot\,,u)$$

nennt man *semilinear* und eine Gleichung der Form

$$a(\,\cdot\,,u)\,\nabla u = f(\,\cdot\,,u)$$

quasilinear in u.

Die entsprechenden Gleichungen in $\mathbb{R}^1$ sind gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir wissen, daß man dort u an einer Stelle x_0 vorgeben kann und daß $u(x)$ dann eindeutig bestimmt ist, jedenfalls in einer Umgebung von x_0.

Wir stellen jetzt die analoge Frage und geben uns eine glatte Anfangskurve γ in der (x,y)-Ebene und auf ihr Anfangswerte φ vor. Man spricht von der „Cauchyschen Anfangswertaufgabe“, möchte also Lösungen u zu diesen Daten finden.

Gehen wir zunächst heuristisch an diese Frage heran: Es sei $(x_0,y_0) \in \gamma$ und u in einer Umgebung dieses Punktes in eine Taylorreihe entwickelbar. Wir fragen, ob aus der Differentialgleichung und den Daten alle Ableitungen von u im Punkt (x_0,y_0) bestimmt werden können. Dann würde u existieren und wäre festgelegt. Es sei mit $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\gamma(\sigma) = \big(x(\sigma), y(\sigma)\big)$$

eine Parameterdarstellung von γ. Dann ist bis auf die Normierung

$$t^\gamma = \begin{pmatrix} x_\sigma \\ y_\sigma \end{pmatrix}$$

Tangentenvektor von γ. Mit $\varphi = u|\gamma$ sind dann

$$\begin{aligned} x_\sigma u_x + y_\sigma u_y &= (t^\gamma \nabla)\varphi, \\ a_1 u_x + a_2 u_y &= a_3(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\varphi) \end{aligned}$$

auf γ bekannt. Damit ist ∇u in (x_0,y_0) bekannt, wenn dort die Determinante

$$x_\sigma a_2 - y_\sigma a_1 \neq 0$$

ist. Analoges gilt für die höheren Ableitungen. Im Falle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2}{a_1}$$

gilt das aber möglicherweise nicht mehr.

Solche Ausnahmekurven nennt man *charakteristische Linien.* Es sei $\tau \in \mathbb{R}$ der Parameter einer charakteristischen Linie durch (x_0,y_0). Dann lauten die Gleichungen für solche Kurven

$$\begin{cases} x_\tau = a_1(x,y) & \text{etwa mit } x(0) = x_0, \\ y_\tau = a_2(x,y) & \text{etwa mit } y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Gleichung (3) ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen und damit lösbar. Die Lösungen, also die charakteristische Linien, spielen im folgenden eine große Rolle. Wir erwarten, daß längs dieser Kurven „etwas passiert“.

Beispiel 1.1.1: *Es seien* $\gamma(\sigma) = (\sigma, 0)$, $\varphi(\sigma) = \sigma$ *und*

$$u_x + u_y = u \qquad mit\ u|\gamma = \varphi.$$

Dann gilt für die charakteristische Linie durch $(\sigma, 0)$

$$x_\tau = 1 \quad \text{mit } x(0) = \sigma,$$
$$y_\tau = 1 \quad \text{mit } y(0) = 0,$$

also

$$x(\sigma, \tau) = \sigma + \tau,$$
$$y(\sigma, \tau) = \tau$$

oder $x = \sigma + y$. Bezüglich σ erhalten wir also eine Schar von charakteristische Linien, die Anfangskurve schneiden. Man betrachte Abbildung 1.1 (für $\tau \geq 0$).

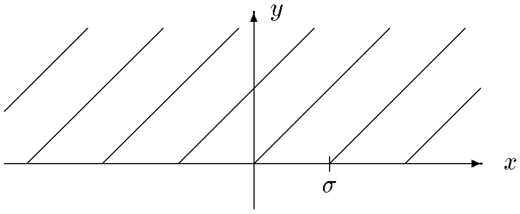

Abbildung 1.1.

Die Anfangskurve γ selbst, die x-Achse, ist keine charakteristische Linie. Wir erwarten deshalb, daß unsere Aufgabe lösbar ist. Um die Lösung zu finden, bemerken wir zunächst, daß längs einer charakteristischen Linie folgendes gilt

$$u_\tau = u_x x_\tau + u_y y_\tau = u_x a_1 + u_y a_2 = a_3,$$

hier also $u_\tau = u$. Das ist wieder eine gewöhnliche Differentialgleichung, u läßt sich also längs einer charakteristische Linie berechnen. Im Falle unseres Beispiels ist wegen $u(\sigma, 0) = u|\gamma(\sigma) = \sigma$

$$u(\sigma, \tau) = \sigma\, \mathrm{e}^\tau.$$

Es geht also nur noch darum, von den Parametern (σ, τ) auf die Koordinaten (x, y) zurück zu rechnen, und das ist möglich, weil die charakteristischen Linien die Anfangskurve γ schneiden. Wir finden

$$\sigma = x - y,$$
$$\tau = y$$

und damit

$$u(x, y) = (x - y)\, \mathrm{e}^y.$$

Das ist die Lösung unserer Aufgabe. □

Wenn γ eine charakteristische Linie ist, dann läßt sich die Cauchysche Anfangswertaufgabe im allgemeinen nicht lösen. Das zeigt der folgende

Satz 1.1.2: *Es seien* $\kappa(\tau) = \big(x(\tau), y(\tau)\big)$ *eine charakteristische Linie,* $x_0 = x(\tau_0)$, $y_0 = y(\tau_0)$, $u_0 \in \mathbb{R}$ *und* $u \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R}^2)$ *eine Lösung von Gl. (2) mit* $u(x_0, y_0) = u_0$. *Dann ist* u *längs* κ *eindeutig bestimmt.*

Zum Beweis gehen wir wie im Beispiel vor. Es ist

$$u_\tau = u_x x_\tau + u_y y_\tau = u_x a_1 + u_y a_3 = a_3$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung mit den Anfangswerten $u(\tau_0) = u_0$. Diese Aufgabe ist (lokal) eindeutig lösbar. □

All dies legt die Vermutung nahe, daß die Cauchysche Anfangswertaufgabe in $\mathbb{R}^2$ (lokal) eindeutig lösbar ist, wenn die Anfangskurve γ die Schar der charakteristische Linien schneidet. Bevor wir das beweisen, betrachten wir noch

Beispiel 1.1.3: *Es seien* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R})$, $\gamma = (\sigma, 1)$ *und*

$$x\, u_x + y\, u_y = \alpha u \qquad \textit{mit } u|\gamma = \varphi.$$

Als erstes berechnen wir die charakteristischen Linien durch $(\sigma, 1)$. Ihre Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} x_\tau &= x \qquad \text{mit } x(\sigma,0) = \sigma, \\ y_\tau &= y \qquad \text{mit } y(\sigma,0) = 1. \end{aligned}$$

Es ist also

$$x(\sigma,\tau) = \sigma\, \mathrm{e}^\tau \quad \text{und} \quad y(\sigma,\tau) = \mathrm{e}^\tau$$

oder $y = x/\sigma$. Die charakteristischen Linien schneiden also die Anfangskurve γ, man betrachte Abbildung 1.2.

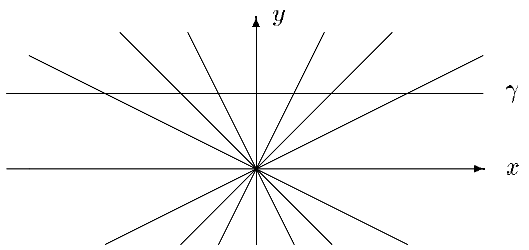

Abbildung 1.2.

Wie man diesem Bild entnimmt, treffen sich die charakteristischen Linien im Nullpunkt. Global läßt sich deshalb (x, y) nicht nach (σ, τ) auflösen, und wir erwarten daher die Existenz einer nur lokalen Lösung u. Für $y > 0$ kann man jedoch auflösen und erhält

$$\sigma = x/y \quad \text{ und } \tau = \ln\, y.$$

Dort folgt aus

$$z_\tau = \alpha z \qquad \text{mit } z(\sigma,0) = \big(u|\gamma\big)(\sigma) = \varphi(\sigma)$$

$z(\sigma,\tau) = \varphi(\sigma) e^{\alpha\tau}$ oder

$$u(x,y) = \varphi\Big(\frac{x}{y}\Big) y^\alpha. \qquad \square$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren und beweisen. Dabei behandeln wir sofort *quasilineare Gleichungen* und machen folgende Voraussetzungen:

1. Mit $X := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ seien $a_i(X) \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R}^3)$ für $i = 1, 2, 3$ vorgegeben. Es sei $A := (a_1, a_2, a_3)$.
2. In $I := [a, b]$ sei die Anfangskurve

$$\Gamma(\sigma) := X_0(\sigma) := \big(x_0(\sigma),\, y_0(\sigma),\, z_0(\sigma)\big) \qquad \text{für } \sigma \in I$$

   mit $X_0 \in \mathcal{C}_1(I)$ vorgegeben.
3. Für $\sigma \in I$ sei in $J := [0, c(\sigma)]$

$$C^\sigma(\tau) := X(\sigma,\tau) \qquad \text{für } \tau \in J$$

   die Schar der *Charakteristiken*. $X(\sigma, \tau)$ ist die lokale Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d}{d\tau} X = A(X) \qquad \text{mit } X(\sigma, 0) = X_0(\sigma) \;\; \text{für } \sigma \in I, \tag{4}$$

   die aufgrund des Satzes von Picard-Lindelöf für $0 \le \tau \le c(\sigma)$ eindeutig existiert. Dabei ist $c(\sigma) \ge c_0 > 0$. Die Projektionen von Γ und C^σ auf die (x, y)-Ebene nennen wir wieder $\gamma(\sigma)$ und $\kappa(\sigma, \tau)$. Wir setzen voraus, daß die so erhaltene Schar C^σ die Anfangskurve $\Gamma(\sigma)$ schneidet. Damit ist folgendes gemeint: Es soll

$$\forall\, \sigma \in I \qquad \Delta(\sigma) := \big(x_0'\, a_2(X_0) - y_0'\, a_1(X_0)\big)(\sigma) \ne 0 \tag{5}$$

   sein. Bis auf die Normierung ist $\Delta(\sigma)$ das Vektorprodukt der Tangenten der Anfangskurve $\gamma(\sigma)$ und der charakteristischen Linie $\kappa(\sigma, 0)$.

   Wir zeigen

Satz 1.1.4: *Die soeben angegebenen Voraussetzungen seien erfüllt. Dann gibt es in einer Umgebung der Anfangskurve* Γ *genau eine stetig differenzierbare Lösung* u *der Gleichung*

$$a_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,,u)\partial_1 u + a_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,,u)\partial_2 u = a_3(\,\cdot\,,\,\cdot\,,u) \qquad mit\ u|\gamma = z_0. \tag{6}$$

Beweis: Wegen der vorausgesetzten Glattheit der Koeffizienten ist die Lösung X von Gl. (4) zweimal stetig differenzierbar. Wir wollen $x = x(\sigma,\tau)$ und $y = y(\sigma,\tau)$ in einer Umgebung von $\sigma_0 \in I$ und $\tau_0 = 0$ nach σ und τ auflösen. Die Bedingung dafür lautet

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\sigma,\tau)}\right| \neq 0 \qquad \text{für } \sigma = \sigma_0,\ \tau = 0.$$

Nun ist aber für $\tau = 0$

$$x_\sigma\, y_\tau - x_\tau\, y_\sigma = \big(x_0'\, a_2(X_0) - y_0'\, a_1(X_0)\big)(\sigma) = \Delta(\sigma).$$

Die Bedingung ist also nach Voraussetzung erfüllt.

Es sei also $\sigma = \sigma(x,y)$, $\tau = \tau(x,y)$ diese Umkehrabbildung. Dann löst

$$u(x,y) := z\big(\sigma(x,y),\ \tau(x,y)\big)$$

Gleichung (6). Es ist nämlich

$$u|\gamma(\sigma) = z(\sigma,0) = z_0(\sigma)$$

und

$$\begin{aligned} a_1 u_x + a_2 u_y &= a_1(z_\sigma \sigma_x + z_\tau \tau_x) + a_2(z_\sigma \sigma_y + z_\tau \tau_y) \\ &= z_\sigma(a_1\sigma_x + a_2\sigma_y) + z_\tau(a_1\tau_x + a_2\tau_y) \\ &= z_\sigma(x_\tau\sigma_x + y_\tau\sigma_y) + z_\tau(x_\tau\tau_x + y_\tau\tau_y) \\ &= z_\sigma\,\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + z_\tau\,\frac{\partial\tau}{\partial\tau} = z_\tau = a_3. \end{aligned}$$

Für jedes $\sigma \in I$ gibt es deshalb eine offene Umgebung $U(\sigma)$ in der Gl. (6) gelöst werden kann. Diese Umgebungen überdecken I. Das Intervall I ist kompakt, es genügen also endlich viele davon zur Überdeckung, und damit existiert eine Umgebung $U(\Gamma)$, in der es eine Lösung gibt.

Es bleibt der Nachweis der Eindeutigkeit: Es sei (x,y,u) aus dieser Umgebung $U(\Gamma)$. Dann gibt es nach Konstruktion genau eine Charakteristik C, die (x,y,u) mit Γ verbindet. C schneide Γ in (x_0,y_0,z_0). Dann ist u aber längs C durch $z_0 = u(x_0,y_0)$ eindeutig bestimmt. □

Es sei hier nur noch bemerkt, daß man auch die allgemeine Gleichung erster Ordnung

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

durch Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen behandeln kann. Die Rolle der Charakteristiken spielen jetzt „charakteristische Streifen" und ihre Einhüllenden, die „Mongeschen Kegel". Für weitere Einzelheiten sei auf die Literatur verweisen, insbesondere auf *John [1982], S. 19f.*

1.2 Schwache Lösungen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir nach glatten Lösungen gefragt und dafür einen lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zeigen können. Beispiel 1.1.3 zeigte aber schon, daß ursprünglich glatte Lösungen nach einiger Zeit Singularitäten entwickeln können. Dieses Phänomen tritt bei nichtlinearen Gleichungen noch deutlicher hervor. Besonders auch für die Anwendungen ist es wichtig, Lösungen zuzulassen, die zum Beispiel längs einer Kurve springen oder stärkere Singularitäten aufweisen.

Dafür sollen zunächst Beispiele angegeben werden, und zwar zuerst für den linearen Fall. Hier gilt für ungerade Ortsdimensionen das *Huygenssche Prinzip*. Es gibt Lösungen der Wellengleichung (Signale), die scharf ein- und aussetzen. Gerade an solchen Lösungen ist man interessiert. Anschließend werden wir uns einfache nichtlineare Erhaltungsgleichungen ansehen, zum Beispiel die Straßenverkehrsgleichung, und einige Resultate zeigen. Es sei aber betont, daß besonders in höheren Dimensionen die Theorie noch nicht abgeschlossen ist. Hier wird noch viel gearbeitet, und das Spektakel ist manchmal groß. Von *Stoßwellen*, *Fraktalen* oder *Chaosforschung* kann man überall hören.

1.2.1 Lineare Gleichungen

Wenn wir y als Zeitvariable interpretieren, dann lautet die Wellengleichung in $\mathbb{R}^2$

$$(\partial_y + \partial_x)(\partial_y - \partial_x)u = o.$$

Zur Vereinfachung wollen wir uns jetzt nur mit einem Faktor davon beschäftigen, nämlich mit

$$u_y + u_x = o, \tag{7}$$

und der Anfangskurve $\Gamma(\sigma) = \big(\sigma, 0, \varphi(\sigma)\big)$. Beachten Sie, daß die Koeffizienten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dieser Gleichung glatt sind. Bezüglich φ werden wir noch Annahmen machen. Unser charakteristisches System lautet dann

$$X_\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } X(\sigma,0) = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \\ \varphi(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Das ergibt

$$x(\sigma,\tau) = \sigma + \tau, \quad y(\sigma,\tau) = \tau \quad \text{ und } z(\sigma,\tau) = \varphi(\sigma)$$

oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma + \tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Linie $\kappa(\sigma,\tau)$ ist also eine Gerade durch $(\sigma, 0)$ mit dem Anstieg 1, und

$$u(x,y) = z\big(\sigma(x,y), \tau(x,y)\big) = \varphi(x-y)$$

löst unsere Anfangswertaufgabe. Wählen wir etwa

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le \sigma \le 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist u längs der charakteristischen Linien konstant. Durch den Anstieg der charakteristischen Linie $y = x - 1$ läßt sich die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* v des Signals definieren. Diese ist endlich ($v = 1$). Man betrachte Abbildung 1.3.

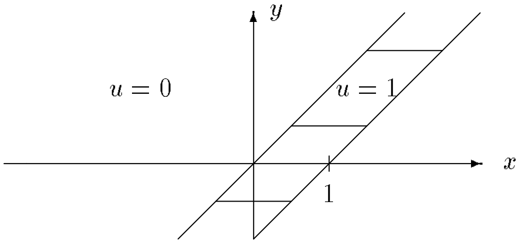

Abbildung 1.3.

Solche Unstetigkeiten der Lösungen linearer Gleichungen nennt man *Kontaktunstetigkeiten*. Eine Kontaktunstetigkeit ist also ein linearer Effekt, im Gegensatz zu den anschließend in §1.2.2 zu behandelnden nichtlinearen Effekten.

Ganz anders als die Lösungen von Gl. (7) verhalten sich die komplexen Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Es sei $U = u + \mathrm{i}\, v$ und

$$U_x + \mathrm{i}\, U_y = o \tag{8}$$

mit $\Gamma = \big(x(\sigma), y(\sigma), \varphi(\sigma)\big)$. Versuchen wir wieder, U in der Umgebung eines Punktes P_0 in eine Potenzreihe zu entwickeln: Auf γ sind

$$(t^{tr}\nabla)U = (x'\partial_x + y'\partial_y)U$$

bekannt. Außerdem hat man Gl. (8). Damit ist

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x' & y' \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

auf γ bekannt. Die Determinante dieses Gleichungssystems ist

$$\det(\cdots) = -(x')^2 - (y')^2 \neq 0.$$

Es existieren jetzt also gar keine reellen charakteristischen Linien, und wir wissen aus der Funktionentheorie, daß Lösungen in Potenzreihen entwickelbar sind. Zum Beispiel folgt für

$$\Gamma(\sigma) = \left(\sigma, 0, \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

in P_0

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und alle höheren Ableitungen verschwinden. Damit ist jetzt

$$U(x, y) = x + \mathrm{i}\, y.$$

1.2.2 Nichtlineare Gleichungen

Von besonderem Interesse sind hier die sogenannten *Erhaltungsgleichungen*, zum Beispiel

$$o = u_t + f(u)_x = \operatorname{div}\big(u, f(u)\big) \tag{9}$$

mit div $:= (\partial_t, \partial_x)$. Sie besagen meist, daß die Divergenz eines Vektors verschwindet, und drücken aus, daß eine Größe wie Energie, Masse oder Impuls erhalten wird. Nehmen wir an, daß $f(u)$ für große $|x|$ genügend stark verschwindet, dann folgt aus dem Gaußschen Satz und Gl. (9)

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}} u(t, x)\, dx = E(0).$$

$E(t)$ ist also konstant.

Den linearen Fall $f(u) = u$ haben wir bereits untersucht. Betrachten wir also jetzt den nächst einfachen nichtlinearen Fall, nämlich

$$f(u) = \frac{1}{2} u^2.$$

Die entsprechende Gleichung

$$u_t + u\, u_x = o. \tag{10}$$

ist die *Burgersgleichung*, benannt nach Johannes Martinus Burgers, 1895–1981.

Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, formulieren wir die *Straßenverkehrsgleichung* und diskutieren ihr Lösungsverhalten:

Es seien $x \in \mathbb{R}$ die Ortsvariable, $t \in \mathbb{R}$ die Zeitvariable, $N(t, x)$ die Fahrzeugdichte und $v(t, x)$ die Geschwindigkeit der Fahrzeuge. Wir nehmen an, daß unterwegs keine Fahrzeuge verlorengehen. Dann entnimmt man der folgenden Skizze

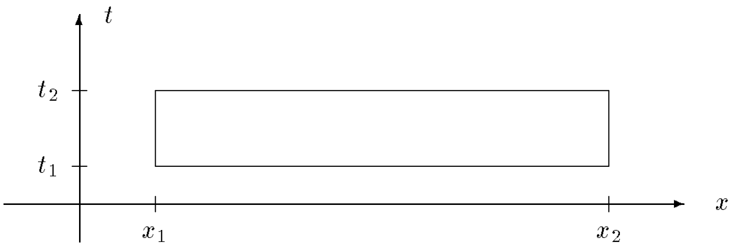

Abbildung 1.4.

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} N(t_1, \cdot\,) + \int_{t_1}^{t_2} (Nv)(\,\cdot\,, x_2) + \int_{x_2}^{x_1} N(t_2, \cdot\,) + \int_{t_2}^{t_1} (Nv)(\,\cdot\,, x_1) = \oint n \begin{pmatrix} N \\ Nv \end{pmatrix}.$$

Aus dem Gaußschen Satz folgt also die Erhaltungsgleichung

$$0 = \operatorname{div} \begin{pmatrix} N \\ Nv \end{pmatrix} = N_t + (Nv)_x. \tag{11}$$

Zur Berechnung von N genügt aber Gl. (11) noch nicht. Man benötigt vielmehr eine zweite Gleichung, die den Zusammenhang von N und v beschreibt. Eine solche Gleichung nennt man *Zustandsgleichung*. Sie wird von außen gegeben. Denken Sie zum Vergleich an die schwingende Saite. Aus der Energieerhaltung allein läßt sich ihre Auslenkung noch nicht berechnen. Erst durch die Angabe der potentiellen Energie wird sie wirklich definiert (ist diese proportional zur Änderung der Auslenkung, dann erhält man die Gleichung für die schwingende Saite, ist sie proportional zur Krümmung, dann erhält man die Gleichung für den schwingenden Balken). In eine solche Zustandsgleichung gehen die Straßenverhältnisse und das Verhalten der Verkehrsteilnehmer ein, ein Verkehrsexperte müßte sie uns angeben. Wir wählen hier ein möglichst einfaches Verhalten und nehmen an, daß es eine Höchstgeschwindigkeit v^0 gibt. Die maximale Fahrzeugdichte sei N^0, und $v(N)$ sei eine lineare Funktion (man betrachte Abbildung 1.5).

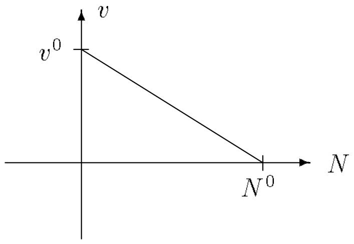

Abbildung 1.5.

Es sei also

$$v(N) = -\frac{(N - N^0)v^0}{N^0} \tag{12}$$

die Zustandsgleichung. Dann folgt

$$N_t + f(N)_x = o \qquad \text{mit } f(N) = -\frac{N^2 v^0}{N^0} + Nv^0.$$

Zur Vereinfachung wählen wir $N^0 = 2$ und $v^0 = 1$, also

$$f(N) = -\frac{1}{2}N^2 + N$$

oder

$$N_t + (1 - N)N_x = o. \tag{13}$$

Das sei die Straßenverkehrsgleichung.

Gl. (13) wollen wir nun mit der Charakteristikenmethode lösen. Es sei $X = (t, x, N)$ und $\Gamma(\sigma) = (0, \sigma, N_0(\sigma))$ die Anfangskurve. Dann lautet das charakteristische System

$$X_\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - N \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } X(\sigma, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \\ N_0(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist

$$X(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma + \tau\big(1 - N_0(\sigma)\big) \\ N_0(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Wir wählen nun stetige Anfangswerte N_0, nämlich

$$N_0(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases} \tag{14}$$

Die Lösung von Gl. (13) für $\tau \geq 0$ wird in Abbildung 1.6 beschrieben. Sie ist längs der gezeichneten charakteristischen Linien konstant.

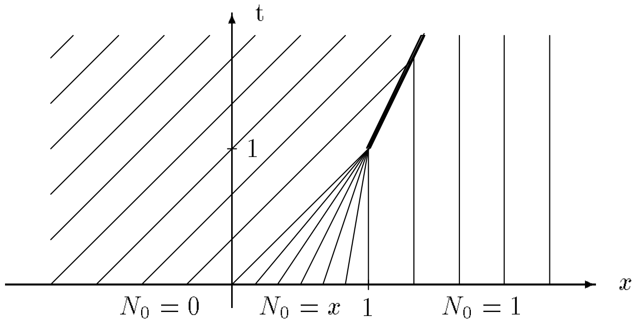

Abbildung 1.6: Zur Straßenverkehrsgleichung.

Beachten Sie, daß die Lösung bis zur Zeit $t = 1$ stetig ist. Plötzlich tritt aber für $t > 1$ die fett eingezeichnete *Stoßwelle* auf. Aus dem Englischen herrührend findet man auch das Wort *Schockwelle* dafür. Solche Stoßwellen sind also Unstetigkeiten der Lösung und führen in unserem Falle zum Verkehrsstau. Über solche Unstetigkeiten wollen wir nun sprechen.

Wir betrachten wieder Gl. (9) oder mit $a(u) := f'(u)$

$$u_t + a(u)u_x = o. \tag{15}$$

Es sei $\Gamma(\sigma) := \big(0, \sigma, \varphi(\sigma)\big)$ die Anfangskurve. Mit $X = (t, x, z)$ ist dann

$$X_\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ a(z) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } X(\sigma, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \\ \varphi(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$X(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma + \tau\, a\big(\varphi(\sigma)\big) \\ \varphi(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma + \tau\, a\big(\varphi(\sigma)\big) \end{pmatrix},$$

und diese Gleichung soll nach (σ, τ) aufgelöst werden. Wegen $\Delta(\sigma) = -1$ wissen wir, daß das bei glatten Daten lokal möglich ist. Im allgemeinen können dabei jedoch Schwierigkeiten auftreten. Dazu wollen wir uns zunächst einige typische Beispiele ansehen, und zwar für die Burgersgleichung, also für $a(u) := u$. Zur Verdeutlichung wählen wir von vornherein unstetige Anfangswerte φ. Dann ist also

$$X(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma + \tau\varphi(\sigma) \\ \varphi(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1.2.1: *Es sei*

$$\varphi(\sigma) := \begin{cases} -1 & \textit{für } \sigma < 0, \\ 1 & \textit{für } \sigma > 0. \end{cases}$$

Für $\sigma < 0$ ist

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma - \tau \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t \\ t \end{pmatrix}$$

und für $\sigma > 0$

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma + \tau \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - t \\ t \end{pmatrix}.$$

Längs der in Abbildung 1.7 für $\tau \geq 0$ gezeichneten charakteristischen Linien ist u dann jeweils konstant.

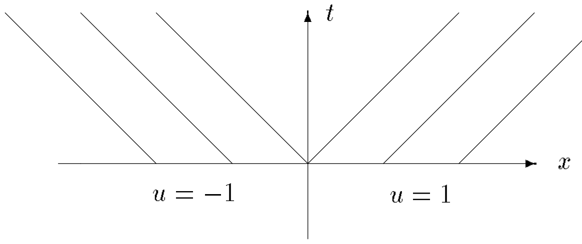

Abbildung 1.7.

Man beachte, daß es für $|x| < t$ keine charakteristischen Linien gibt. Das Lösungsverhalten ist in diesem Bereich also noch nicht klar. Es gibt jedoch ein Kontinuum von stückweise glatten Lösungen, etwa mit $\alpha \geq -1$

$$u_{1,\alpha}(t,x) := \begin{cases} -1 & \text{für } 2x < -(1+\alpha)t, \\ -\alpha & \text{für } -(1+\alpha)t < 2x < 0, \\ \alpha & \text{für } 0 < 2x < (1+\alpha)t, \\ 1 & \text{für } (1+\alpha)t < 2x \end{cases}$$

oder auch

$$v_1(t,x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < -t, \\ 0 & \text{für } -t < x < t, \\ 1 & \text{für } x > t. \end{cases}$$

□

Beispiel 1.2.2: *Es sei*

$$\varphi(\sigma) := \begin{cases} 1 & \textit{für } \sigma < 0, \\ -1 & \textit{für } \sigma > 0. \end{cases}$$

Nun ist für $\sigma < 0$

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma + \tau \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - t \\ t \end{pmatrix}$$

und für $\sigma > 0$

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma - \tau \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t \\ t \end{pmatrix}.$$

Jetzt erhalten wir für $\tau \geq 0$ das folgende Bild der charakteristischen Linien

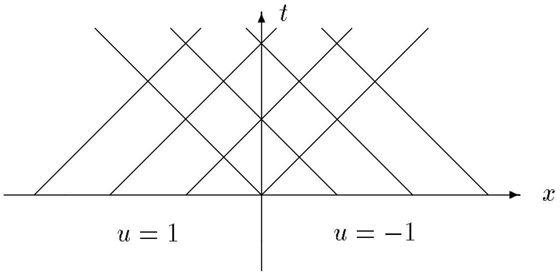

Abbildung 1.8

Die charakteristischen Linien stoßen in $|x| < t$ aufeinander, und auch jetzt ist das Lösungsverhalten in diesem Bereich noch nicht klar. Auch hier gibt es viele stückweise stetige Lösungen, etwa

$$v_{2,1}(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ -1 & \text{für } x > 0, \end{cases} \qquad v_{2,2}(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -t, \\ 0 & \text{für } -t < x < t, \\ -1 & \text{für } t < x \end{cases}$$

oder für $\beta > 1$

$$u_{2,\beta}(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 2x < -(\beta-1)t, \\ -\beta & \text{für } -(\beta-1)t < 2x < 0, \\ \beta & \text{für } 0 < 2x < (\beta-1)t, \\ -1 & \text{für } (\beta-1)t < 2x. \end{cases}$$

□

Um weiterzukommen definieren wir nun wie üblich *schwache Lösungen*. Dazu multiplizieren wir Gl. (9) mit Testfunktionen $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^2)$ und erhalten zunächst formal

$$0 = \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} (u_t + f(u)_x)\varphi = -\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) - \int_{\mathbb{R}} u(0,\cdot)\varphi(0,\cdot).$$

Das führt zur folgenden

Definition 1.2.3: *Die Abbildung $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ heißt schwache Lösung zur Gl. (9) zu den Anfangswerten $u(0,\cdot) = u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, wenn für alle $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^2)$*

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \{u\varphi_t + f(u)\varphi_x\} + \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(0,\cdot) = 0 \tag{16}$$

ist.

Offenbar sind glatte Lösungen auch schwache Lösungen. Durch Testen mit $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ folgt aus Gl. (16) zunächst die Existenz von

$$\operatorname{div}\big(u, f(u)\big) = 0$$

im schwachen Sinne und anschließend durch Testen mit $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}} \big(u(0) - u_0\big)\varphi(0,\cdot) = 0,$$

also $u(0) = u_0$ f.ü.

Wichtig ist nun die Bemerkung, daß schwache Lösungen nicht beliebig springen können: Es möge u entlang der glatten Kurve γ mit $x = x(t)$ springen und sonst glatt sein. Es sei, wie in der folgenden Abbildung skizziert, $P \in \gamma$, $B = B_1 \cup B_2 \cup \gamma(Q_1, Q_2)$ und $\psi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(B)$. Dann folgt durch partielles Integrieren

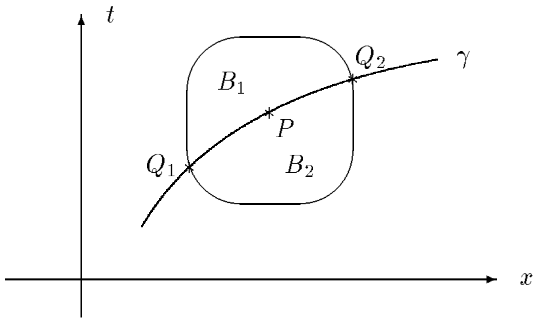

Abbildung 1.9

$$0 = \int_B \{u\psi_t + f(u)\psi_x\} = \int_{B_1} \cdots + \int_{B_2} \cdots .$$

Weil u in B_1 der Differentialgleichung genügt, ist

$$\int_{B_1} \cdots = \int_{B_1} \{(u\psi)_t + (f(u)\psi)_x\} = \int_{\gamma(Q_1,Q_2)} \{u\psi n_1 + f(u)\psi n_2\}.$$

Dabei sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tangenten bzw. Normalenvektor von γ. Es sei ferner

$$s(t) := \frac{dx}{dt}$$

der Anstieg von γ. Dann ist also

$$\int_{B_1} \cdots = \int_{\gamma(Q_1,Q_2)} \{-u\,x' + f(u)\}\,\psi = \int_{Q_1}^{Q_2} \psi\,\{-u_l\,x' + f(u)_l\}.$$

Dabei steht der Index l für links. Entsprechend erhält man

$$\int_{B_2} \dots = -\int_{Q_1}^{Q_2} \psi \left\{ -u_r \, x' + f(u)_r \right\} .$$

Es sei nun

$$[u] := u_l - u_r$$

der Wert des Sprunges von u längs γ. Dann folgt für alle $\psi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(B)$

$$0 = \int_{Q_1}^{Q_2} \psi \left\{ -s[u] + [f(u)] \right\} ,$$

also

$$s[u] = [f(u)]. \tag{17}$$

Diese Bedingung an das Sprungverhalten der Lösungen ist in der Flüssigkeits- und Gasdynamik schon lange bekannt (seit 1870–80) und wird „Rankine-Hugoniot-Bedingung" genannt. Für die Burgersgleichung lautet sie

$$s(u_l - u_r) = \frac{1}{2} \left(u_l^2 - u_r^2 \right) ,$$

also

$$s = \frac{1}{2}(u_l + u_r). \tag{18}$$

In unseren Beispielen genügen nur v_1 und $v_{2,2}$ nicht der Rankine-Hugoniot-Bedingung. Alle anderen angegebenen Lösungen sind schwache Lösungen.

Damit haben wir den klassischen Lösungsbegriff erweitern können. Unsere Beispiele zeigen jedoch, daß man auf diese Weise noch keine eindeutige Lösbarkeit erzielen kann, auch wenn man die Rankine-Hugoniot-Bedingung stellt. Hierzu ist eine weitere Bedingung erforderlich, die man für eine Ortsdimension auf verschiedene Weise erhält:

1. Durch Verwenden der *Viskositätsmethode*. Die Lösung wird durch

$$u := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon$$

definiert. Dabei soll u_ε Lösung von

$$v_t + f(v)_x = \varepsilon \, v_{xx}$$

sein. Das ist eine Wärmeleitungsgleichung. Es wird also ein Dämpfungsterm hinzugefügt und der Grenzwert verschwindender Dämpfung genommen.

2. Die zweite Formulierung wurde 1957 von Peter Lax, *1926, angegeben. Sie besagt, daß eine Lösung, wenn man sie von einem Punkt P der Anfangskurve Γ ausgehend verfolgt, auf der Charakteristik durch P bleiben muß. Sie darf also nicht willkürlich springen, auch wenn die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt ist. *Stoßwellen* sind jedoch erlaubt. Das sind Kurven, entlang denen die Lösung springt. Sie entstehen, wenn charakteristische Linien, die von der Anfangskurve γ ausgehen, aufeinandertreffen.

   Um vom linearen Fall abzuheben, sei zur Formulierung $a'(u) \neq 0$. Dann lautet die Laxsche *Stoßbedingung* für die Burgersgleichung (15)

$$a_l > s > a_r. \tag{19}$$

   Dabei ist s wieder der Anstieg der Stoßwelle. In Beispiel 1.2.2 sind damit auch die Lösungen $u_{2,\beta}$ ausgeschlossen, und es bleibt nur $v_{2,1}$ als eindeutige Lösung übrig.

3. In der Physik gibt es *Entropiebedingungen*, die ebenfalls auf die Stoßbedingung hinauslaufen.

Damit haben wir Beispiel 1.2.2 befriedigend behandeln können. Offen ist aber noch die Frage nach dem Lösungsverhalten im Bereich $|x| < t$ in Beispiel 1.2.1. Hier liegt offenbar ein anderes singuläres Verhalten vor, das wir nun diskutieren wollen:

Dazu wählen wir in $|x| < t$ die Anfangskurve $\Gamma = (\sin\sigma, \cos\sigma, g(\sigma))$ mit einer noch unbekannten Funktion $g(\sigma)$ und auf ihr einen Punkt $P(\sigma)$. Wir berechnen die Charakteristiken durch diesen Punkt. Die charakteristischen Gleichungen lauten

$$X_\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } X(\sigma, 0) = \begin{pmatrix} \sin\sigma \\ \cos\sigma \\ g(\sigma) \end{pmatrix} .$$

Sie werden durch

$$X(\sigma,\tau) = \begin{pmatrix} \sin\sigma + \tau \\ \cos\sigma + \tau\, g(\sigma) \\ g(\sigma) \end{pmatrix}$$

gelöst. Die Gleichung der charakteristischen Linien lautet also

$$x = \cos\sigma + \big(t - \sin\sigma\big) g(\sigma) = t\, g(\sigma) + \big(\cos\sigma - \sin\sigma\, g(\sigma)\big).$$

Diese neuen Linien dürfen die bereits vorhandenen charakteristischen Linien nicht schneiden, denn das würde ein Verzweigen der charakteristischen Linien implizieren, und kein Aufeinandertreffen; es widerspräche also dem Laxschen Postulat. Die neuen charakteristischen Linien müssen deshalb alle durch den Nullpunkt gehen. Das bedeutet, es ist

$$\cos\sigma - \sin\sigma\, g(\sigma) = 0.$$

Damit haben wir die noch unbekannte Funktion g gefunden, und damit ist auch die Lösung u in $|x| < t$ bestimmt, nämlich

$$u(t,x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -t, \\ x/t & \text{für } -t < x < t, \\ 1 & \text{für } t < x. \end{cases}$$

Die Lösung u ist also, vom Nullpunkt abgesehen, stetig. Im Nullpunkt selbst besitzt sie eine charakteristische Singularität. Man nennt sie *„Verdünnungswelle“*.

Wählt man in Beispiel 1.2.1 stetige Anfangswerte, die φ approximieren, etwa mit $\alpha > 0$

$$\varphi_\alpha(\sigma) := \begin{cases} -1 & \text{für } \sigma < -\alpha, \\ \sigma/\alpha & \text{für } -\alpha \le \sigma \le \alpha, \\ 1 & \text{für } \alpha < \sigma, \end{cases}$$

dann kann man auch an dem Verhalten der Lösungen u_α für $\alpha \to 0$ das Entstehen der Verdünnungswelle erkennen.

Schließlich soll noch die „Lebensdauer“ T glatter Lösungen u von Erhaltungsgleichungen (9) angegeben werden. Es seien $x(t)$ eine charakteristische Linie, also $x' = f'(u)$, und $u\big(t, x(t)\big)$ die Lösung entlang $x(t)$. Dann ist u nach Gl. (4) konstant. Sind die Anfangswerte beschränkt, dann ist es also auch u. Das gilt aber möglicherweise nicht mehr für die Ableitungen von u. Es sei $w(t) := u_x\big(t, x(t)\big)$. Aus $x' = f'(u)$ und Gl. (9) folgt dann durch Differenzieren $w_t = -f''(u) w^2$ oder mit $w_0 := w\big(0, x(0)\big)$

$$w(t) = \frac{w_0}{1 + t f''(u) w_0}.$$

Im Falle der Straßenverkehrsgleichung ist $f''(u) = -1$. Damit existiert die Lösung u dieser Gleichung für $w_0 > 0$ als differenzierbare Funktion in $[0, T)$ mit

$$T = 1/w_0.$$

Wählt man die Anfangswerte (14), dann ist $T = 1$, und man sieht, daß die Lösung um so länger lebt, je kleiner die Anfangsdaten sind.

An dieser Stelle soll die Behandlung der Differentialgleichungen erster Ordnung abgebrochen werden. Für Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ läßt sich Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zeigen. Zu nennen sind Namen wie Eberhard Hopf, 1902–83, Olga Ladyzhenskaya, *1922, Peter Lax und Olga Oleinik, *1925. Systeme in $\mathbb{R}^2$ lassen sich für kleine Daten mit dem Glimmschen Differenzenverfahren behandeln (James Glimm, *1934). In $\mathbb{R}^n, n > 2$, und bei m-reihigen Systemen und großen Daten ist jedoch noch manches offen, insbesondere die Formulierung der Stoßbedingung. Für weitere Einzelheiten sei auf das Buch von *Smoller [1983], S. 265ff* verwiesen und auf jüngere Literatur.

2 Einführung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In $\mathbb{R}^2$ lassen sich die linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung relativ leicht klassifizieren. Das werden wir im folgenden vorführen und dabei jeweils typische Lösungseigenschaften herausstellen.

2.1 Klassifizierung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Es sei

$$L\,u = f \tag{1}$$

mit

$$L := A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F.$$

Dabei sollen die Koeffizienten $A, B, \ldots$ glatte Funktionen der Ortsvariablen und $(A, B, C) \neq (o, o, o)$ sein. Auf Feinheiten wollen wir in dieser Einführung nicht eingehen.

Wir stellen wieder die *Cauchysche Anfangswertaufgabe*. Es seien also eine Anfangskurve γ und

$$u_0 = u\big|\gamma \quad \text{sowie} \quad u_1 = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|\gamma$$

vorgegeben. Wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man auch Randwertaufgaben oder Anfangsrandwertaufgaben behandeln. Wir wollen mit der Cauchyschen Anfangswertaufgabe beginnen und wieder versuchen, die Lösung u in einer Umgebung eines Punktes (x_0, y_0) in eine Potenzreihe zu entwickeln. Zur Abkürzung verwenden wir

$$p := u_x, \quad q := u_y, \quad r := u_{xx}, \quad s := u_{xy}, \quad t := u_{yy},$$

und es sei $\gamma = \big(x(\sigma), y(\sigma)\big)$. Mit u_0 und u_1 sind dann u, p und q längs γ bekannt. Wir berechnen die zweiten Ableitungen r, s, t: Es ist

$$\begin{aligned} r\,x_\sigma + s\,y_\sigma \qquad\quad &= p_\sigma \\ s\,x_\sigma + t\,y_\sigma &= q_\sigma \\ r\,A + s\,2B + t\,C &= Lu - Dp - Eq - F \end{aligned}$$

für festes σ bekannt, das heißt, es ist

$$\begin{pmatrix} x_\sigma & y_\sigma & 0 \\ 0 & x_\sigma & y_\sigma \\ A & 2B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

bekannt. Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist

$$Ay_\sigma^2 - 2Bx_\sigma y_\sigma + Cx_\sigma^2. \tag{$*$}$$

Wenn sie in (x_0, y_0) nicht verschwindet, dann können r, s, t berechnet werden und analog auch die höheren Ableitungen von u.

Damit lassen sich wieder charakteristische Linien $\kappa(\sigma, \tau)$ definieren, längs denen diese Determinante verschwindet. Es seien $\kappa = (x, y)$ und

$$\psi(x, y) = const$$

eine Darstellung einer solchen charakteristischen Linie. Dann ist

$$\psi_x\,x_\tau + \psi_y\,y_\tau = o$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y},$$

und wir erhalten die Gleichung

$$A\,\psi_x^2 + 2B\,\psi_x\,\psi_y + C\,\psi_y^2 = o$$

für die charakteristische Linie durch $(x_0, y_0) \in \gamma$.

In der Diskussion unterscheidet man nun drei typische Fälle, die folgendermaßen bezeichnet werden:

1. Der *elliptische* Fall: $AC - B^2 > 0$,
2. der *hyperbolische* Fall: $AC - B^2 < 0$,
3. der *parabolische* Fall: $AC - B^2 = 0$.

Diese Bezeichnungen erinnern an die Term $(*)$ entsprechende charakteristische quadratische Form

$$A\xi^2 - 2B\xi\eta + C\eta^2 = (\xi, \eta)\begin{pmatrix} A & -B \\ -B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -B \\ -B & C-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(A+C) + (AC - B^2),$$

und die charakteristische Matrix besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - (AC - B^2)} = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}.$$

Diese Eigenwerte sind reell. Im elliptischen Fall haben λ_1 und λ_2 gleiches Vorzeichen, im hyperbolischen Fall verschiedenes Vorzeichen, und im parabolischen Fall verschwindet ein Eigenwert.

Durch die Vorzeichen bzw. das Verschwinden dieser Eigenwerte lassen sich die verschiedenen Gleichungstypen also charakterisieren. Man ahnt schon, daß es in $\mathbb{R}^n$ sehr viel mehr verschiedene Fälle geben wird. Hier treten n Eigenwerte auf. Allgemein nennt man eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung an der Stelle x elliptisch, wenn alle Eigenwerte dort von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen haben. Sie heißt an der Stelle x hyperbolisch, wenn dort alle Eigenwerte von Null verschieden sind, $n-1$ dasselbe Vorzeichen haben und der n-te das entgegengesetzte. Sie heißt an der Stelle x parabolisch, wenn dort $n-1$ Eigenwerte von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen haben, der n-te aber verschwindet. Symmetrische hyperbolische Systeme werden in §7.6 eingeführt. Weitere Einzelheiten hierzu finden Sie in *Renardy & Rogers [1993], S.40f.* Dort werden auch charakteristische Flächen in $\mathbb{R}^n$ definiert.

Wir wollen nun die einzelnen Fälle kurz diskutieren:

1. Der elliptische Fall: Es sei $A > 0$. Dann ist auch $C > 0$. Es sei $y = y(x)$ charakteristische Linie. Dann ist
$$0 = Ay'^2 - 2By' + C = A\left(y' - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$
oder
$$y' - \frac{B}{A} = \pm\frac{\mathrm{i}}{A}\sqrt{AC - B^2}.$$
Es gibt also gar keine reellen charakteristischen Linien, und wir erwarten deshalb, daß die Cauchysche Anfangswertaufgabe stets lösbar ist. Durch eine geeignete Transformation
$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$
kann man eine Normalform herstellen. Man findet
$$L\,u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \cdots,$$
wobei $\cdots$ für Terme höchstens erster Ordnung steht. Die Potentialgleichung ist also ein typisches Beispiel für elliptische Gleichungen.
2. Der hyperbolische Fall: Es sei wieder $A > 0$. Dann folgt
$$y' = \frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC},$$
und wir erhalten zwei reelle charakteristische Linien. Normalformen solcher Gleichungen sind
$$L\,u = u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \cdots \quad \text{und} \quad L\,u = u_{\xi\eta} + \cdots.$$
Die Wellengleichung ist also eine hyperbolische Gleichung.

3. Der parabolische Fall: Für $A \neq 0$ ist
$$y' = \frac{B}{A}$$
charakteristische Linie. Normalformen sind
$$L\,u = u_{\xi\xi} + \cdots \qquad \text{und} \qquad L\,u = u_{\eta\eta} + \cdots .$$

Diese heuristischen Überlegungen lassen sich für analytische Daten zu einem Existenzbeweis ausbauen. Es gilt der

Satz von Cauchy-Kowalevski: *In einer Umgebung U des Nullpunktes seien $f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy})$, $u_0(y)$ und $u_1(y)$ analytisch. Dann gibt es in U genau eine analytische Funktion $u(x, y)$ mit*

1. $u_{xx}(x, y) = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy})$,

2. $u(0, y) = u_0(y)$ und $u_x(0, y) = u_1(y)$.

Der Satz wird nach Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, und Sophie Kowalevski, 1850–91, benannt.

Der Beweis des Satzes erfolgt durch Potenzreihenentwicklung. Er soll hier nicht ausgeführt werden. Für Systeme finden Sie ihn in *John [1982], S. 61–77*. Beachten Sie, daß in unserer Formulierung als Anfangskurve γ die y-Achse gewählt wurde. Im Falle einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist dann $A = 1$ und
$$y' = \frac{B}{A} \pm \frac{\mathrm{i}}{A}\sqrt{AC - B^2} = B \pm \mathrm{i}\sqrt{C - B^2} \neq \infty.$$
Die Anfangskurve γ ist also nicht charakteristisch.

Der Satz von Cauchy-Kowalevski wurde um 1875 bewiesen und später verallgemeinert. Er macht eine lokale Aussage für analytische Daten. Es können weitere nichtanalytische Lösungen existieren. Ein analoger Satz für $\mathcal{C}_k$- oder $\mathcal{C}_\infty$-Daten und -Lösungen ist nicht bekannt. Physikalisch ist die Einschränkung auf analytische Daten und Lösungen eher unrealistisch, weil man nicht erwarten kann, daß eine Lösung global durch ihr lokales Verhalten bestimmt ist. Die Aufgabe ist, wie man sagt „schlecht gestellt"; darüber folgt gleich mehr.

Für lineare Gleichungen mit analytischen Koeffizienten gilt die Eindeutigkeit, auch bei nichtanalytischen Anfangsdaten, wenn die analytische Anfangskurve nichtcharakteristisch ist. Das zeigt der *Satz von Holmgren*, benannt nach Eric Holmgren, 1872–1943. Sie finden ihn ebenfalls in *John [1982], S. 80–88*. Eine große Überraschung war das folgende Resultat von Hans Lewy, 1904–1988, aus dem Jahre 1957:

Satz von H. Lewy: *Es sei*
$$L\,u := -u_x - \mathrm{i}\,u_y + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)u_z .$$
Dann gibt es eine Abbildung $F \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ so, daß die Gleichung
$$L\,u \overset{!}{=} F$$
keine Lösung u besitzt mit den Eigenschaften:

1. $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

2. $u \in \mathcal{C}_{1+\alpha}(\Omega)$.

Die lineare Gleichung $L\,u = F$ entspricht im Reellen einem System von zwei Gleichungen in drei Variablen. Der Satz von Cauchy-Kowalevski zeigt, daß sie für analytische F lösbar ist. Auch der Beweis des Satzes von H. Lewy findet sich in *John [1982], S. 235–239*.

2.2 Beispiele

Bevor wir nun systematisch konkrete Fragestellungen angehen, sollen im zweiten Teil dieses einführenden Kapitels noch einige typische Beispiele gegeben und so charakteristisches Lösungsverhalten in den einzelnen Fällen herausgestellt werden. Nach Jacques Hadamard, 1865–1963, sollte eine Lösungstheorie mit den drei folgenden Fragen beginnen:

1. *Existiert eine Lösung?*
2. *Ist sie eindeutig, bzw. wie viele Lösungen gibt es?*
3. *Hängt die Lösung stetig von den Daten ab?*

Die beiden ersten Fragen verstehen sich von selbst. Die Bejahung der dritten kann sehr erwünscht sein (denken Sie an den Schuß zum Mond), muß aber nicht. Inzwischen bemüht man sich immer mehr um das Verständnis chaotischen Verhaltens.

2.2.1 Elliptische Gleichungen

Im elliptischen Fall sind Randwertaufgaben typisch. Hier gilt das Maximumprinzip, denken Sie an die Funktionentheorie. Die drei Hadamardschen Fragen lassen sich für solche Randwertaufgaben im allgemeinen bejahen. Anders ist es mit der Cauchyschen Anfangswertaufgabe. Sie ist zwar wegen des Satzes von Cauchy-Kowalevski bei analytischen Daten lösbar. Die Aufgabe ist jedoch schlecht gestellt, in dem Sinne, daß die dritte Frage verneint werden muß. Hierzu ein Beispiel in $\mathbb{R}^2$: Es seien u_n Lösungen der Potentialgleichung mit

$$u_n(0,y) = u_n^0(y) := o \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} u_n(0,y) = u_n^1(y) := \frac{\sin ny}{n}.$$

Die y-Achse ist also Anfangskurve. Dann sind

$$u_n(x,y) := \frac{1}{n^2} \sin ny \sinh nx$$

die eindeutig bestimmten Lösungen. Nun gilt aber in der Supremumsnorm für $n \to \infty$

$$u_n^0(y) \to o \quad \text{und} \quad u_n^1(y) \to o,$$

und $u = o$ ist die eindeutige Lösung zu $u^0 = u^1 = o$. Für allgemeine x, y divergiert $\big(u_n(x,y)\big)$ jedoch.

2.2.2 Hyperbolische Gleichungen

Für den hyperbolischen Fall ist die *Wellengleichung*

$$u_{yy} = u_{xx}$$

ein typisches Beispiel. Hier ist $A = 1, B = 0$ und $C = -1$. Die Richtungen der charakteristischen Linien sind also

$$y' = \frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{-AC + B^2} = \pm 1.$$

Wählen wir die x-Achse als Anfangskurve γ, dann ist diese nichtcharakteristisch. Es seien

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad u_y(x,0) = u_1(x)$$

vorgegeben. Wir wollen die Cauchysche Anfangswertaufgabe lösen. Zur Vereinfachung transformieren wir

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi+\eta \\ \xi-\eta \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$u_{\xi\eta} = o,$$

also

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen f und g. Wegen

$$u_0 = f + g \quad \text{und} \quad u_1 = f' - g'$$

ist

$$f(x) - g(x) = f(0) - g(0) + \int_0^x u_1\, ds$$

oder

$$2\,f(x) = f(0) - g(0) + u_0(x) + \int_0^x u_1\,ds\,,$$
$$2\,g(x) = -f(0) + g(0) + u_0(x) - \int_0^x u_1\,ds\,,$$

also

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\Big\{u_0(x+y) + u_0(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} u_1(s)\,ds\Big\}.$$

Diese Lösung wurde von d'Alembert und Euler um 1750 gefunden. Benannt wird sie meist nach d'Alembert.

In den Anwendungen schreibt man meist t für y. Man zeichnet damit die Zeitvariable aus, und man unterdrückt oft die Abhängigkeit von den Ortsvariablen. Mit

$$\big(I(t)v\big)(x) := \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v(s)\,ds$$

lautet dann die d'Alembertsche Lösung

$$u(t) = I(t)\,u_1 + \frac{\partial}{\partial t}I(t)\,u_0.$$

Aus dieser Formel erhält man u im Punkt $\langle t_0, x_0\rangle$, wenn man die Anfangsdaten im *Abhängigkeitsbereich*

$$A(t_0,x_0) := \big[x_0 - t_0, x_0 + t_0\big] \subset \mathbb{R}$$

kennt. Umgekehrt, es sei $v(x) := \delta(x - x_0)$ ein „Dirac-Signal", oder man nehme

$$v(x) := \frac{1}{2r}\,\chi_{(x_0-r,x_0+r)}(x)$$

für kleine r, dann ist

$$\big(I(t)v\big)(x) = \frac{1}{2}H\big(t - |x - x_0|\big).$$

Der *Bestimmtheitsbereich* zu $v(x) = \delta(x - x_0)$ für positive t ist also der Zukunftskegel

$$C^+(x_0) := \big\{\langle t,x\rangle \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \;\big|\; |x - x_0| < t\big\}\,.$$

Damit ist

$$\operatorname{supp} Iv = \overline{C^+(x_0)}$$

und

$$\operatorname{supp} \frac{\partial}{\partial t} Iv = \partial C^+(x_0).$$

Hat der zugrundeliegende Ortsbereich die ungerade Dimension $n > 1$, dann zeigen wir in §7.5.3 sogar

$$\operatorname{supp} Iv = \partial C^+(x_0),$$

und man sagt, daß dann das *Huygenssche Prinzip* gilt. Für den Beobachter $\langle t, x_1\rangle$, $x_1 \neq x_0$, setzt dann das Signal zur Zeit $t = x_1$ scharf ein und wieder aus. In Räumen mit gerader Ortsdimension setzt es nur scharf ein, und es gibt Nachhall. In $\mathbb{R}^1$ gilt das Huygenssche Prinzip nur, wenn u^1 verschwindet, sonst hat man Nachhall. Abbildung 2.1 soll das verdeutlichen. Das Prinzip wird nach CHRISTIAAN HUYGENS, 1629–95, benannt.

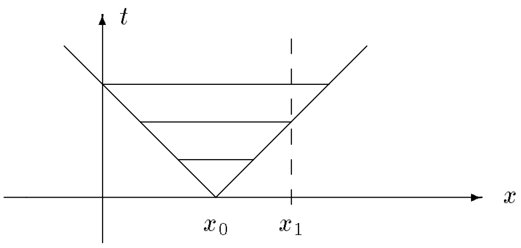

Abbildung 2.1: Zum Huygensschen Prinzip.

Betrachten wir nun eine Randwertaufgabe: Es sei G wie in Abbildung 2.2 skizziert und

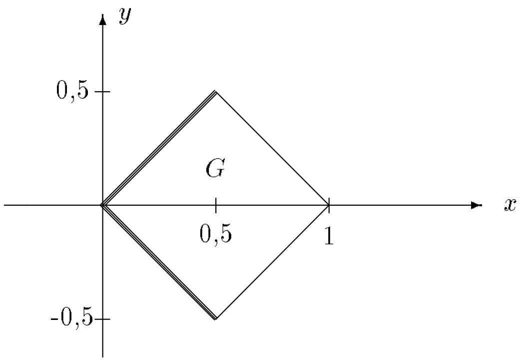

Abbildung 2.2.

$$u(x,x) = u_0(x), \quad u(x,-x) = u_1(x) \quad \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

mit $u_0(0) = u_1(0)$. Dann folgt aus

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$$

$u_0(x) = f(2x) + g(0)$ und $u_1(x) = f(0) + g(2x)$, also

$$u(x,y) = u_0\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + u_1\Big(\frac{x-y}{2}\Big) - u_0(0).$$

Die Lösung u ist deshalb in $\bar{G}$ bereits bestimmt durch Vorgabe der Randwerte auf Teilen des charakteristischen Randes. Randwertaufgaben zu G mit beliebigen Randdaten können also nicht gelöst werden.

Betrachten wir nun in dem in Abbildung 2.3 skizzierten Gebiet eine gemischte Anfangsrandwertaufgabe

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,x) = u_1(x) \quad \text{für } 0 \le x \le 1$$

mit $u_0(0) = u_1(0)$.

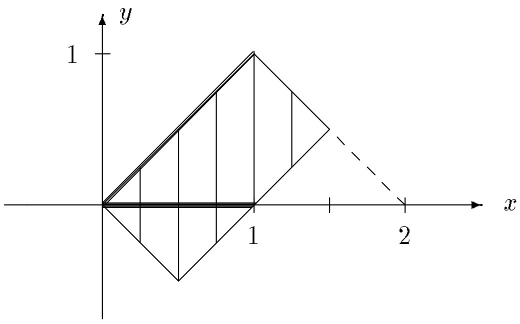

Abbildung 2.3.

Auch diese Aufgabe ist eindeutig lösbar. Man findet

$$u_0(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad u_1(x) = f(2x) + g(0)$$

und daraus

$$u(x,y) = u_1\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + u_0(x-y) - u_1\Big(\frac{x-y}{2}\Big).$$

Analog läßt sich auch die *Goursatsche Aufgabe* lösen, benannt nach EDOUARD GOURSAT, 1858–1936. Dabei wird u auf den beiden Strecken

$$\big[\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\big] \quad \text{und} \quad \big[\langle 0,0\rangle, \langle 1,\beta\rangle\big]$$

des in Abbildung 2.4 skizzierten Gebietes vorgegeben.

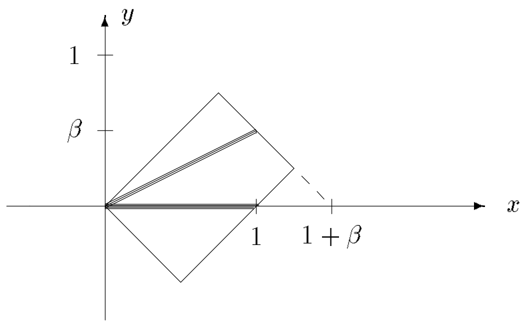

Abbildung 2.4.

Besonders wichtig sind Anfangsrandwertaufgaben für die Wellengleichung. Solche Aufgaben treten bei Schwingungsproblemen vielfältig auf, zum Beispiel bei der Behandlung der schwingenden Saite oder Membran. Hier liegt ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ im Ortsbereich zugrunde. Die gesuchte Lösung u soll zum Beispiel am Rande ∂G verschwinden, und es werden bezüglich der Zeit die Anfangswerte $u(0,x)$ und $u_t(0,x)$ vorgegeben. Über das Lösen solcher Aufgaben wurde schon im 18-ten Jahrhundert viel nachgedacht. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse haben wesentlich zur Festlegung bzw. Erweiterung des Funktionsbegriffes beigetragen, von den analytischen Funktionen bis hin zu Distributionenlösungen. Dabei spielt auch die Frage der Darstellbarkeit der Lösung durch eine Reihe eine große Rolle. Die Fourierreihen entstanden und allgemeiner die Entwicklung der Lösungen nach Eigenfunktionen des zugrundeliegenden Differentialoperators. In der Einführung haben wir dies für das Problem der schwingenden Saite bereits angedeutet. Wir werden anschließend das Lösen der entsprechenden Aufgabe im parabolischen Fall diskutieren. Über die Geschichte dieser Entwicklung im 17/18-ten Jahrhundert kann man in *Riemann [1854]* nachlesen.

2.2.3 Parabolische Gleichungen

Die *Wärmeleitungsgleichung* in $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$u_t = u_{xx}$$

ist eine typische parabolische Gleichung. Man stellt hier die Anfangswertaufgabe

$$u(0,x) = u_0(x).$$

Dabei sei u_0 vorgegeben.

Es ist dann $A = 1$ und $B = C = 0$. Mithin ist die x-Achse eine charakteristische Kurve, man gibt also die Anfangswerte längs einer Charakteristik vor. Es sei

$$S(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

Dann folgt für $t > 0$

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\, S(t, x-s)\, ds.$$

Für negative t existiert diese Lösung nicht, man kann nicht in die Vergangenheit zurück rechnen.

Es lassen sich auch Anfangsrandwertaufgaben behandeln. Es sei etwa $I = (0,\pi)$. Dann werden zum Beispiel Lösungen mit

$$u(t,0) = u(t,\pi) = o \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_0^+ \qquad \text{und} \qquad u(0,x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in I$$

gesucht (Dirichletsche Randwertaufgabe). Ein klassischer Zugang für genügend glatte Daten soll kurz skizziert werden:

Die Eindeutigkeit erhält man über eine *Energieabschätzung*. Es sei

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^{\pi} u^2(t,x)\, dx.$$

Dann gilt wegen der Randbedingung

$$E'(t) = \int_0^{\pi} u(t,x)u_t(t,x)\, dx = \int_0^{\pi} u(t,x)u_{xx}(t,x)\, dx = -\int_0^{\pi} u_x^2(t,x)\, dx.$$

Es sei nun $u_0 = o$. Dann ist $E(0) = 0$. Wegen $E'(t) \leq o$ folgt dann $E(t) = o$ und damit $u = o$.

Die Existenz einer Lösung erhält man mit der Methode der *Separation der Variablen*. Es sei

$$u(t, x) = a(t)v(x).$$

Aus diesem Ansatz folgt mit einer Konstanten λ

$$a' + \lambda\, a = 0 \quad \text{und} \quad v'' + \lambda\, v = 0 \quad \text{mit } v(0) = v(\pi) = 0.$$

Die Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen sind bekannt. Sieht man von der Normierung ab, dann ist mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$a(t) = e^{-\lambda t}$$

und

$$v(x) = \alpha \sin \sqrt{\lambda} x + \beta \cos \sqrt{\lambda} x.$$

Es existieren aber nur für $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, nichttriviale Lösungen v_n, nämlich $v_n(x) = \alpha \sin n\, x$. Damit ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(t, x) := e^{-n^2 t} \sin n\, x$$

Lösung unserer Anfangsrandwertaufgabe. Man nennt die λ_n *Eigenwerte*, die v_n *Eigenfunktionen* und die u_n *stehende Wellen.*

Die allgemeine Lösung erhält man dann durch *Superposition* solcher stehenden Wellen. Man möchte also geeignete Konstanten $\alpha_n \in \mathbb{R}$ finden mit

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n\, e^{-n^2 t} \sin n\, x.$$

Man sieht leicht, daß das möglich ist, jedenfalls für genügend glatte Anfangswerte u_0. Man setze nämlich u_0 antisymmetrisch auf $(-\pi, 0)$ fort. Dann kann man u_0 in $(-\pi, \pi)$ in eine Fourierreihe

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \sin n\, x$$

entwickeln, und mit diesen α_n bilde man $u(t, x)$. Die Reihe ist genügend oft differenzierbar, wenn u_0 genügend glatt ist.

2.2.4 Das Tricomiproblem

Zum Abschluß folgt noch ein gemischtes hyperbolisch-parabolisches Problem, nämlich

$$u_{tt} + t\, u_{xx} = o.$$

Es ist also $A = t$, $B = 0$ und $C = 1$. Damit erhält man die charakteristischen Linien durch

$$t' = \frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{-AC + B^2} = \pm\sqrt{\frac{-1}{t}}.$$

Für $t > 0$ ist die Gleichung elliptisch und für $t < 0$ hyperbolisch (für $t = 0$ ist sie parabolisch). Die Charakteristiken werden also durch

$$t' \sqrt{t} = \pm\, \mathrm{i}$$

gegeben, also

$$\frac{2}{3}(t^{3/2})' = \pm\, \mathrm{i}$$

oder

$$t^{3/2} = \pm \frac{3}{2} \mathrm{i}\, (x + c).$$

Für negative t erhalten wir daher

$$t = -\left(\frac{3}{2}(x + c)\right)^{2/3}.$$

Man gibt nun u vor auf dem oberen Halbkreis $t = \sqrt{0,25 - (x - 0,5)^2}$ und der linken unteren charakteristischen Linie $t = -(3x/2)^{2/3}$. Man sucht u in dem in Abbildung 2.5 skizzierten Gebiet. Das ist das *Tricomiproblem*, benannt nach Francesco Tricomi, 1897–1978.

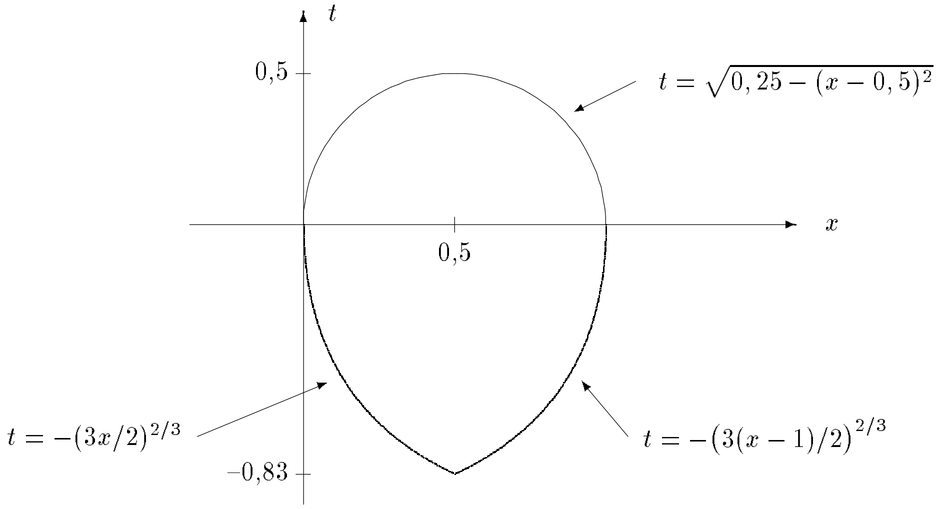

Abbildung 2.5: Das Tricomiproblem.

Zum Beweis der Existenz einer Lösung zieht Tricomi Parallelen zur x-Achse im Abstand ε, gibt mit zunächst beliebigem f

$$u_\varepsilon(\varepsilon, x) = f(x) \quad \text{und} \quad u_\varepsilon(-\varepsilon, x) = f(x)$$

vor und löst getrennt in den Bereichen $t > \varepsilon$ und $t < -\varepsilon$. Für $t \to 0$ ist dann

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_{\varepsilon,tt} = o.$$

Tricomi wählt nun f so, daß für $\varepsilon \to 0$ auch die zweiten Ableitungen bzgl. x existieren und gleich sind. Dadurch wird f festgelegt, und man erhält u als Grenzwert der u_ε für $\varepsilon \to 0$.

3 Elementare Potentialtheorie

3.1 Einführung

In diesem Kapitel sollen einige klassische elementare Resultate aus der *Potentialtheorie* bereitgestellt werden. Die Potentialgleichung tritt in der Theorie partieller Differentialgleichungen und auch in den Anwendungen vielfältig auf.

Es seien zum Beispiel x_0 und x zwei Punkte in $\mathbb{R}^3$, an denen jeweils eine Masse e_0 und e (oder eine elektrische Ladung) angebracht sein sollen. Man spricht auch von „Punktmassen“ oder „Punktladungen“. Es sei ferner

$$F(x) := e_0 \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3}$$

die *Feldstärke*. Dann wirkt auf x die *Kraft*

$$K(x) = e\, F(x).$$

Das ist das *Newtonsche Gravitationsgesetz* (um 1660) oder das *Coulombsche Gesetz* (um 1785). Es folgt

$$\partial_i F_j = e_0 \Big\{ \frac{\delta_{ij}}{|x - x_0|^3} - 3\, \frac{(x_i - x_{0,i})(x_j - x_{0,j})}{|x - x_0|^5} \Big\},$$

also

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} F = o.$$

Weil $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ einfach wegzusammenhängend ist, besitzt F deshalb ein *Potential* U, nämlich

$$U(x) := -\frac{e_0}{|x - x_0|}.$$

Es ist $F = \operatorname{grad} U$, und in $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ genügt U der Potentialgleichung

$$\Delta U = 0.$$

Man sagt auch, U sei in $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ *harmonisch*.

Natürlich betrachtet man nicht nur Punktladungen, sondern zum Beispiel auch stetig verteilte Volumenladungen ρ mit dazugehörenden Potentialen

$$U(x) := \int_B \frac{\rho(y)}{|x - y|}\, dy.$$

Dabei sei B eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^3$, das „Hindernis“. Es sei $G := \mathbb{R}^3 \setminus B$ offen und zusammenhängend. In G genügt U wieder der Potentialgleichung. Umgekehrt ist U aber dadurch noch nicht festgelegt. Ist G berandet, dann kann man Randbedingungen stellen. Bei der *Dirichletschen Randwertaufgabe* gibt man $U|\partial G$ vor, bei der *Neumannschen* $(n\nabla)U|\partial G$. Dabei ist n der nach außen gerichtete Normalenvektor an ∂G. Es gibt auch gemischte Randwertaufgaben und viele andere.

Als weiteres Beispiel sollen noch die *linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen* der Gasdynamik angegeben werden: Es seien $u(t, x)$ ein akustisches Potential, $v := \nabla u$ die Geschwindigkeit und $p := u_t$ der Druck. Dann lauten diese Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & \operatorname{grad} \\ \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix},$$

mit der homogenen Dirichletschen Randbedingung $p|\partial G = o$ bzw. der Neumannschen $nv|\partial G = o$. Für u bedeutet das

$$u_{tt} = \Delta u,$$

und aus dem Separationsansatz $u(t, x) = a(t)U(x)$ folgt mit einer Konstanten λ

$$\Delta U + \lambda\, U = o.$$

Die Abbildung U genügt der *„Helmholtzschen Schwingungsgleichung“* und der Randbedingung $U|\partial G = o$ bzw. $(n\nabla)U|\partial G = o$.

Die allgemeineren Navier-Stokes-Gleichungen für den viskosen Fluß einer inkompressiblen Flüssigkeit sind nichtlinear. Auch sie verbinden die Geschwindigkeit v mit dem Druck p und lauten

$$\partial_t v + \sum_{k=1}^{n} v_k \partial_k v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \gamma \Delta v$$

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Dabei ist ρ die Dichte und γ die Viskosität der Flüssigkeit. Benannt sind diese Gleichungen nach CLAUDE NAVIER, 1785–1836 und GEORGE STOKES, 1919–1903.

Die vorangegangenen Beispiele waren in $\mathbb{R}^3$ formuliert. Um die Darstellung einiger Resultate zu erleichtern, werden wir uns gelegentlich auf den dreidimensionalen Fall beschränken. In der Potentialtheorie tritt nämlich im allgemeinen für $n \geq 3$ keine wesentliche Dimensionsabhängigkeit mehr auf. Vom Fall $n = 2$, der Funktionentheorie, muß jedoch abgehoben werden. Es gibt nämlich eine Reihe von Resultaten in der Funktionentheorie, die in $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ modifiziert werden müssen. Vielfach liegt das daran, daß in der Grundlösung in $\mathbb{R}^2$ ein Logarithmusterm auftritt.

3.2 Grundlösungen

Grundlösungen spielen eine große Rolle beim Lösen partieller Differentialgleichungen. So kennt man in der Funktionentheorie die *Cauchysche Integralformel*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\Big\{ \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_G \frac{(\bar\partial f)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar\zeta \Big\}.$$

Hier wird die Lösung f der Differentialgleichung $\bar\partial f = \cdots$ also durch die rechte Seite dieser Gleichung und durch ihre Randwerte $f|\partial G$ dargestellt, und zwar durch Integration über die Grundlösung $1/(\zeta - z)$.

Diese Formel möchten wir für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ verallgemeinern. Beginnen wir mit dem $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ selbst. Dann suchen wir eine Abbildung g so, daß sich etwa für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$

$$\Delta u + f = o$$

und

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} f(y) g(x,y) dy$$

entsprechen.

Zur Konstruktion von g verwenden wir den *Distributionenkalkül.* Dazu vergleiche man etwa *FA, §6.5.* Offenbar muß g eine charakteristische Singularität besitzen. Wir beginnen mit dem Fall $n = 3$ und zeigen als erstes

Satz 3.2.1: *Es gilt in $\mathbb{R}^3$ im Distributionensinne*

$$\Delta \frac{1}{|x|} + 4\pi\delta(x) = 0.$$

Beweis: Die Abbildung

$$u(x) := \frac{1}{|x|}$$

erzeugt eine reguläre Distribution, $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Es ist mit $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^3)$

$$(\Delta u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|}(\Delta\varphi)(x)\, dx = \int_{|x|<\varepsilon} \cdots + \int_{|x|>\varepsilon} \cdots .$$

Nun ist für festes φ

$$\int_{|x|<\varepsilon} \cdots = \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

und mit $r := |x|$ folgt aus $\Delta = \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_0$

$$\int_{|x|>\varepsilon} \cdots = -\int_{|x|=\varepsilon} \Big\{ \frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x) - \varphi(x)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x|} \Big\} dx.$$

Dabei ist n der nach außen gerichtete Normalenvektor der Sphäre. Damit erhalten wir

$$\int_{|x|>\varepsilon} \cdots = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\, dx + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

also für $\varepsilon \to 0$

$$(\Delta u)\varphi = -4\pi\varphi(o) = -4\pi\delta\varphi.$$

Das war zu zeigen. □

Analog folgt in $\mathbb{R}^3$ für festes x_0

$$\Delta \frac{1}{|x-x_0|} + 4\pi\delta(x-x_0) = 0.$$

Folgerung 3.2.2: *Es sei*

$$U(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy$$

das Potential mit der Volumenbelegung $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $U \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, erzeugt also eine reguläre Distribution, und es gilt

$$\Delta U + 4\pi\rho = o.$$

Beweis:

1. Es sei $K \Subset \mathbb{R}^3$. Dann folgt aus dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\int_K \Big| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \Big| dx \le c\, \|\rho\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Mithin ist U aus $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

2. Aus dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}(\Delta U)(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} U(x)(\Delta\varphi)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \Big\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\Delta\varphi)(x)}{|x-y|} dx \Big\} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \Big\{ -4\pi\varphi(y) \Big\}\, dy = -4\pi\, \rho\, \varphi.\end{aligned}$$

□

In §3.4 werden wir zeigen, daß aus $\rho \in \mathcal{C}_\alpha(\mathbb{R}^3)$ auch $U \in \mathcal{C}_{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ folgt. Aus $\rho \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ folgt jedoch nicht $U \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^3)$, das läßt sich an Beispielen belegen.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $\rho \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und

$$U(x) := \int_\Omega \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy,$$

dann erhalten wir aus dem Vorangegangenen

$$(\Delta U)(x) = \begin{cases} -4\pi\rho(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Wir geben nun

Definition 3.2.3: *Eine Abbildung $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heißt* Grundlösung *zu Δ in $\mathbb{R}^n$, wenn*

$$\Delta g + \delta = o$$

gilt.

Natürlich ist g dadurch nicht eindeutig bestimmt, eine beliebige Potentialfunktion kann hinzugefügt werden.

In $\mathbb{R}^3$ ist

$$g(x) := \frac{1}{4\pi|x|}$$

eine Grundlösung zu Δ. Um ein g in $\mathbb{R}^n$ zu konstruieren, bemerken wir, daß δ sich bei Drehungen nicht ändert. Deshalb suchen wir nach im Nullpunkt singulären Lösungen f, die nur von $r := |x|$ abhängen. In Polarkoordinaten ist

$$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_0.$$

Dabei hängt der *Laplace-Beltrami-Operator* Δ_0 nur von $x_0 := x/|x|$ ab. Es folgt

$$(\Delta f)(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \left(r^{n-1} f'(r)\right)'$$

also

$$r^{n-1} f'(r) = c$$

oder

$$f(r) = \begin{cases} c\,r + d & \text{für } n = 1, \\ c \ln r + d & \text{für } n = 2, \\ \dfrac{-c}{(n-2) r^{n-2}} + d & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung wählen wir $d = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\Delta f)(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f\,\Delta\varphi = \int_{|x|>\varepsilon} \cdots + \int_{|x|<\varepsilon} \cdots \\ &= -\int_{|x|=\varepsilon} \left\{ f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} \varphi \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \int_{|x|=\varepsilon} (n \nabla f) \varphi + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Es sei

$$\omega_n := \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

die Oberfläche der Sphäre S^{n-1}, also $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2\pi$ und $\omega_3 = 4\pi$. Dann folgt

$$(\Delta f)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{|x|=\varepsilon} \frac{c}{\varepsilon^{n-1}} \varphi = c\,\omega_n \varphi(0).$$

Damit erhalten wir schließlich eine Grundlösung g zu Δ in $\mathbb{R}^n$ durch

$$g(x) := \frac{1}{\omega_n} \begin{cases} -|x| & \text{für } n = 1, \\ -\ln|x| & \text{für } n = 2, \\ \dfrac{1}{(n-2)|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

3.3 Darstellungsformeln

Es seien nun $G \in \mathcal{C}_{2,\alpha}$ ein glatt berandetes Gebiet und B ein beliebiges Gebiet mit

$$G \Subset B \subset \mathbb{R}^n.$$

Dabei soll es zu jedem Randpunkt $x \in \partial G$ eine Umgebung $U(x)$ so geben, daß $\partial G \cap U(x)$ der Graph einer $\mathcal{C}_{2,\alpha}$-Abbildung ist. Es seien ferner $f \in \mathcal{C}(B, \mathbb{R})$ und $u \in \mathcal{C}_2(B, \mathbb{R})$ mit

$$\Delta u + f = o.$$

Wir wollen u analog zur Cauchyschen Integralformel in der Funktionentheorie

$$w(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left\{ \int_G \frac{(\bar{\partial} w)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} + \int_{\partial G} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right\}$$

darstellen. Hierbei ist w eine komplexwertige Funktion. Im Randintegral treten also sowohl der Realteil von w als auch der Imaginärteil auf. Wir können deshalb nicht erwarten, eine Potentialfunktion u allein durch ihre Randwerte in dieser einfachen Form darstellen zu können. Vielmehr gehen auch die Randwerte der zu u konjugiert harmonischen Funktion ein und damit die Ableitungen von u am Rande. Wir zeigen

Satz 3.3.1 (Darstellungsformel für Potentialfunktionen): *Es seien $G \Subset B \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes Gebiet, $f \in \mathcal{C}(B,\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{C}_2(B,\mathbb{R})$ mit $\Delta u + f = o$ und g eine Grundlösung zu Δ in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\int_G f\, g(\cdot - x) + \int_{\partial G} \Big\{ \frac{\partial u}{\partial n} g(\cdot - x) - u\, \frac{\partial g}{\partial n}(\cdot - x) \Big\} = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in G, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \backslash \bar{G}. \end{cases}$$

Beweis: Es sei $x \in G$ fest. Weil beim partiellen Integrieren die Singularität von g stören würde, wählen wir zunächst eine Kugel $B(x,\varepsilon) \subset G$ und ein $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$ mit $\varphi | B(x,\varepsilon) = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} o &= \int_G \Big((1-\varphi)u\Big)(y)\, \delta(x-y)\, dy = -\int_G \Big((1-\varphi)u\Big)(y)\, (\Delta g)(x-y)\, dy = \\ &= -\int_G \Delta\Big((1-\varphi)u\Big)(y)\, g(x-y)\, dy + \int_{\partial G} \Big\{ \frac{\partial u}{\partial n}(y)\, g(x-y) - u(y)\, \frac{\partial g}{\partial n_y}(x-y) \Big\} dy = \\ &= -\int_G (\Delta u)(y)\, g(x-y)\, dy + \int_G (\Delta(\varphi u))(y)\, g(x-y)\, dy + \\ &\qquad + \int_{\partial G} \Big\{ \frac{\partial u}{\partial n}(y)\, g(x-y) - u(y)\, \frac{\partial g}{\partial n_y}(x-y) \Big\} dy = \\ &= \int_G f(y)\, g(x-y)\, dy - \int_G (\varphi u)(y)\, \delta(x-y)\, dy + \int_{\partial G} \Big\{ \frac{\partial u}{\partial n}(y)\, g(x-y) - u(y)\, \frac{\partial g}{\partial n_y}(x-y) \Big\} dy. \end{aligned}$$

Das beweist die Darstellungsformel für $x \in G$. Für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bar{G}$ ist ihr Nachweis trivial. □

Ist u Potentialfunktion ($f = o$), dann folgt für $x \in G$

$$u(x) = \int_{\partial G} \Big\{ \frac{\partial u}{\partial n} g(\cdot - x) - u\, \frac{\partial g}{\partial n}(\cdot - x) \Big\}.$$

In diese Darstellungsformel gehen also, wie erwartet, sowohl u als auch $\partial u/\partial n$ am Rande ein. Die Darstellungsformel liefert deshalb im allgemeinen noch keine Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe. Das Lösen dieser Randwertaufgabe liegt sehr viel tiefer, vergleichbar mit dem Beweisen der Cauchyschen Darstellungsformel und des Riemannschen Abbildungssatzes in der Funktionentheorie.

Wir wollen nun einige einfache Folgerungen aus dem soeben Bewiesenen ziehen.

Folgerung 3.3.2: *Es sei wieder $G \Subset B \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes Gebiet und $u \in \mathcal{C}_2(B,\mathbb{R})$ eine Potentialfunktion. Dann ist*

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Beweis: Es sei $v(x) = 1$ für alle x. Dann folgt aus der zweiten Greenschen Formel

$$0 = \int_G \Big\{ v\, \Delta u - u\, \Delta v \Big\} = \int_{\partial G} \Big\{ v\, \frac{\partial u}{\partial n} - u\, \frac{\partial v}{\partial n} \Big\} = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n}.$$ □

Folgerung 3.3.3: *Notwendig für die Lösbarkeit der Neumannschen Randwertaufgabe zu G ist die Bedingung*

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Mittelwertformel: *Es seien u in G eine Potentialfunktion und $\bar{B}(x,r) \subset G$. Dann gilt*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u(y)\, dy = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{|y-x|<r} u(y)\, dy.$$

Der Beweis folgt aus

$$u(x) = \int_{\partial B} \Big\{ \frac{\partial u}{\partial n} g(\cdot - x) - u\, \frac{\partial g}{\partial n}(\cdot - x) \Big\}.$$

Es ist (für $n \geq 3$)

$$\frac{\partial g}{\partial n}(y-x) = \frac{y-x}{|y-x|}\Big(-\frac{y-x}{\omega_n |y-x|^n}\Big) = -\frac{1}{\omega_n |y-x|^{n-1}}.$$

Zusammen mit Folgerung 3.3.2 erhalten wir deshalb

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u(y).$$

Der Rest folgt aus dem Gaußschen Satz und Folgerung 3.3.2. □

Folgerung 3.3.4: *Eine Potentialfunktion u in G ist dort analytisch.*

Der Beweis erfolgt wie in der Funktionentheorie durch Reihenentwicklung. Hier soll nur die Idee angegeben werden. Es sei $B := B(x_0, R)$ mit $\bar{B} \subset G$. Dann gilt für $x \in B(x_0, R)$

$$u(x) = \int_{\partial B} \Big\{ \frac{\partial u}{\partial n}\, g(\cdot - x) - u\, \frac{\partial g}{\partial n}(\cdot - x) \Big\}.$$

Dabei ist für $n \geq 3$

$$g(y - x) = \frac{1}{\omega_n (n-2)} \, \frac{1}{|y - x|^{n-2}}.$$

Ein Integral der Form

$$I(x) := \int_{\partial B} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}}\, dy$$

läßt sich für $f \in \mathcal{C}(G)$ und $x \in \bar{B}(x_0, R/2)$ in eine gleichmäßig konvergente Taylorreihe entwickeln, nämlich

$$I(x_0 + h) = I(x_0) + \cdots + \frac{1}{p!} I^{(p)}(x_0, \underbrace{h, \ldots, h}_{p\text{-mal}}) + R_p(x_0, h)$$

mit

$$R_p(x_0, h) = \frac{1}{(p+1)!} I^{(p+1)}(x_0 + \theta h, \underbrace{h, \cdots, h}_{(p+1)\text{-mal}})$$

und

$$\big|R_p(x_0, h)\big| \leq c \binom{n+p-2}{p+1} \left(\frac{2}{R}\right)^{n+p-1} |h|^{p+1} \leq c_n \left(\frac{2n}{R}\right)^p |h|^{p+1} \to 0$$

bei festem n, kleinem h und $p \to \infty$. □

Es sind auch andere Reihenentwicklungen nach speziellen Funktionen durchgeführt worden. Die Bekannteste ist wohl die Entwicklung nach *Legendreschen Polynomen* und *Kugelfunktionen*. Für den $\mathbb{R}^3$ soll diese Entwicklung kurz skizziert werden: Es sei y fest. Dann ist

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{|y|} \sqrt{\frac{1}{1 - 2\frac{xy}{|y|^2} + |\frac{x}{y}|^2}} = \frac{1}{|y|} \sqrt{\frac{1}{1 - 2zt + z^2}}$$

mit $t := x_0 y_0$, $x_0 := x/|x|$ und $z := |x|/|y|$, und man schreibt für kleine z

$$\sqrt{\frac{1}{1 - 2zt + z^2}} =: \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t).$$

Die $P_n(t)$ sind die „Legendreschen Polynome". Es ist

$$\begin{array}{ll} P_0(t) = 1 & P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \\ P_1(t) = t & P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \\ P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) & P_5(t) = \cdots. \end{array}$$

Die Eigenschaften dieser orthogonalen Polynome vom Grade n sind wohlbekannt. Sie sind die Eigenfunktionen zu

$$L := -\frac{d}{dt}\left((1 - t^2)\frac{d}{dt}\right)$$

in $(-1, 1)$. Dabei sollen die Lösungen in den Randpunkten endlich bleiben. Es gilt

$$LP_n = \lambda_n P_n$$

mit $\lambda_n = n(n+1)$ und

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,$$

sowie $P_n(1) = 1$ und

$$\int_{-1}^{1}(P_n(t))^2 dt = \frac{2}{2n+1}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|y|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^n P_n(x_0 y_0).$$

Bei festem y ist

$$\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^n P_n(x_0 y_0)$$

ein homogenes harmonisches Polynom der Ordnung n in x.

Es sei nun $H_n(x)$ ein beliebiges homogenes harmonisches Polynom der Ordnung n. Dann schreibt man

$$H_n(x) =: |x|^n K_n(x_0)$$

und nennt $K_n(x_0)$ „Kugelfunktion" der Ordnung n. Kugelfunktionen verschiedener Ordnung sind orthogonal, das folgt unmittelbar aus der Greenschen Umformung. In $\mathbb{R}^3$ gibt es $2n+1$ normierte orthogonale Kugelfunktionen $K_{n,j}(x_0)$ der Ordnung n. Es gilt

$$\sum_{j=-n}^{n} K_{n,j}(x_0)K_{n,j}(y_0) = \frac{2n+1}{4\pi}P_n(x_0 y_0).$$

Die Kugelfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem auf der Sphäre S^2. Sie sind Eigenfunktionen von Δ_0, es gilt

$$\Delta_0 K_n + n(n+1)K_n = o.$$

Eine beliebige Kugelfunktion läßt sich in Polarkoordinaten als

$$K_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\Big\{\alpha_k\cos(k\varphi) + \beta_k\sin(k\varphi)\Big\}\, P_n^k(\cos\theta)$$

schreiben. Dabei sind die $P_n^k(t)$ „zugeordnete Legendresche Polynome". Das sind beschränkte Lösungen der Differentialgleichung

$$(Lu)(t) = \left(n(n+1) - \frac{k^2}{1-t^2}\right)u(t),$$

also $P_n^0(t) = P_n(t)$ und mit $t = \cos\theta$

$$\begin{aligned}
P_1^1(t) &= -(1-t^2)^{1/2} = -\sin\theta,\\
P_2^1(t) &= -3t(1-t^2)^{1/2} = -\tfrac{3}{2}\sin(2\theta),\\
P_2^2(t) &= 3(1-t^2) = \tfrac{3}{2}(1-\cos(2\theta)),\\
P_3^1(t) &= -\tfrac{3}{2}(1-t^2)^{1/2}(5x^2-1) = -\tfrac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin(3\theta)),\\
P_3^2(t) &= 15t(1-t^2) = \tfrac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta),\\
P_3^3(t) &= -15(1-t^2)^{3/2} = -\tfrac{15}{4}(3\sin\theta - \sin(3\theta)).
\end{aligned}$$

In einer Umgebung des Nullpunktes kann man dann eine Potentialfunktion u in eine Reihe der Form

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}|x|^n K_n(x_0)$$

entwickeln.

In $\mathbb{R}^2$ ist analog

$$K_n^{(2)}(x_0) = \alpha_n\cos(n\varphi) + \beta_n\sin(n\varphi).$$

Die Reihenentwicklung nach diesen Funktionen ist aus der Funktionentheorie bzw. der Theorie der Fourierreihen wohlbekannt. Entsprechende Entwicklungen gelten in $\mathbb{R}^n$. Weitere Resultate und Beweiseinzelheiten findet man in *Magnus, Oberhettinger & Soni [1966], S. 199*, und *C. Müller [1957], S. 50f.*

Als letzte Folgerung der Darstellungsformel zeigen wir noch

Das Maximumprinzip: *Es seien G ein beliebig berandetes Gebiet, u eine Potentialfunktion in G und nicht konstant. Dann besitzt u in G weder ein Maximum noch ein Minimum.*

Beweis: u nehme in $x_0 \in G$ ein Maximum m an, es gelte also

$$u(x_0) = m \quad \text{und} \quad \forall\, x \in U(x_0) \;\; u(x) \leq m.$$

Es sei ferner

$$M := \left\{ x \in G \;\middle|\; u(x) = m \right\}.$$

1. M ist offen: Wir wählen ein $x \in M$ und ein ρ mit $\bar{B}(x,\rho) \subset G$. Es sei $x_1 \in B(x,\rho)$ mit

$$x_1 \in G \backslash M.$$

Dann folgt aus der Mittelwertformel der Widerspruch

$$m = u(x) = \frac{n}{\omega_n \rho^n} \int_{|y-x|<\rho} u(y)\, dy < m,$$

weil u stetig ist.

2. M ist relativ G abgeschlossen: Es sei nämlich $\xi \in G$ ein Häufungspunkt von M. Wegen der Stetigkeit von u ist dann $\xi \in M$.

Damit ist $M = G$, weil ein Gebiet wegzusammenhängend ist. Analog schließt man für das Minimum. □

3.4 Potentialfunktionen spezieller Belegungen

In diesem Abschnitt beschränken wir uns in der Darstellung auf den $\mathbb{R}^3$ und untersuchen die in der Darstellungsformel auftretenden Potentiale, nämlich das *Newtonpotential* mit der Volumenbelegung σ

$$U(x) := \int_G \frac{\sigma(y)}{|x-y|}\, dy,$$

das Potential mit der *einfachen Flächenbelegung* μ

$$V(x) := \int_{\partial G} \frac{\mu(y)}{|x-y|}\, dy$$

und das Potential mit der *doppelten Flächenbelegung* (*Dipolbelegung*) ν

$$W(x) := \int_{\partial G} \nu(y)\, \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dy.$$

Dabei sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^3$ und im Falle der Potentiale mit Flächenbelegungen glatt berandet. Es sei $G_a := \mathbb{R}^3 \backslash \bar{G}$ das Äußere von G.

Sind die Belegungen in $\bar{G}$ bzw. ∂G stetige Funktionen, dann existieren U, V und W. Die Potentiale V und W sind in G und G_a harmonisch, U ist in G_a harmonisch und genügt in G im Distributionensinn der *Poissonschen Gleichung*

$$\Delta U + 4\pi\sigma = o.$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist, einige klassische Glattheitseigenschaften der Potentiale U, V und W anzugeben. Die Nachweise sind im einzelnen zum Teil etwas langwierig und werden nur skizziert. Wir beginnen mit der Diskussion des Volumenpotentials.

Satz 3.4.1: *Es sei U das Volumenpotential mit der Belegung $\sigma \in \mathcal{L}^\infty(G)$. Dann gilt*

1. Es ist $U \in \mathcal{C}_1(\bar{G})$ und

$$\nabla U(x) = \int_G \sigma(y)\, \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\, dy.$$

2. Es sei $\sigma \in \mathcal{L}^\infty(G) \cap \mathcal{C}_\alpha(G)$. Dann ist $U \in \mathcal{C}_{2+\alpha}(G)$ und genügt der Poissonschen Gleichung.

Beweisskizze: Zum Beweis gehen wir klassisch vor und nutzen aus, daß eine in $\bar{G}$ gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen U_ε gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert. Sind außerdem die ∇U_ε stetig und konvergieren sie gleichmäßig gegen D, dann ist U stetig differenzierbar mit $\nabla U = D$.

Zur Konstruktion der U_ε verwenden wir nun folgende Glättungstechnik: Es sei $j \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq j \leq 1$, $0 \leq j' \leq 2$ und

$$j(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } 2 \leq x. \end{cases}$$

Dann bilden wir mit positivem ε

$$U_\varepsilon(x) := \int_G \sigma(y)\, j\Big(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\Big) \frac{1}{|x-y|}\, dy.$$

Offenbar ist $U_\varepsilon \in \mathcal{C}_\infty(\bar{G})$, und es gilt mit $c = c(\|\sigma\|_{\mathcal{L}^\infty})$:

1.
$$\big|U_\varepsilon(x) - U(x)\big| \leq \int_{|y-x|<2\varepsilon} \sigma(y) \Big\{1 - j\Big(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\Big)\Big\} \frac{1}{|x-y|}\, dy \leq c\,\varepsilon^2.$$

   Mithin ist U stetig.

2. Es sei
$$D(x) := \int_G \sigma(y)\, \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\, dy.$$

   Dann zeigt man analog
$$\big|\nabla U_\varepsilon(x) - D(x)\big| \leq c\,\varepsilon.$$

   Mithin ist $U \in \mathcal{C}_1(\bar{G})$ und $\nabla U = D$.

3. Etwas schwieriger ist die Diskussion der zweiten Ableitungen. Es sei zunächst σ konstant. Dann wählen wir zu $x_0 \in G$ eine Kugel $B(x_0, r) \subset G$ und erhalten für $x \in B(x_0, r)$ und $\sigma = 1$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned} D(x) &= \int_{|y-x_0|<r} \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\, dy + \int_{G\setminus B(x_0,r)} \cdots \\ &= -\int_{|y-x_0|<r} \nabla_y \frac{1}{|x-y|}\, dy + \int_{G\setminus B(x_0,r)} \cdots \\ &= -\int_{|y-x_0|=r} \frac{n(y)}{|x-y|}\, dy + \int_{G\setminus B(x_0,r)} \cdots\,. \end{aligned} \tag{1}$$

   Offenbar ist $D(x)$ dann beliebig oft differenzierbar. Dies wollen wir ausnutzen. Es sei

$$D_\varepsilon(x) := \int_G \sigma(y)\, j\Big(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\Big) \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\, dy.$$

   Dann konvergiert D_ε gleichmäßig gegen D, und es ist

$$\begin{aligned} \partial_j D_\varepsilon(x) &= \int_G \sigma(y)\, \partial_j \Big\{ j\Big(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\Big) \nabla_x \frac{1}{|x-y|} \Big\}\, dy \\ &= \underbrace{\int_G \big(\sigma(y) - \sigma(x)\big)\, \partial_j \Big\{\cdots\Big\}\, dy}_{=:I_\varepsilon} \;+\; \sigma(x) \int_G \partial_j \Big\{\cdots\Big\}\, dy. \end{aligned}$$

   Die Diskussion des letzten Integrals ist nach dem Vorangegangenen klar. Zur Diskussion von I_ε haben wir jetzt aber nach Voraussetzung zusätzlich die Abschätzung

$$|\sigma(y) - \sigma(x)| \leq c\,|y-x|^\alpha$$

   zur Verfügung. Damit läßt sich I_ε wie U_ε und ∇U_ε behandeln, und man findet

$$\int_{|x-y|<2\varepsilon} \big|\sigma(y) - \sigma(x)\big|\, \partial_j \Big\{ \Big(1 - j\Big(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\Big)\Big) \nabla_x \frac{1}{|x-y|} \Big\}\, dy \leq c\, \|\sigma\|_\alpha\, \varepsilon^\alpha.$$

Damit ist $U \in \mathcal{C}_2(G)$.

4. Zum Nachweis der Hölderstetigkeit der zweiten Ableitungen schätzt man analog

$$\partial_i \partial_j U(x_1) - \partial_i \partial_j U(x_2)$$

ab. Einzelheiten findet man in *Gilbarg & Trudinger, [1977], S. 46f.* □

Von nun an sei G glatt, etwa $G \in \mathcal{C}_2$. Wir zeigen

Satz 3.4.2: *Es seien $\mu, \nu \in \mathcal{C}(\partial G)$. Dann gilt*

1. $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$,

2. $W \in \mathcal{C}(\bar{G}) \cup \mathcal{C}(\mathbb{R}^3 \backslash G)$ *und für* $x_0 \in \partial G$

$$W(x_0)\big|_a = 2\pi\nu(x_0) + W_0(x_0),$$
$$W(x_0)\big|_i = -2\pi\nu(x_0) + W_0(x_0)$$

mit

$$W(x_0)\big|_a := \lim_{\substack{z \to x_0 \\ z \in G_a}} W(z), \qquad W(x_0)\big|_i = \lim_{\substack{z \to x_o \\ z \in G}} W(z)$$

und

$$W_0(x_0) := \int_{\partial G} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x_0 - y|}\, dy.$$

<u>Beweisskizze</u>:

1. V ist stetig in $x_0 \in \partial G$: Für $x_1 \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{aligned}\big|V(x_1) - V(x_0)\big| &\le \|\mu\|_{\mathcal{L}^\infty} \int_{\partial G} \left| \frac{1}{|x_1 - y|} - \frac{1}{|x_0 - y|} \right| dy \\ &\le \|\mu\|_{\mathcal{L}^\infty} \Big\{ \int_{\partial G \backslash F(x_0,\tau)} \cdots + \int_{F(x_0,\tau)} \cdots \Big\}\end{aligned}$$

mit $F(x_0, \tau) := \partial G \cap B(x_0, \tau)$. Es sei $|x_1 - x_0| < \tau/2$. Dann gilt mit einem $z = z(y) \in [x_0, x_1]$

$$\int_{\partial G \backslash F(x_0,\tau)} \cdots \le |x_1 - x_0| \int_{\partial G \backslash F(x_0,\tau)} \frac{1}{|z - y|^2}\, dy \le c\, \frac{|x_1 - x_0|}{\tau^2}$$

und

$$\int_{F(x_0,\tau)} \cdots \le \int_{F(x_0,\tau)} \frac{1}{|x_0 - y|}\, dy + \int_{F(x_1,2\tau)} \frac{1}{|x_1 - y|}\, dy \le c\, \tau.$$

Zusammen erhalten wir also

$$\big|V(x_1) - V(x_0)\big| \le c\, \|\mu\|_{\mathcal{L}^\infty} \Big\{ \frac{|x_1 - x_0|}{\tau^2} + \tau \Big\}.$$

Wählen wir nun $\tau := |x_1 - x_0|^{1/3}$, dann folgt für alle $|x_1 - x_0| < \sqrt{1/8}$

$$\big|V(x_1) - V(x_0)\big| \le c\, \|\mu\|_{\mathcal{L}^\infty}\, |x_1 - x_0|^{1/3}.$$

Weil wir das Integral über $\partial G \backslash F(x_0, \tau)$ nur sehr grob abgeschätzt haben, läßt sich diese Abschätzung sicherlich verbessern.

2. Wir untersuchen nun das Dipolpotential. Es sei zunächst ν konstant und der Rand in einer Umgebung von x_0 eben. Dann ist (vgl. Abbildung 3.1)

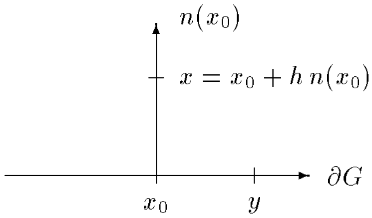

Abbildung 3.1.

$$\int_{|y-x_0|<\delta} \frac{n(y)(x-y)}{|x-y|^3}\,dy = \int_{|y-x_0|<\delta} \frac{h}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+h^2}^3}\,dy = 2\pi h \int_0^\delta \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}^3}$$
$$= 2\pi h \left\{ \frac{-1}{\sqrt{\rho^2+h^2}} \right\}\Big|_0^\delta = 2\pi \operatorname{sign} h - \frac{2\pi h}{\sqrt{\delta^2+h^2}},$$

also mit $\sigma := \operatorname{sign} h$

$$\lim_{h\to 0} \int_{|y-x_0|<\delta} \frac{n(y)(x-y)}{|x-y|^3}\,dy = 2\pi\sigma.$$

Das beweist das Sprungverhalten von $W(x)$ in diesem einfachen Fall.

3. Es sei nun ν wieder konstant, der Rand aber beliebig. Dann führen wir in einer Umgebung von $x_0 \in \partial G$ ein Tangenten-Normalensystem ein, man vergleiche Abbildung 3.2.

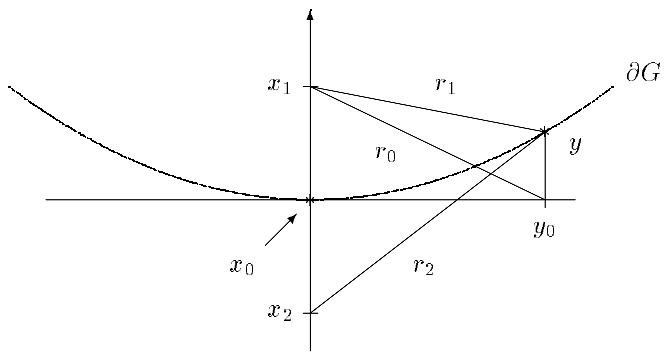

Abbildung 3.2.

Es seien

$$x_1 := x_0 + h\,n(x_0) \qquad x_2 := x_0 - h\,n(x_0)$$

und

$$y = u_1 e_1 + u_2 e_2 + f(u_1,u_2) e_3 \in \partial G$$

mit

$$f(0,0) = \partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = \partial_1\partial_2 f(0,0) = 0.$$

Es sei ferner in dieser Umgebung von x_0

$$x = y + u_3\,n(y).$$

Es sei $\rho := \sqrt{u_1^2+u_2^2}$. Dann rechnet man nach

$$t = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f \end{pmatrix} = \mathcal{O}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \rho \end{pmatrix} \right),$$

$$n = \begin{pmatrix} -\partial_1 f \\ -\partial_2 f \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2}} = \mathcal{O}\left(\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ 1+\rho^2 \end{pmatrix} \right),$$

$$r_0 := |x_1 - (y - f e_3)| = \sqrt{\rho^2+h^2},$$

$$r_1 := |x_1 - y| = \sqrt{\rho^2+(h-f)^2},$$

$$r_2 := |x_2 - y| = \sqrt{\rho^2+(h+f)^2}.$$

Es folgt für $i = 1,2$

$$|r_i - r_0| = \mathcal{O}(\rho^2), \qquad (x_0 - y)n(y) = \mathcal{O}(\rho^2),$$

$$\left|\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_0}\right| = \frac{|r_0 - r_i|}{r_i r_0} = \mathcal{O}(1), \qquad \left|\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{h}{r_0^3}\right),$$

und es ist

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x_i - y|} = \mathcal{O}\left(\frac{h}{r_0^3} + \frac{1}{r_0}\right).$$

Insbesondere gilt auf der Fläche

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x_0 - y|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

4. Es sei nun

$$\hat{W}(x) := \int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dy.$$

Dann folgt aus der Darstellungsformel (Satz 3.3.1) mit $u = 1$

$$\hat{W}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in G_a. \\ -4\pi & \text{für } x \in G. \end{cases}$$

Liegt x auf der Randfläche ∂G, dann kann man die Darstellungsformel auf $G \backslash B(x, \varepsilon)$ anwenden. Rechnet man im Tangenten-Normalensystem, dann folgt

$$\hat{W}(x) = -2\pi \qquad \text{für } x \in \partial G.$$

Das beweist den Satz für konstante Belegungen.

5. $W_0 \in \mathcal{C}(\partial G)$ folgt leicht durch Nachrechnen im Tangenten-Normalensystem. Wir werden in Satz 3.4.4 sogar $W_0 \in \mathcal{C}_\alpha(\partial G)$ zeigen.

6. Wir betrachten nun eine beliebige Belegung ν. Es sei wieder $x_0 \in \partial G$. Dann setzen wir

$$W(x) = \nu(x_0)\hat{W}(x) + w(x)$$

mit

$$w(x) := \int_{\partial G} \big(\nu(y) - \nu(x_0)\big) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dy$$

und wollen für $x_1 \to x_0$

$$\big|w(x_1) - w(x_0)\big| \to 0$$

zeigen. Dazu rechnen wir wieder im Tangenten-Normalensystem und erhalten (vgl. Abbildung 3.3)

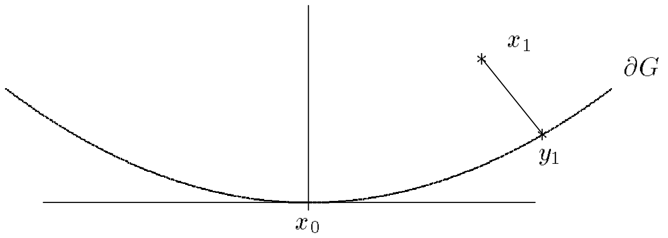

Abbildung 3.3.

$$\big|w(x_1) - w(x_0)\big| \le \int_{\partial G} \big|\nu(y) - \nu(x_0)\big| \left|\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x_1 - y|} - \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{(x_0 - y)}\right| dy \le$$
$$\le \int_{\partial G \backslash F(x_0,\tau)} \cdots + \sup_{|y - x_0| < \tau} \big|\nu(y) - \nu(x_0)\big| \int_{F(x_0,\tau)} \left|\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x_1 - y|} - \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{(x_0 - y)}\right| dy.$$

Nun ist

$$\int_{F(x_0,\tau)} \cdots \le \text{const}$$

und

$$\int_{\partial G \backslash F(x_0,\tau)} \cdots \le c\, \|\nu\|_{\mathcal{L}^\infty} \frac{|x_1 - x_0|}{\tau^3}.$$

Wählen wir daher $\tau := |x_1 - x_0|^{1/4}$, dann folgt für kleine $|x_1 - x_0|$

$$\big|w(x_1) - w(x_0)\big| \le c \Big\{ \sup_{|y - x_0| \le |x_1 - x_0|^{1/4}} \big|\nu(y) - \nu(x_0)\big| + |x_1 - x_0|^{1/4} \Big\}.$$

Damit ist Satz 3.4.2 bewiesen. □

Als nächstes zeigen wir

Satz 3.4.3: *Es seien $\mu, \nu \in \mathcal{C}(\partial G)$ und $x_0 \in \partial G$. Dann gilt:*

1.
$$\lim_{h\to 0} \Big\{ \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} W\big(x_0 + h\, n(x_0)\big) - \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} W\big(x_0 - h\, n(x_0)\big) \Big\} = 0.$$

2.
$$\frac{\partial V}{\partial n}(x_0)\Big|_a = -2\pi\mu(x_0) + \int_{\partial G} \mu(y)\, \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{|x_0 - y|}\, dy,$$
$$\frac{\partial V}{\partial n}(x_0)\Big|_i = 2\pi\mu(x_0) + \int_{\partial G} \mu(y)\, \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{|x_0 - y|}\, dy.$$

3. Es sei $\nu \in \mathcal{C}_{1+\alpha}(\partial G)$. Dann gilt
$$\nabla W \in \mathcal{C}(\bar{G}) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial W}{\partial n}\Big|_a = \frac{\partial W}{\partial n}\Big|_i .$$

<u>Beweisskizze</u>: Es ist
$$\frac{\partial}{\partial n} V(x) = \int_{\partial G} \mu(y)\, n(x_0) \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\, dy = -\int_{\partial G} \mu(y)\, n(x_0) \nabla_y \frac{1}{|x-y|}\, dy =$$
$$= -\int_{\partial G} \mu(y)\, \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dy + \int_{\partial G} \mu(y) \left\{ n(y) - n(x_0) \right\} \nabla_y \frac{1}{|x-y|}\, dy.$$

Wegen
$$n(y) - n(x_0) = \mathcal{O}\left(\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho^2 \end{pmatrix} \right)$$
ist das zweite Integral stetig in x_0; das Sprungverhalten des ersten kennen wir bereits. Das beweist die zweite Behauptung.

Die erste Behauptung ist für konstante Belegungen richtig, weil W dann in G bzw. G_a jeweils konstant ist. Es sei $\nu_0(y) := \nu(y) - \nu(x_0)$. Dann folgt
$$\frac{\partial}{\partial n_x} W(x) = \int_{\partial G} \nu_0(y)\, n(x_0) \nabla_x \frac{n(y)(y-x)}{|y-x|^3}\, dy$$
$$= \int_{\partial G} \nu_0(y) \Big\{ -\frac{n(x_0) n(y)}{|x-y|^3} + 3\frac{\{n(y)(y-x)\}\,\{n(x_0)(y-x)\}}{|y-x|^5} \Big\} dy,$$
also mit $x_1 = x_0 + h\, n(x_0)$ und $x_2 = x_0 - h\, n(x_0)$
$$\Big| \frac{\partial}{\partial n} W(x_1) - \frac{\partial}{\partial n} W(x_2) \Big| \le \int_{\partial G} |\nu_0(y)| \Big\{ \cdots \Big\}\, dy.$$

Dabei ist
$$\Big\{ \cdots \Big\} = \mathcal{O}\left(\frac{h}{r_0^3} \right).$$

Mithin verhält sich die Differenz links wie ein Dipolpotential, und wegen $\nu_0(x_0) = 0$ tritt kein Sprungterm auf. Das zeigt die erste Behauptung. Auf das Nachrechnen der dritten im Tangenten-Normalensystem soll hier verzichtet werden. □

Es folgt

Satz 3.4.4: *Es sei $T : \mathcal{C}(\partial G) \to \mathcal{C}(\partial G)$ mit*
$$T\nu := W_0 = \int_{\partial G} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\cdot - y|}\, dy.$$

Dann gilt:

1. $T : \mathcal{C}(\partial G) \to \mathcal{C}(\partial G)$ ist kompakt.

2. Für $\alpha \le 1/2$ ist
$$T \;:\; \mathcal{C}(\partial G) \longrightarrow \mathcal{C}_\alpha(\partial G)$$
eine beschränkte Abbildung.

Beweis: Mit $x_1, x_0 \in \partial G$ ist

$$\big|(T\nu)(x_1) - (T\nu)(x_0)\big| \le \|\nu\|_{\mathcal{L}^\infty} \int_{\partial G} \Big| \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x_1 - y|} - \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x_0 - y|} \Big| \, dy$$
$$\le \|\nu\|_{\mathcal{L}^\infty} \Big\{ \int_{F(x_0,\tau)} \cdots + \int_{\partial G \setminus F(x_0,\tau)} \cdots \Big\}.$$

Mit $h := |x_1 - x_0| < \tau/2$ folgt daraus

$$\int_{F(x_0,\tau)} \cdots \le \int_{F(x_0,\tau)} \Big| \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x_0 - y|} \Big| \, dy + \int_{F(x_1, 2\tau)} \Big| \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x_1 - y|} \Big| \, dy = \mathcal{O}(\tau)$$

und

$$\int_{\partial G \setminus F(x_0,\tau)} \cdots \le c\, \frac{h}{\tau},$$

zusammen also

$$\big|(T\nu)(x_1) - (T\nu)(x_0)\big| \le c\, \|\nu\|_{\mathcal{L}^\infty} \left\{ \tau + \frac{h}{\tau} \right\}.$$

Mit $\tau := \sqrt{h}$ gilt daher für $h < 1/4$

$$\big|(T\nu)(x_1) - (T\nu)(x_0)\big| \le c\, \|\nu\|_{\mathcal{L}^\infty} \big|x_1 - x_0\big|^{1/2}.$$

Das beweist die zweite Aussage. Die erste folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli. Eine beschränkte Folge (ν_n) mit $\|\nu_n\|_{\mathcal{L}^\infty} \le 1$ wird in eine gleichartig stetige transformiert. $\square$

Folgerung 3.4.5: *Es sei $\nu \in \mathcal{C}_\alpha(\partial G)$. Dann gilt*

$$W_0 \in \mathcal{C}_{1+\alpha}(\partial G).$$

Beweisskizze: Mit $W_0 = T\nu$ und $\nu_0(x) := \nu(x) - \nu(x_0)$ ist

$$T\nu = T\nu_0 - 2\pi\, \nu(x_0),$$

also

$$(T\nu)(x_1) - (T\nu)(x_0) = (T\nu_0)(x_1) - (T\nu_0)(x_0).$$

Man berechnet nun mit $x_1 = x_0 + h\, t$

$$\frac{W_0(x_1) - W_0(x_0)}{h}$$

im Tangenten-Normalensystem und erhält die Behauptung. $\square$

Folgerung 3.4.6: *Es sei $\nu \in \mathcal{C}(\partial G)$ Lösung einer Gleichung der Form*

$$\nu = T\nu.$$

Dann ist $\nu \in \mathcal{C}_{1+\alpha}(\partial G)$.

Beweis: Mit $\alpha = 1/2$ ist zunächst $\nu \in \mathcal{C}_\alpha(\partial G)$ nach Satz 3.4.4. Aus der letzten Folgerung erhalten wir dann die Behauptung. $\square$

Als letztes formulieren wir des Randverhalten des *Newtonpotentials*, nämlich

Satz 3.4.7: *Es seien $G \in \mathcal{C}_{2,\alpha}$ und U das Newtonpotential mit der Belegung $\sigma \in \mathcal{C}_\alpha(\bar{G})$. Dann ist $U \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$.*

Der Beweis folgt dem von Satz 3.4.1. Es sei $x_0 \in \partial G$. Dann lautet der Randterm in Gl. (1)

$$R(x) = \int_{\partial B(x_0,r) \cap G} \frac{n(y)}{|x - y|} \, dy + \int_{F(x_0)} \frac{n(y)}{|x - y|} \, dy$$

mit $F(x_0) := \partial G \cap B(x_0, r)$. Wegen $G \in \mathcal{C}_{2,\alpha}$ ist $n \in \mathcal{C}_{1,\alpha}(\partial G)$. Ähnlich wie in Satz 3.4.3.3 folgt dann $R \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$. Einzelheiten findet man in *Gilbarg & Trudinger [1977], S.63.*

3.5 Die Kelvintransformation

Wir betrachten nun das räumliche Gegenstück zur Inversion am Einheitskreis; abgesehen von den Spiegelungen an der Halbebene ist das die einzige konforme Abbildung in $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$.

Zur Vereinfachung wählen wir $B := B(o, R)$. Es sei

$$x' := x\frac{R^2}{|x|^2} \quad \text{oder} \quad x = x'\frac{R^2}{|x'|^2}.$$

Das ist die *Kelvintransformation.* Es ist also (vgl. Abbildung 3.4)

$$|x'| \cdot |x| = R^2 \quad \text{und} \quad x'_0 = x_0$$

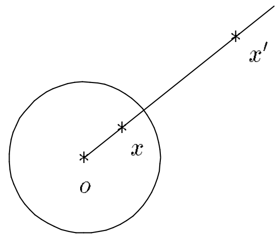

Abbildung 3.4.

mit $x_0 := x/|x|$. Es seien

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2} \quad \text{und} \quad \Delta' := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}.$$

Dann gilt

Satz 3.5.1: *In B bzw. $B_a := \mathbb{R}^n \backslash \bar{B}$ seien $u \in \mathcal{C}_2$ und*

$$v(x') := \Big(\frac{R}{|x'|}\Big)^{n-2} u(x(x')).$$

Dann ist in B_a bzw. B

$$(\Delta' v)(x') = \Big(\frac{|x|}{R}\Big)^{n+2} (\Delta u)(x) = \Big(\frac{R}{|x'|}\Big)^{n+2} (\Delta u)(x(x')).$$

Aus $\Delta u = o$ in B folgt also $\Delta' v = o$ in B_a. Damit hat man die Möglichkeit, Potentialfunktionen in beschränkten Gebieten auf Potentialfunktionen in Außengebieten abzubilden und umgekehrt.

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen. In Polarkoordinaten sei wieder

$$\Delta = D + \frac{1}{r^2}\Delta_0 \quad \text{mit } D = \frac{1}{r^{n-1}}\,\partial_r(r^{n-1}\partial_r)$$

und entsprechend

$$\Delta' = D' + \frac{1}{r'^2}\Delta_0.$$

Dann folgt aus $rr' = R^2$

$$\partial_{r'} = \frac{\partial r}{\partial r'}\,\partial_r = \Big(-\frac{R^2}{r'^2}\Big)\partial_r = -\frac{r^2}{R^2}\,\partial_r,$$

und es ist

$$v = \Big(\frac{R}{r'}\Big)^{n-2} u = \Big(\frac{r}{R}\Big)^{n-2} u.$$

Wir erhalten also

$$\partial_{r'} v = -\frac{1}{R^n}\Big\{(n-2)r^{n-1}u + r^n \partial_r u\Big\}$$

und

$$(r')^{n-1}\partial_{r'} v = \Big(\frac{R^2}{r}\Big)^{n-1}\partial_{r'} v = -R^{n-2}\Big\{(n-2)u + r\partial_r u\Big\}.$$

Daraus folgt

$$D'v = \frac{R^{n-2}}{(r')^{n-1}}\Big(\frac{r^2}{R^2}\Big)\Big\{(n-1)\partial_r u + r\partial_r^2 u\Big\} = \frac{R^{n-4}}{(r')^{n-1}}\,r^3 Du = \frac{r^{n+2}}{R^{n+2}}\,Du.$$

Das beweist Satz 3.5.1. □

3.5.1 Anwendung auf Außenraumaufgaben

Es seien G ein beschränktes Gebiet und $G_a := \mathbb{R}^n \backslash \bar{G}$ das Äußere von G. In vielen Anwendungen ist man an Außenraumaufgaben interessiert, und man fragt, welches Verhalten der Lösungen im Unendlichen zu erwarten ist, bzw. welches Verhalten in einer Lösungstheorie postuliert werden sollte. Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß zum Beispiel in $\mathbb{R}^2$ alle Potenzen z^m Lösungen liefern. Die einzige überall beschränkte Lösung ist aber die Konstante (Satz von Liouville). In $\mathbb{R}^2 \backslash B(0,1)$ sind auch die negativen Potenzen z^{-m} beschränkte Lösungen.

Die Dirichletsche Randwertaufgabe für $B_a := \mathbb{R}^3 \backslash \bar{B}(0,1)$ ist deshalb nicht eindeutig lösbar, wenn das Verhalten der Lösungen im Unendlichen nicht weiter charakterisiert wird. Zum Beispiel ist

$$u(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$$

in B_a harmonisch mit $u|\partial B_a = o$.

Um hier weiterzukommen kann man folgendermaßen vorgehen: Man transformiere mit der Kelvintransformation den Punkt Unendlich in den Nullpunkt und betrachte die transformierte Potentialfunktion v in $U(o)$. Die Forderung, daß dort sowohl v als auch ∇v beschränkt sein sollen, erscheint vernünftig. Jede Potentialfunktion in $U(o)$ besitzt diese Eigenschaft. Dann transformiere man zurück. Für die ursprüngliche Potentialfunktion u erhält man durch diese Forderung an v eine Bedingung für das Verhalten im Unendlichen. Stellt man sie, dann läßt sich eine geschlossene Lösungstheorie geben.

Führt man diesen Gedanken durch, dann folgt zunächst aus

$$u(x) = \left(\frac{|x'|}{R}\right)^{n-2} v(x') = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} v(x')$$

und der Beschränktheit von v in $U(o)$ die Bedingung

$$u(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right) \tag{2}$$

für $|x| \to \infty$, und zwar gleichmäßig bezüglich x_0.

Ferner folgt aus $x'_j = x_j R^2/|x|^2$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \left(\frac{\delta_{ij} R^2}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j R^2}{|x|^4}\right) \frac{\partial}{\partial x'_j}$$

oder

$$\begin{aligned}
\nabla u(x) &= \nabla\Big\{\Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2} v(x')\Big\} \\
&= R^{n-2}\Big\{-\frac{(n-2)x}{|x|^n} v(x') + \frac{1}{|x|^{n-2}} \nabla v(x')\Big\} \\
&= R^{n-2}\Big\{-\frac{(n-2)x}{|x|^n} v(x') + \frac{R^2}{|x|^n}\Big(\nabla' v(x') - \frac{2x}{|x|^2}\big(x\nabla' v(x')\big)\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Aus der Beschränktheit von $\nabla' v$ in $U(o)$ erhalten wir also bzgl. $|x| \to \infty$

$$\nabla u(x) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(1/|x|^2\right) & \text{für } n = 2, \\ \mathcal{O}\left(1/|x|^{n-1}\right) & \text{für } n \geq 3. \end{cases} \tag{3}$$

Stellt man diese *Regularitätsbedingungen* (2) und (3), dann gilt gleichmäßig bzgl. x_0 für $|x| \to \infty$

$$|x|^{n-1}(u\nabla u)(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

und

$$\int_{|x|=R} |u \cdot \nabla u| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)$$

für $R \to \infty$. Mit u lassen sich dann also auch Greensche Umformungen im Außenraum durchführen.

3.6 Greensche Funktionen

Es sei G wieder ein beschränktes und stückweise glatt berandetes Gebiet. Wir suchen eine Lösung der klassischen Dirichletschen Randwertaufgabe, nämlich eine in G harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}(\bar{G}) \cap \mathcal{C}_2(G)$ mit

$$u|\partial G = f.$$

Dabei ist $f \in \mathcal{C}(\partial G)$ vorgegeben. Zur Geschichte dieser Randwertaufgabe folgen in §4.1 noch einige Bemerkungen.

Aus dem Maximumprinzip folgt unmittelbar die Eindeutigkeit der Lösung. Viel schwieriger ist jedoch der Nachweis ihrer Existenz. Beschränken wir uns auf glatt berandete Gebiete, dann wird man zum Beweis der Existenz an die Darstellungsformel denken, nämlich

$$u(x) = \int_{\partial G} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} g(\cdot - x) - f \frac{\partial}{\partial n} g(\cdot - x) \right\}. \qquad (*)$$

Leider geht in diese Formel aber auch die noch unbekannte Normalenableitung von u am Rande ein; und es ist nicht einmal klar, ob diese im allgemeinen überhaupt existiert.

Um hier weiterzukommen, hat man schon im letzten Jahrhundert daran gedacht, die Grundlösung g so zu modifizieren, daß sie am Rande verschwindet. Dann tritt in der Darstellungsformel der Term mit der Normalenableitung nicht mehr auf. Eine solche Grundlösung Γ, die also am Rande ∂G verschwindet, nennt man *Greensche Funktion* (nach George Green, 1793–1841).

Im allgemeinen ist die Konstruktion einer Greenschen Funktion jedoch ebenso schwierig wie das direkte Lösen der Randwertaufgabe. Eine große Hilfe ist sie aber bei Gebieten mit speziellen Berandungen und Symmetrien, zum Beispiel bei Kugeln oder Quadern. Für solche Gebiete läßt sich die Greensche Funktion oft durch geometrische Überlegungen leicht angeben, und hier liegt ihre eigentliche Bedeutung. Lassen Sie mich dies im folgenden skizzieren:

Definition 3.6.1: *Eine Abbildung $\Gamma : \bar{G} \times \bar{G} \to \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion zur Potentialgleichung, wenn für alle $x \in G$ folgendes gilt:*

1. $\Gamma(x, \cdot) \in \mathcal{C}(\bar{G} \setminus \{x\}) \cap \mathcal{C}_2(G \setminus \{x\})$,
2. $\Delta\Gamma(x, \cdot) + \delta(\cdot - x) = o$,
3. $\Gamma(x, y)\big|_{y \in \partial G} = 0$.

Folgendes sei sofort bemerkt: Mit der Greenschen Funktion möchte man partiell integrieren können, und eine Darstellung vom Typ $(*)$ soll gelten. Dazu hätte man gerne $\Gamma(x, \cdot) \in \mathcal{C}_1(\bar{G} \setminus \{x\})$. Das folgt bei glatt berandeten Gebieten aus Lemma 3.6.4. Bei allgemeineren Gebieten muß eine solche Regularität der Greenschen Funktion dann aber zusätzlich bewiesen oder vorausgesetzt werden.

Aus der Definition der Greenschen Funktion folgen leicht zwei Lemmata, nämlich

Lemma 3.6.2: *Die Greensche Funktion Γ zu G möge existieren. Dann ist*

$$\Gamma(x, y) = \Gamma(y, x).$$

<u>Beweis</u>: Es seien, wie in Abbildung 3.5 skizziert, $x_1 \neq x_2$, und $B(x_1, \varepsilon) \cap B(x_2, \varepsilon) = \emptyset$. Dann folgt

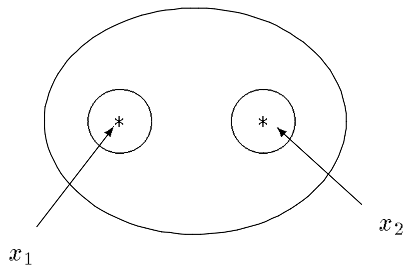

Abbildung 3.5.

$$0 = \int_{\partial G} \Big\{ \underbrace{\Gamma(x_1, y)}_{=0} \frac{\partial}{\partial n}\Gamma(x_2, y) - \underbrace{\Gamma(x_2, y)}_{=0} \frac{\partial}{\partial n}\Gamma(x_1, y) \Big\}\, dy + \int_{|y - x_1| = \varepsilon} \Big\{ \cdots \Big\} + \int_{|y - x_2| = \varepsilon} \Big\{ \cdots \Big\}.$$

Nun ist mit einer beschränkten Potentialfunktion u_i und der Grundlösung g aus §3.2

$$\Gamma(x_i, y) = g\big(|x_i - y|\big) + u_i(y),$$

also

$$\int_{|y-x_1|=\varepsilon} \Big\{ \cdots \Big\} = \frac{1}{\omega_n} \int_{|y-x_1|=\varepsilon} \Gamma(x_2, y)\, \frac{1}{|y-x_1|^{n-1}}\, dy + \mathcal{O}(\varepsilon) = \Gamma(x_2, x_1) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

und analog

$$\int_{|y-x_2|=\varepsilon} \Big\{ \cdots \Big\} = -\Gamma(x_1, x_2) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Daraus folgt für $\varepsilon \to 0$ die Symmetrie von Γ. □

Lemma 3.6.3: *Die Greensche Funktion Γ zu G möge existieren. Dann gilt*

$$0 \leq \Gamma(x, y) \leq g\big(|x - y|\big).$$

Beweis: Es sei $x \in G$ fest und wieder mit einer beschränkten Funktion $u(x, \cdot\,)$

$$\Gamma(x, y) = g\big(|x - y|\big) + u(x, y).$$

Dann ist

$$u(x, y)\Big|_{y \in \partial G} = -g\big(|x - y|\big)\Big|_{y \in \partial G} < 0.$$

Mithin ist $u(x, \cdot\,) \leq 0$, also

$$\Gamma(x, y) \leq g(|x - y|).$$

Wegen $u(x, \cdot\,) \in \mathcal{C}_2(G)$ gibt es eine Kugel $B(x, \varepsilon)$ mit

$$\forall\, y \in \bar{B}(x, \varepsilon) \qquad \Gamma(x, y) > 0.$$

In $G \backslash B(x, \varepsilon)$ hat $\Gamma(x, \cdot\,)$ nicht negative Randwerte. Folglich gilt auch

$$\forall y \in G \backslash B(x, \varepsilon) \qquad \Gamma(x, y) \geq 0.$$

□

Lemma 3.6.4: *Das Gebiet G sei glatt berandet und $\Gamma(x, \cdot\,) \in \mathcal{C}(\bar{G} \backslash \{x\})$ Greensche Funktion zu G. Dann ist*

$$\Gamma(x, \cdot\,) \in \mathcal{C}_1(\bar{G} \backslash \{x\}).$$

Beweis: Es seien $z \in \partial G$ fest und $G^* \subset G$ ein glatt berandetes Gebiet mit $x \notin G^*$ und

$$\exists\, \varepsilon > 0 \qquad U(z) := \partial G \cap B(z, \varepsilon) \subset \partial G^*.$$

Es sei $f := \Gamma | \partial G^*$. Dann verschwindet f in $U(z)$. In G^* ist nun die Dirichletsche Randwertaufgabe der Potentialtheorie zu den Randwerten f eindeutig lösbar, und wir können die Lösung mit Hilfe der Integralgleichungsmethode eindeutig in der Form

$$w := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G^*} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\cdot - y|} dy$$

darstellen. In G^* ist also $\Gamma(x, \cdot\,) = w$. Dabei genügt die Belegung $\nu \in \mathcal{C}(\partial G^*)$ der Gleichung

$$f = (-id + K)\nu.$$

Man vergleiche *FA, §7.4*. Weil der Operator K glättet und wegen $f | U(z) = o$ ist $\nu \in \mathcal{C}_{1+\alpha}\big(U(z)\big)$. Nach Satz 3.4.3.3 folgt daraus $w \in \mathcal{C}_1\big(\bar{G}^*\big)$, und das war zu zeigen. □

Die Greensche Funktion $\Gamma(x, \cdot\,) \in \mathcal{C}_1(\bar{G} \backslash \{x\})$ möge existieren. Es sei $u \in \mathcal{C}(\bar{G}) \cap \mathcal{C}_2(G)$ mit $\Delta u = o$ und $u | \partial G = f$. Dann folgt für u die Darstellung

$$u(x) = -\int_{\partial G} f(y)\, \frac{\partial}{\partial n_y} \Gamma(x, y)\, dy. \tag{$**$}$$

Das Dipolintegral rechts existiert. Nachzuweisen haben wir nur noch

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = f(x_0)$$

für $x \in G$ und $x_0 \in \partial G$. Dazu schreiben wir wieder

$$\begin{aligned} u(x) &= -f(x_0)\int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x,y)\,dy + \int_{\partial G}\{f(x_0)-f(y)\}\,\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x,y)\,dy \\ &= f(x_0) + \int_{\partial G}\{f(x_0)-f(y)\}\,\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x,y)\,dy. \end{aligned}$$

Die Greensche Funktion Γ verschwindet am Rande und ist nach Lemma 3.6.3 nicht negativ. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\,\Gamma(x,y) \le 0.$$

Wir wählen nun zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\, y \in B(x_0,\delta) \qquad \big|f(y)-f(x_0)\big| < \varepsilon$$

und zerlegen das letzte Integral in

$$\int_{\partial G} \cdots = \int_{\partial G \cap B(x_0,\delta)} \cdots + \int_{\partial G \setminus B(x_0,\delta)} \cdots .$$

Dann folgt

$$\big|u(x)-f(x_0)\big| \le \varepsilon + \Big|\int_{\partial G\setminus B(x_0,\delta)} \cdots\Big|.$$

Weil die Greensche Funktion am Rande verschwindet, konvergiert auch das letzte Integral für $x \to x_0$ gegen Null. Damit ist Darstellung $(**)$ bewiesen.

3.6.1 Die Neumannsche Funktion

Bei der Neumannschen Randwertaufgabe (die Ableitung von u in Normalenrichtung ist am Rande vorgegeben) möchte man analog vorgehen. Nun folgt aber aus der Greenschen Umformung mit $u = 1$ und einer beliebigen Grundlösung γ für festes $x \in G$

$$\int_{G\setminus B(x,\varepsilon)} \Delta\gamma(x,\cdot\,) = \int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial n}\,\gamma(x,\cdot\,) - \int_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_y}\,\gamma(x,y)\,dy.$$

Daraus erhält man für $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial n}\,\gamma(x,\cdot\,) = -1.$$

Es kann also keine Grundlösung mit am Rande verschwindender Normalenableitung geben. Deshalb modifiziert man in diesem Fall die dritte Forderung in der Definition der Greenschen Funktion und verlangt jetzt

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\,\gamma(x,y)\Big|_{y\in\partial G} + \frac{1}{|\partial G|} = 0.$$

Man spricht dann von einer *Neumannschen Funktion* oder von einer *Greenschen Funktion zweiter Art* $\Gamma_2(x,y)$. Wenn Γ_2 existiert, folgt mit $n\nabla u|\partial G = f$ aus der Darstellungsformel

$$u(x) = \int_{\partial G} f(y)\,\Gamma_2(x,y)\,dy - \frac{1}{|\partial G|}\int_{\partial G} u(y)\,dy = \int_{\partial G} f(y)\,\Gamma_2(x,y)\,dy + \text{const},$$

und mehr ist auch nicht zu erwarten.

3.7 Die Poissonsche Integralformel

Wir wollen nun die soeben eingeführte Greensche Funktion zum Beweis wichtiger klassischer Resultate verwenden. Dazu konstruieren wir sie zunächst für eine Kugel $B := B(o,R)$. Die Idee ist, die Grundlösung g zu nehmen und davon die Kelvintransformierte von g in $B_a := \mathbb{R}^n\setminus\bar{B}$ abzuziehen. Es sei also für festes $x \in B$

$$\Gamma(x,y) := g\big(|x-y|\big) - \Big(\frac{R}{|y|}\Big)^{n-2} g\big(|x-y'|\big)$$

mit
$$y' := \frac{R^2}{|y|^2}\,y.$$
Dann ist Γ Greensche Funktion zu B. Dabei sei $n \geq 3$. In $\mathbb{R}^2$ muß man diesen Ansatz etwas modifizieren, weil g in $\mathbb{R}^2$ im Punkte Unendlich nicht der Regularitätsbedingung genügt. Wir gehen anschließend kurz darauf ein.

Wir berechnen nun explizit die Normalenableitung der Greenschen Funktion am Rande: Es seien $x \in B$ fest und $y \in \partial B$. Dann folgt aus der Symmetrie von Γ

$$\begin{aligned}
n(y)\nabla_y \Gamma(x,y) &= \frac{y}{R}\nabla_y\Big\{g\big(|x-y|\big) - \Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2} g\big(|y-x'|\big)\Big\}\\
&= \frac{y}{\omega_n R}\Big\{\frac{-(y-x)}{|y-x|^n} - \Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2}\frac{-(y-x')}{|y-x'|^n}\Big\}\\
&= \frac{y}{\omega_n R\,|y-x|^n}\Big\{-(y-x) + \frac{|x|^2}{R^2}(y-x')\Big\}\\
&= -\frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R\,|x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Symmetrie von $\Gamma(x,y)$ und insbesondere
$$|y|\,|x-y'| = |x|\,|y-x'|$$
verwandt.

Damit gilt Darstellung $(**)$ aus §3.6, nämlich
$$u(x) = -\int_{\partial B} u(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x,y)\,dy = \frac{R^2-|x|^2}{R\,\omega_n}\int_{|y|=R}\frac{u(y)}{|x-y|^n}\,dy.$$
Das ist die *Poissonsche Formel*, benannt nach SIMÉON DENIS POISSON, 1781–1840. Für eine Kugel $B(x_0,R)$ lautet sie
$$u(x) = \frac{R^2-|x-x_0|^2}{R\,\omega_n}\int_{|y-x_0|=R}\frac{u(y)}{|x-y|^n}\,dy.$$

Bemerkung 3.7.1: *Im Falle $n=2$ wählt man in B_a*
$$g_a(x,y) := \frac{1}{2\pi}\Big\{\ln\frac{1}{|x-y|} - \ln\frac{R}{|x|}\Big\}.$$
Dann genügt g_a der Regularitätsbedingung im Unendlichen, und für $y \in \partial B$ ist $g_a = g$. Es folgt
$$\Gamma(x,y) = g\big(|x-y|\big) - g_a\big(|x-y'|\big) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R\,|x-y'|}{|y'|\cdot|x-y|},$$
und man erhält wieder die Poissonsche Integralformel. □

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus der Poissonschen Formel:

Folgerung 3.7.2: *Es seien G ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $u \in \mathcal{C}(G)$. Für alle x, R mit $\bar{B}(x,R) \subset G$ gelte die* Mittelwertformel
$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{|y-x|=R} u(y)\,dy.$$
Dann ist u in G eine Potentialfunktion.

Beweis: Es sei $x_0 \in G$ und $\bar{B} := \bar{B}(x_0,R) \subset G$ fest. Es sei v in B harmonisch mit $v|\partial B = u|\partial B$. Aus der Poissonschen Integralformel folgt die Existenz von v. Es sei $w := u - v$. Dann genügt auch w der Mittelwertformel, für w gilt also in B das Maximumprinzip. Wegen $w|\partial B = 0$ verschwindet w deshalb in B, das heißt, es ist dort $u = v$. Das war zu zeigen. Man beachte, daß u damit in G beliebig oft differenzierbar ist, es folgt also die Regularität. □

Die nächste Folgerung wird nach CARL GUSTAV HARNACK, 1851–88, benannt.

Erster Harnackscher Satz: *Es seien G beschränkt und $u_n \in \mathcal{C}(\bar{G}) \cap \mathcal{C}_2(G)$ Potentialfunktionen in G. Es sei $(u_n|\partial G)$ gleichmäßig konvergent. Dann konvergiert (u_n) in $\bar{G}$ gleichmäßig gegen eine harmonische Grenzfunktion.*

Beweis: Aus Maximumprinzip folgt für $x \in \bar{G}$

$$\big|u_n(x) - u_m(x)\big| \leq \sup_{y \in \partial G} \big|u_n(y) - u_m(y)\big| \to 0,$$

also die gleichmäßige Konvergenz. Für alle $B(x,R) \subset G$ gilt deshalb auch die Mittelwertformel für den Grenzwert u. Mithin ist u harmonisch. □

Folgerung 3.7.3: *Es seien $B(o,R) \subset G$ und u in G nichtnegativ und harmonisch. Dann ist für $x \in B(o,R)$*

$$R^{n-2} \frac{R - |x|}{\big(R + |x|\big)^{n-1}} u(o) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x|}{\big(R - |x|\big)^{n-1}} u(o).$$

Zum Beweis verwenden wir die Poissonsche Integralformel

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n\, R} \int_{|y|=R} \frac{u(y)}{|x-y|^n}\, dy$$

und (vgl. Abbildung 3.6)

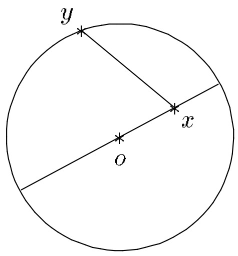

Abbildung 3.6.

$$\frac{1}{R + |x|} \leq \frac{1}{|x-y|} \leq \frac{1}{R - |x|}.$$

Es ist also zum Beispiel

$$u(x) \leq \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n\, R} \int_{|y|=R} \frac{u(y)}{\big(R - |x|\big)^n}\, dy = \frac{R^{n-2}\big(R^2 - |x|^2\big)}{\big(R - |x|\big)^n} u(0) = \frac{R^{n-2}\big(R + |x|\big)}{\big(R - |x|\big)^{n-1}} u(0).$$ □

Folgerung 3.7.4: *Es seien G ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $K \Subset G$, $x_0 \in K$ und u in G nichtnegativ und harmonisch. Dann gibt es positive Konstanten c_1 und c_2, $c_i = c_i(K,G)$, mit*

$$\forall\, x \in K \qquad c_1\, u(x_0) \leq u(x) \leq c_2\, u(x_0).$$

Beweisskizze: Wir wählen

$$a := \frac{1}{4} \min\Big(1, \inf_{\substack{x \in K \\ y \in \partial G}} |x - y|\Big) > 0.$$

Dann gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_N \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, a).$$

Zu $x_0, x \in K$ gibt es deshalb eine Kugelkette

$$B(x_{j_k}, 2a)$$

mit $k = 1, 2, \ldots, M \leq N$, $1 \leq j_k \leq N$ und

$$x_{j_1} \in B(x_0, 2a), \quad x_{j_{k+1}} \in B(x_{j_k}, 2a), \quad x \in B(x_{j_M}, 2a).$$

Aus dem letzten Resultat folgt dann die Behauptung. □

Zweiter Harnackscher Satz: *Die Folge (u_n) genüge folgenden Bedingungen:*

1. *u_n ist in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ harmonisch.*
2. *Für alle n und alle $x \in G$ ist $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$.*
3. *Es gilt*
$$\exists\, x_0 \in G \quad \exists\, c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n(x_0) \leq c.$$

Dann konvergiert (u_n) in jedem $\bar{B}$ mit $x_0 \in B$ und $\bar{B} \Subset G$ gleichmäßig gegen eine Potentialfunktion.

Beweis: Die Folge $(u_n(x_0))$ wächst monoton und ist beschränkt. Sie konvergiert also. Aus dem letzten Resultat folgt mit $K := \bar{B}$

$$0 \leq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leq c\left\{u_{n+p}(x_0) - u_n(x_0)\right\}.$$

Deshalb konvergiert (u_n) in $\bar{B}$ gleichmäßig. Die Grenzfunktion u ist nach Folgerung 3.7.2 harmonisch. □

Der Satz gilt natürlich auch, wenn man in der zweiten und dritten Voraussetzung die Anordnungsbeziehungen umkehrt.

4 Die Dirichletsche Randwertaufgabe in der Potentialtheorie

4.1 Historische Bemerkungen

Ein zentrales Anliegen der mathematischen Physik im vergangenen Jahrhundert war das Lösen von Randwertaufgaben. Solche Aufgaben treten beispielsweise in der Elektrostatik auf. Um ein Beispiel vor Augen zu haben, sei G ein homogenes Medium, repräsentiert durch eine offene zusammenhängende Menge in $\mathbb{R}^n$. Dann möchte man im einfachsten Falle eine Funktion $u \in \mathcal{K} := \mathcal{C}_2(G) \cap \mathcal{C}(\bar{G})$ finden mit

$$\Delta u = 0 \text{ in } G \quad \text{ und } u|\partial G = f.$$

Dabei ist $f \in \mathcal{C}(\partial G)$ vorgegeben. In $\mathbb{R}^2$ ist das Lösen dieser Randwertaufgabe äquivalent zum Riemannschen Abbildungssatz. Im alten Lehrbuch *Hurwitz-Courant [1964]* finden Sie diesen Zusammenhang ausführlich dargestellt. Man spricht von der *Dirichletschen Randwertaufgabe der Potentialtheorie.* Natürlich sind auch andere Randwertaufgaben möglich.

Wenn G eine Kugel ist, dann läßt sich die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe leicht durch die *Poissonsche Integralformel* angeben, und die Eindeutigkeit folgt wie in der Funktionentheorie aus dem *Maximumprinzip.* Viel schwieriger erwies sich aber das Lösen der Randwertaufgabe für allgemeinere Gebiete. Hierbei spielte *das Dirichletsche Prinzip* eine große Rolle. Es geht auf Carl Friedrich Gauss, 1777–1855, und Lord Kelvin (William Thomson), 1824–1907, zurück und wurde wohl von Bernhard Riemann, 1826–66, der in Dirichlets Vorlesungen darüber gehört hatte, nach diesem benannt.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet wurde 1805 in Düren geboren. In Köln besuchte er das Gymnasium. Georg Simon Ohm, 1787–1854, war sein Mathematiklehrer. Er studierte dann in Paris und wurde 1827 hier in Bonn auf Empfehlung von Alexander von Humboldt und Gauß mit erst einer Arbeit ehrenhalber promoviert. Er kam dann über Breslau und Berlin als Nachfolger von Gauß nach Göttingen, wo er 1859 starb. Verheiratet war er mit einer Schwester von Felix Mendelsohn-Bartoldy.

Das *Dirichletsche Prinzip* hängt eng mit den Extremalprinzipien der klassischen Mechanik zusammen und besagt folgendes: Es seien

$$D(u) := \int_G |\nabla u|^2$$

das *Dirichletsche Integral* und

$$\mathcal{D} := \{ u \in \mathcal{K} \mid D(u) < \infty \text{ und } u|\partial G = f \}$$

die zugrundeliegende Funktionenklasse. Es sei $v \in \mathcal{D}$ eine Minimalstelle von $D(u)$, also

$$D(v) = \min_{u \in \mathcal{D}} D(u).$$

Dann löst v die Dirichletsche Randwertaufgabe.

Daß das so ist, kann man relativ leicht sehen. Aus

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \quad \forall\, \epsilon \in \mathbb{R} \qquad D(v + \epsilon\varphi) \geq D(v)$$

folgt nämlich unmittelbar

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad \int_G (\nabla v)(\nabla \bar{\varphi}) = 0$$

und daraus $\Delta v = o$, weil Testfunktionen in $\mathcal{L}^2(G)$ dicht sind.

Weil das Dirichletsche Integral nach unten beschränkt ist und vor allem wegen der vermeintlichen physikalischen Evidenz, hielt man es lange Zeit für selbstverständlich, daß das Minimumproblem eine Lösung $v \in \mathcal{D}$ besitzt. Wenn letzteres richtig ist, sagt man, das Dirichletsche Prinzip gelte für $D(u)$ in $\mathcal{D}$. So verwendete es Riemann zum Beweis seiner fundamentalen Existenzsätze in der Funktionentheorie.

Es mutet uns heute – wo wir doch schon im ersten Semester gelernt haben, nicht das Minimum mit dem Infimum zu verwechseln – merkwürdig an, daß so viele berühmte Mathematiker über längere Zeit diesen Fehler gemacht haben. Man muß einfach sehen, daß das Dirichletsche Prinzip damals als solches aus mathematisch-physikalischen Gründen für evident gehalten und gar nicht mehr in Frage gestellt wurde. Als Karl Weierstrass, 1815–97, noch zu Lebzeiten Riemanns Bedenken anmeldete, hatte dieser auch keine Zweifel an der Richtigkeit seiner Funktionentheorie. Er räumte nur ein, daß das Beweishilfsmittel – eben das Dirichletsche Prinzip – verbessert werden müßte; über dieses Hilfsmittel hatte er aber nie weiter nachgedacht, es interessierte ihn gar nicht.

Weierstraß hat wohl als erster erkannt, daß das Dirichletsche Prinzip, so wie es damals verwandt wurde, falsch ist. Selbstverständlich gibt es eine *Minimalfolge* (u_n), $u_n \in \mathcal{D}$, mit

$$D(u_n) \to \inf_{u \in \mathcal{D}} D(u).$$

Es ist aber nicht klar, ob überhaupt oder in welchem Sinne die Folge (u_n) konvergiert und ob ein eventuell vorhandener Grenzwert auch zu $\mathcal{D}$ gehört.

Weierstraß veröffentlichte seine Kritik erst [1870] nach Riemanns Tod. Dazu betrachtete er das Integral

$$J(u) := \int_{-1}^{1} \left(x u'(x)\right)^2 dx$$

für $u \in \mathcal{W} := \mathcal{C}_1\left((-1,1)\right) \cap \mathcal{C}\left([-1,1]\right)$ mit $u(-1) \neq u(1)$. Er wählte eine spezielle Funktionenfolge, nämlich

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\arctan(x/\varepsilon)}{\arctan(1/\varepsilon)},$$

und folgerte

$$\inf_{u \in \mathcal{W}} J(u) = 0.$$

Deshalb wäre eine Lösung konstant. Dem widerspricht aber $u(-1) \neq u(1)$. Es gibt also keine Lösung in der angegebenen Funktionenklasse. Von Heinrich Weber, 1842–1913, stammt das folgende anschaulichere Gegenbeispiel: Man verbinde in der Ebene drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen sollen, durch eine glatte Kurve und suche die kürzeste Verbindung. Diese Aufgabe hat keine Lösung in der zugrundeliegenden Klasse der glatten Kurven.

Damit hingen die Riemannschen Sätze in der Luft, und es setzte ein intensives Bemühen vieler Mathematiker ein, die Randwertaufgaben zu lösen und das Dirichletsche Prinzip zu retten. Letzteres eben besonders, weil es so elegant und physikalisch so plausibel war. Befriedigend gelöst wurde beides erst um 1900. Aus der Beschäftigung mit dem Dirichletschen Prinzip haben sich viele bedeutende und richtungsweisende Arbeiten ergeben. In dieser Vorlesung können wir auf alle diese Arbeiten im einzelnen nicht eingehen. Nur die *Integralgleichungsmethode*, die *Hilbertraummethode*, das *Alternierende Verfahren* von Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921, die Methode von Carl Neumann, 1832–1925, die Methode von Oskar Perron, 1880–1975, sowie die *Kontinuitätsmethode* von Juliusz Pawel Schauder, 1899–1943, sollen geschildert bzw. skizziert werden. Nachlesen über das Dirichletsche Prinzip kann man auch im Buch von *Monna [1975]*.

Mit der Integralgleichungsmethode erhält man eine klassische Lösung $u \in \mathcal{K}$ der Randwertaufgabe. Die Hilbertraummethode beweist das Dirichletsche Prinzip in geeignet gewählten Funktionenräumen, und liefert verallgemeinerte Lösungen. Diese Verallgemeinerung des Lösungsbegriffs hat sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen und zu vielen schönen Resultaten geführt. Trotzdem sollte man aber im Auge behalten, daß damit die Fragestellung abgeändert wurde. Selbst wenn das bei glatten Daten richtig ist, erfordert es im allgemeinen hohen analytischen Aufwand zu zeigen, daß eine verallgemeinerte Lösung auch klassische Lösung ist, und für das Umgekehrte gilt dasselbe. So kann man nicht von vornherein sagen, welche Methode überlegen ist. Es gibt Randwertaufgaben, die im klassischen Sinne lösbar sind, aber nicht im verallgemeinerten, und umgekehrt. Dazu noch je ein Beispiel:

Ein Beispiel einer klassisch lösbaren Randwertaufgabe, für die aber das Dirichletsche Prinzip versagt, stammt von Friedrich Prym aus dem Jahre [1871]. Er verwendet in $\mathbb{R}^2$ die Logarithmusfunktion. Etwas einfacher ist das folgende Beispiel von Jacques Hadamard [1906]: Es sei G der Einheitskreis und $f(\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin(n!\varphi)$. Dann ist f stetig, und

$$u(r,\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} r^{n!} \frac{\sin(n!\varphi)}{n^2} \quad \in \mathcal{K}$$

löst die Dirichletsche Randwertaufgabe zu f. Das entnimmt man der Theorie der Fourierreihen oder der Poissonschen Integralformel. Nun gilt aber für $r < 1$ und alle n

$$J(r) := \int_{|x|<r} (\nabla u)^2 = \pi \sum_{j=1}^{\infty} r^{2j!} \frac{j!}{j^4} > \pi\, r^{2n!} \frac{n!}{n^4},$$

also mit $r_n := (1/2)^{1/(2n!)} \to 1$

$$J(r_n) > \frac{\pi}{2}\frac{n!}{n^4} \to \infty.$$

Mithin existiert das Dirichletsche Integral $D(u)$ nicht.

Umgekehrt, es sei $G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < 1\}$. Wir suchen die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe zu den Randwerten $f(o) = 1$ und $f(x) = 0$ für $|x| = 1$. Als verallgemeinerte Lösung erhält man $u = o$. Diese Randwertaufgabe ist aber klassisch nicht lösbar. Denn es sei u eine klassische Lösung. Dann folgt wie in der Funktionentheorie aus dem Maximumprinzip und der Kenntnis der Grundlösung, daß der Nullpunkt eine hebbare isolierte Singularität ist. Mithin läßt sich u zu einer Potentialfunktion im Inneren des Einheitskreises stetig fortsetzen und verschwindet dann wegen $u(x) = 0$ für $|x| = 1$. Das steht aber im Widerspruch zu $u(o) = 1$. Dieses Beispiel geht auf Stanislaw Zaremba, 1863–1942, und Henri Lebesgue, 1875–1941, aus den Jahren [1911–13] zurück.

Zum Abschluß dieser Einführung zeigen wir den soeben benutzten

Hebbarkeitssatz: *Es seien $G = B(o,R)\backslash\{o\} \subset \mathbb{R}^n$ und u eine Potentialfunktion in G aus $\mathcal{C}_2(G) \cap \mathcal{BC}(\bar{B}(o,R)\backslash\{o\})$. Dann läßt sich u zu einer Potentialfunktion in $B(o,R)$ stetig fortsetzen.*

Beweis: Es sei Γ die Greensche Funktion zu $B(o,R)$ an der Stelle $y = o$, also

$$\Gamma(|x|) := \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\left\{\dfrac{1}{|x|^{n-2}} - \dfrac{1}{R^{n-2}}\right\} & \text{für } n \geq 3, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{|x|}{R} & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Es sei ferner u_1 die Potentialfunktion in $B(0,R)$ mit

$$u_1\big|_{|x|=R} = u\big|_{|x|=R}.$$

Aus der Poissonschen Formel folgt die Existenz von u_1. Es sei schließlich $v := u - u_1$ in G. Dann ist v in G eine Potentialfunktion mit

$$v\big|_{|x|=R} = 0.$$

Nach Voraussetzung ist

$$M := \sup_{x \in G} |v(x)| < \infty.$$

Für $0 < \varepsilon < R$ und $x \in B(o,R)\backslash\{o\}$ sei

$$v_\varepsilon(x) := M\,\frac{\Gamma(|x|)}{\Gamma(\varepsilon)}.$$

Dann gilt

$$v_\varepsilon\big|_{|x|=R} = 0 \quad \text{und} \quad v_\varepsilon\big|_{|x|=\varepsilon} = M,$$

und es folgt aus dem Maximumprinzip

$$\forall\, x, |x| > \varepsilon \qquad |v(x)| \leq v_\varepsilon(x).$$

Für festes $x \in G$ und $\varepsilon < |x|$ ist deshalb wegen $\Gamma(\varepsilon) \to \infty$ für $\varepsilon \to 0$

$$|v(x)| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon(x) = 0.$$

Mithin gilt

$$\forall\, x \in G \qquad v(x) = 0.$$

Die Abbildung v kann deshalb durch Null zu einer Potentialfunktion in $B(0,R)$ stetig fortgesetzt werden, nämlich zu $v := o$. Mithin läßt sich auch u stetig fortsetzen, und u_1 ist die stetige Fortsetzung von u. □

4.2 Die Integralgleichungsmethode

Die *Integralgleichungsmethode* eignet sich besonders gut bei glatt berandeten Gebieten. Ihr liegt die Beobachtung zugrunde, daß sich bei elektrostatischen Problemen die Ladung an der Oberfläche eines Leiters befindet. Man macht daher spezielle Ansätze mit *Oberflächenbelegungen* und führt so die Differentialgleichung in eine Integralgleichung über.

Der einfachste Ansatz dieser Art in $\mathbb{R}^3$ für die Potentialgleichung ist das *Potential mit der einfachen Flächenbelegung* μ,

$$v(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \mu(y) \, \frac{1}{|x-y|} \, dy.$$

Dabei wird angenommen, daß der Rand ∂G genügend glatt und μ stetig ist. Die Funktion v entsteht also durch Faltung der Grundlösung mit der Belegung μ. Sie ist daher eine Potentialfunktion in G, und man sieht leicht, daß v im ganzen $\mathbb{R}^3$ definiert und stetig ist. Es gilt auch $v \in \mathcal{C}_\infty(G)$, $v \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^3 \backslash \bar{G})$, und mit etwas Rechnung folgt, daß die Ableitung von v in Normalenrichtung bei Annäherung an den Rand springt, während die Tangentialableitungen stetig bleiben. Einzelheiten haben wir in §3.4 bereits kennengelernt.

Zur Lösung der Randwertaufgabe muß daher μ so bestimmt werden, daß

$$\forall x \in \partial G \qquad (u|\partial G)(x) =: f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \mu(y) \, \frac{1}{|x-y|} \, dy$$

gilt. Dies ist in der Hilbertschen Terminologie eine *Integralgleichung erster Art* für μ. Sie ist einer analytischen Behandlung relativ schwer zugänglich.

Der erste, der an dieser Stelle einen Durchbruch erzielt hat, war August Beer, 1825–1863. Beer war der erste Bonner Ordinarius, der das Fach Mathematik allein vertrat. Seine Vorgänger betreuten noch die Physik mit. Er war ein Schüler von Julius Plücker, 1801–68, und hat sich mit Optik, Analysis und mathematischer Physik beschäftigt. Beer starb schon früh im Alter von 38 Jahren. Sein Nachfolger wurde dann 1863 Rudolf Lipschitz, 1832–1903, der viel bekannter geworden ist.

Wie gesagt, Beer war der erste, der den heute klassischen Integralgleichungsansatz fand. Er veröffentlichte [1856] eine Arbeit *„Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induction“* in Poggendorfs Annalen. Beer ging von der Darstellung

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(y) \, \frac{1}{|x-y|} - f(y) \, \frac{\partial}{\partial n_y} \, \frac{1}{|x-y|} \right\} dy$$

mit noch unbekanntem $\partial u / \partial n$ aus und iterierte. In heutiger Sprechweise setzte er u nicht durch ein einfaches Potential, sondern durch ein *Dipolpotential* an, nämlich als

$$w(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \nu(y) \, \frac{\partial}{\partial n_y} \, \frac{1}{|x-y|} \, dy.$$

So erhielt er für die Belegung ν eine *Integralgleichung zweiter Art*

$$f = -\nu + K\nu$$

mit

$$(K\nu)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \nu(y) \, \frac{\partial}{\partial n_y} \, \frac{1}{|x-y|} \, dy \qquad \text{für } x \in \partial G,$$

die leichter zu behandeln ist. Wie gesagt, Beer erhielt seine Lösung durch Iterieren, das heißt, er benutzte die heute nach Neumann benannte Reihe, also $\nu = -\sum K^n f$, $n \in \mathbb{N}_0$. Um Konvergenzfragen kümmerte er sich dabei nicht, er schreibt nur, daß es *„einleuchte“*, daß *„Kf gleichförmiger verläuft als f“.*

Carl Neumann, 1832–1925, hat dann die Beersche Methode wieder aufgegriffen und sich intensiv um den Nachweis der Konvergenz des Verfahrens bemüht. Die Schwierigkeit liegt darin, daß zwar $\|K\| \leq 1$, nicht aber $\|K\| < 1$ gilt. In seinem Buch über das *„logarithmische und Newtonsche Potential“* aus dem Jahre [1877] nimmt er ausdrücklich auf Beer Bezug und druckt sogar dessen Arbeit vollständig wieder ab (auf S. 220 f). Er bringt dort einen Konvergenzbeweis für konvexe Gebiete mit seiner *Methode des arithmetischen Mittels.* Weil dieser Beweis eine Lücke enthielt (wieder wurde das Minimum mit dem Infimum verwechselt), behandelt er das Thema [1887 und 1888] erneut. Die Neumannsche Methode wird in *Dieudonné [1981], S. 43–46*, ausführlich dargestellt. *Lebesgue* scheint die beiden letztgenannten Neumannschen Arbeiten nicht gekannt zu haben, denn [1937] greift auch er das Thema wieder auf, weist auf die Lücke im Buch aus dem Jahre 1877 hin und füllt sie durch ein Kompaktheitsargument aus.

Die Neumannschen Ergebnisse interessieren heute mehr den Anwender. Einmal, weil kontrahierende Operatoren auftreten; zum anderen, weil Neumann auch stückweise glatte Ränder zulassen kann. Die theoretische Entwicklung ist jedoch anders weitergegangen. Hier stand die Tatsache im Vordergrund, daß die Abbildung K kompakt ist, und zwar für beliebige glatt berandete Gebiete. Es wurde dann eine Theorie der Gleichung $f = (id + K)x$ in Banachräumen für kompakte K entwickelt. Das Resultat ist, daß die *Fredholmsche Alternative* für solche Gleichungen gilt, wie in der linearen Algebra. Die Neumannsche Voraussetzung der Konvexität des Gebietes wird dabei nicht mehr benötigt; kurz gesagt, das *Kontraktions-* wurde durch ein *Kompaktheitsargument* ersetzt.

Wir wollen aber doch – vielleicht mit einem Lächeln – festhalten, daß die Neumannsche Reihe nicht von Neumann stammt, sondern von Beer, und daß sie gerade in dem Fall, für den sie ursprünglich gemacht wurde, nicht konvergiert.

Die weitere Entwicklung verlief nun so: Ab 1896 beschäftigte sich VITO VOLTERRA, 1860–1940, mit den nach ihm benannten Integralgleichungen und betrachtete dabei solche Gleichungen als Grenzfall linearer Gleichungssysteme. Außerdem war ab 1890 eine Theorie unendlicher linearer Gleichungssysteme und ihrer Determinanten durch HELGE VON KOCH, 1870–1924, entwickelt worden. Beide Ideen nahm IVAR FREDHOLM, 1866–1927, auf. Er erzielte um 1900 den Durchbruch und konnte die Integralgleichung zweiter Art für stetige Funktionen (also in $\mathcal{C}(\partial G)$) und damit die Dirichletsche Randwertaufgabe bei glattem Rand lösen. Im Jahre [1903] bewies er den nach ihm benannten Alternativsatz für solche Gleichungen.

Danach trat die Potentialtheorie zurück, und die Theorie der Integralgleichungen verselbständigte sich. DAVID HILBERT, 1862–1943, und seine Schüler griffen das Thema auf, behandelten Integralgleichungen zweiter Art mit stetigem symmetrischen Kern,

$$(Kx)(s) = \int_G x(t)\, k(s,t)\, dt,$$

und zeigten vor allem auch die Existenz von abzählbar unendlich vielen Eigenwerten und den zugehörigen Entwicklungssatz. Den Beweis führte Hilbert über einen Auswahlsatz, ähnlich dem Kriterium von Arzelà-Ascoli, das er wohl nicht gekannt hatte.

Anschließend verallgemeinerte Hilbert seine Ergebnisse auf entsprechende quadratische Formen bzw. auf Gleichungen in Folgenräumen ℓ^2 , wie wir heute sagen. Hat man nämlich eine Orthonormalbasis (u_n) für die zugrundeliegenden stetigen Funktionen $\mathcal{C}(\bar{G})$, dann wird jedem x vermöge

$$x \to x_n := (x, u_n) := \int_G x\, \bar{u}_n$$

eine Zahlenfolge $(x_n) \in \ell^2$ zugeordnet. Hilbert blieb aber nicht bei der bloßen Übertragung seiner Ergebnisse stehen, sondern er bewies auch einen allgemeinen Entwicklungssatz für beschränkte symmetrische Operatoren auf ℓ^2. Das heißt, er verzichtete auf die Kompaktheitsvoraussetzung und erhielt zum erstenmal ein stetiges Spektrum. Damit war der Weg frei für die Untersuchung allgemeinerer Operatoren in allgemeineren Räumen. Hilbert hat seine Resultate in seinen berühmten sechs „Mitteilungen“ veröffentlicht, die im Buch [1912] vereinigt wurden.

Die Theorie der Integralgleichungen wurde zunächst von Hilberts Schüler ERHARD SCHMIDT, 1876–1959, weiterverfolgt. Schmidt wählte einen direkteren Zugang über Orthogonalreihen, also ohne Fredholmsche Determinanten und ohne Grenzübergang unendlich vieler Gleichungen. Nach Hilbert und ihm sind die *Hilbert-Schmidt Kerne* benannt, also $k \in \mathcal{L}^2(G \times G)$. Für Integralgleichungen mit Hilbert-Schmidt Kern gilt die Fredholmsche Alternative. Die weitere Entwicklung wurde von FRIGYES RIESZ, 1880–1956, geprägt. Er beschäftigte sich auch mit den adjungierten Räumen $\mathcal{L}^p(G)$ und $\mathcal{L}^q(G)$, $q = p/(p-1)$, und gab 1918 eine Theorie der Integralgleichungen zweiter Art in $\mathcal{L}^p(G)$ oder $\mathcal{C}(\bar{G})$ mit kompaktem K. Schauder verwandte dann auch die adjungierte Abbildung und verallgemeinerte die Ergebnisse auf beliebige Banachräume. Wir sprechen daher heute von der *Riesz-Schauder Theorie*, die um 1930 bereitstand.

In *FA, §7.4,* wird die Lösungstheorie zur Dirichletschen und Neumannschen Randwertaufgabe der Potentialtheorie mit der Integralgleichungsmethode als Anwendungsbeispiel zur Riesz-Schauder Theorie ausführlich dargestellt. Das soll jetzt nicht wiederholt werden. Mit dieser Methode folgt auch

Satz 4.2.1: *Es seien $G \in \mathcal{C}_{2,\alpha}$ ein beschränktes Gebiet, $f \in \mathcal{C}_\alpha(\bar{G})$ und $g \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\partial G)$. Dann gibt es genau eine Lösung $u \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$ von*

$$-\Delta u = f \qquad \text{mit } u|\partial G = g.$$

Beweis: Nach Satz 3.4.7 ist das Newtonpotential

$$U(x) := \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy$$

aus $\mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$ und löst nach Satz 3.4.1 die Gleichung $\Delta U + f = o$. Wir müssen daher nur noch ein Potential $W \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$ mit

$$W|\partial G = h := g - U|\partial G \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\partial G)$$

finden. Dann ist $u = W + U$.

Zur Konstruktion von W macht man den Ansatz mit einer Dipolbelegung $\nu \in \mathcal{C}(\partial G)$,

$$W(x) := \int_{\partial G} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dy$$

und erhält die Integralgleichung

$$-\nu + K\nu \stackrel{!}{=} h.$$

Diese Gleichung ist in $\mathcal{C}(\partial G)$ eindeutig lösbar. Aus $h \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\partial G)$ folgt $\nu \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\partial G)$ und damit $W \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$, ähnlich wie in Satz 3.4.3.3. □

Es sei nur noch einmal darauf hingewiesen, daß die Integralgleichungsmethode stark an der vorausgesetzten Glattheit des Randes hängt. Zum Nachweis der Kompaktheit von K in §3.4 haben wir nämlich in $\mathbb{R}^3$ die Abschätzung

$$\frac{n(y)\,(x-y)}{|x-y|^3} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \qquad \text{für } x, y \in \partial G \text{ und } |x-y| \to 0$$

benutzt, die nur für glatt berandete Gebiete gilt. Schon bei einem Quadrat in $\mathbb{R}^2$ treten Schwierigkeiten auf, denn K^{tr} bildet dann $\mathcal{C}(\partial G)$ nicht mehr in sich ab. Das kann man leicht an Hand der folgenden Skizze sehen: Es ist in $\mathbb{R}^2$

$$(K^{tr}\,1)(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial G} \frac{n(x)\,(x-y)}{|x-y|^2}\, dy$$

und

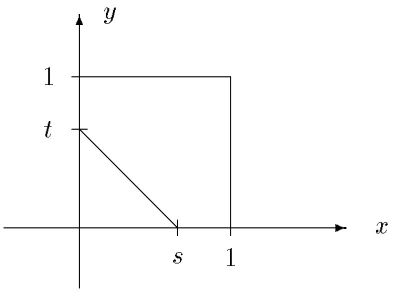

Abbildung 4.1.

$$\int_{(0,0)}^{(1,0)} \cdots = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{s}{s^2+t^2}\, ds = \frac{\ln t}{\pi} + \mathcal{O}(1) \qquad \text{für } t \to 0,$$

während die restlichen Integrale beschränkt bleiben.

Ähnliche Probleme treten bei Integralgleichungssystemen auf, etwa bei den Maxwellschen Gleichungen, auch bei glattem Rand. Es gibt verschiedene Ansätze, die Integralgleichungsmethode auf den Fall nicht glatter Ränder oder Systeme zu übertragen, das soll aber in dieser Vorlesung nicht vertieft werden.

4.3 Direkte Bestimmung des Minimums

Unter gewissen Annahmen bezüglich der Glattheit des Randes und der vorgegebenen Randwerte hat Hilbert das Dirichletsche Prinzip für Randwertaufgaben der Potentialtheorie in $\mathbb{R}^2$ in den Jahren 1900 und 1901 bewiesen. Daß solche Annahmen gemacht werden müssen, ist klar, denn zum Beispiel reicht die Stetigkeit von f alleine nicht aus, wie das Prymsche Beispiel gezeigt hatte. Vor Hilbert gab es bereits Lösungsansätze von Arzelà. Dabei hat Hilbert sofort erkannt, daß das Dirichletsche Prinzip nur eine spezielle Aufgabe der Variationsrechnung ist, und seine Lösungsmethode im allgemeineren Rahmen gesehen. So schreibt er [1905]:

„Eine jede reguläre Aufgabe der Variationsrechnung besitzt eine Lösung, sobald hinsichtlich der Natur der gegebenen Grenzbedingungen geeignete einschränkende Annahmen erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt.“

Damit ist alles gesagt. Hilberts Lösungsmethode wurde von seinen Schülern, insbesondere von RICHARD COURANT, 1888–1972, und wiederum von dessen Schule, zu einer der schlagkräftigsten Methoden in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und besonders zur Lösung von Anfangsrandwertaufgaben und Streuproblemen in der Mathematischen Physik ausgebaut. Sie hat einen ungeheuren Einfluß auf die weitere Entwicklung der Mathematik gehabt.

Die der Hilbertraummethode zugrundeliegende Beweisidee wird in der Einführung zu *FA*, sowie dort in *FA, §5.4 und §6.7.3,* dargestellt. Deshalb wollen wir uns hier kurz fassen: Betrachten wir zunächst die einfachere Gleichung

$$(-\Delta + 1)\, u = 0 \quad \text{mit } u|\partial G = f. \tag{1}$$

Dabei sei $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ wieder ein Gebiet und f am Rande ∂G vorgegeben. Das zugehörige Dirichletsche Integral

$$D_1(u) := \int_G \{|\nabla u|^2 + |u|^2\} = \|u\|^2_{\mathcal{H}_1(G)}$$

soll minimiert werden. Ein wesentliches Hilfsmittel dafür ist der *Approximationssatz* oder der aus ihm folgende *Projektionssatz* (beide in *FA, §1.4.2*).

Es sei nämlich zusätzlich $f \in \mathcal{H}_1(G)$. Das ist „die einschränkende Annahme“ an die Randdaten; f soll also so in G hinein fortsetzbar sein, daß das Dirichletsche Integral für die Fortsetzung existiert. Diese Annahme ist physikalisch realistisch, weil f beispielsweise von einer einfallenden Welle erzeugt wird, welche – jedenfalls lokal – zu $\mathcal{H}_1(G)$ gehört. Die von Prym und Hadamard angegebenen Beispiele erfüllen diese Voraussetzung jedoch nicht. Es sei ferner

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in \mathcal{H}_1(G) \;\middle|\; u - f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \right\}$$

„die sinngemäße Erweiterung“ des Lösungsbegriffs. Dann gilt

$$\overset{1}{\exists}\, u \in \mathcal{D} \qquad J(u) = \inf_{v \in \mathcal{D}} J(v).$$

Das folgt unmittelbar aus dem Approximationssatz, weil $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_1(G)$ konvex und abgeschlossen ist.

Natürlich kann man auch den *Rieszschen Darstellungssatz benutzen.* Es sei $v := f - u$. Dann ist

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad (\varphi, v)_1 = (\varphi, f)_1.$$

Wir haben also ein $v \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ so zu bestimmen, daß

$$\forall\, x \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad (x, v)_1 = (x, f)_1$$

gilt. Das leistet aber gerade der Rieszsche Darstellungssatz (vgl. *FA, §1.5.3,*).

Die wohl eleganteste Methode, die Dirichletsche Randwertaufgabe zu lösen (und der man ihre Herkunft aus der Variationsrechnung kaum noch ansieht), besteht im direkten Anwenden des Projektionssatzes. Hierauf hat HERMANN WEYL, 1885–1955, in seiner wichtigen Arbeit im Duke Mathematical Journal [1940] hingewiesen. Es sei wieder $f \in \mathcal{H}_1(G)$ vorgegeben. Man projeziere

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(G) &= \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \oplus \mathring{\mathcal{H}}_1(G)^\perp, \\ f \quad &= \quad v \quad + \quad u. \end{aligned}$$

Dann ist u die gesuchte Lösung. Es ist nämlich $u - f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$, also $u \in \mathcal{D}$, und es gilt

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad 0 = \big(u,\, \varphi\big)_1 = (u, \phi) + (\nabla u, \nabla \phi) = \big(u,\, (-\Delta + 1)\varphi\big).$$

Damit haben wir eine verallgemeinerte Lösung für die Randwertaufgabe (1) gefunden. Aus dem Weylschen Lemma (vgl. *FA, Lemma 6.6.8*) folgt dann $u \in \mathcal{C}_\infty(G)$. Sind Rand und Randwerte genügend glatt, dann folgt aus Sobolevschen Einbettungssätzen auch $u \in \mathcal{C}(\bar{G})$.

Auch die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe zur Potentialtheorie kann man durch Projezieren erhalten. Dazu wählt man

$$\mathcal{D}_0(G) := \left\{ U \in \big(\mathcal{L}^2(G)\big)^{\mathrm{n}} \;\middle|\; \forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \quad (\nabla\varphi, U) = 0 \right\},$$

also die Menge der divergenzfreien Felder $U \in \left(\mathcal{L}^2(G)\right)^{\mathrm{n}}$. Aus dem Projektionssatz folgt dann unmittelbar

$$\left(\mathcal{L}^2(G)\right)^{\mathrm{n}} = \overline{\nabla\mathring{\mathcal{H}}_1(G)} \oplus \mathcal{D}_0(G).$$

Nun ist $\nabla\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ bereits abgeschlossen. Das folgt für Gebiete $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, die in mindestens einer Richtung beschränkt sind, also etwa für

$$G \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \;\middle|\; 0 < x_n < d \right\},$$

aus der *Ersten Poincaréschen Ungleichung*

$$\forall\, u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad \|u\|_{\mathcal{L}^2(G)} \leq d\,\|\nabla u\|_{(\mathcal{L}^2(G))^{\mathrm{n}}}$$

(vgl. etwa *FA, §6.4*). Ist nämlich (φ_n) eine Folge aus $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ mit $\|\nabla\varphi_n - \Phi\|_{(\mathcal{L}^2(G))^{\mathrm{n}}} \to 0$, dann zeigt diese Abschätzungung die Existenz eines $\varphi \in \mathcal{L}^2(G)$ mit $\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}^2(G)} \to 0$. Aus

$$\forall\, \psi \in \mathcal{H}_1(G) \qquad (\nabla\psi, \varphi_n) = -(\psi, \nabla\varphi_n)$$

erhält man also

$$\forall\, \psi \in \mathcal{H}_1(G) \qquad (\nabla\psi, \varphi) = -(\psi, \Phi).$$

Damit ist φ im schwachen Sinne differenzierbar, und aus der Eigenschaft „stark gleich schwach" der verallgemeinerten Ableitungen (vgl. die Einführung zu *FA* und *FA, §6.6.1*) folgt $\varphi \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$. Damit gilt also

$$\left(\mathcal{L}^2(G)\right)^{\mathrm{n}} = \nabla\mathring{\mathcal{H}}_1(G) \oplus \mathcal{D}_0(G).$$

Es sei nun $f \in \mathcal{H}_1(G)$ vorgegeben. Dann suchen wir ein $u \in \mathcal{H}_1(G)$ mit $u - f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ sowie

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad (\nabla\varphi, \nabla u) = 0.$$

Dazu projezieren wir

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}^2(G)\right)^{\mathrm{n}} &= \nabla\mathring{\mathcal{H}}_1(G) \oplus \mathcal{D}_0(G), \\ \nabla f \quad &= \quad \nabla w \quad + \quad U \end{aligned}$$

und wählen $u := f - w \in \mathcal{H}_1(G)$. Dann ist $u - f = -w \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ sowie $\nabla u = U \in \mathcal{D}_0$; u löst also die Dirichletsche Randwertaufgabe zur Potentialgleichung.

Ist $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ein beliebiges (unbeschränktes) Gebiet, dann gilt nur noch die *Zweite Poincarésche Ungleichung* (vgl. *FA, §6.4*)

$$\forall\, u \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad (n-2)\left\|\frac{u(\cdot)}{|\cdot|}\right\|_{\mathcal{L}^2(G)} \leq 2\,\|\nabla u\|_{(\mathcal{L}^2(G))^{\mathrm{n}}}.$$

Wir wählen deshalb (für $n \geq 3$) den gewichteten Hilbertraum $\mathcal{L}^2_\rho(G)$ mit

$$\rho(x) := \frac{1}{1 + |x|},$$

also mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2_\rho(G)} := \sqrt{\int_G \frac{|u(x)|^2}{(1+|x|)^2}dx},$$

sowie die Räume

$$\mathcal{H}_{1,\rho}(G) := \left\{\mathcal{C}_1(G) \cap \mathcal{W}_{1,\rho}(G);\ \|\cdot\|_{1,\rho}\right\}^{\sim} \quad \text{und} \quad \mathring{\mathcal{H}}_{1,\rho}(G) := \left\{\mathring{\mathcal{C}}_\infty(G);\ \|\cdot\|_{1,\rho}\right\}^{\sim}$$

mit

$$\|u\|_{1,\rho} := \sqrt{\|u\|^2_{\mathcal{L}^2_\rho(G)} + \|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(G)}}.$$

Dabei ist $\mathcal{W}_{1,\rho}(G)$ der Raum der einmal schwach differenzierbaren Funktionen, ebenfalls normiert mit $\|\cdot\|_{1,\rho}$.

Analog zum Fall beschränkter Gebiete folgt dann

$$\left(\mathcal{L}^2(G)\right)^{\mathrm{n}} = \nabla\mathring{\mathcal{H}}_{1,\rho}(G) \oplus \mathcal{D}_0(G).$$

Es sei nun $f \in \mathcal{H}_{1,\rho}(G)$ vorgegeben. Dann erhalten wir daraus auch in diesem Falle eine Lösung u der Potentialgleichung, und zwar mit $u \in \mathcal{H}_{1,\rho}(G)$. Das überrascht nicht, denn in §3.5 haben wir bereits im Anschluß an die Kelvintransformation das asymptotische Verhalten von Potentialfunktionen in $\mathbb{R}^n$ für große $|x|$ diskutiert und für $n \geq 3$ die Bedingung

$$u(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right) \quad \text{und} \quad (\nabla u)(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right)$$

gefunden. Es erscheint deshalb plausibel, Lösungen in einem entsprechend gewichteten Raum zu suchen.

In $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ gelten die Zweite Poincarésche Abschätzung in etwas modifizierter Form und damit analoge Folgerungen.

Abschließend sei noch einmal betont, daß die Eleganz dieses Zuganges nicht darüber hinweg täuschen darf, daß zum Nachweis der Regularität der erhaltenen Lösungen und der Aussage „stark gleich schwach" teilweise erheblicher analytischer Aufwand zu leisten ist. Die umgekehrte Frage, nämlich, wann bei beliebigem Rand klassische Lösungen aus $\mathcal{C}(\bar{G}) \cap \mathcal{C}_2(G)$ auch verallgemeinerte Lösungen sind, ist ebenfalls nicht trivial. Hierzu sei auf die Arbeiten von *Giesecke [1964]* und *Weck [1969]* verwiesen.

4.4 Die Perronsche Methode

Die Perronsche Methode zur Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe der Potentialtheorie ist um 1923 entstanden. Sie enthält einen besonders gut gelungenen Zugang zur Diskussion des Randverhaltens der Lösungen. Deshalb soll sie im folgenden dargestellt werden.

Es seien in diesem Abschnitt $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit zunächst beliebigem Rand, $f \in \mathcal{C}(\partial G)$ und

$$\mathcal{K} := \mathcal{C}_2(G) \cap \mathcal{C}(\bar{G}).$$

Wir suchen wieder eine Potentialfunktion $u \in \mathcal{K}$ mit $u|\partial G = f$ und beginnen mit einer Bemerkung zum Maximumprinzip.

Bemerkung 4.4.1: *Es sei $u \in \mathcal{C}_2(G)$ und $\Delta u \geq 0$. Dann gilt für u das Maximumprinzip.*

Beweis: O.B.d.A. sei $G \subset \mathbb{R}^3$. Es sei u nicht konstant und $x_0 \in G$ mit

$$u(x_0) = \max_{x \in G} u(x).$$

Es seien ferner $\tau > 0$ und $x_1 \in \partial B(x_0, \tau) \subset G$ mit

$$u(x_1) < u(x_0)$$

gewählt. $\Gamma(x, y)$ sei die Greensche Funktion zu $B(x_0, \tau)$. Dann gilt

$$0 \leq \Gamma(x, y) \leq \frac{1}{4\pi|x - y|}$$

und in $B(x_0, \tau)$

$$u(x) = \underbrace{-\int_{|y-x_0|<\tau} (\Delta u)(y)\, \Gamma(x, y)\, dy}_{\leq 0} \underbrace{- \int_{|y-x_0|=\tau} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \Gamma(x, y)\, dy}_{=: v(x)},$$

also

$$u(x_0) \leq v(x_0).$$

Nun ist

$$v(x) = \frac{\tau^2 - |x - x_0|^2}{4\pi\tau} \int_{|y-x_0|=\tau} \frac{u(y)}{|x - y|^3}\, dy$$

in $B(x_0, \tau)$ eine Potentialfunktion mit den Randwerten u. Mithin genügt v der Mittelwertformel

$$v(x_0) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \int_{|y-x_0|=\tau} u(y)\, dy < u(x_0).$$

Es folgt also der Widerspruch
$$u(x_0) \leq v(x_0) < u(x_0).$$
□

Es seien nun $B \subset G$ eine Kugel und für $u \in \mathcal{C}(\bar{G})$
$$M_B u := \begin{cases} u & \text{in } G \backslash \bar{B}, \\ v \text{ mit } \Delta v = 0, v|\partial B = u|\partial B & \text{in } B. \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^1$ liefert M_B also die lineare Mittelung. Wichtig für das Folgende ist nun die

Definition 4.4.2: *Eine Funktion $u \in \mathcal{C}(\bar{G})$ heißt* subharmonisch *in G, wenn*
$$\forall\, B \subset G \quad \forall\, x \in G \qquad u(x) \leq (M_B u)(x)$$
gilt. Entsprechend heißt u superharmonisch, *wenn $u(x) \geq (M_B u)(x)$ ist.*

In $\mathbb{R}^1$ würde man diese Funktionen konvex (bzw. konkav) nennen. Ist v subharmonisch, dann ist natürlich $-v$ superharmonisch und umgekehrt.

Folgerung 4.4.3: *Es sei $u \in \mathcal{C}_2(G)$ mit $\Delta u \geq 0$. Dann ist u subharmonisch.*

Beweis: Für alle $B \subset G$ gilt
$$\big(u - M_B u\big)\big|\partial B = 0.$$
Sowohl für u als auch für $M_B u$ gilt das Maximumprinzip. Daraus folgt die Behauptung. □

Im folgenden sollen nun Lösungen der Dirichletschen Randwertaufgabe durch subharmonische Funktionen approximiert werden. Dazu bezeichnen wir zunächst mit
$$\mathcal{F} := \big\{u \in \mathcal{C}(\bar{G}) \;\big|\; u \text{ ist in } G \text{ subharmonisch mit } u|\partial G \leq f\big\}$$
die Menge der *Subfunktionen* zu f. Entsprechend werden *Superfunktionen* definiert.

Es ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$, denn jede Konstante c mit
$$c \leq \inf_{y \in \partial G} f(y)$$
gehört zu $\mathcal{F}$. Insbesondere ist
$$f_- := \min_{\partial G} f$$
eine Subfunktion und
$$f_+ := \max_{\partial G} f$$
eine Superfunktion.

Es sei nun für $x \in \bar{G}$
$$u(x) := \sup_{v \in \mathcal{F}} v(x).$$
Dann ist es unser Ziel, folgendes zu zeigen:

1. u ist „verallgemeinerte Lösung“ der Dirichletschen Randwertaufgabe. Insbesondere ist u in G harmonisch.
2. Das Verhalten von u am Rande ∂G läßt sich beschreiben. Insbesondere ist die Dirichletsche Randwertaufgabe im klassischen Sinne genau dann lösbar, wenn der Rand ∂G „dirichletsch“ ist, also gewisse Regularitätsbedingungen erfüllt, die wir im folgenden charakterisieren werden.

4.4.1 Eigenschaften subharmonischer Funktionen

Lemma 4.4.4: *Es seien u in G subharmonisch und v in G superharmonisch mit $u|\partial G \leq v|\partial G$. Dann gilt*

1. *u genügt dem Maximumprinzip.*
2. *In G ist $v > u$ oder $v = u$.*

Beweis:

1. Es seien $x_0 \in G$, u nicht konstant und $u(x_0)$ ein Maximum. Dann gibt es eine Kugel $B := B(x_0, R)$ mit
$$u(x_0) \leq \big(M_B u\big)(x_0) = \frac{1}{\omega_n\, R^{n-1}} \int_{|y-x_0|=R} u(y)\, dy < u(x_0).$$
Das ist ein Widerspruch.

2. $u - v$ ist subharmonisch und genügt dem Maximumprinzip. □

Lemma 4.4.5: *Es seien u in G subharmonisch und $B := B(x_0, \tau) \subset G$. Dann ist auch $M_B u$ in G subharmonisch.*

Beweis: Es sei $B' \subset G$ beliebig und
$$v := M_{B'} M_B u.$$
Unser Ziel ist,
$$M_B u \leq v \quad \text{ in } B'$$
zu zeigen.

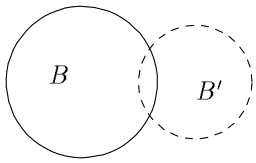

Abbildung 4.2

1. In B' ist v harmonisch, und auf $\partial B'$ ist $u \leq M_B u = v$. Daraus folgt $u \leq v$ in B', also
$$M_B u = u \leq v \quad \text{ in } B' \backslash B.$$

2. In $B \cap B'$ sind $M_B u$ und v harmonisch. Auf $\partial(B \cap B')$ ist $M_B u \leq v$, also
$$M_B u \leq v \quad \text{ in } B \cap B'.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 4.4.6: *Es seien $u_1, \ldots, u_n$ in G subharmonisch. Dann ist auch*
$$u(x) := \max\big\{u_1(x), \ldots, u_n(x)\big\}$$
in G subharmonisch.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition. □

4.4.2 Existenz der verallgemeinerten Lösung

Wir haben bereits die verallgemeinerte Lösung als
$$u(x) := \sup_{v \in \mathcal{F}} v(x)$$
definiert. Zur Motivation dieser Definition nehmen wir an, die Dirichletsche Randwertaufgabe sei klassisch lösbar und U sei die klassische Lösung. Dann ist $U = u$. Für alle $v \in \mathcal{F}$ gilt nämlich
$$(v - U)|\partial G \leq f - f = o,$$
also $v \leq U$. Daraus folgt
$$u \leq U.$$
Andererseits ist $U \in \mathcal{F}$, also $U \leq u$.

Trivial ist also der folgende

Satz 4.4.7: *Es gibt genau eine verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe.*

Wichtig ist es hingegen, im folgenden die Eigenschaften dieser verallgemeinerten Lösung herauszustellen.

4.4.3 Lokaler Regularitätssatz

Lokaler Regularitätssatz: *Es sei u die verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe. Dann gilt:*

1. *u ist in $\bar{G}$ beschränkt mit $f_- \le u \le f_+$.*
2. *$u \in \mathcal{C}_2(G)$.*
3. *$\Delta u = o$.*

Beweis: Es ist f_+ eine Superfunktion. Mithin folgt aus dem Maximumprinzip

$$\forall\, v \in \mathcal{F} \quad \forall\, x \in \bar{G} \qquad v(x) \le f_+$$

oder

$$\forall\, x \in \bar{G} \qquad u(x) \le f_+.$$

Nun ist auch $f_- \in \mathcal{F}$, also

$$\forall\, x \in \bar{G} \qquad f_- \le u(x).$$

Das beweist die erste Aussage.

Es sei nun $B = B(x_0, r) \subset G$. Wir zeigen die zweite und dritte Aussage in B:

1. Wir wählen eine Folge (v_n), $v_n \in \mathcal{F}$, mit

$$v_n(x_0) \to u(x_0).$$

Es sei

$$w_n := \max(v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{F}.$$

Wegen $v_n(x_0) \le w_n(x_0) \le u(x_0)$ gilt dann auch

$$w_n(x_0) \to u(x_0).$$

Für alle $x \in \bar{G}$ ist

$$w_{n+1}(x) \ge w_n(x).$$

Es sei

$$W_n(x) := \big(M_B w_n\big)(x).$$

Die W_n sind Potentialfunktionen in B mit

$$W_{n+1} \ge W_n.$$

Wegen $W_n \in \mathcal{F}$ ist $W_n \le f_+$. Mithin folgt aus dem Zweiten Harnackschen Satz

$$\forall\, B' \Subset B \quad \forall\, x \in B' \qquad W_n(x) \to W(x)$$

mit einer Potentialfunktion W. Aus

$$u(x_0) \leftarrow w_n(x_0) \le \big(M_B w_n\big)(x_0) = W_n(x_0) \le u(x_0)$$

folgt auch $W_n(x_0) \to u(x_0)$, also

$$W(x_0) = u(x_0).$$

2. Wir wollen schließlich

$$\forall\, x \in B' \subset B \qquad u(x) = W(x)$$

beweisen. Es sei $x_1 \in B'$ mit $x_1 \ne x_0$ und $W(x_1) \ne u(x_1)$. Dann folgt

$$\exists\, w \in \mathcal{F} \qquad w(x_1) > W(x_1).$$

Es seien $B_1 := B(x_0, \rho)$ mit $x_1 \in \partial B_1$ und

$$g_n := M_{B_1}\big(\max(W_n, w)\big) \in \mathcal{F}.$$

Weil (W_n) in B_1 gleichmäßig konvergiert, konvergiert auch $\max(W_n, w)$ auf ∂B_1 gleichmäßig. Aus dem Ersten Harnackschen Satz folgt deshalb die Existenz einer harmonischen Funktion g mit

$$g_n \to g \quad \text{(gleichmäßig in } \bar{B}_1).$$

Damit gilt

$$g_n(x_0) \to g(x_0) = M_{B_1}\big(\max(W, w)\big)(x_0) > W(x_0) = u(x_0).$$

Wegen $g_n \in \mathcal{F}$ ist aber $g_n(x_0) \le u(x_0)$, und damit haben wir einen Widerspruch erhalten. Es folgt

$$\forall\, x \in B' \qquad W(x) = u(x)$$

mit einer Potentialfunktion W. □

4.4.4 Regularität bis zum Rand

Wir wollen nun die Äquivalenz

G ist „dirichletsch“ $\Longleftrightarrow$ Die Dirichletsche Randwertaufgabe ist im klassischen Sinne lösbar

zeigen. Dazu verwenden wir einen Begriff, der schon auf Lebesgue zurückgeht [1912], nämlich

Definition 4.4.8: *Es sei $y \in \partial G$ fest. Dann heißt eine Funktion $b(\,\cdot\,, y) \in \mathcal{C}(\bar{G})$* Barriere *zu y, wenn folgendes gilt:*

1. *$b(\,\cdot\,, y)$ ist in G superharmonisch,*
2. *$b(\,\cdot\,, y)$ ist in $\bar{G}\backslash\{y\}$ positiv,*
3. *$b(y, y) = 0$.*

Die Eigenschaft, Barriere zu sein, ist eine lokale Eigenschaft. Um das zu begründen, geben wir

Definition 4.4.9: *Es sei $y \in \partial G$ fest. Dann heißt eine Funktion $w(\,\cdot\,, y)$* lokale Barriere *zu y, wenn es eine Kugel $B(y, r)$ so gibt, daß $w(\,\cdot\,, y)$ in $G \cap B$ Barriere ist.*

Offenbar ist jede Barriere eine lokale Barriere. Die Umkehrung gilt aber auch. Es sei nämlich w eine lokale Barriere zu y. Dann wählen wir (man betrachte Abbildung 4.3)

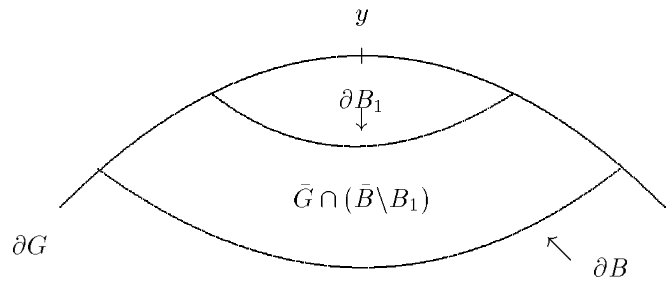

Abbildung 4.3.

$$\begin{aligned} B_1 &:= B\big(y, \tfrac{r}{2}\big) \\ m &:= \min w(x, y) > 0 \qquad \text{für } x \in \bar{G} \cap (\bar{B}\backslash B_1) \end{aligned}$$

$$b(x, y) := \begin{cases} \min\big(m, w(x, y)\big) & \text{für } x \in \bar{G} \cap \bar{B} \\ m & \text{für } x \in \bar{G}\backslash\bar{B}. \end{cases}$$

Dann ist b eine Barriere zu y. Eigenschaften zwei und drei sind klar, wir skizzieren den Nachweis der ersten:

Es sei y fest und $b(y, \cdot\,) \in \mathcal{C}(\bar{G})$ superharmonisch sowohl in $\bar{G}\backslash\bar{B}_1$ als auch in $\bar{G} \cap \bar{B}$. Beide Gebiete überlappen sich. Dann ist b auch in G superharmonisch. Die Eigenschaft, sub- (oder super-) harmonisch zu sein, ist nämlich ebenfalls eine lokale Eigenschaft. Es sei etwa v lokal subharmonisch. v nehme in $x_0 \in G$ das Maximum an. Dann ist v konstant. Die Abbildung v genügt also dem Maximumprinzip, damit ist sie subharmonisch. □

Wir geben schließlich

Definition 4.4.10: *Wir nennen*

1. *den Randpunkt $y \in \partial G$* regulär, *wenn y eine (lokale) Barriere besitzt,*
2. *das beschränkte Gebiet G* dirichletsch, *wenn alle Randpunkte von G regulär sind.*

Es folgt

Satz 4.4.11: *Es sei $y \in \partial G$ regulär. Dann ist die verallgemeinerte Lösung u in y stetig.*

Beweis: Es sei y fest. Die Abbildung f ist in ∂G gleichmäßig stetig. Es gilt also

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, y \in \partial G, |x - y| < \delta \qquad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

In $|x - y| > \delta$ ist die Barriere positiv, also

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k > 0 \quad \forall\, x \in \partial G \qquad |f(y) - f(x)| < \varepsilon + k\, b(x, y).$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} v(x) &:= f(y) - \varepsilon - k\, b(x, y) \quad \text{ist eine Subfunktion,} \\ V(x) &:= f(y) + \varepsilon + k\, b(x, y) \quad \text{ist eine Superfunktion.} \end{aligned}$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} v(x) - f(x) &= f(y) - f(x) - \big(\varepsilon + k\, b(x, y)\big) < 0, \\ V(x) - f(x) &= f(y) - f(x) + \big(\varepsilon + k\, b(x, y)\big) > 0, \end{aligned}$$

also

$$\forall\, x \in \partial G \qquad v(x) < f(x) < V(x).$$

Aus $v \le u \le V$ folgt daher

$$\begin{aligned} u(x) - f(y) &\le V(x) - f(y) = \varepsilon + k\, b(x, y), \\ u(x) - f(y) &\ge v(x) - f(y) = -\varepsilon - k\, b(x, y). \end{aligned}$$

Das heißt, es ist

$$\big|u(x) - f(y)\big| \le \varepsilon + k\, b(x, y).$$

Mithin ist u in y stetig. □

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen

Satz 4.4.12: *Es sei G dirichletsch. Dann ist die Dirichletsche Randwertaufgabe im klassischen Sinne lösbar.*

Es gilt aber auch

Satz 4.4.13: *Die Dirichletsche Randwertaufgabe sei im klassischen Sinne lösbar. Dann ist G dirichletsch.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $f \in \mathcal{C}(\partial G)$ ein $u \in \mathcal{C}(\bar{G})$ mit $\Delta u = 0$ und $u|\partial G = f$. Es sei $y \in \partial G$ fest. Wir konstruieren eine Barriere zu y:

Es sei $F(x) := |x - y| = r$. In Polarkoordinaten gilt dann

$$\Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) r = \frac{n-1}{r} > 0.$$

Es ist $F \in \mathcal{C}_2(G)$, und für F gilt das Maximumprinzip. Mithin ist F subharmonisch. Es sei $b(\,\cdot\,, y)$ die klassische Lösung zu F, also

$$\forall\, x \in \partial G \qquad b(x, y) = |x - y|.$$

Weil F auch Subfunktion ist, folgt

$$b(x, y) \ge F(x) = |x - y|.$$

Es gilt also

1. $b(\,\cdot\,, y)$ ist superharmonisch, weil $b(\,\cdot\,, y)$ eine klassische Lösung ist,
2. $b(x, y) \ge |x - y| > 0$ für $x \in \bar{G} \setminus \{y\}$,
3. $b(y, y) = 0$.

Mithin ist $b(x, y)$ eine Barriere. □

Damit haben wir eine Charakterisierung für die Regularität des Randes gefunden. Auch Norbert Wiener, 1894–1964, gelangt mit seiner *Kapazitätsmethode* zu einer solchen Charakterisierung. Es sei auf seine Arbeiten [1924] verwiesen.

4.4.5 Hinreichende Kriterien für die Regularität des Randes

Als letztes wollen wir reguläre Randpunkte durch einfache geometrische Bedingungen charakterisieren. Es sei also $y \in \partial G$ ein fest gewählter Randpunkt. Dann zeigen wir als erstes

Satz 4.4.14: *Es seien $y \in \partial G \subset \mathbb{R}^2$ und S ein offenes Segment mit $S \cap G = \emptyset$ und $\bar{S} \cap \bar{G} = \{y\}$. Dann ist y regulär.*

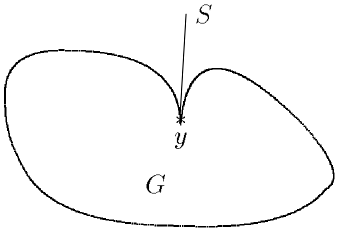

Abbildung 4.4.

Beweis: Wir wählen $r < 1$ so, daß $B(y, r)$ das Segment S in $z_0 \in S$ schneidet, und rechnen in Polarkoordinaten um y, in komplexer Notation

$$z = \rho\, e^{i\varphi}.$$

Die komplexe Ebene schneiden wir längs S auf. Dann ist die holomorphe Funktion

$$\frac{1}{\ln z} = \frac{1}{\ln \rho + \mathrm{i}\varphi} = \frac{\ln \rho - \mathrm{i}\varphi}{|\ln \rho\,|^2 + \varphi^2}$$

in G erklärt und

$$w(x, y) := -\operatorname{Re} \frac{1}{\ln z} = -\frac{\ln \rho}{|\ln \rho\,|^2 + \varphi^2}$$

eine lokale Barriere zu y. Es ist nämlich $1/\ln z$ in $G \cap B$ harmonisch, $w > 0$ in $\bar{G} \cap \bar{B} \setminus \{y\}$ und $w(y, y) = 0$. □

Analog läßt sich auch die Dirichletsche Randwertaufgabe für eine Scheibe mit Riß klassisch lösen, nicht aber für den gepunkteten Einheitskreis. Der Riemannsche Abbildungssatz folgt ebenfalls. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit mehr als einem Randpunkt läßt sich konform auf den Einheitskreis abbilden.

Leider gilt dieses schöne Resultat in $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, nicht mehr. Dafür hat Lebesgue schon [1913] ein Beispiel angegeben, die *Lebesguesche Spitze* (vgl. *Courant & Hilbert II [1962], S. 303*). Wir geben hier zwei Charakterisierungen regulärer Punkte für den Fall $n \geq 3$ an. Zunächst eine sehr einfache, nämlich

Satz 4.4.15: *Es sei $B(z, r)$ eine Kugel mit $B \cap G = \emptyset$ und $\bar{B} \cap \bar{G} = \{y\}$. Dann ist y regulär.*

Beweis: Es ist

$$b(x, y) := \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|x - z|^{n-2}}$$

eine Barriere zu y. Das sieht man unmittelbar. □

Schärfer ist die Aussage

Satz 4.4.16: *Es sei C ein Kegel mit der Spitze y und $C \cap G = \emptyset$ sowie $\bar{C} \cap \bar{G} = \{y\}$. Dann ist y regulär.*

Beweis: Angenommen, wir würden die Greensche Funktion $\Gamma(x_1, x_2)$ für das Äußere $A(y)$ von C kennen. Dann halten wir $x_2 \in A \setminus \bar{G}$ fest und erhalten durch

$$b(x, y) := \Gamma(x, x_2) \quad \text{für } x \text{ aus einer Umgebung von } y$$

eine lokale Barriere.

Im nächsten Abschnitt §4.5 werden wir kurz *das Schwarzsche Alternierende Verfahren* besprechen. Das Verfahren leistet im wesentlichen folgendes: Die Greenschen Funktionen $\Gamma_i, i = 1, 2$, seien für die Gebiete G_i bekannt. Die Gebiete G_i mögen sich überlappen (das wird präzisiert). Dann existiert auch die Greensche Funktion für die Vereinigung $G_1 \cup G_2$. Weil man die Greensche Funktion für einen Halbraum kennt, kann man sie auch für das Äußere eines Tetraeders (in $\mathbb{R}^3$ als Vereinigung von vier Halbräumen) angeben. Man wähle nun einen Tetraeder T mit der Spitze y, der ganz in C liegt. Dann ist die Greensche Funktion für das Äußere von T eine lokale Barriere zu y. □

4.5 Das Schwarzsche Alternierende Verfahren

Im folgenden soll kurz das *Schwarzsche Alternierende Verfahren* vorgestellt werden. Es seien G_1 und G_2 zwei glatt berandete beschränkte Gebiete in $\mathbb{R}^n$, für die die Dirichletsche Randwertaufgabe jeweils im klassischen Sinne lösbar sein möge. Denken Sie zunächst an zwei Kugeln. Wir setzen

$$D := G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$$

voraus und, insbesondere, daß ∂G_1 und ∂G_2 sich „schneiden" und nicht berühren. Es sei

$$P := \partial G_1 \cap \partial G_2$$

die $(n-2)$-dimensionale Schnittfläche und

$$B := G_1 \cup G_2.$$

Wir definieren schließlich $a_1, b_1 \subset \partial G_1$ und $a_2, b_2 \subset \partial G_2$ vermöge

$$\partial G_1 = a_1 \cup b_1 \quad \text{und} \quad \partial G_2 = a_2 \cup b_2$$

sowie

$$\partial B = a_1 \cup a_2 \quad \text{und} \quad \partial D = b_1 \cup b_2.$$

Die Randstücke a_1, a_2, b_1 und b_2 seien abgeschlossen. Man betrachte Abbildung 4.5.

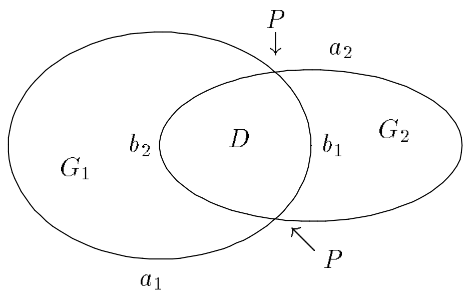

Abbildung 4.5: Zum Schwarzschen Alternierenden Verfahren.

Mit Hilfe des Schwarzschen Alternierenden Verfahrens zeigt man dann, daß die klassische Dirichletsche Randwertaufgabe für B ebenfalls lösbar ist.

Beweis: Es sei $f \in \mathcal{C}(\partial B)$ vorgegeben und $f_i := f\big|a_i$. Es sei ferner

$$\Gamma := \left\{ g \in \mathcal{C}(b_1) \;\middle|\; g \text{ setzt } f|a_i \text{ stetig fort} \right\}.$$

Mit

$$d(g_1, g_2) := d_{b_1}(g_1, g_2) := \sup_{x \in b_1} |g_1(x) - g_2(x)|$$

ist Γ ein vollständiger metrischer Raum.

Es sei nun $g \in \Gamma$ beliebig gewählt und $u_1\{f_1, g\}$ die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe für G_1 mit den Randwerten $\{f_1, g\}$. Es sei ferner $u_2\{u_1|b_2, f_2\}$ die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe für G_2 mit den Randwerten $\{u_1|b_2, f_2\}$. Es sei schließlich

$$\begin{aligned} T \;:\; \Gamma &\longrightarrow \Gamma, \\ g &\longmapsto u_2|b_1. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist, einen Fixpunkt γ von T zu finden. Nehmen wir an, γ existiere. Dann löst

$$u(x) := \begin{cases} u_1\{f_1, \gamma\}(x) & \text{für } x \in G_1, \\ u_2\{u_1|b_2, f_2\}(x) & \text{für } x \in G_2 \end{cases}$$

die Dirichletsche Randwertaufgabe für G, weil dann u_1 und u_2 in D übereinstimmen.

Die Existenz des Fixpunktes γ folgt nun aus dem Banachschen Fixpunktsatz und folgendem

Lemma 4.5.1: *Es sei v in G_1 harmonisch, $v|a_1 = o$ und $\left|v|b_1\right| \le 1$. Dann gilt*

$$\exists\, k = k(G_1, G_2) \le k_0 < 1 \qquad \left|v|b_2\right| \le k.$$

Dann ist nämlich mit $v_i := u_1\{f_1, g_i\}$

$$d(Tg_1, Tg_2) \le d_{b_2}\bigl(u_2\{v_1|b_2, f_2\}, u_2\{v_2|b_2, f_2\}\bigr) = d_{b_2}\bigl(u_1\{f_1, g_1\}, u_1\{f_1, g_2\}\bigr) \le k\, d(g_1, g_2).$$

Der <u>Beweis</u> zu Lemma 4.5.1 soll nur skizziert werden: Es seien in $\mathbb{R}^3$

$$w(x) := -\frac{1}{2\pi}\int_{b_1} \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\,dy \qquad \text{für } x \in G_1$$

und

$$w_0(x) := -\frac{1}{2\pi}\int_{b_1} \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\,dy \qquad \text{für } x \in \partial G_1.$$

Dann folgt aus den Sprungrelationen

$$\begin{aligned} w(x) &\to 1 + w_0(x_0) && \text{für } x \to x_0 \in b_1 \backslash P,\\ w(x) &\to w_0(x_0) && \text{für } x \to x_0 \in a_1 \backslash P. \end{aligned}$$

Nun ist w_0 auf ∂G_1 stetig, kann also zu einer Potentialfunktion aus $\mathcal{C}(\bar{G}_1)$ fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit w_0. Es sei $u := w - w_0$. Dann folgt

$$u\big|(a_1 \backslash P) = 0 \quad \text{und} \quad u\big|(b_1 \backslash P) = 1.$$

Das Verhalten von $u(x)$ für $x \in b_2, x \to x_0 \in P$ muß nun untersucht werden. Wie bei der Herleitung der Sprungrelationen findet man durch explizites Nachrechnen mit $0 < p < 1$

$$u(x) \to p \qquad \text{für } x \in b_2 \text{ mit } x \to x_0 \in P.$$

An dieser Stelle geht ein, daß sich b_1 und b_2 nicht berühren. Andernfalls wäre p gleich Null oder Eins.

Es sei nun v wie im Lemma. Dann ist

$$(u \pm v)|\partial G_1 \ge 0,$$

also $u \pm v \ge 0$ in $\bar{G}_1$. Damit ist in $\bar{G}_1$

$$|v| \le u$$

oder

$$\left|v|b_2\right| \le u|b_2 \le k < 1. \qquad \square$$

4.5.1 Zur Existenz der Greenschen Funktion

Es seien nun G_i Gebiete, für die Dirichletsche Randwertaufgabe lösbar ist und die ein Gebiet G ausschöpfen, etwa

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \to G.$$

Es seien Γ_n die Greenschen Funktionen zu G_n. Dann existiert auch die Greensche Funktion Γ zu G, wenn es zu jedem Randpunkt $y_0 \in \partial G$ ein Tetraeder T mit der Spitze y_0 und $G \subset \mathbb{R}^n \backslash T$ gibt. Das sieht man folgendermaßen: Es sei $x \in G$ fest, etwa $x \in G_1$. Dann gilt in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $G \backslash \{x\}$

$$\Gamma_n(x, \cdot) \to \Gamma(x, \cdot).$$

Für $n > m$ und $y \in G_m$ folgt nämlich aus dem Maximumprinzip (in $\mathbb{R}^3$)

$$\Gamma_m(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|} \le \Gamma_n(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|}.$$

Die Folge

$$\left(\Gamma_n(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|}\right)$$

wächst also monoton und ist wegen

$$0 \leq \Gamma_n(x,y) \leq \frac{1}{4\pi|x-y|}$$

beschränkt. Aus dem Zweiten Harnackschen Satz folgt deshalb die Existenz einer Potentialfunktion $\Gamma(x,y) - 1/(4\pi|x-y|)$ mit

$$\forall\, G' \Subset G \quad \forall\, y \in G' \qquad \Gamma_n(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|} \to \Gamma(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|}.$$

Es bleibt, das Randverhalten von Γ zu untersuchen. Weil es zu jedem Randpunkt $y_0 \in \partial G$ ein Tetraeder T mit der Spitze y_0 und $G \subset \mathbb{R}^n \backslash T$ gibt, existiert die Greensche Funktion $\Gamma^*(x,y)$ für das Äußere von T. Die Dirichletsche Randwertaufgabe für den Halbraum wird nämlich (in $\mathbb{R}^3$) durch

$$u(x) := \frac{x_3}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t_1,t_2)\,dt_1 dt_2}{\sqrt{(x_1-t_1)^2 + (x_2-t_2)^2 + x_3^2}^{\,3}}$$

gelöst. Das Schwarzsche Alternierende Verfahren läßt sich für diese Situation modifizieren und liefert die Existenz von Γ^* (in $\mathbb{R}^3$ erhält man das Äußere eines Tetraeders als Vereinigung von vier Halbräumen).

Aus dem Maximumprinzip folgt dann

$$\Gamma_n(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|} \leq \Gamma^*(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|},$$

also

$$0 \leq \Gamma_n(x,y) \leq \Gamma^*(x,y)$$

oder

$$\forall\, y \in G \qquad 0 \leq \Gamma(x,y) \leq \Gamma^*(x,y).$$

Nun ist aber $\Gamma^*(x,\cdot\,)$ in y_0 stetig mit $\Gamma^*(x,y_0) = 0$. Deshalb folgt

$$0 \leq \Gamma(x,y) \to 0 \quad \text{für } y \to y_0.$$

Mithin ist auch Γ in y_0 stetig und verschwindet dort. $\Gamma(x,y)$ ist also Greensche Funktion für G.

Erwähnt werden soll schließlich nur noch eine andere Ausschöpfungsmethode, nämlich die auf Henri Poincaré, 1854–1912, zurückgehende *Méthode de balayage*.

5 Randwertaufgaben zu elliptischen Differentialoperatoren

In diesem Kapitel sollen Randwertaufgaben zu allgemeineren elliptischen Gleichungen und Systemen behandelt werden. Denken wir zunächst an eine Gleichung zweiter Ordnung

$$L\,u \overset{!}{=} f$$

mit

$$L := -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k + \sum_i a_i \partial_i + a.$$

Dabei sollen die Koeffizienten a_{ik}, a_i, a in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ reellwertig, beschränkt und meßbar sein. Es sei ferner $a_{ik} = a_{ki}$ mit

$$\exists\, p > 0 \quad \forall\, x \in G \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{i,k} a_{ik}(x)\, \xi_i \xi_k \geq p\, |\xi|^2.$$

Wenn es nötig ist, machen wir weitere Voraussetzungen bzgl. der Glattheit der Koeffizienten. Außerdem stellen wir eine Randbedingung; im einfachsten Fall geben wir u am Rande ∂G vor. Es sei

$$M(u,v) := \sum_{i,k} (a_{ik} \partial_k u, \partial_i v) + \sum_i (a_i \partial_i u, v) + (au, v)$$

die zu L gehörende *Dirichletsche Form*. Dabei legen wir das $\mathcal{L}^2(G)$-Skalarprodukt zugrunde, und es sei $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G, \mathbb{C})$.

Zur Vereinfachung wählen wir zunächst

$$S := -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k + id$$

mit

$$\mathcal{D}(S) := \Big\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\Big|\; \exists\, h \in \mathcal{H} \quad \forall\, v \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \quad T(u,v) = (h,v) \Big\}.$$

Dabei seien $T(u,v) := \sum (a_{ik} \partial_k u, \partial_i v) + (u,v)$ und $Su := h$. Die Gleichung

$$Su \overset{!}{=} f \in \mathcal{H} \tag{$*$}$$

beschreibt also die Dirichletsche Randwertaufgabe zu S. Es sei $\mathcal{D}(G)$ die Menge der Vektoren $U \in \big(\mathcal{L}^2(G)\big)^n$, deren schwache Divergenz in $\mathcal{H}$ existiert. Mit dem Skalarprodukt

$$\big(U, V\big)_{\mathcal{D}(G)} := \big(U, V\big)_{(\mathcal{L}^2(G))^n} + \big(\operatorname{div} U, \operatorname{div} V\big)_{\mathcal{H}}$$

und wegen „stark gleich schwach“ wird dann $\mathcal{D}(G)$ ein Hilbertraum mit

$$\mathcal{D}(G) = \Big\{ U \in \Big(\mathcal{L}^2(G)\Big)^n \;\Big|\; \operatorname{div} U \in \mathcal{L}^2(G) \Big\} = \Big\{ \big(\mathcal{C}_\infty(G)\big)^n \cap \big(\mathcal{W}_1(G)\big)^n ;\; \|\cdot\|_{\mathcal{D}(G)} \Big\}^{\sim},$$

und es ist

$$\mathcal{D}(S) = \Big\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\Big|\; \Big(\sum_k a_{ik} \partial_k u \Big)_{i \in \mathbb{N}(n)} \in \mathcal{D}(G) \Big\}.$$

Für das Folgende sind die Abschätzungen

$$T(u,u) \geq p\, |u|_1^2 + \|u\|^2 \geq q\, \|u\|_1^2 \quad \text{ mit } q := \min(1,p) > 0$$

und

$$\big| T(u,v) \big| \leq c\, \|u\|_1\, \|v\|_1$$

der zu S gehörenden Dirichletschen Form $T(u,v)$ besonders wichtig und außerdem die Symmetrie

$$\forall\, u, v \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad \overline{T(u,v)} = T(v,u),$$

die aus der Symmetrie der a_{ik} unmittelbar folgt.

Für $f \in \mathcal{H}$ ist $(\,\cdot\,, f)$ ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt dann die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung

$$\forall\, v \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \qquad T(v,u) \overset{!}{=} (v,f) \tag{$**$}$$

und damit auch die der Gleichung $(*)$. Das wird in §5.1 ausgeführt. Es sei

$$R \;:\; \mathcal{H} \longrightarrow \mathring{\mathcal{H}}_1,\qquad f \longmapsto u$$

der Lösungsoperator vermöge Gl. $(**)$. Dann folgt aus $(**)$

$$\|u\|_1 \leq \frac{1}{q}\,\|f\|.$$

R ist also eine beschränkte Abbildung, und es gilt sogar

$$R \;:\; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(S).$$

Es seien $f, g \in \mathcal{H}$ und $u := Rf, v := Rg$. Dann folgt

$$(Rf,g) = (u,g) = T(u,v) = \overline{T(v,u)} = \overline{(v,f)} = (f,Rg),$$

also die Symmetrie von $R : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Damit ist auch $S = R^{-1}$ selbstadjungiert. $\mathcal{D}(S)$ ist also in $\mathcal{H}$ dicht, und für S steht der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren zur Verfügung.

Man beachte, daß eine beliebige Testfunktion nicht zu $\mathcal{D}(S)$ gehört, solange man keine weiteren Glattheitsannahmen bezüglich der Koeffizienten stellt. Dazu das folgende

Beispiel 5.0.2: *Es seien* $G := (-1,1) \subset \mathbb{R}^1$,

$$a_{11}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{für } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Wir wählen eine Testfunktion $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$ mit

$$\varphi(x) := 1 + x$$

in einer Umgebung $U(0)$ des Nullpunktes. Dann ist dort $\varphi' = 1$ und

$$S\varphi = -\delta + \varphi \notin \mathcal{H}$$

in dieser Umgebung $U(0)$. □

In diesem einfachen Fall haben wir also mit Hilfe der Hilbertraummethode die Randwertaufgabe $(*)$ lösen können. Auch allgemeinere Aufgaben lassen sich auf diese Weise behandeln. Das wird in den nächsten Abschnitten ausgeführt.

Die anderen in der Potentialtheorie vorgestellten Methoden lassen sich ebenfalls verallgemeinern. Die Integralgleichungsmethode und das Schwarzsche Alternierende Verfahren hängen stark an der expliziten Kenntnis der Grundlösung. Man verschafft sich deshalb zunächst eine *Pseudogrundlösung*. Das ist eine Grundlösung für den Term höchster Ableitungsordnung in der Differentialgleichung. Die Methoden werden dadurch technisch aufwendiger, die expliziten Resultate erleichtern aber das Abschätzen der Regularität der Lösung. In dieser Vorlesung soll hierauf nicht weiter eingegangen werden. Es sei auf *Hellwig [1960], S. 160f.* verwiesen.

Die Perronsche Methode ist ebenfalls übertragbar. Man benötigt das Maximumprinzip und einen geeigneten Auswahlsatz. Auch darauf wollen wir nicht weiter eingehen. Vorgestellt werden soll in §5.5 dieser Vorlesung aber wenigstens die *Kontinuitätsmethode*, die auf J. Schauder zurückgeht. Für $0 \leq t \leq 1$ definiert man dabei eine Schar von Operatoren

$$L_t := -(1-t)\,\Delta + t\,L$$

und überträgt Lösungseigenschaften für $L_0 = -\Delta$ auf $L_1 = L$. Im Mittelpunkt stehen hierbei sogenannte *a priori Abschätzungen*. Das sind Abschätzungen für noch unbekannte Lösungen unter der ausdrücklichen

Annahme, daß es sie geben möge. Solche Abschätzungen sind äußerst wichtig, auch für den anschließenden eigentlichen Existenzbeweis. Betrachten wir zum Beispiel eine Gleichung

$$L\,u \stackrel{!}{=} F\,u$$

mit Anfangsdaten u_0. Dabei soll L linear sein und F nichtlineare Terme enthalten. Eine a priori Abschätzung für u in Abhängigkeit von u_0 möge bekannt sein. Dadurch werde eine Kugel $B(r)$ definiert mit $r = r(u_0)$ und $u \in B(r)$. Man wählt nun ein $v \in B(r)$ und löst die lineare Gleichung

$$L\,w \stackrel{!}{=} F\,v.$$

Mit $T : B(r) \to B(r)$, $T := L^{-1}F$ ist also

$$w = T\,v.$$

Ein Fixpunkt von T löst dann die ursprüngliche Gleichung. Für kleine r, und damit für kleine u_0, gelingt oft der Nachweis eines solchen. Abschätzungen von Lösungen, die aus ihrer expliziten Kenntnis folgen, nennt man entsprechend *a posteriori Abschätzungen*.

5.1 Die Dirichletsche Randwertaufgabe

In diesem Abschnitt seien wieder G ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$, a, a_i, a_{ik} reellwertige, beschränkte meßbare Abbildungen mit $a_{ik} = a_{ki}$ und

$$\exists\, p > 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, x \in G \qquad \sum_{i,k} \xi_i a_{ik}(x) \xi_k \geq p\,|\xi|^2.$$

Es sei ferner

$$L := -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k + \sum_i a_i \partial_i + a$$

ein linearer Operator mit

$$L \;:\; \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

und seinem Hauptteil

$$A := -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k\,.$$

Dabei soll $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G, \mathbb{C})$ sein. Die zu A bzw. L gehörenden sesquilinearen Dirichletschen Formen bezeichnen wir mit

$$B(u,v) := \sum_{i,k} (\partial_i u, a_{ik} \partial_k v) \quad \text{bzw.} \quad M(u,v) := B(u,v) + \sum_i (a_i \partial_i u, v) + (au, v).$$

Wir wollen im folgenden die Dirichletsche Randwertaufgabe zu

$$L\,u \stackrel{!}{=} f \tag{1}$$

lösen. Dazu wählen wir

$$\mathcal{D}(L) := \mathcal{D}(A) := \Big\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\Big|\; \partial_i a_{ik} \partial_k u \in \mathcal{H} \Big\}\,.$$

Es gilt

$$\forall\, u, v \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad |B(u,v)| \leq c\,|u|_1\,|v|_1 \tag{2}$$

und

$$\forall\, u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad B(u,u) \geq p\,|u|_1^2 \tag{3}$$

sowie

$$\exists\, q > 0 \quad \exists\, k \geq 0 \quad \forall\, u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad \operatorname{Re} M(u,u) \geq q\,\|u\|_1^2 - k\,\|u\|^2. \tag{4}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus

$$\Big| \operatorname{Re}\Big\{ \sum_i (a_i \partial_i u, u) + (au, u) \Big\} \Big| \leq \varepsilon\,|u|_1^2 + c(\varepsilon)\,\|u\|^2$$

für $\varepsilon > 0$.

Man sagt, die sesquilineare Form $M(u,v)$ sei über dem Teilraum $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ *koerzitiv*, wenn für alle $u,v \in \mathcal{M}$ die Abschätzungen

$$\exists\, c \geq 0 \qquad |M(u,v)| \leq c\,\|u\|_{\mathcal{M}}\,\|v\|_{\mathcal{M}} \tag{5}$$

und

$$\exists\, q > 0 \quad \exists\, k \geq 0 \qquad \big|M(u,u)\big| \geq q\,\|u\|^2_{\mathcal{M}} - k\,\|u\|^2_{\mathcal{H}} \tag{6}$$

gelten. Wird Abschätzung (6) sogar mit $k = 0$ erfüllt, dann nennt man M über $\mathcal{M}$ *streng koerzitiv*.

Wegen

$$\big|M(u,u)\big| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\big|\mathrm{Re}\, M(u,u)\big| + \big|\mathrm{Im}\, M(u,u)\big|\Big\} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Re}\, M(u,u)$$

folgt aus Abschätzung (4), daß M über $\mathring{\mathcal{H}}_1(G) \subset \mathcal{H}$ koerzitiv ist.

Ist die Dirichletsche Form M über $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ streng koerzitiv, dann folgt die eindeutige Lösbarkeit der Dirichletschen Randwertaufgabe zu L, wie es zu Beginn dieses Kapitels am Beispiel des Operators $S = A + id$ beschrieben wurde. Es gilt nämlich der

Darstellungssatz von Lax und Milgram: *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $M(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ eine streng koerzitive sesquilineare Form und F ein beschränktes lineares Funktional über $\mathcal{H}$. Dann gilt:*

$$\overset{1}{\exists}\, u \in \mathcal{H} \quad \forall\, v \in \mathcal{H} \qquad Fv = M(v,u).$$

Der Satz geht Peter Lax und Arthur Milgram, 1912–61, [1954] zurück.

Der Beweis folgt aus dem Rieszschen Darstellungssatz: Zunächst einmal läßt sich Fv mit einem geeigneten $f \in \mathcal{H}$ in der Form

$$Fv = (v,f)$$

darstellen. Es sei nun $u \in \mathcal{H}$ gegeben. $M(\,\cdot\,,u)$ ist ein beschränktes lineares Funktional, läßt sich also ebenfalls mit einem geeigneten $g \in \mathcal{H}$ in der Form

$$M(v,u) = (v,g)$$

darstellen. Das Element g ist u eindeutig zugeordnet. Es sei

$$\begin{aligned} S \;:\; \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ u &\longmapsto g \end{aligned}$$

diese Abbildung. Dann gilt

$$(Su,Su) = M(Su,u) \leq c\,\|Su\|\,\|u\|$$

oder

$$\|Su\| \leq c\,\|u\|.$$

S ist also eine stetige Abbildung. Es gilt aber auch

$$q\,\|u\|^2 \leq \big|M(u,u)\big| = \big|(u,Su)\big| \leq \|u\|\,\|Su\|,$$

also

$$\|Su\| \geq q\,\|u\|.$$

Mithin ist S eine bijektive Abbildung von $\mathcal{H}$ auf den abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{R}(S)$ von $\mathcal{H}$. Es ist sogar $\mathcal{R}(S) = \mathcal{H}$. Wäre das nicht der Fall, dann würde es ein von Null verschiedenes $w \in \mathcal{H}$ geben mit

$$\forall\, r \in \mathcal{R}(S) \qquad (w,r) = 0,$$

und wir erhielten wegen

$$0 = (w,Sw) = M(w,w) \geq q\,\|w\|^2 > 0$$

einen Widerspruch.

Das Element $u := S^{-1}f$ leistet dann das Gewünschte. □

Insbesondere erhält man aus diesem Darstellungssatz, daß alle λ mit $\mathrm{Re}\,\lambda \in (-\infty, -k]$ zur Resolventenmenge von L gehören. Es sei nämlich

$$L_\lambda := L - \lambda\, id$$

und

$$M_\lambda(u,v) := M(u,v) - \lambda\,(u,v)$$

die zu L_λ gehörende Form. Dann gilt

$$\operatorname{Re} M_\lambda(u,u) = \operatorname{Re} M(u,u) - \operatorname{Re}\lambda\,\|u\|^2 \geq q\,\|u\|_1^2 - (k + \operatorname{Re}\lambda)\,\|u\|^2 \geq q\,\|u\|_1^2.$$

Für $\operatorname{Re}\lambda \in (-\infty, -k]$ ist M_λ also über $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ streng koerzitiv. Die Halbebene $\operatorname{Re}\lambda \leq -k$ gehört damit zur Resolventenmenge von L, und es existiert

$$(L - \lambda\, id)^{-1} \;:\; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(L)$$

mit

$$\left\|(L - \lambda\, id)^{-1} f\right\|_1 \leq \frac{1}{q}\,\|f\|.$$

Dieses Ergebnis läßt sich verschärfen. Mit

$$d := \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sup_{x\in G} |a_i(x)|$$

gilt nämlich

Satz 5.1.1: *Die Mengen*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}\lambda \leq -k\right\}$$

und

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}\lambda + k > 0 \quad \textit{und} \quad \left|\operatorname{Im}\lambda\right| > d\sqrt{\frac{\operatorname{Re}\lambda + k}{q}}\right\}$$

gehören zur Resolventenmenge von L.

Beweis: Es sei $\alpha \in (0,q)$ zunächst fest gewählt. Wir zeigen zuerst, daß für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ die Mengen

$$\Lambda_\delta := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|\operatorname{Im}\lambda\right| \geq \frac{\operatorname{Re}\lambda + k}{\delta} + \frac{\delta d^2}{4\alpha}\right\}$$

zur Resolventenmenge von L gehören.

1. Es seien $0 < \varepsilon \leq 1$ und $0 < \delta \leq 1/\varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\,\left|M_\lambda(u,u)\right| &\geq \varepsilon\left\{\operatorname{Re} M_\lambda(u,u) + \frac{1}{\varepsilon}\left|\operatorname{Im} M_\lambda(u,u)\right|\right\}\\
&\geq \varepsilon\left\{\operatorname{Re} M_\lambda(u,u) + \delta\,\left|\operatorname{Im} M_\lambda(u,u)\right|\right\}\\
&\geq \varepsilon\left\{(q-\alpha)\,\|u\|_1^2 + \alpha\|u\|_1^2 - (\operatorname{Re}\lambda + k)\,\|u\|^2 + \delta\,|\operatorname{Im}\lambda|\,\|u\|^2 - \delta d\,\|u\|_1\|u\|\right\}\\
&\geq \varepsilon\left\{(q-\alpha)\,\|u\|_1^2\right\}
\end{aligned}$$

für

$$\left|\operatorname{Im}\lambda\right| \geq \frac{1}{\delta}\left\{\operatorname{Re}\lambda + k + \frac{\delta^2 d^2}{4\alpha}\right\}.$$

Mithin gehören die Mengen Λ_δ für $\delta \in (0, 1/\varepsilon]$ zu $\rho(L)$. Damit gehören die Mengen Λ_δ für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ zur Resolventenmenge von L.

2. Die Enveloppe zur Schar der Geraden $\delta\,|\operatorname{Im}\lambda| = \operatorname{Re}\lambda + k + \delta^2 d^2/4\alpha$ ist

$$|\operatorname{Im}\lambda| = d\sqrt{\frac{\operatorname{Re}\lambda + k}{\alpha}}.$$

Mithin gehört

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\operatorname{Im}\lambda| > d\sqrt{\frac{\operatorname{Re}\lambda + k}{\alpha}}\right\}$$

zur Resolventenmenge von L.

3. Weil diese Aussage für jedes $\alpha < q$ gilt, folgt die Behauptung. □

Verschwinden die Koeffizienten a_i, dann ist das Spektrum von L reell, und es gilt

Satz 5.1.2: *Es sei $d = 0$. Dann gehört $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ zur Resolventenmenge von L, und L ist selbstadjungiert.*

Beweis: Mit $\varepsilon \in (0,1)$ ist

$$\sqrt{2}\left|M_\lambda(u,u)\right| \geq \varepsilon \operatorname{Re} M_\lambda(u,u) + \left|\operatorname{Im} M_\lambda(u,u)\right| \geq \varepsilon q \, \|u\|_1^2 + \Big(|\operatorname{Im}\lambda| - \varepsilon(\operatorname{Re}\lambda + k)\Big)\, \|u\|^2.$$

Mithin ist M_λ für festes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ streng koerzitiv. Die Selbstadjungiertheit von L folgt, wie es zu Beginn dieses Kapitels für den Operator $S = A + id$ beschrieben wurde. □

Interessant ist auch

Satz 5.1.3: *Es sei*

$$W(L) := \Big\{ z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \exists\, u \in \mathcal{D}(L),\ \|u\| = 1, \quad z = (Lu, u) \Big\}$$

der numerische Wertebereich *von L. Dann gilt*

$$W(L) \subset \left\{ \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| \leq d\sqrt{\frac{x+k}{q}} \right\}.$$

Beweis: Es sei $z = x + \mathrm{i}\, y \in W(L)$. Dann ist

$$x = \operatorname{Re} M(u,u) \geq q\, \|u\|_1^2 - k$$

und

$$|y| = \left|\operatorname{Im} M(u,u)\right| \leq d\, \|u\|_1,$$

also

$$|y| \leq d\sqrt{\frac{x+k}{q}}. \qquad \square$$

Weitere Aussagen über den Zusammenhang von numerischem Wertebereich und Spektrum finden sich in *Kato [1976]*.

5.2 Der Fall beschränkter Gebiete

Wir wollen nun unsere Resultate auf den Fall beschränkter Gebiete $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ spezialisieren und das Spektrum diskutieren. Den Fall unbeschränkter Gebiete behandeln wir erst in §8.

Es seien

$$L_0 := L + k\, id$$

mit $\mathcal{D}(L_0) = \mathcal{D}(L)$ und

$$M_0(u,v) := M(u,v) + k(u,v)$$

die zu L_0 gehörende Dirichletsche Form. Dann ist

$$M_0(u,u) \geq q\, \|u\|_1^2.$$

Die Form M_0 ist also streng koerzitiv. Mithin existiert

$$L_0^{-1} \;:\; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(L),$$

und es gilt

$$\left\|L_0^{-1} f\right\|_1 \leq \frac{1}{q}\, \|f\|.$$

Aufgrund des Rellichschen Auswahlsatzes ist deshalb

$$\begin{aligned} K \;:\; \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ f &\longmapsto L_0^{-1} f \end{aligned}$$

kompakt.

Betrachten wir nun mit $\lambda \in \mathbb{C}$ in $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ die Gleichung

$$(L - \lambda\, id)\, u \stackrel{!}{=} f \qquad (*)$$

oder

$$\big(L_0 - (\lambda + k)\, id\big) u \stackrel{!}{=} f.$$

Hieraus folgt

$$\big(id - (\lambda + k) K\big) u \stackrel{!}{=} Kf, \tag{$**$}$$

und umgekehrt ist eine Lösung $u \in \mathcal{H}$ dieser Gleichung $(**)$ wegen

$$u = K\big((\lambda + k)u + f\big) \in \mathcal{D}(L)$$

auch eine Lösung der ursprünglichen Gleichung $(*)$.

Es genügt also, Gleichung $(**)$ in $\mathcal{H}$ zu betrachten. Dabei interessieren natürlich nur noch Werte von λ mit $\operatorname{Re}(\lambda + k) > 0$. Es sei λ eine solche Zahl. Dann folgt aus der Riesz-Schauder Theorie, daß für Gl. $(**)$ die Fredholmsche Alternative gilt. Der Operator L besitzt also höchstens ein reines Punktspektrum ohne Häufungspunkt im Endlichen. Man vergleiche zum Beispiel *FA, Satz 7.5.4*. Verschwinden die Koeffizienten a_i, dann ist L selbstadjungiert und besitzt abzählbare Punkteigenwerte λ_n mit $\lambda_n \to \infty$. All das folgt aus der Spektraltheorie für kompakte Abbildungen. In §6 werden wir näher hierauf eingehen.

Es sei λ nun ein Eigenwert von Gl. $(*)$ bzw. Gl. $(**)$. Dann lautet die notwendige und hinreichende Lösungsbedingung für Gl. $(**)$

$$\forall\, v \in \mathcal{N}\big(id - (\bar\lambda + k) K^*\big) \qquad 0 = (v, Kf).$$

Nun ist

$$0 = (v, Kf) = (K^* v, f) = \frac{1}{\bar\lambda + k}(v, f)$$

und

$$o = L_0^* \left(id - (\bar\lambda + k) K^*\right) v = \big(L_0^* - (\bar\lambda + k)\, id\big)\, v = (L^* - \bar\lambda\, id) v.$$

Die Lösungsbedingung lautet also

$$\forall\, v \in \mathcal{N}\big((L - \lambda\, id)^*\big) \qquad (v, f) = 0. \tag{$***$}$$

5.3 Andere Randwertaufgaben

Bisher haben wir im wesentlichen die Dirichletsche Randwertaufgabe behandelt. Natürlich treten in der Theorie und in vielen Anwendungen auch andere Randwertaufgaben auf. Im folgenden sollen einige kurz vorgestellt werden. Dabei beschränken wir uns auf den Operator

$$-\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k$$

mit der Form $B(u,v) = \sum_{i,k} (\partial_i u, a_{ik} \partial_k v)$. Es sei $A_1 := A$ der entsprechende Operator mit Dirichletscher Randbedingung.

5.3.1 Die Neumannsche Randwertaufgabe

Neben der Dirichletschen Randwertaufgabe ist die Neumannsche wohl die wichtigste. Bei ihr wird die Ableitung in Normalenrichtung der gesuchten Funktion am Rande vorgegeben. Wir wählen

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A_2) &:= \Big\{ u \in \mathcal{H}_1(G) \;\Big|\; \exists\, h \in \mathcal{H} \quad \forall v \in \mathcal{H}_1 \quad B(u,v) = (h, v) \Big\} \\ &= \Big\{ u \in \mathcal{H}_1(G) \;\Big|\; \big(a_{ik} \partial_k u\big)_{i \in \mathbb{N}(n)} \in \mathring{\mathcal{D}}(G) \Big\}\end{aligned}$$

mit $A_2 u := -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k u$ und

$$\mathring{\mathcal{D}}(G) := \Big\{ U \in \big(\mathcal{L}^2(G)\big)^n \;\Big|\; \forall\, f \in \mathcal{H}_1(G) \quad (U, \operatorname{grad} f) = -(\operatorname{div} U, f) \Big\} = \Big\{ \big(\mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)\big)^n;\ \|\cdot\|_{\mathcal{D}(G)} \Big\}^{\sim}.$$

Offenbar ist $B(u,v)$ auch über $\mathcal{H}_1(G)$ koerzitiv, und die Lösungstheorie überträgt sich fast wörtlich. Zur Motivation der Definition bemerken wir, daß bei glatten Daten aus $A_2 u = f$

$$\forall\, g \in \mathcal{C}_1(\bar G) \qquad B(u, g) = \int_{\partial G} \sum_{i,k} (n_i a_{ik} \partial_k u) \bar g + (f, g)$$

folgt. Wegen $B(u,g) = (f,g)$ ist also

$$\forall\, g \in \mathcal{C}_1(\bar{G}) \qquad \int_{\partial G} \sum_{i,k} (n_i a_{ik} \partial_k u)\bar{g} = 0,$$

und daraus erhält man

$$\sum_{i,k} n_i a_{ik} \partial_k u \,\Big|\, \partial G = o.$$

Die Neumannsche Randwertaufgabe heißt auch *Zweite Randwertaufgabe* oder *Natürliche Randwertaufgabe*, weil bei ihr die Form über ganz $\mathcal{H}_1(G)$ betrachtet wird, und nicht über einen Teilraum davon. Es sei daran erinnert, daß der Rellichsche Auswahlsatz in diesem Falle für Gebiete mit der Segmenteigenschaft gilt (vgl. *FA, Satz 6.6.26*). Zur Lösung der Gl. $(*)$ entsprechenden Aufgabe wird also eine geringe Regularität des Randes ∂G benötigt.

5.3.2 Gemischte Randwertaufgaben

Als nächstes wollen wir zwei gemischte Dirichlet-Neumannsche Randwertaufgaben formulieren. Es sei ∂G glatt, und der Normalenvektor möge sich als $\mathcal{C}_1(\bar{G})$-Abbildung in G hinein fortsetzen lassen. Es sei auch $h \in \mathcal{C}_1(\bar{G})$. Wir stellen die Randbedingung

$$\sum_{i,k} (n_i a_{ik} \partial_k + h) u \,\Big|\, \partial G = o.$$

Zur Formulierung dieser Randwertaufgabe wählen wir

$$B_3(u,v) := B(u,v) + \sum_i \int_G \partial_i (n_i\, h\, u\, \bar{v})$$

und

$$\mathcal{D}(A_3) := \Big\{ u \in \mathcal{H}_1(G) \;\Big|\; \exists\, f \in \mathcal{H} \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_1 \quad B_3(u,v) = (f,v) \Big\}$$

mit $A_3 u := -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k u$. Aus $A_3 u = f$ folgt nämlich für glatte Lösungen und alle $g \in \mathcal{C}_1(\bar{G})$

$$B_3(u,g) = \sum_{i,k} \int_{\partial G} (n_i a_{ik} \partial_k u + h\, u)\, \bar{g} + (f,g).$$

Das motiviert die Wahl der Form B_3. Offenbar gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_i \int_G \partial_i \big(n_i h |u|^2\big) \right| \le c_1 \big(\|u\|^2 + (|u|, |\nabla u|)\big) \le \varepsilon\, |u|_1^2 + c(\varepsilon)\, \|u\|^2.$$

Die Form $B_3(u,v)$ ist also über $\mathcal{H}_1(G)$ koerzitiv, und es gibt ein $k \in \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\mathbb{C} \backslash [-k, \infty) \subset \rho(A_3).$$

Diese gemischte Randwertaufgabe wird oft auch *Dritte Randwertaufgabe* oder *Robinsche Randwertaufgabe* genannt, nach Gustave Robin, 1855–97.

Eine andere gemischte Dirichlet-Neumannsche Randwertaufgabe erhält man folgendermaßen: ∂G werde in zwei disjunkte zusammenhängende Flächenstücke Γ_1 und Γ_2 zerlegt. Es sei also $\partial G = \bar{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Auf Γ_1 stellt man die Dirichletsche und auf Γ_2 die Neumannsche Randbedingung. Zur Formulierung wählen wir

$$\mathcal{V}_0(G) := \Big\{ u \in \mathcal{C}_1(G) \cap \mathcal{H}_1 \;\Big|\; \operatorname{supp} u \Subset G \cup \Gamma_2 \Big\},$$

$$\mathcal{V}_4(G) := \Big\{ \mathcal{V}_0(G);\; \|\cdot\|_1 \Big\}^{\sim}$$

und

$$\mathcal{D}(A_4) := \Big\{ u \in \mathcal{V}_4(G) \;\Big|\; \exists\, f \in \mathcal{H} \quad \forall\, v \in \mathcal{V}_4(G) \quad B(u,v) = (f,v) \Big\}$$

mit $A_4 u := -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k u$. Die Form $B(u,v)$ ist über $\mathcal{V}_4(G)$ streng koerzitiv.

5.3.3 Schiefe Randwertaufgaben

Wir nehmen wieder an, daß der Rand ∂G glatt und daß der Normalenvektor n sowie t, ein Tangentialvektor, $\mathcal{C}_1(\bar{G})$-Abbildungen seien. Es sei ferner

$$s_i := \sum_k n_k a_{ki} + t_i .$$

Wir stellen die Randbedingung

$$s \nabla u \,\big|\, \partial G = o .$$

Zur Formulierung wählen wir die Form

$$B_5(u,v) := \sum_{i,k} \int_G \Big\{ (a_{ik} + b_{ik})(\partial_k u)(\partial_i \bar{v}) + (\partial_i b_{ik})(\partial_k u)\bar{v} \Big\}$$

mit

$$b_{ik} := n_i t_k - n_k t_i$$

sowie die Abbildung A_5 mit

$$\mathcal{D}(A_5) := \Big\{ u \in \mathcal{H}_1(G) \;\Big|\; \exists\, f \in \mathcal{H} \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_1(G) \quad B_5(u,v) = (f,v) \Big\}$$

und $A_5 u := -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k u$. Auch $B_5(u,v)$ ist über $\mathcal{H}_1(G)$ koerzitiv.

Wir wollen die Resolventenmenge von A_5 grob abschätzen: Es sei

$$S_\lambda(u) := B_5(u,u) - \lambda (u,u).$$

Dann erhalten wir mit positiven Konstanten p_i

$$|B_5(u,u)| \le p_1 \, \|u\|_1 \, \|v\|_1$$

sowie

$$\operatorname{Re} S_\lambda(u) \ge p_2 \, |u|_1^2 - (p_3 + \operatorname{Re}\lambda)\, \|u\|^2$$

und

$$|\operatorname{Im} S_\lambda(u)| \ge (|\operatorname{Im}\lambda| - p_4)\, \|u\|^2 - p_5 \, |u|_1^2 .$$

Daraus folgt für alle $\varepsilon \in [0,1]$

$$\sqrt{2}\, \big|S_\lambda(u)\big| \ge \varepsilon\, |\operatorname{Im} S_\lambda(u)| + \operatorname{Re} S_\lambda(u) \ge (p_2 - \varepsilon p_5)\, |u|_1^2 + \Big\{ \varepsilon |\operatorname{Im}\lambda| - (\varepsilon p_4 + p_3) - \operatorname{Re}\lambda \Big\}\, \|u\|^2 .$$

Für $\varepsilon := \min(1, p_2/2p_5)$ ist also

$$\sqrt{2}\, \big|S_\lambda(u)\big| \ge p_6 \, |u|_1^2 + \big(p_8 |\operatorname{Im}\lambda| - p_9 - \operatorname{Re}\lambda\big)\, \|u\|^2 ,$$

und es gilt

$$\Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; \operatorname{Re}\lambda < p_8 \, |\operatorname{Im}\lambda| - p_9 \Big\} \subset \rho(A_5).$$

5.3.4 Eine Transmissionsaufgabe

Als letztes soll eine Transmissionsaufgabe vorgestellt werden. Es seien $B =: B_i$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, das Innere, und $B_a := \mathbb{R}^n \backslash \bar{B}$ das Äußere von B. Es soll

$$(-\Delta + 1) u = f \quad \text{ in } B_i \cup B_a$$

mit der Transmissionsbedingung

$$u\big|_i = u\big|_a \quad \text{ und } \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_i = 2\, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_a$$

gelöst werden. Dabei stehen die Indizes a, i für ∂B_a bzw. ∂B_i (außen, innen).

Zur Formulierung dieser Aufgabe wählen wir

$$a(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B_i, \\ 2 & \text{für } x \in B_a \end{cases}$$

und

$$B_6(u,v) := \int_{\mathbb{R}^n} a\left\{(\nabla u)(\nabla \bar{v}) + u\,\bar{v}\right\}.$$

Offenbar ist die Form $B_6(u,v)$ über $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ streng koerzitiv. Es seien ferner

$$\mathcal{D}(A_6) := \left\{u \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \exists\, h \in \mathcal{H} \quad \forall\, v \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \quad B_6(u,v) = (ah, v)\right\}$$

und $A_6 u := h$.

Es sei $A_6 u = f$. Dann löst u offenbar die Differentialgleichung sowohl in B_i als auch in B_a. Zum Nachweis der Transmissionsbedingungen nehmen wir ∂B wieder als glatt an. Dann folgt aus *Spursätzen* (Versionen der Sobolevschen Einbettungssätze) aus $u \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ die Existenz von $w := u|\partial B$ mit $w \in \mathcal{L}^2(\partial B)$. In diesem Sinne ist $u|_i = u|_a$. Durch partielles Integrieren erhält man dann schließlich

$$\forall\, v \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) \qquad 0 = \int_{\partial B} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_i - 2\,\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_a \right\} \bar{v}.$$

5.3.5 Eine Hindernisaufgabe

Es lassen sich auch kompliziertere Aufgaben behandeln, wenn man relativ einfache funktionalanalytische Resultate verwendet. Dazu gehören *Hindernisaufgaben.* Denken Sie an eine Saite, die man am Durchschwingen hindert. Es seien zum Beispiel $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in \mathcal{H}_1(G)$ mit $f \geq o$ f.ü. und

$$\mathcal{D} := \left\{u \in \mathcal{H}_1(G) \;\middle|\; u - f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\text{ und } u \geq o \text{ f.ü.}\right\}.$$

$\mathcal{D}$ ist eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{H}_1(G)$. Es sei $g \in \mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$ und

$$J(u) := (\nabla u, \nabla u) + 2\,(g, u).$$

Dann gibt es genau eine Lösung $u \in \mathcal{D}$ der Variationsaufgabe

$$J(u) \stackrel{!}{=} \min_{v \in \mathcal{D}} J(v),$$

und u löst die zugehörige Variationsungleichung (die *Eulersche Gleichung*)

$$\forall\, v \in \mathcal{D} \qquad \big(\nabla u, \nabla(v-u)\big) + \big(g, v-u\big) \geq 0.$$

Bezüglich der Einzelheiten sei auf *FA, §6.7.3,* verwiesen.

5.4 Regularitätsaussagen

In den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels haben wir Randwertaufgaben zu elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in geeigneten Hilberträumen lösen können. Natürlich stellt sich die Frage, ob diese Lösungen höhere Regularität besitzen und ob sie gegebenenfalls auch klassische Lösungen sind.

Die Beantwortung dieser Frage ist im allgemeinen technisch aufwendig; in dieser Vorlesung werden nur einige Ideen vermittelt.

5.4.1 Das Weylsche Lemma

Das nunmehr klassische Resultat in dieser Richtung ist das *Weylsche Lemma* aus dem Jahre [1940]. Es wird für den Δ-Operator zum Beispiel in *FA, Lemma 6.6.8,* bewiesen und lautet

Weylsches Lemma: *Es seien $a_{ik} = a_{ki} \in \mathcal{C}_{2+\alpha}(G)$, $a_i \in \mathcal{C}_{1+\alpha}(G)$, $a \in \mathcal{C}_1(G)$, $f \in \mathcal{C}_\alpha(G)$ und $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(G)$ eine Lösung von*

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad M(u,\varphi) = (f,\varphi).$$

Dann ist fast überall $u \in \mathcal{C}_{2+\alpha}(G)$.

Dabei ist wieder

$$M(u,v) := \sum_{i,k}(a_{ik}\partial_k u, \partial_i v) + \sum_i (a_i \partial_i u, v) + (au, v).$$

Zum Beweis konstruiert man eine Singularitätenfunktion und gibt eine explizite Darstellung der Lösung an. Ist der Rand genügend glatt, dann läßt sich auch Regularität bis zum Rand beweisen. Einzelheiten findet man in *Hellwig [1960], S. 189.*

5.4.2 Explizites Abschätzen der Differenzenquotienten

Eine andere Methode, höhere Regularität zu zeigen, besteht darin, unter Zuhilfenahme der Form $M(u,v)$ höhere Differenzenquotienten von u in Kugeln und Halbkugeln $K \subset G$ abzuschätzen. Aus $u \in \mathcal{H}_1(K)$ folgt dann

$$u \in \mathcal{H}_{1+j}(K),$$

wenn die Koeffizienten und die rechte Seite f genügend oft differenzierbar sind. Die Beweisidee wird in *FA, Bemerkung 6.6.9.2,* skizziert. Insbesondere erhält man so a priori Abschätzungen der Form

$$\|u\|_{2+k}(K) \le \gamma \left\{\|f\|_k(G) + \|u\|(G)\right\}.$$

Kann man den Rand lokal genügend glatt geradebiegen, dann gelten diese Aussagen bis zum Rand. Man überdecke nämlich das Gebiet G mit endlich vielen Kugeln und Halbkugeln. Es seien $G \in \mathcal{C}_{2+k}$, $a_{ik} \in \mathcal{C}_{1+k}(\bar{G})$, a_i, $a \in \mathcal{C}_k(\bar{G})$ und $G_R := G \cap B(o,R)$. Dann folgt für alle $R > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$\|u\|_{2+k}(G_R) \le \gamma \left\{\|f\|_k(G) + \|u\|(G)\right\}.$$

Ist G beschränkt, dann steht auch links G statt G_R. Hat man einmal solche a priori Abschätzungen gewonnen, dann folgt die höhere Regularität aus Sobolevschen Einbettungssätzen.

Einzelheiten findet man in *Agmon [1965], S. 90–151, insbesondere S. 129*, und *Nirenberg [1955].*

5.4.3 Einbettungssätze

Wir haben bereits gesehen, daß Auswahlsätze in der Analysis eine große Rolle spielen. Denken Sie an den Satz von Bolzano–Weierstraß, den Satz von Arzelà–Ascoli oder an den Rellichschen Auswahlsatz. Solche Resultate lassen sich auch als Einbettungssätze formulieren. Einige von ihnen werden in *FA, §6.6.2–3,* vorgestellt. Ausführlich nachlesen können Sie darüber im Buch von *Adams [1975].*

Dabei unterscheidet man zwischen Aussagen über stetige Einbettungen und solche über kompakte Einbettungen. Ein typisches Beispiel für stetige Einbettungen ist

Satz 5.4.1: *Es seien Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$ und $mp > n$. Dann gilt*

$$\forall j \in \mathbb{N}_0 \qquad \mathring{\mathcal{H}}^p_{m+j}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_j(\bar{\Omega}).$$

Besitzt Ω die strikte Lipschitzeigenschaft, dann gilt sogar

$$\forall j \in \mathbb{N}_0 \qquad \mathcal{H}^p_{m+j}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_j(\bar{\Omega}).$$

Um Aussagen bis zum Rand zu erhalten, benötigt man also Glattheitsvoraussetzungen an den Rand. Typische Voraussetzungen dieser Art sind

Definition 5.4.2: *Die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat die* strikte Segmenteigenschaft, *wenn $\partial\Omega$ eine lokal finite offene Überdeckung $\{\mathcal{O}_i\}$ mit Vektoren $\{y_i\}$ so besitzt, daß*

$$\forall t \in (0,1) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \cap \mathcal{O}_i \qquad x + t\,y_i \in \Omega$$

ist.

Die Segmenteigenschaft läßt sich noch etwas abschwächen. Das ist wichtig, weil zum Beispiel eine Platte mit einem Riß diese Eigenschaft nicht besitzt; es gilt aber der Rellichsche Auswahlsatz für sie. Eine solche abgeschwächte Bedingung ist die *Finite Tiling Property* von *Wilcox [1975], S. 63.* Dabei werden für die $\mathcal{O}_i$ kompakte Mengen K_i zugelassen, und es sind vor der Überdeckung $\mathcal{C}_1$-Koordinatentransformationen erlaubt.

Definition 5.4.3: *Die beschränkte offene Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *hat die* strikte Lipschitzeigenschaft, *wenn jeder Punkt* $x \in \partial\Omega$ *eine Umgebung* $\mathcal{O}_x$ *so besitzt, daß* $\partial\Omega \cap \mathcal{O}_x$ *der Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion* f_x *ist.*

Dabei wird die Menge $\Omega \cap \mathcal{O}_x$ durch eine Ungleichung der Form $\xi_n < f_x(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ beschrieben. Die strikte Lipschitzeigenschaft läßt sich auch für unbeschränkte offene Mengen Ω definieren (vgl. *Adams [1965], S. 66*).

Definition 5.4.4: *Die offene Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *hat die* Kegeleigenschaft, *wenn es einen endlichen Kegel* C *so gibt, daß*

$$\forall\, x \in \Omega \quad \exists\, C(x) \qquad C(x) \subset \Omega$$

ist. Dabei soll $C(x)$ *ein zu* C *kongruenter Kegel mit der Spitze in* x *sein.*

Definition 5.4.5: *Die offene Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *hat die* strikte Kegeleigenschaft, *wenn* $\partial\Omega$ *eine lokal finite Überdeckung* $\{\mathcal{O}_i\}$ *mit Kegeln* $\{C_i\}$ *– deren Spitzen im Ursprung liegen – so besitzt, daß*

$$\forall\, x \in \Omega \cap \mathcal{O}_i \qquad x + C_i \subset \Omega$$

ist.

Definition 5.4.6: *Die offene Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *hat die* strikte p-Spitzeneigenschaft, *wenn* $\partial\Omega$ *eine lokal finite Überdeckung* $\{\mathcal{O}_i\}$ *mit p-Spitzen* $\{X_i\}$ *so besitzt, daß*

$$\forall\, x \in \Omega \cap \mathcal{O}_i \qquad x + X_i \subset \Omega$$

gilt. Dabei ist eine p-Spitze X *eine Rotation von*

$$C_p(h, \Xi) := \left\{ x = \langle x', x_n \rangle \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 < x_n < h, \;\; \frac{x'}{(x_n)^p} \in \Xi \right\}$$

und $\Xi \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *eine beschränkte offene Menge.*

Für $p = 1$ ist das die strikte Kegeleigenschaft.

Ein typisches Resultat für eine kompakte Einbettung ist

Der Rellichsche Einbettungssatz: *Es sei* Ω *ein beschränktes Gebiet in* $\mathbb{R}^n$. *Dann gilt für alle* $j \in \mathbb{N}_0$

$$\mathring{\mathcal{H}}_{j+1}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{H}_j(\Omega).$$

Besitzt Ω *die strikte Segmenteigenschaft, dann gilt sogar*

$$\mathcal{H}_{j+1}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{H}_j(\Omega).$$

Einen Beweis finden Sie in *FA, §6.6.3,* oder im bereits zitierten Buch von *Adams [1975]*. Dort finden sich auch analoge Aussagen für $\mathcal{H}_j^p$-Räume und Spursätze.

5.4.4 Fortsetzungssätze

Neben den Einbettungssätzen spielen auch Fortsetzungssätze eine große Rolle. In den bereits zitierten Büchern von *Adams [1975]* und *Agmon [1965]* finden Sie die folgende Aussage.

Der Calderónsche Fortsetzungssatz: *Es seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet mit strikter Kegeleigenschaft und* $1 < p < \infty$. *Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung*

$$T \;:\; \mathcal{H}_m^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_m^p(\mathbb{R}^n)$$

mit

$$\forall\, u \in \mathcal{H}_m^p(\Omega) \qquad (Tu) \,\big|\, \Omega = u.$$

Der Calderónsche Fortsetzungssatz liefert also zum Beispiel eine stetige Fortsetzung von $\mathcal{H}_2(\Omega)$ in $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^n)$. In den Anwendungen benötigt man aber oft gar nicht die Fortsetzung von $\mathcal{H}_2(\Omega)$ in $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^n)$, vielmehr genügt eine lokal kompakte Fortsetzung in $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$. Diese erhält man schon unter schwächeren Voraussetzungen an Ω. Darauf hat *Witsch [1993]* hingewiesen. Wir werden hierauf unter anderem bei der Behandlung linearer Elastizitätsgleichungen in §5.5.3 zurückkommen. Es gilt

Satz 5.4.7: *Es seien $1 \leq p < 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ein beschränktes Gebiet mit strikter p-Spitzeneigenschaft. Dann gibt es eine kompakte Abbildung*

$$T \;:\; \mathcal{H}_2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$$

mit

$$\forall\, u \in \mathcal{H}_2(\Omega) \qquad (Tu)\,\big|\,\Omega = u.$$

Wir beweisen diesen Satz in den Ergänzungen zu diesem Kapitel (in §5.7.2).

5.5 Spezielle Gleichungen und Systeme

Bisher haben wir elliptische Gleichungen zweiter Ordnung untersucht. Viele der dabei gewonnenen Ergebnisse lassen sich auf allgemeinere Gleichungen und Systeme übertragen. Dabei treten aber auch neue Schwierigkeiten auf. In diesem Abschnitt sollen typische Differentialoperatoren aus der Mathematischen Physik vorgestellt werden; und es wird gezeigt, wie sich die bereits gewonnenen Methoden anwenden lassen. Auch auf neue Probleme wird hingewiesen.

5.5.1 Schrödingergleichungen

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Außengebiet, also das Komplement eines beschränkten Gebietes. Es ist $G = \mathbb{R}^3$ ausdrücklich zugelassen. Es seien $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$, $q > 0$, $\mathcal{D}(S) := \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$ und

$$\begin{aligned} S \;:\; \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ u &\longmapsto (-\Delta + V)u \end{aligned}$$

mit dem Coulombpotential

$$(Vu)(x) := -\frac{q}{|x|}u(x).$$

Aus der Zweiten Poincaréschen Abschätzung folgt unmittelbar

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad \left\|\frac{\varphi(\cdot)}{|\cdot|}\right\| \leq 2\,\|\nabla\varphi\|$$

oder

$$\|Vu\| \leq 2q\,|u|_1.$$

Es sei

$$B(u,v) := (\nabla u, \nabla v) + (u, Vv).$$

Dann ist für $u, v \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$

$$B(u,v) = (Su, v).$$

Es gilt

$$B(u,u) \geq |u|_1^2 - 2q\,|u|_1\,\|u\| \geq -q^2\,\|u\|^2$$

und mit geeigneten $p > 0$, $k \geq 0$

$$B(u,u) \geq p\,\|u\|_1^2 - k\,\|u\|^2.$$

Damit ist $B(u,v)$ über $\mathcal{H}_1(G)$ koerzitiv. Mit etwas Rechnung findet man auch

$$\exists\, p_1, p_2 > 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad p_1\,\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_S \leq p_2\,\|\varphi\|_2.$$

Dabei ist $\|\cdot\|_S$ die Graphennorm von S. Die Abbildung S ist also halbbeschränkt, und es ist $\mathcal{D}(\bar{S}) = \mathring{\mathcal{H}}_2(G)$. Es sei A die Friedrichssche Fortsetzung von S (vgl. *FA, §8.2*).

$$\begin{aligned} A \;:\; \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ u &\longmapsto (-\Delta + V)u \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\middle|\; \Delta u \in \mathcal{H} \right\}$$

ist der *Schrödingeroperator* für das Wasserstoffatom, und es gilt

$$\mathbb{C}\backslash(-k, \infty) \subset \rho(A).$$

In der Streutheorie nennt man das Coulombpotential *langreichweitig* im Gegensatz zu den *kurzreichweitigen* Potentialen, die eine geringere Singularität in Unendlichen besitzen. Entsprechend formuliert man auch Schrödingergleichungen für Atome höherer Ladung.

5.5.2 Lineare Akustik und Maxwellsche Gleichungen

1. Lineare Akustik: Es seien $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $\rho_{ik} = \rho_{ki}$, κ reellwertige, beschränkte und meßbare Funktionen mit

$$\exists \rho_1 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad \forall x \in G \qquad \sum_{i,k} \xi_i \, \rho_{ik}(x) \, \xi_k \geq \rho_1 |\xi|^2$$

$$\exists \kappa_1 > 0 \quad \forall x \in G \qquad \kappa(x) \geq \kappa_1 .$$

Es seien ferner v ein Vektorfeld (die Geschwindigkeit), p eine Funktion (der Druck), $U := \langle v, p \rangle$ und mit $\rho = (\rho_{ik})$ schließlich

$$M := \begin{pmatrix} \rho & o \\ o & \kappa \end{pmatrix} .$$

Als zugrundeliegenden Hilbertraum wählen wir $\mathcal{H} := \left(\mathcal{L}^2(G)\right)^3 \times \mathcal{L}^2(G)$ mit $(U, V)_{\mathcal{H}} := (U, MV)_{\mathcal{L}^2}$. Dann lautet die Dirichletsche Randwertaufgabe in der Linearen Akustik

$$A_1 U \stackrel{!}{=} F \in \mathcal{H}.$$

Dabei ist

$$A_1 := -\,\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} o & \operatorname{grad} \\ \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathcal{D}(A_1) := \mathcal{D}(G) \times \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \subset \mathcal{H},$$

und $\mathcal{D}(G)$ bzw. $\mathring{\mathcal{D}}(G)$ sind wieder Räume von $\mathcal{L}^2$-Vektorfeldern, deren Divergenz in $\mathcal{L}^2(G)$ existiert.

Die Neumannsche Randwertaufgabe lautet entsprechend

$$A_2 U \stackrel{!}{=} F \in \mathcal{H}$$

mit

$$\mathcal{D}(A_2) := \mathring{\mathcal{D}}(G) \times \mathcal{H}_1(G) \subset \mathcal{H}$$

und derselben Abbildungsvorschrift.

Beide Randwertaufgaben kann man analog behandeln. Da mir in diesem Falle die zweite physikalisch interessanter zu scheint, wählen wir $A := A_2$. Charakteristisch ist dabei das Auftreten eines unendlich dimensionalen Nullraumes.

Man kann nun entweder die Randwertaufgabe direkt angehen oder durch Quadrieren das System entkoppeln. Formal ist nämlich, wiederum mit $\rho := (\rho_{ik})$,

$$A^2 = -\begin{pmatrix} \rho^{-1} \operatorname{grad} \kappa^{-1} \operatorname{div} & o \\ o & \kappa^{-1} \operatorname{div} \rho^{-1} \operatorname{grad} \end{pmatrix} .$$

Damit erhält man dann wieder Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Da wir diese bereits behandelt haben und weil mir dieses Vorgehen ein Umweg zu sein scheint, wollen wir das System erster Ordnung jetzt direkt angehen.

Wegen $(\mathring{\mathcal{C}}_\infty(G))^4 \subset \mathcal{D}(A)$ ist A dicht definiert. A ist auch symmetrisch, also $A \subset A^*$. Wir wollen zeigen, daß A selbstadjungiert ist. Es sei

$$V \in \mathcal{D}(A^*) = \left\{ W \in \mathcal{H} \;\middle|\; \exists F \in \mathcal{H} \quad \forall U \in \mathcal{D}(A) \quad (AU, W) = (U, F) \right\} .$$

Dann folgt für alle $U = \langle U_1, U_2 \rangle \in \mathcal{D}(A)$ mit $U_2 = o$

$$\forall U_1 \in \mathring{\mathcal{D}}(G) \qquad -\,\mathrm{i}\,(\operatorname{div} U_1, V_2) = (\rho\, U_1, F_1)$$

oder $V_2 \in \mathcal{W}_1(G) = \mathcal{H}_1(G)$ und

$$\operatorname{grad} V_2 = \mathrm{i}\, \rho F_1 .$$

Analog findet man für alle $U \in \mathcal{D}(A)$ mit $U_1 = o$

$$\forall U_2 \in \mathcal{H}_1(G) \qquad -\,\mathrm{i}\,(\operatorname{grad} U_2, V_1) = (\kappa U_2, F_2),$$

also $V_1 \in \mathring{\mathcal{D}}(G)$ und $\operatorname{div} V_1 = \mathrm{i} \kappa F_2$. Das zeigt

$$V \in \mathring{\mathcal{D}}(G) \times \mathcal{H}_1(G) = \mathcal{D}(A),$$

und damit ist $A = A^*$. Es gilt

Satz 5.5.1: *Es ist* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho(A)$ *und*

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad \left\|(A + \mathrm{i}\,\tau)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\tau|}.$$

Beweis: Wegen $A = A^*$ ist $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho(A)$ und

$$\left\|(A + \mathrm{i}\,\tau)U\right\|^2 = \left\|AU\right\|^2 + \tau^2 \left\|U\right\|^2. \qquad \square$$

Mit $\mathring{\mathcal{D}}_0(G) := \mathring{\mathcal{D}}(G) \cap \{U \in \mathcal{D}(G) \mid \operatorname{div} U = 0\}$ gilt auch

Satz 5.5.2: *Es ist*

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{\rho^{-1}\nabla\mathcal{H}_1(G)} \times \overline{\kappa^{-1}\operatorname{div}\mathring{\mathcal{D}}(G)}$$

$$\mathcal{N}(A) = \mathring{\mathcal{D}}_0(G) \times \begin{cases} \operatorname{span}(1) & \text{für beschränktes } G, \\ \{o\} & \text{für unbeschränktes } G. \end{cases}$$

Der Beweis dieses Satzes ist klar. Aus dem Projektionssatz folgt

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A) \quad \text{orthogonal.}$$

Es sei

$$P \ : \ \mathcal{H} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}(A)}$$

der orthogonale Projektor auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$. Dann ist

$$(id - P)A \subset A(id - P).$$

Definition 5.5.3: *Es sei* $M \subset \mathcal{H}$ *ein abgeschlossener Teilraum und* P *der orthogonale Projektor auf* M. *Dann* reduziert M *die Abbildung* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, *wenn* $PA \subset AP$ *ist.*

Reduziert M die Abbildung A, dann folgen

$$(id - P)A \subset A(id - P)$$

und

$$A = AP + A(id - P).$$

Im Falle der Linearen Akustik reduzieren also $\overline{\mathcal{R}(A)}$ und $\mathcal{N}(A)$ die Abbildung A, und es genügt in vielen Fällen, sie in $\overline{\mathcal{R}(A)}$ zu betrachten.

Wie wir bereits gesehen haben, ist es für die weitere Theorie wichtig, einen Auswahlsatz zur Verfügung zu haben. Er kann allerdings nur in $\overline{\mathcal{R}(A)}$ gelten, deshalb formulieren wir

Satz 5.5.4: *Das Gebiet* G *besitze die strikte Segmenteigenschaft. Es seien* $G_R := G \cap B(0, R)$, (U^n) *eine Folge aus* $\mathcal{D}(A)$ *mit*

$$\exists\, k(R) > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \left\|U^n\right\|_A(G_R) \leq k(R)$$

und $R' < R$. *Dann enthält* (PU^n) *eine in* $\mathcal{H}(G_{R'})$ *konvergente Teilfolge.*

Natürlich können G_R und $G_{R'}$ durch G ersetzt werden, wenn G beschränkt ist. Wir beweisen diesen Satz in §5.7.1.

2. Maxwellsche Gleichungen: Es seien nun $G \subset \mathbb{R}^3$ wieder ein Gebiet und ε, μ – die *Dielektrizität* und die *Permeabilität* – positiv definite Matrizen mit reellwertigen, meßbaren und beschränkten Koeffizientenfunktionen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ und $\mu_{ij} = \mu_{ji}$. Es seien ferner E, H Vektorfelder in $\mathbb{R}^3$ (die elektrische und die magnetische Feldstärke) sowie $U := \langle E, H\rangle$. Wir betrachten den *Maxwelloperator*

$$A := -\,\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} o & -\operatorname{rot} \\ \operatorname{rot} & o \end{pmatrix}.$$

mit

$$M := \begin{pmatrix} \varepsilon & o \\ o & \mu \end{pmatrix}.$$

Dabei wählen wir $\mathcal{H} := (\mathcal{L}^2(G))^3 \times (\mathcal{L}^2(G))^3$ mit $(U,V)_{\mathcal{H}} := (U, MV)_{\mathcal{L}^2}$ und $\mathcal{D}(A) := \mathring{\mathcal{R}}(G) \times \mathcal{R}(G) \in \mathcal{H}$ mit („stark gleich schwach")

$$\mathcal{R}(G) := \left\{E \in (\mathcal{L}^2(G))^3 \;\middle|\; \operatorname{rot} E \in (\mathcal{L}^2(G))^3\right\} = \left\{(\mathcal{C}_1(G) \cap \mathcal{W}_1(G))^3;\, \|\cdot\|_{\mathcal{R}}\right\}^{\sim},$$

$$\mathring{\mathcal{R}}(G) := \left\{E \in \mathcal{R}(G) \;\middle|\; \forall\, F \in \mathcal{R}(G) \quad (E, \operatorname{rot} F) = (\operatorname{rot} E, F)\right\} = \left\{(\mathring{\mathcal{C}}_\infty(G))^3;\, \|\cdot\|_{\mathcal{R}}\right\}^{\sim}$$

und

$$\|E\|_{\mathcal{R}} := \sqrt{\|E\|^2 + \|\operatorname{rot} E\|^2}.$$

Ähnlich wird die Zweite Randwertaufgabe definiert.

Auch jetzt kann man durch Quadrieren das System entkoppeln, es ist nämlich formal

$$A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} & o \\ o & \mu^{-1} \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \end{pmatrix}.$$

Im folgenden wollen wir jedoch wieder das System erster Ordnung direkt angehen.

Wie bei den Gleichungen der Linearen Akustik sieht man leicht, daß A eine selbstadjungierte Abbildung ist, und es folgt wieder

Satz 5.5.5: *Es ist* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho(A)$ *und*

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad \left\|(A + \mathrm{i}\,\tau)^{-1}\right\| \le \frac{1}{|\tau|},$$

sowie mit $\mathcal{R}_0(G) := \left\{E \in \mathcal{R}(G) \;\middle|\; \operatorname{rot} E = o\right\}$ und $\mathring{\mathcal{R}}_0(G) := \mathring{\mathcal{R}}(G) \cap \mathcal{R}_0(G)$

Satz 5.5.6: *Es ist*

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{R}(G))} \times \overline{(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathring{\mathcal{R}}(G))} \quad \textit{und} \quad \mathcal{N}(A) = \mathring{\mathcal{R}}_0(G) \times \mathcal{R}_0(G).$$

Aus dem Projektionssatz folgt

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A) \quad \text{orthogonal},$$

und $\overline{\mathcal{R}(A)}$ sowie $\mathcal{N}(A)$ reduzieren $\mathcal{H}$.

Für das Folgende sind einige weitere Zerlegungen des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ nützlich. Es sei $(\mathcal{L}^2_\varepsilon(G))^3$ der Hilbertraum $(\mathcal{L}^2(G))^3$, ausgestattet mit dem gewichteten Skalarprodukt

$$(E,F)_{\mathcal{L}^2_\varepsilon} := (E, \varepsilon\, F).$$

Es seien ferner

$$\mathcal{D}_\varepsilon(G) := \left\{E \in (\mathcal{L}^2_\varepsilon(G))^3 \;\middle|\; \operatorname{div} \varepsilon E \in \mathcal{L}^2(G)\right\}$$

$$\mathcal{D}_{\varepsilon,0}(G) := \left\{E \in \mathcal{D}_\varepsilon(G) \;\middle|\; \operatorname{div} \varepsilon E = 0\right\}$$

$$\mathring{\mathcal{D}}_\varepsilon(G) := \left\{E \in \mathcal{D}_\varepsilon(G) \;\middle|\; \forall\, f \in \mathcal{H}_1(G) \quad (\varepsilon E, \operatorname{grad} f) = -(\operatorname{div} \varepsilon E, f)\right\} = \left\{(\mathring{\mathcal{C}}_\infty(G))^3;\, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_\varepsilon}\right\}^{\sim}$$

mit

$$\|E\|_{\mathcal{D}_\varepsilon} := \sqrt{\|E\|^2_{\mathcal{L}^2_\varepsilon} + \|\operatorname{div} \varepsilon\, E\|^2}.$$

Dann gilt

Satz 5.5.7: *Es ist*

$$\left(\mathcal{L}^2_\varepsilon(G)\right)^3 = \mathcal{D}_{\varepsilon,0}(G) \oplus \overline{\nabla \mathring{\mathcal{H}}_1(G)} \quad \textit{und} \quad \left(\mathcal{L}^2_\mu(G)\right)^3 = \mathring{\mathcal{D}}_{\mu,0}(G) \oplus \overline{\nabla \mathcal{H}_1(G)}.$$

Der Beweis ist klar. Es folgt (mit $\varepsilon^{-1}\nabla \times \mathcal{R} := \varepsilon^{-1}\nabla \times \mathcal{R}(G)$ usw.)

Satz 5.5.8: *Es gilt*

$$\left(\mathcal{L}^2_\varepsilon(G)\right)^3 = \underbrace{\overline{\varepsilon^{-1}\nabla\times\mathcal{R}} \oplus (\mathring{\mathcal{R}}_0 \cap \mathcal{D}_{\varepsilon,0})}_{=\mathcal{D}_{\varepsilon,0}(G)} \oplus \overline{\nabla\mathring{\mathcal{H}}_1} = \overline{\varepsilon^{-1}\nabla\times\mathcal{R}} \oplus \underbrace{(\mathring{\mathcal{R}}_0 \cap \mathcal{D}_{\varepsilon,0}) \oplus \overline{\nabla\mathring{\mathcal{H}}_1}}_{=\mathring{\mathcal{R}}_0(G)}$$

und

$$\left(\mathcal{L}^2_\mu(G)\right)^3 = \underbrace{\overline{\mu^{-1}\nabla\times\mathring{\mathcal{R}}} \oplus (\mathcal{R}_0 \cap \mathring{\mathcal{D}}_{\mu,0})}_{=\mathring{\mathcal{D}}_{\mu,0}(G)} \oplus \overline{\nabla\mathcal{H}_1} = \overline{\mu^{-1}\nabla\times\mathring{\mathcal{R}}} \oplus \underbrace{(\mathcal{R}_0 \cap \mathring{\mathcal{D}}_{\mu,0}) \oplus \overline{\nabla\mathcal{H}_1}}_{=\mathcal{R}_0(G)}.$$

Auch in der Maxwellschen Theorie gibt es Auswahlsätze, nämlich

Satz 5.5.9: *Das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ sei beschränkt und besitze die strikte p-Spitzeneigenschaft mit $1 \leq p < 2$. Dann gilt*

$$\mathcal{D}_\varepsilon(G) \cap \mathring{\mathcal{R}}(G) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{L}^2_\varepsilon(G),$$
$$\mathring{\mathcal{D}}_\mu(G) \cap \mathcal{R}(G) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{L}^2_\mu(G).$$

Dabei seien

$$\|E\|_{\mathcal{D}_\varepsilon\cap\mathring{\mathcal{R}}} := \sqrt{\|E\|^2_{\mathcal{D}_\varepsilon} + \|\operatorname{rot} E\|^2}$$

und

$$\|H\|_{\mathring{\mathcal{D}}_\mu\cap\mathcal{R}} := \sqrt{\|H\|^2_{\mathcal{D}_\mu} + \|\operatorname{rot} H\|^2}.$$

Wir werden Satz 5.5.9 in §5.7.3 beweisen.

3. Gemeinsame Formulierung der Gleichungen der Linearen Akustik und der Maxwellschen Gleichungen: Bei der Formulierung der Gleichungen der Linearen Akustik und der Maxwellschen Gleichungen sind jeweils unendlich dimensionale Nullräume $\mathcal{N}(A)$ aufgetreten, die weitere elegante Behandlung dieser Gleichungen in der Streutheorie zum Teil empfindlich stören. Deshalb soll noch eine gemeinsame Formulierung beider Probleme vorgestellt werden, die diesen Nachteil vermeidet. Sie wurde von *Picard [1985]* vorgeschlagen. Die Idee ist auszunutzen, daß der Nullraum der Maxwellschen Gleichungen gerade von den Gleichungen der Linearen Akustik strukturiert wird und umgekehrt. Es sei

$$\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G) \times \left(\mathcal{L}^2(G)\right)^3 \times \left(\mathcal{L}^2(G)\right)^3 \times \mathcal{L}^2(G)$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(U,V)_\mathcal{H} := (U_1,\alpha V_1) + (U_2,\beta V_2) + (U_3,\gamma V_3) + (U_4,\zeta V_4).$$

Die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} \alpha & o & o & 0 \\ o & \beta & o & o \\ o & o & \gamma & o \\ 0 & o & o & \zeta \end{pmatrix}$$

sei positiv definit mit reellwertigen, meßbaren und beschränkten Koeffizientenfunktionen. Es sei ferner

$$\mathcal{D}(L) := \mathcal{H}_1(G) \times \mathcal{D}_\beta(G) \times \mathring{\mathcal{D}}_\gamma(G) \times \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \subset \mathcal{H}$$

und

$$L := -\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & o & \nabla^{tr}\gamma & 0 \\ o & o & o & \beta\,\nabla \\ \gamma\,\nabla & o & o & o \\ 0 & \nabla^{tr}\beta & o & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist L eine selbstadjungierte Abbildung. Wählen wir $\alpha := \kappa$, $\gamma := \rho^{-1}$ und lassen β, ζ beliebig, dann erhalten wir mit $U_2 = U_4 = o$ die Neumannsche Randwertaufgabe der Akustik. Entsprechend erhält man die Dirichletsche mit $\zeta := \kappa, \beta := \rho^{-1}$ und $U_1 = U_3 = o$. Es ist

$$\mathcal{R}(L) = \alpha^{-1}\nabla^{tr}\gamma\,\mathring{\mathcal{D}}_\gamma(G) \times \nabla\mathring{\mathcal{H}}_1(G) \times \nabla\mathcal{H}_1(G) \times \zeta^{-1}\nabla^{tr}\beta\,\mathcal{D}_\beta(G)$$

und

$$\mathcal{N}(L) = \mathcal{Q}(G) \times \mathcal{D}_{\beta,0}(G) \times \mathring{\mathcal{D}}_{\gamma,0}(G) \times \mathcal{O}$$

mit

$$\mathcal{Q}(G) := \begin{cases} \operatorname{span}(1) & \text{für beschränktes } G, \\ \mathcal{O} = \{o\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um die Maxwellschen Gleichungen zu erhalten, wählen wir

$$N := -\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & o & o & 0 \\ o & o & -\operatorname{rot} & o \\ o & \operatorname{rot} & o & o \\ 0 & o & o & 0 \end{pmatrix}.$$

mit

$$\mathcal{D}(N) := \mathcal{L}^2(G) \times \mathring{\mathcal{R}}(G) \times \mathcal{R}(G) \times \mathcal{L}^2(G).$$

Nun ist

$$\mathcal{R}(N) = \mathcal{O} \times \beta^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{R}(G) \times \gamma^{-1} \operatorname{rot} \mathring{\mathcal{R}}(G) \times \mathcal{O}$$

sowie

$$\mathcal{N}(N) = \mathcal{L}^2(G) \times \mathring{\mathcal{R}}_0(G) \times \mathcal{R}_0(G) \times \mathcal{L}^2(G),$$

und aus dem Projektionssatz folgt

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(L)} \oplus \mathcal{N}(L) = \overline{\mathcal{R}(N)} \oplus \mathcal{N}(N).$$

Man rechnet nun nach, daß L und N folgende Eigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}(N) \perp \mathcal{R}(L), \\ &\mathcal{N}(N) \cap \mathcal{N}(L) = \mathcal{Q}(G) \times \big(\mathcal{D}_{\beta,0}(G) \cap \mathring{\mathcal{R}}_0(G)\big) \times \big(\mathcal{D}_{\gamma,0}(G) \cap \mathcal{R}_0(G)\big) \times \mathcal{O}, \\ &\mathcal{R}(N) \subset \mathcal{N}(L) \subset \mathcal{D}(L), \\ &\mathcal{R}(L) \subset \mathcal{N}(N) \subset \mathcal{D}(N), \\ &NL = O \quad \text{und} \quad LN = O. \end{aligned}$$

Wir wählen dann

$$\mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N) = \mathcal{H}_1(G) \times \big(\mathcal{D}_\beta(G) \cap \mathring{\mathcal{R}}(G)\big) \times \big(\mathring{\mathcal{D}}_\gamma(G) \cap \mathcal{R}(G)\big) \times \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$$

und

$$A := -\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & o & \nabla^{tr}\gamma & 0 \\ o & o & -\operatorname{rot} & \beta\,\nabla \\ \gamma\,\nabla & \operatorname{rot} & o & o \\ 0 & \nabla^{tr}\beta & o & 0 \end{pmatrix} = (L+N)\,\big|\,\mathcal{D}(A).$$

Die Abbildung A ist wieder selbstadjungiert mit dem endlich dimensionalen Nullraum

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{Q}(G) \times \big(\mathcal{D}_{\beta,0}(G) \cap \mathring{\mathcal{R}}_0(G)\big) \times \big(\mathring{\mathcal{D}}_{\gamma,0}(G) \cap \mathcal{R}_0(G)\big) \times \mathcal{O}.$$

Diese Abbildung A leistet das Gewünschte.

5.5.3 Lineare Elastizitätsgleichungen

In diesem Abschnitt soll ein System zweiter Ordnung vorgestellt werden, nämlich die linearen Elastizitätsgleichungen. Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ wieder ein Gebiet, M die positiv definite Matrix der Massendichte und

$$U \; : \; G \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

der *Verschiebungsvektor*. Es seien ferner

$$\varepsilon_{mn} := \frac{1}{2}\{\partial_m U_n + \partial_n U_m\}$$

der *Dehnungstensor* und C_{ijmn} die Matrix der *Elastizitätsmoduln*, welche gewissen Symmetrie- und Positivitätsbedingungen genügen müssen. Das *Hookesche Gesetz* besagt dann, daß der *Spannungstensor* (τ_{ij}) vermöge

$$\tau_{ij} = \sum_{m,n} C_{ijmn}\, \varepsilon_{mn}$$

mit dem Dehnungstensor verbunden ist. Hier soll die etwas übersichtlichere Bezeichnung von ARNOLD SOMMERFELD, 1868–1951, [1949] benutzt werden. Wir verwenden dazu das Differentiationssymbol

$$D := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ij}\, \overline{\tau_{ij}} = (DU)^{tr}\, S\, (\overline{DU})$$

die Dichte der potentiellen Energie. Dabei ist S eine sechsreihige positiv definite Matrix der Elastizitätsmoduln. Ihre Koeffizienten seien wieder reellwertige, meßbare und beschränkte Funktionen.

Der der linearen Elastizitätstheorie zugrundeliegende Operator ist dann zunächst formal

$$A := -\,M^{-1} D^{tr} S D.$$

Zur exakten Formulierung wählen wir wieder $\mathcal{H} := (\mathcal{L}^2(G))^3$, das Skalarprodukt

$$(U, V)_{\mathcal{E}} := (U, V) + (DU, DV)$$

und

$$\mathcal{E}(G) := \left\{ U \in \mathcal{C}_1(G) \cap \mathcal{W}_1(G);\ \|\cdot\|_{\mathcal{E}} \right\}^{\sim}.$$

Zur Vereinfachung wählen wir im folgenden die Matrix der Massendichte $M = id$. Es sei

$$E(U, V) := (DU, SDV)$$

die zugrundeliegende Dirichletsche Form. Den Zusammenhang mit der Darstellung über den Dehnungstensor erhält man durch

$$\sum_{m,n} \|\varepsilon_{mn}\|^2 \le \|DU\|^2 \le 2 \sum_{m,n} \|\varepsilon_{mn}\|^2$$

für alle $U \in \mathcal{E}(G)$.

Nun können wir die Dirichletsche (die Erste) und die Neumannsche (die Zweite) Randwertaufgabe formulieren durch

$$\mathcal{D}(A_1) := \left\{ U \in \mathring{\mathcal{E}}(G) \;\middle|\; D^{tr} S D U \in \mathcal{H} \right\}$$

mit

$$\mathring{\mathcal{E}}(G) := \left\{ \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G);\ \|\cdot\|_{\mathcal{E}} \right\}^{\sim}$$

und

$$\mathcal{D}(A_2) := \left\{ U \in \mathcal{E}(G) \;\middle|\; \exists\, F \in \mathcal{H} \quad \forall\, V \in \mathcal{E}(G) \quad E(U, V) = (F, V) \right\}.$$

Damit ist also für $i = 1, 2$

$$\forall\, U \in \mathcal{D}(A_i) \quad \forall\, V \in \mathcal{E}(G) \qquad (A_i U, V) = E(U, V)$$

und insbesondere

$$\forall\, U \in \mathcal{D}(A_i) \qquad (A_i U, U) = E(U, U) \ge p\, \|DU\|^2.$$

Die Form E ist deshalb über $\mathcal{E}(G)$ koerzitiv, und es folgt unmittelbar

$$\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_0^+ \subset \rho(A_i).$$

Die speziellen Symmetrien des zugrundeliegenden Mediums findet man in den Elastizitätsmoduln. Es gibt *isotrope Medien* und *anisotrope* mit *kubischer, rhombischer* oder *monokliner Symmetrie*. Man vergleiche etwa *Sommerfeld [1949], S. 278f.* Im Falle eines isotropen Mediums treten nur zwei Elastizitätsmoduln auf, die *Lamé-Konstanten* μ und κ, in $\mathbb{R}^3$

$$\mu > 0 \quad \text{und} \quad 2\mu + 3\kappa > 0.$$

Man verwendet auch $\nu := 2\mu + \kappa$. Die Differentialgleichung lautet in diesem Falle

$$\begin{aligned} D^{tr} SDU &= \mu\Delta U + (\mu+\kappa)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, U \\ &= \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, U + \nu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, U \\ &= (\mu+\kappa)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, U + \nu\Delta U. \end{aligned}$$

Für $U \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$ ist

$$\sum_{i,j} \|\partial_i U_j + \partial_j U_i\|^2 = 2\sum_{i,j}\Big\{\|\partial_i U_j\|^2 + \mathrm{Re}\,(\partial_i U_j, \partial_j U_i)\Big\} = 2\sum_{i,j}\|\partial_i U_j\|^2 + 2\,\|\,\mathrm{div}\, U\|^2 \geq 2\,|U|_1^2.$$

Mithin gilt

$$\exists\, p_1, p_2 > 0 \quad \forall\, U \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad p_1\|DU\| \leq |U|_1 \leq p_2\|DU\|.$$

Damit ist $\mathring{\mathcal{E}}(G) = \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$.

Im Falle eines beschränkten Gebietes G möchte man natürlich bei der Behandlung der Gleichung

$$(A - \lambda id) \stackrel{!}{=} F$$

für $\lambda \geq 0$ wieder die Gültigkeit der Fredholmschen Alternative zeigen. Dazu benötigt man einen Auswahlsatz. Wegen $\mathring{\mathcal{E}}(G) = \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ steht im Falle der Dirichletschen Randwertaufgabe der Rellichsche Auswahlsatz zur Verfügung.

Schwieriger wird es jedoch im Falle der Neumannschen Randwertaufgabe. Von Arthur Korn, 1870–1945, stammt die *Kornsche Ungleichung [1909]*, nämlich

$$\exists\, p > 0 \quad \forall\, U \in \mathcal{H}_1(G) \qquad \|U\|_1 \leq p\,\|U\|_{\mathcal{E}}.$$

Gilt diese Ungleichung, dann ist auch $\mathcal{E}(G) = \mathcal{H}_1(G)$, und es steht wieder der Rellichsche Auswahlsatz zur Verfügung.

Es gibt eine umfangreiche Literatur zur Kornschen Ungleichung. Ihr Beweis ist keineswegs einfach; bedeutende Mathematiker haben darüber nachgedacht. Auch heute erscheinen noch Arbeiten zu dieser Abschätzung. Inzwischen konnte gezeigt werden, daß sie für Gebiete mit strikter Kegeleigenschaft gilt.

Um so überraschender war es, daß *Weck [1994]* kürzlich zeigen konnte, daß dieser Umweg über $\mathcal{H}_1(G)$ gar nicht nötig ist. Weck konnte vielmehr – der Idee von Witsch [1993] folgend – direkt

$$\mathcal{E}(G) \hookrightarrow\!\hookrightarrow \mathcal{H}$$

zeigen, und das sogar allgemeiner für Gebiete mit der strikten p-Spitzeneigenschaft, $1 \leq p < 2$. Der Beweis wird in §5.7.4 skizziert.

5.5.4 Die Plattengleichung

Als letztes soll noch eine Gleichung vierter Ordnung vorgestellt werden, nämlich die Plattengleichung. Mit den Bezeichnungen des letzten Paragraphen lautet der entsprechende Operator formal

$$\begin{aligned} A \;:\; \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ u &\longmapsto \mathrm{div}\, D^{tr} SD\,\mathrm{grad}\, u. \end{aligned}$$

Dabei ist wieder $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$, und wir haben als Massendichte Eins genommen. Insbesondere ist hierin der Fall $A = \Delta^2$ enthalten.

Grundsätzlich gibt es für eine Gleichung vierter Ordnung mehr Möglichkeiten, Randbedingungen zu formulieren, als für Gleichungen zweiter Ordnung. Formales partielles Integrieren ergibt nämlich

$$(Au, v) = B(u,v) + \int_{\partial G}\left\{(Qu)\frac{\partial \bar v}{\partial n} - (Pu)\,\bar v\right\}$$

mit geeigneten Randoperatoren Q, P. Solche Randbedingungen können physikalisch unrealistisch sein und – mathematisch gesprochen – zu nicht koerzitiven Formen $B(u,v)$ führen. Denken Sie an die Randbedingung $\Delta u\big|\partial G = \frac{\partial}{\partial n}\Delta u\big|\partial G = o$, welche zur Form

$$B(u,v) := (\Delta u, \Delta v)$$

und $A = \Delta^2$ gehört. Diese Form kann nicht koerzitiv sein, weil jede Potentialfunktion eine Lösung ist. Bei beschränkten Gebieten kann für die Lösungstheorie die Fredholmsche Alternative deshalb nicht gelten.

Wir wollen uns hier kurz fassen und nur die Dirichletsche Randwertaufgabe angeben. Eine ausführlichere Herleitung der Plattengleichung mit anderen Randwertaufgaben finden Sie in *Leis [1986], S. 220f.*

Es sei also

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_2(G) \;\middle|\; \nabla^{tr} D^{tr} SD\nabla u \in \mathcal{H} \right\}$$

und

$$B(u,v) := (D\nabla u, SD\nabla u)$$

Wegen

$$D\nabla = (\partial_1^2, \partial_2^2, \partial_3^2, 2\partial_2\partial_3, 2\partial_1\partial_3, 2\partial_1\partial_2)$$

gilt dann

$$\forall\, u \in \mathcal{H}_2(G) \qquad B(u,u) \geq p\,\|D\nabla u\|^2 = p\,|u|_2^2.$$

Mithin ist die Form $B(u,v)$ über $\mathring{\mathcal{H}}_2(G)$ und $\mathcal{H}_2(G)$ koerzitiv, und es folgt

$$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+ \subset \rho(A).$$

Als Auswahlsatz steht der Rellichsche

$$\mathcal{H}_2(G) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{H}$$

zur Verfügung.

5.6 Die Kontinuitätsmethode

In diesem Abschnitt wollen wir noch einmal zur Dirichletschen Randwertaufgabe für

$$L := -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k + \sum_i a_i \partial_i + a$$

in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ zurückkehren und eine ganz andere Lösungsmethode skizzieren. Wir setzen wieder reellwertige, beschränkte und meßbare Koeffizienten voraus mit $a_{ik} = a_{ki} \in \mathcal{C}_{1+\alpha}(G)$ und $a_i, a \in \mathcal{C}_\alpha(G)$. Die Matrix (a_{ik}) sei gleichmäßig positiv definit, das Gebiet G sei zunächst beliebig.

Wir schreiben auch

$$L \;=\; M + a$$

mit

$$M := -\sum_{i,k} a_{ik}\partial_i\partial_k \underbrace{-\sum_i \Big(\sum_k \partial_k a_{ki})\partial_i + a_i\partial_i \Big)}_{=:\sum_i b_i\partial_i} = -\sum_{i,k} a_{ik}\partial_i\partial_k + \sum_i b_i\partial_i.$$

5.6.1 Das Maximumprinzip

In diesem Abschnitt sei stets $a \geq 0$. Wir beginnen mit dem

Maximumprinzip: *Es seien $u \in \mathcal{C}(\bar{G}) \cap \mathcal{C}_2(G)$ mit $Mu \leq 0$. Die Abbildung u besitze in $x_0 \in G$ ein Maximum. Dann ist u konstant.*

Folgerung 5.6.1: *Es sei $u \in \mathcal{C}(\bar{G}) \cap \mathcal{C}_2(G)$ mit $Lu \leq 0$ und $u|\partial G \leq 0$. Dann ist $u \leq 0$.*

Beweis der Folgerung: Es sei $x_0 \in G$ und $u(x_0) > 0$ ein Maximum. Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ mit

$$u\,|\,U(x_0) > 0.$$

In $U(x_0)$ ist dann

$$Mu = Lu - au \leq 0,$$

also $u|U(x_0)$ konstant. Die Menge μ der Maximalstellen von u ist also in G offen, wegen der Stetigkeit von u aber auch abgeschlossen. Mithin ist $\mu = G$. □

Bevor wir das Maximumprinzip beweisen, zeigen wir einen Hilfssatz.

Lemma 5.6.2: *Es seien B eine Kugel in G, $x_0 \in \partial B$, $n(x_0)$ der nach außen gerichtete Normalenvektor in x_0, $u \in \mathcal{C}_2(\bar{B})$ mit $Mu \leq 0$ und $u < u(x_0)$ in B. Dann gilt*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x_0} > 0.$$

Beweis des Lemmas: Es sei $B^* \subset B$ wie in Abbildung 5.1 skizziert.

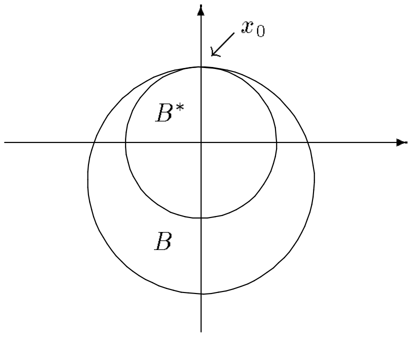

Abbildung 5.1.

Der Punkt x_0 ist die einzige Maximalstelle von u in $\overline{B^*}$. Der Koordinatenursprung sei das Zentrum von B^* und $r_0 := |x_0|$.

Wir wählen ferner mit $\rho < r_0$ eine Kugel $B_1 := B_1(x_0, \rho)$ und (man betrachte Abbildung 5.2)

$$B' := B^* \cap B_1, \qquad \partial B' =: S^{*\prime} \cup S_1'.$$

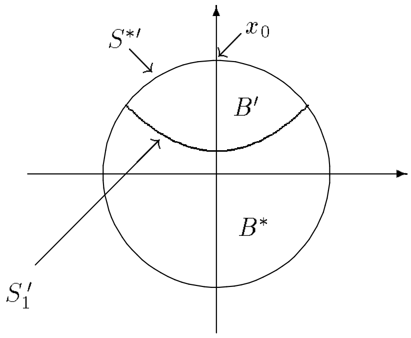

Abbildung 5.2.

Es sei mit $\alpha > 0$

$$h(r) := \mathrm{e}^{-\alpha r^2} - \mathrm{e}^{-\alpha r_0^2}.$$

Dann ist

$$h|B^* > 0, \qquad h|\partial B^* = 0$$

und

$$Mh(r) = e^{-\alpha r^2}\Big\{-4\sum_{i,k}\alpha^2\big(a_{ik}x_i x_k\big) + 2\alpha\sum_i\big(a_{ii} - b_i x_i\big)\Big\}.$$

Für genügend großes α ist also

$$(Mh)|B' < 0.$$

Auf S_1' ist $u < u(x_0)$. Für kleines $\varepsilon > 0$ gilt deshalb mit $v := u + \varepsilon h$

$$v|S_1' < u(x_0).$$

Von nun an seien die Zahlen α und ε auf diese Weise gewählt.

Wir betrachten nun v in B'. Dort gilt

$$Mv = Mu + \varepsilon Mh < 0,$$

und es folgt

$$\max_{B'} v \text{ liegt am Rande } \partial B'. \qquad (*)$$

Aussage $(*)$ ist klassisch. Wir zeigen sie anschließend. Es ist $v|S_1' < u(x_0)$ und

$$v|S^{*\prime} = u|S^{*\prime} \leq u(x_0),$$

und zwar gleich $u(x_0)$ nur in x_0. Deshalb folgt aus $(*)$

$$\max_{B'} v = v(x_0) = u(x_0).$$

Im Punkte x_0 gilt dann

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + \varepsilon \underbrace{\frac{\partial h}{\partial n}}_{<0} \geq 0,$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0.$$

Als letztes müssen wir noch Aussage $(*)$ zeigen. Für ein $w \in \mathcal{C}_2(G)$ mit der Maximalstelle $x_1 \in G$ ist $Mw(x_1) \geq 0$. Das folgt aus

$$\nabla w(x_1) = 0, \qquad \sum_{i,k} b_{ik}(x_1)\,\xi_i\xi_k := \sum_{i,k} (\partial_i\partial_k w)(x_1)\,\xi_i\xi_k \leq 0$$

und

$$(Mw)(x_1) = -\sum_{i,k} a_{ik}(x_1)\,b_{ik}(x_1) \geq 0. \qquad \square$$

Beweis des Maximumprinzips: Es sei u in G nicht konstant, nehme aber in $x_1 \in G$ ein Maximum an. Es sei

$$G^- := \{x \in G \,|\, u(x) < u(x_1)\}.$$

Wir wählen einen Punkt $x_2 \in G^-$ mit $\operatorname{dist}(x_2, \partial G^-) < \operatorname{dist}(x_2, \partial G)$. Es sei $B = B(x_2, r)$ die größte Kugel in G^-. Dann existiert ein $x_0 \in \partial B$ mit $u(x_0) = u(x_1)$ und $u|B < u(x_1)$. Deshalb folgt aus Lemma 5.6.2 $\nabla u(x_0) \neq 0$. Das ist aber an einer inneren Maximalstelle nicht möglich. $\square$

Es folgt eine erste a priori Abschätzung für Lösungen von $Lu \overset{!}{=} f$ im Falle $a \geq 0$, nämlich

Folgerung 5.6.3: *Es seien $u \in \mathcal{C}(\bar{G}) \cap \mathcal{C}_2(G)$ und $Lu = f \in \mathcal{C}(\bar{G})$. Dann gibt es eine Konstante $c = c(p, \gamma, \delta)$ mit*

$$\sup_G |u| \leq \sup_{\partial G} |u| + c \sup_G |f|.$$

Dabei waren bzw. sind

$$\exists\, p > 0 \quad \forall\, x \in G \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{i,k} a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k \geq p|\xi|^2,$$

$$\exists\, \gamma > 0 \quad \forall\, x \in G \qquad \sum_{i,k} \big|\partial_i a_{ik}(x)\big| + \sum_i \big|a_i(x)\big| \leq \gamma,$$

$$\exists\, \delta > 0 \qquad G \subset \Omega := \{x \subset \mathbb{R}^n \;|\; 0 < x_1 < \delta\}.$$

Beweis: In Ω ist mit $\alpha > 0$

$$-M\,\mathrm{e}^{\alpha x_1} = \big(\alpha^2 a_{11}(x) - \alpha\, b_1(x)\big)\mathrm{e}^{\alpha x_1} \geq p\big(\alpha^2 - \alpha\beta\big)\mathrm{e}^{\alpha x_1} \geq p$$

für $\alpha \geq \beta + 1$ und

$$\beta := \frac{\sup |b_1|}{p}.$$

Es sei nun

$$v := \sup_{\partial G} |u| + \frac{1}{p}(\mathrm{e}^{\alpha\delta} - \mathrm{e}^{\alpha x_1}) \sup_G |f|.$$

Dann ist

$$Lv = Mv + av \geq \Big(-M\mathrm{e}^{\alpha x_1}\Big)\frac{1}{p} \sup_G |f| \geq \sup_G |f|,$$

und es folgt

$$L(\pm u - v) = \pm f - Lv \le \pm f - \sup_G |f| \le 0.$$

Am Rande ist

$$(\pm u - v)|\partial G = \pm u|\partial G - \sup_{\partial G} |u| - \underbrace{\cdots}_{\ge 0} \le 0.$$

Aus Folgerung 5.6.1 erhalten wir deshalb

$$\pm u \le v,$$

also

$$\sup_G |u| \le \sup_{\partial G} |u| + c \sup_G |f|$$

mit

$$c := \frac{e^{\alpha\delta}}{p} \quad \text{und } \alpha \ge 1 + \frac{\sup |b_i|}{p}.$$ □

5.6.2 Schauder-Abschätzungen

Soeben haben wir für Lösungen von

$$Lu \stackrel{!}{=} f$$

unter der Voraussetzung $a \ge 0$ eine erste a priori Abschätzung hergeleitet. Wir wollen nun ohne diese Voraussetzung an a allgemeinere Abschätzungen dieser Art formulieren. Dazu verwenden wir die Höldernormen

$$\|f\|_{m,\alpha} := \|f\|_m + \text{höl}_\alpha(\partial^m f)$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \le 1$, $\|f\| := \|f\|_\infty$,

$$\|f\|_m := \sum_{|i| \le m} \|\partial^i f\|$$

und

$$\text{höl}_\alpha(f) := \sup_{x,y \in \bar{G}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^\alpha} \right|.$$

Innere Abschätzung: *Es seien $u \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(G)$ und $Lu = f \in \mathcal{C}_\alpha(G)$. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\alpha, p, \kappa)$ mit*

$$\|d\partial u\| + \|d^2\partial^2 u\| + \text{höl}_\alpha(d^{2+\alpha}\partial^2 u) \le c\left(\|u\| + \|f\|_{0,\alpha}^{(2)}\right).$$

Dabei sind

$$\|f\|_{0,\alpha}^{(2)} := \sup_{x \in G} d(x)^2 |f(x)| + \sup_{x,y \in G} d(x,y)^{2+\alpha} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

mit

$$d(x) := \text{dist}(x, \partial G), \qquad d(x,y) := \min\big(d(x), d(y)\big)$$

und $\kappa \in \mathbb{R}^+$ eine Schranke für die Koeffizienten von L, nämlich

$$\sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{0,\alpha} + \sum_i \|b_i\|_{0,\alpha} + \|a\|_{0,\alpha} \le \kappa.$$

Abschätzung bis zum Rand: *Es seien $G \in \mathcal{C}_{2,\alpha}$ ein beschränktes Gebiet, $u \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(G)$, $Lu = f \in \mathcal{C}_\alpha(\bar{G})$ und $g \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$ mit $u|\partial G = g|\partial G$. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\alpha, p, \kappa, G)$ mit*

$$\|u\|_{2,\alpha} \le c\left(\|u\|_0 + \|g\|_{2,\alpha} + \|f\|_{0,\alpha}\right).$$

Die Beweise sollen in dieser Vorlesung im einzelnen nicht ausgeführt werden. Man findet sie in *Gilbarg & Trudinger [1977], S. 82f.* Man vergleiche auch Satz 4.2.1. Zum Nachweis der *Inneren Abschätzung* behandelt man zuerst den Δ-Operator explizit durch Verwenden der Darstellungsformel für die Lösungen und anschließend den Fall konstanter Koeffizienten. Man überdeckt dann G mit genügend vielen kleinen Kugeln und verwende dort Abschätzungen der Form

$$\big\|a_{ik}(x) - a_{ik}(x_0)\big\| < \varepsilon.$$

Zum Nachweis der *Abschätzung bis zum Rand* biegt man den Rand lokal gerade und beschränkt sich zunächst auf den Fall $u|\partial G = 0$. Dann überdeckt man wieder mit Kugeln und Halbkugeln.

5.6.3 Ein Existenzsatz

Wir zeigen

Satz 5.6.4: *Es seien $G \in \mathcal{C}_{2,\alpha}$ ein beschränktes Gebiet, $f \in \mathcal{C}_\alpha(\bar{G})$, $g \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$ und $a \geq 0$. Dann gibt es genau eine Lösung $u \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$ von*

$$Lu = f \qquad \textit{mit } u|\partial G = g|\partial G$$

Beweis: O.b.d.A. wählen wir $g = o$, andernfalls nehme man $v := u - g$. Dann zeigen wir die Existenz einer Lösung mit

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq \gamma \, \|f\|_\alpha.$$

Die Beweisidee besteht nun darin, L mit dem Δ-Operator zu „verbinden“ und Kontinuitätseigenschaften dieser Verbindung auszunutzen. Daher stammt der Name dieser Methode.

Wir betrachten also für $s \in [0,1] =: I$

$$L_s := s\, L - (1-s)\, \Delta,$$

also $L_0 = -\Delta$ und $L_1 = L$. Für L_0 ist der Satz bereits bewiesen (Satz 4.2.1). Jedes L_s gehört zur Klasse der von uns betrachteten Operatoren, denn es ist

$$\forall\, s \in I \qquad \sum_{i,k} \big(s a_{ik} + (1-s)\delta_{ik}\big)\, \xi_i \xi_k \geq \big(ps + (1-s)\big)\, |\xi|^2 \geq \min(1,p)\, |\xi|^2.$$

Es gilt also

$$L_s \ : \ \mathcal{B}_1 := \Big\{ u \in \mathcal{C}_{2,\alpha}(\bar{G}) \ \Big| \ u|\partial G = 0 \Big\} \ \longrightarrow \ \mathcal{B}_2 := \mathcal{C}_\alpha(\bar{G}).$$

Wir wollen zeigen, daß L_s für alle $s \in I$ invertierbar ist. Es sei $J \subset I$ mit

$$\forall\, s \in J \qquad L_s^{-1} \text{ existiert.}$$

Wegen $0 \in J$ ist J nicht leer, und nach Folgerung 5.6.3 gilt mit $f := L_s u_s$

$$\forall\, s \in I \qquad \|u_s\|_0 \leq c\, \|f\|_0 \leq c\, \|f\|_{0,\alpha}.$$

Aus der a priori Abschätzung bis zum Rand folgt dann

$$\forall\, s \in I \qquad \|u_s\|_{2,\alpha} \leq \gamma\, \|f\|_{0,\alpha}.$$

Dabei ist wichtig, daß diese Konstante γ nicht von s abhängt. Es gilt deshalb

$$\exists\, \gamma > 0 \quad \forall\, s \in I \qquad \|u\|_{\mathcal{B}_1} \leq \gamma\, \|L_s u\|_{\mathcal{B}_2} \tag{$*$}$$

und

$$\exists\, \gamma > 0 \quad \forall\, s \in J \qquad \left\|L_s^{-1} f\right\|_{\mathcal{B}_1} \leq \gamma\, \left\|f\right\|_{\mathcal{B}_2}. \tag{$**$}$$

Die Umkehrabbildung L_s^{-1} ist also beschränkt, wenn sie existiert.

Die „Kontinuitätsmethode“ liefert dann $J = I$. Es gilt nämlich

Satz 5.6.5: *Es seien $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $\mathcal{V}$ ein normierter Raum, $L_0, L_1 \in \mathcal{CL}(\mathcal{B}, \mathcal{V})$, $I := [0,1]$ und*

$$\forall\, s \in I \qquad L_s := s\, L_1 + (1-s)\, L_0$$

mit

$$\exists\, c \in \mathbb{R}^+ \quad \forall\, s \in I \qquad \|x\|_{\mathcal{B}} \leq c\, \|L_s x\|_{\mathcal{V}}.$$

Dann gilt

$$\Big(\exists\, t \in I \quad L_t \ \textit{ist surjektiv}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall\, s \in I \quad L_s \ \textit{ist surjektiv}\Big).$$

Beweis: Es seien $y \in \mathcal{V}$, L_t surjektiv und

$$\begin{aligned} T \ : \ \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B}, \\ z &\longmapsto L_t^{-1} y + (s-t) L_t^{-1}(L_0 - L_1) z. \end{aligned}$$

Für alle $s \in I$ mit

$$|s-t| < \delta := \Big(c \ \{\|L_0\| + \|L_1\|\} \Big)^{-1}$$

kontrahiert diese Abbildung, besitzt also einen Fixpunkt x_s. Das folgt aus

$$\big\|Tx_1 - Tx_2\big\| = |s-t| \ \big\|L_t^{-1}(L_0 - L_1)(x_1 - x_2)\big\| \le c\,|s-t| \ \{\|L_0\| + \|L_1\|\}\,|x_1 - x_2|.$$

Es gibt also eine Umgebung $U(t)$ mit

$$\begin{gathered} \forall\, s \in U(t) \quad \exists\, x_s \in \mathcal{B} \\ 0 = L_t x_s - \big(y + (s-t)(L_0 - L_1)x_s\big) = L_t x_s - \big(y + (L_t - L_s)x_s\big) = y + L_s x_s \end{gathered}$$

Mithin ist L_s in $U(t)$ surjektiv. Man überdecke nun I mit endlich vielen Intervallen der Länge δ. □

Es sei noch bemerkt, daß man zum Beweis von Satz 5.6.4 die starke Regularitätsaussage in Satz 4.2.1 nicht benötigt. Vielmehr kann man sich auf den Fall $u|\partial G = o$ beschränken, indem man von u zu $u - g$ übergeht. Es genügt dann, die Existenz einer Lösung $u \in \mathcal{C}(\bar{G}) \cap \mathcal{C}_{2,\alpha}(G)$ zu beweisen, was leichter ist. Höhere Regularität folgt anschließend mit den Methoden von §5.4.

5.7 Ergänzungen

5.7.1 Beweis des Auswahlsatzes 5.5.4

In der Vorlesung *FA* wurde bereits die Erste und die Zweite Poincarésche Abschätzung vorgestellt, nämlich

Erste Poincarésche Abschätzung: *Es seien*

$$G \subset \big\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \ \big| \ 0 < x_n < d\big\} \tag{$*$}$$

ein Gebiet in $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *und* $u \in \mathring{\mathcal{C}}_1(G)$. *Dann gilt*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(G)} \le d\,\|\nabla u\|_{(\mathcal{L}^2(G))^{\mathrm{n}}}.$$

und

Zweite Poincarésche Abschätzung: *Es seien* G *ein Gebiet in* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $n \ge 3$, *und* $u \in \mathring{\mathcal{C}}_1(G)$. *Dann gilt*

$$(n-2)\ \left\|\frac{u(\,\cdot\,)}{|\cdot|}\right\|_{\mathcal{L}^2(G)} \le 2\,\|\nabla u\|_{(\mathcal{L}^2(G))^{\mathrm{n}}}.$$

Etwas modifizierte Aussagen gelten auch in $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$.

Es folgen zunächst zwei ähnliche Abschätzungen für Abbildungen, deren Träger den Rand des Gebietes enthalten können:

Dritte Poincarésche Abschätzung: *Es sei* $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *ein beschränktes Gebiet mit strikter Segmenteigenschaft. Dann gilt*

$$\exists\, p > 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_1(G) \qquad \big\|u\big\| \le p\Big\{\big|u\big|_1 + \big|(u,1)\big|\Big\}.$$

Beweis: Angenommen, die Abschätzung wäre falsch. Dann gilt

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, u_n \in \mathcal{H}_1(G),\ \|u_n\| = 1, \qquad |u_n|_1 + |(u_n,1)| < \frac{1}{n}.$$

Aus dem Rellichschen Auswahlsatz folgt dann die Existenz einer gegen ein $u \in \mathcal{L}^2(G)$ konvergenten Teilfolge. Es sei (u_n) bereits diese Folge. (u_n) konvergiert sogar in der $\mathcal{H}_1(G)$-Norm, damit folgt $u \in \mathcal{H}_1(G)$ und

$$\|u_n - u\|_1 \to 0.$$

Wegen $|u_n|_1 \to 0$ ist dann $\nabla u = o$. Damit ist u konstant (vgl. *FA, Folgerung 6.4.7,2,*) und verschwindet wegen $|(u_n,1)| \to 0$. Das ist ein Widerspruch zu $\|u\| = 1$. □

Vierte Poincarésche Abschätzung: *Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Außengebiet mit strikter Segmenteigenschaft. Dann gilt*

$$\exists\, p > 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{C}_1^f(G) \cap \mathcal{H}_1(G) \qquad \left\| \frac{u(\,\cdot\,)}{1+|\cdot|} \right\| \le p\,|u|_1.$$

Dabei steht der obere Index f bei $\mathcal{C}_1$ für „mit finitem Träger".

Der Beweis erfolgt in vier Schritten:

1. Wir wählen r_0 so, daß
$$\mathbb{R}^3 \setminus B(o, r_0) \subset G$$
ist, und zeigen
$$\forall\, r > r_0 \qquad \int_{r<|x|<2r} u^2(x)\,dx \le \frac{3}{2} r^2\,|u|_1^2.$$
Das folgt aus
$$|u(rx_0)|^2 = \left| \int_r^\infty \frac{\partial}{\partial\rho} u(\rho x_0)\,d\rho \right|^2 \le \int_r^\infty |\nabla u|^2 \rho^2 d\rho \cdot \int_r^\infty \frac{d\rho}{\rho^2}$$
oder
$$\int_{r<|x|<2r} u^2(x)\,dx \le |u|_1^2 \int_r^{2r} \rho\,d\rho = \frac{3}{2} r^2\,|u|_1^2.$$

2. Wir wählen $\psi_r \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\psi_r \ge 0$ und
$$\psi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B(0,r), \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus B(0,2r). \end{cases}$$
Dann folgen die Abschätzungen
$$\big\|\nabla(\psi_r u)\big\| \le \big\|(\nabla\psi_r)u\big\| + \big\|\psi_r(\nabla u)\big\| \le c(r)\,|u|_1$$
und
$$\big\|\nabla((1-\psi_r)u)\big\| \le \big\|(\nabla\psi_r)u\big\| + \big\|(1-\psi_r)(\nabla u)\big\| \le c(r)\,|u|_1.$$

3. Es gilt
$$\forall\, r > r_0 \quad \exists\, k(r) \qquad \|\psi_r u\| \le k(r)\,|\psi_r u|_1.$$
Wenn diese Abschätzung falsch ist, gibt es $v_n := \psi_r u_n$ mit $\|v_n\| = 1$ und $|v_n|_1 \to 0$. Aus dem Rellichschen Auswahlsatz folgt dann die Existenz einer in $\mathcal{L}^2(G)$ konvergenten Teilfolge. Es sei (v_n) bereits diese Teilfolge und
$$\|v_n - v\| \to 0.$$
Dann konvergiert (v_n) auch in $\mathcal{H}_1(G)$, und es ist $v = o$ im Widerspruch zu $\|v\| = 1$.

4. Aus der Zweiten Poincaréschen Abschätzung folgt
$$\left\| \frac{(1-\psi_r)u}{1+|\cdot|} \right\| \le 2\,\big|(1-\psi_r)u\big|_1 \le 2c(r)\,|u|_1.$$
Zusammen mit
$$\left\| \frac{\psi_r u}{1+|\cdot|} \right\| \le \|\psi_r u\| \le k(r)\,|\psi_r u|_1 \le k(r)c(r)\,|u|_1$$
erhalten wir dann die Behauptung. □

Ist G ein Außengebiet, dann können wir damit
$$\mathcal{J}_1(G) := \left\{ \mathcal{C}_1^f(G) \cap \mathcal{H}_1(G);\ |\cdot|_1 \right\}^\sim$$
definieren. Ist G beschränkt, dann erklären wir analog
$$\mathcal{J}_1(G) := \left\{ u \in \mathcal{H}_1(G),\ (u,1) = 0;\ |\cdot|_1 \right\}^\sim.$$
Beispielsweise ist für $G := \mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)$ die Abbildung $f(x) := 1/|x|$ aus $\mathcal{J}_1(G)$, nicht aber aus $\mathcal{H}_1(G)$.

Ist nun $V \in \overline{\nabla\mathcal{H}_1}$, dann gibt es ein $v \in \mathcal{J}_1(G)$ mit
$$V = \operatorname{grad} v.$$
Das wollen wir im folgenden ausnutzen und beweisen nun

Satz 5.5.4: *Das Gebiet G besitze die strikte Segmenteigenschaft. Es seien $G_R := G \cap B(0,R)$, (U^n) eine Folge aus $\mathcal{D}(A)$ mit*

$$\exists\, k(R) > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|U^n\|_A(G_R) \leq k(R)$$

und $R' < R$. Dann enthält (PU^n) eine in $\mathcal{H}(G_{R'})$ konvergente Teilfolge.

Beweis: Es waren

$$\mathcal{D}(A) := \mathring{\mathcal{D}}(G) \times \mathcal{H}_1(G)$$

und

$$A := -\,\mathrm{i}\begin{pmatrix} \rho & o \\ o & \kappa \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} o & \operatorname{grad} \\ \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es seien nun $V^n := PU^n$. Aufgrund des Rellichschen Auswahlsatzes enthält (V_2^n) dann eine lokal konvergente Teilfolge. Es genügt also, (V_1^n) zu betrachten. Wegen $V_1^n \in \overline{\rho^{-1}\nabla\mathcal{H}_1}$ folgt dann aus der vorhergegangenen Bemerkung die Existenz von $v_n \in \mathcal{J}_1(G)$ mit

$$V_1^n = \rho^{-1}\operatorname{grad} v_n.$$

Wegen der Voraussetzung und der Poincaréschen Abschätzungen sind die Folgen

$$(\nabla v_n),\ (v_n),\ \text{und}\ (\operatorname{div} V_1^n)$$

bzgl. $\mathcal{L}^2(G_R)$ beschränkt. Aus dem Rellichschen Auswahlsatz erhalten wir daher wieder die Existenz einer Teilfolge und eines $v \in \mathcal{L}^2(G_R)$ mit

$$\|v_n - v\|(G_R) \to 0.$$

Wir wollen zeigen, daß (v_n) auch in $\mathcal{H}_1(G)$ lokal konvergiert. Es sei dazu $\zeta \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(B(0,R))$ mit $\zeta|G_{R'} = 1$ und $w := v_n - v_m$. Dann ist

$$\begin{aligned}|w|_1^2(G_{R'}) \leq |\zeta w|_1^2 \leq c\,(\nabla\zeta w, \rho^{-1}\nabla\zeta w) &\leq c\,\Big\{\big|(\nabla\zeta^2 w, \rho^{-1}\nabla w)\big| + \|w\|(G_R)\Big\} = \\ &= c\,\Big\{\big|(\zeta^2 w, \operatorname{div}(V_1^n - V_1^m))\big| + \|w\|(G_R)\Big\} \leq c\,\|w\|(G_R).\end{aligned}$$

Die letzte partielle Umformung war möglich, weil aus $PA \subset AP$ die Aussage $V_1^n = PU_1^n \in \mathring{\mathcal{D}}(G)$ folgt. Das beweist den Satz. □

5.7.2 Beweis des Fortsetzungssatzes 5.4.7

In diesem Abschnitt wird der Beweis des Fortsetzungssatzes 5.4.7 skizziert. Wegen der Beweiseinzelheiten sei auf die bereits zitierte Originalarbeit von *Witsch [1993]* verwiesen. Dabei beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Fall. Es sei also $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit der strikten p-Spitzeneigenschaft, $1 \leq p < 2$. Daran sei noch einmal erinnert:

Definition 5.4.6: *Die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat die* strikte p-Spitzeneigenschaft, *wenn $\partial\Omega$ eine lokal finite Überdeckung $\{\mathcal{O}_i\}$ mit p-Spitzen $\{X_i\}$ so besitzt, daß*

$$\forall\, x \in \Omega \cap \mathcal{O}_i \qquad x + X_i \subset \Omega$$

gilt. Dabei ist eine p-Spitze X eine Rotation von

$$C_p(h,\Xi) := \left\{ x = \langle x^*, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 < x_n < h,\ \frac{x^*}{(x_n)^p} \in \Xi \right\}$$

und $\Xi \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine beschränkte offene Menge.

Zum Nachweis von Regularität in Sobolevräumen für Gebiete mit der Kegeleigenschaft kann man den Sobolevschen Darstellungssatz benutzen. Vgl. *Agmon [1965], S. 157.* Dabei gewinnt man $u(o)$ durch Integration von u über einen Kegel mit der Spitze im Nullpunkt. Wesentlich ist es zunächst, in dieser Darstellung den Kegel durch Spitzen zu ersetzen.

Als erstes zeigen wir deshalb die Witschsche Darstellungsformel, zur Vereinfachung in $\mathbb{R}^3$,

Satz 5.7.1 (Witschsche Darstellungsformel): *Es seien $K := C_p(h, \Xi) \subset \mathbb{R}^3$ eine p-Spitze im Nullpunkt mit $1 \le p < 2$ und $v \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt*

$$v(o) = \int_K L(x, \partial) v(x)\, dx.$$

Dabei ist

$$L(x, \partial) := \sum_{i,k} a_{ik}(x) \partial_i \partial_k + \sum_i a_i(x) \partial_i + a(x)$$

ein Differentialoperator mit folgenden Eigenschaften der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
&a, a_i \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(K),\\
&a_{ij} = a_{ji} \in \mathcal{C}_\infty(K), \ \ \textit{mit}\ \operatorname{supp} a_{ij} \Subset K \cup \{0\},\\
&|a_{ij}(x)|,\ |x_3^p \nabla a_{ij}(x)| \le \gamma\, x_3^{1-2p} \ \ \textit{in } K \textit{ mit } \gamma \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Beweis: Es sei $\chi \in \mathcal{C}_\infty\big((0, h)\big)$ mit $\chi = 1$ in $U(0)$ und $\chi = 0$ in $U(h)$. Es sei ferner $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\Xi)$ mit

$$\int_\Xi \varphi = 1.$$

Dann liefert die Abbildung

$$\begin{aligned}
H \ :\ &(0, h) \times \Xi \longrightarrow \mathbb{R}^3,\\
&\langle t, \xi \rangle \longmapsto (t^p \xi_1, t^p \xi_2, t)
\end{aligned}$$

eine Parameterdarstellung von K mit

$$\det H'(t, \xi) = t^{2p},$$

und für $f \in \mathcal{L}^1(K)$ ist

$$\int_K f(x)\, dx = \int_\Xi \int_0^h \big(f \circ H(t, \xi)\big)\, t^{2p}\, dt\, d\xi.$$

Nun folgt aus der Taylorschen Formel für kleine s und $\xi \in \Xi$

$$v\big(H(s, \xi)\big) = \int_s^h (t - s) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{\chi(t)\, v \circ H(t, \xi)\right\} dt$$

mit

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\chi\, v \circ H\} = \chi''\, v \circ H + 2\chi' \left\{p\, t^{p-1} \xi_\mu (\partial_\mu v) \circ H + (\partial_3 v) \circ H\right\} + \\
&\quad + \chi \Big\{p^2\, t^{2p-2} \xi_\mu \xi_\nu (\partial_\mu \partial_\nu v) \circ H + 2p\, t^{p-1} \xi_\mu (\partial_\mu \partial_3 v) \circ H + (\partial_3^2 v) \circ H + p(p-1)\, t^{p-2} \xi_\mu (\partial_\mu v) \circ H\Big\}.
\end{aligned}$$

Dabei stehen griechische Indizes für $1, 2$; und es soll über doppelt auftretende summiert werden. Für $s \downarrow 0$ folgt daraus

$$v(0) = \int_0^h t\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big\{\chi(t)\, v \circ H(t, \xi)\Big\}\, dt.$$

Der letzte Term in diesem Integral läßt sich noch partiell umformen, nämlich

$$\begin{aligned}
\int_0^h \chi(t)\, p(p-1)\, t^{p-1} \xi_\mu (\partial_\mu v) \circ H(t, \xi)\, dt = (1 - p) \Big\{ &\int_0^h t^p\, \chi'(t)\, \xi_\mu (\partial_\mu v) \circ H(t, \xi)\, dt\ + \\
+ \int_0^h p\, t^{2p-1} \chi(t)\, \xi_\mu \xi_\nu (\partial_\mu \partial_\nu v) \circ H(t, \xi)\, dt + &\int_0^h t^p\, \chi(t)\, \xi_\mu (\partial_\mu \partial_3 v) \circ H(t, \xi)\, dt \Big\}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
v(0) = &\int_0^h t\, \chi''(t)\, v \circ H(t, \xi)\, dt + (p+1) \int_0^h t^p\, \chi'(t)\, \xi_\mu (\partial_\mu v) \circ H(t, \xi)\, dt\\
&+ 2 \int_0^h t\, \chi'(t)\, (\partial_3 v) \circ H(t, \xi)\, dt + p \int_0^h t^{2p-1} \chi(t)\, \xi_\mu \xi_\nu (\partial_\mu \partial_\nu v) \circ H(t, \xi)\, dt\\
&+ (p+1) \int_0^h t^p\, \chi(t)\, \xi_\mu (\partial_\mu \partial_3 v) \circ H(t, \xi)\, dt + \int_0^h t\, \chi(t)\, (\partial_3^2 v) \circ H(t, \xi)\, dt.
\end{aligned}$$

Man multipliziert nun beide Seiten mit $\varphi(\xi)$ und integriert über Ξ. Dann folgt die Behauptung mit

$$\begin{aligned}
a(x) &:= \chi''(x_3)\,\varphi(x_3^{-p}x^*)\,x_3^{1-2p},\\
a_\mu(x) &:= (p+1)\,\chi'(x_3)\,\varphi(x_3^{-p}x^*)\,x_\mu\,x_3^{-2p},\\
a_3(x) &:= 2\chi'(x_3)\,\varphi(x_3^{-p}x^*)\,x_3^{1-2p},\\
a_{\mu\nu}(x) &:= p\,\chi(x_3)\,\varphi(x_3^{-p}x^*)\,x_\mu x_\nu x_3^{-1-2p},\\
a_{\mu 3}(x) = a_{3\mu}(x) &:= \frac{p+1}{2}\,\chi(x_3)\,\varphi(x_2^{-p}x^*)\,x_\mu x_3^{-2p},\\
a_{33}(x) &:= \chi(x_3)\,\varphi(x_3^{-p}x^*)\,x_3^{1-2p}
\end{aligned}$$

für $x = \langle x^*, x_3\rangle \in K$. □

Nach dieser Vorbereitung beweisen wir den eigentlichen Fortsetzungssatz,

Satz 5.4.7: *Es seien $1 \le p < 2$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit strikter p-Spitzeneigenschaft. Dann gibt es eine kompakte Abbildung*

$$T \;:\; \mathcal{H}_2(G) \longrightarrow \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$$

mit

$$\forall\, u \in \mathcal{H}_2(G) \qquad (Tu)\big|G = u.$$

Beweis: Weil ∂G kompakt ist, können wir ∂G mit endlich vielen offenen Mengen $U_1, \dots, U_j$ überdecken. Es seien $K_1, \dots, K_j$ die zugehörigen p-Spitzen mit

$$\forall\, x \in U_j \cap G \qquad x + K_j \subset G.$$

Es seien ferner $U_0 := G$ und $(\omega_i), i = 0, 1, \dots, j$, eine Familie von $\mathring{\mathcal{C}}_\infty(U_i)$-Funktionen, deren Quadrate eine Teilung der Eins von $\bar G$ bzgl. der U_i bilden sollen.

Für jedes $u \in \mathcal{H}_2(G)$ ist dann

$$u = \sum_{i=0}^{j} \omega_i^2 u,$$

und es genügt, kompakte Abbildungen

$$T_i \;:\; \mathcal{H}_2(G) \longrightarrow \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3)$$

mit

$$T_i(\omega_i u) = \omega_i u \quad \text{f. ü. in } G \cap U_i$$

anzugeben. Denn dann ist

$$Tu := \omega_0^2 u + \sum_{i=1}^{j} \omega_i\, T_i(\omega_i u)$$

die gewünschte Fortsetzung. Dabei wird natürlich $\omega_0 u$ durch Null fortgesetzt.

Es sei deshalb von nun an $i > 0$ fest und etwa $K_i = K = C_p(h, \Xi)$. Wir wollen T_i als Faltung schreiben und setzen deshalb

$$\tilde L(x, \partial) := L(-x, \partial) \quad \text{mit } \tilde a_{ij}(x) := a_{ij}(-x) \ \text{ usw.}$$

Dann erhalten wir aus der Darstellungsformel für $u \in \mathcal{C}_\infty(G) \cap \mathcal{H}_2(G)$ und $x \in G \cap U_i$

$$(\omega_i u)(x) = \int_G \tilde L(x-y, \partial_y)\,(\omega_i u)(y)\,dy.$$

Aus den Eigenschaften der Koeffizienten von L, die wir uns durch Null fortgesetzt denken, folgt nun, daß ihre distributionellen mit den klassischen Ableitungen übereinstimmen und daß sie mitsamt ihren ersten Ableitungen zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gehören. An dieser Stelle benötigt man $p < 2$.

Für $v \in \mathcal{H}_2(G)$ sei nun für fast alle x

$$T_i v(x) := \int_G \tilde L(x-y, \partial)\,(\omega_i v)(y)\,dy.$$

T_i ist also eine Faltung einer Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit einer Funktion $f \in \mathcal{L}^2(G)$. Für solche Faltungen gilt (vgl. *FA, Satz 6.4.2,*)

$$\|g * f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \le \|g\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{\mathcal{L}^2(G)}.$$

Es ist auch $\nabla g \in \left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\right)^3$. Mithin bildet T_i den Raum $\mathcal{H}_2(G)$ stetig in $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ ab. Die Fortsetzungseigenschaft $T_i(\omega_i u) = \omega_i u$ in $G \cap U_i$ folgt, weil $\mathcal{C}_\infty(G)$ in $\mathcal{H}_2(G)$ dicht ist. Es gilt aber noch mehr, nämlich die Kompaktheit von

$$\omega_i T_i \; : \; \mathcal{H}_2(G) \longrightarrow \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Die Faltung einer festen $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion g mit einer $\mathcal{L}^2(G)$-Funktion liefert nämlich eine kompakte Abbildung von $\mathcal{L}^2(G)$ in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, wenn G beschränkt ist. Man approximiere nämlich g durch ein $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist auch $\varphi * f \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^n)$, und man kann den Auswahlsatz von Arzelà-Ascoli anwenden. □

5.7.3 Beweis des Auswahlsatzes 5.5.9

Satz 5.5.9: *Das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ sei beschränkt und besitze die strikte p-Spitzeneigenschaft mit $1 \le p < 2$. Dann gilt*

$$\mathcal{D}_\varepsilon(G) \cap \mathring{\mathcal{R}}(G) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{L}^2_\varepsilon(G),$$
$$\mathring{\mathcal{D}}_\mu(G) \cap \mathcal{R}(G) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{L}^2_\mu(G).$$

Für glatt berandete Gebiete folgt dieses Resultat aus dem Rellichschen Auswahlsatz. Man kann dann nämlich explizit in einem Tangenten-Normalensystem rechnen und die $\|\cdot\|_1$-Norm durch die $\|\cdot\|_{\mathcal{R}\cup\mathcal{D}}$-Norm abschätzen. Dabei gehen die Randbedingungen wesentlich ein.

Man sieht aber sehr leicht, daß diese Methode schon in $\mathbb{R}^2$ bei Gebieten mit Ecken versagt. Es gibt Beispiele, die zeigen, daß im allgemeinen die Lösungen in der Umgebung von Ecken nicht mehr zu $\mathcal{H}_1(G)$ gehören. Man muß den Auswahlsatz also direkt beweisen.

Das geschah für Gebiete mit strikter Kegeleigenschaft in *Weck [1974]*. In der Folgezeit wurden einfachere Beweise von *Weber [1980]*, wieder für Gebiete mit strikter Kegeleigenschaft, und von *Picard [1984]* für Lipschitz-Gebiete angegeben.

Der zur Zeit allgemeinste Beweis stammt von *Witsch [1993]* und gilt für Gebiete mit strikter p-Spitzeneigenschaft, $1 \le p < 2$. Ob er noch weiter verbessert werden kann, ist nicht klar.

Dieser Beweis wird jetzt vorgestellt. Nach Satz 5.5.8 gelten die Zerlegungen

$$\left(\mathcal{L}^2_\varepsilon(G)\right)^3 = \underbrace{\overline{\varepsilon^{-1}\nabla\times\mathcal{R}} \oplus (\mathring{\mathcal{R}}_0 \cap \mathcal{D}_{\varepsilon,0})}_{=\mathcal{D}_{\varepsilon,0}(G)} \oplus \overline{\nabla\mathring{\mathcal{H}}_1} = \overline{\varepsilon^{-1}\nabla\times\mathcal{R}} \oplus \underbrace{(\mathring{\mathcal{R}}_0 \cap \mathcal{D}_{\varepsilon,0}) \oplus \overline{\nabla\mathring{\mathcal{H}}_1}}_{=\mathring{\mathcal{R}}_0(G)}$$

$$\left(\mathcal{L}^2_\mu(G)\right)^3 = \underbrace{\overline{\mu^{-1}\nabla\times\mathring{\mathcal{R}}} \oplus (\mathcal{R}_0 \cap \mathring{\mathcal{D}}_{\mu,0})}_{=\mathring{\mathcal{D}}_{\mu,0}(G)} \oplus \overline{\nabla\mathcal{H}_1} = \overline{\mu^{-1}\nabla\times\mathring{\mathcal{R}}} \oplus \underbrace{(\mathcal{R}_0 \cap \mathring{\mathcal{D}}_{\mu,0}) \oplus \overline{\nabla\mathcal{H}_1}}_{=\mathcal{R}_0(G)},$$

und man muß die Behauptung für die Komponenten einzeln beweisen. Durch eine Teilung der Eins zeigt man zunächst, daß es genügt, den Auswahlsatz lokal zu beweisen: Es sollen also o.B.d.A. sowohl G als auch $\mathbb{R}^3 \setminus G$ einfach zusammenhängend sein. Wir wollen uns hier mit dem wesentlichen Beweisschritt begnügen und nur

$$\mathcal{R}(G) \cap \overline{\nabla\times\mathring{\mathcal{R}}(G)} \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{L}^2(G)$$

ausführen. Daß daraus der eigentliche Auswahlsatz 5.5.9 folgt, entnehme man zum Beispiel *Leis [1986], S. 165.*

Beweis: Es seien

$$H_n \in \mathcal{R}(G) \cap \overline{\nabla\times\mathring{\mathcal{R}}(G)} \subset \mathring{\mathcal{D}}_0(G) \quad \text{mit } \|H_n\| + \|\operatorname{rot} H_n\| \le 1.$$

Wir werden Vektorpotentiale $F_n \subset \mathring{\mathcal{R}}(G)$ mit

$$H_n = \operatorname{rot} F_n$$

konstruieren und zeigen, daß (F_n) eine konvergente Teilfolge enthält. Die Existenz einer konvergenten Teilfolge von (H_n) folgt dann aus

$$\|H_n - H_m\|^2 = \left(\nabla\times(F_n - F_m), H_n - H_m\right) = \left(F_n - F_m, \nabla\times(H_n - H_m)\right) \le 2\|F_n - F_m\|.$$

Wir konstruieren nun (F_n): Dazu setzen wir die H_n durch Null in den $\mathbb{R}^3$ fort. Wegen $H_n \in \mathring{\mathcal{D}}_0(G)$ folgt

$$\forall\, \Phi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \big(\nabla\Phi, H_n\big)(\mathbb{R}^3) = \big(\nabla\Phi, H_n\big)(G) = 0$$

oder $H_n \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^3)$. Wir benutzen nun die Fouriertransformation und bilden

$$\hat{A}_n(p) := \frac{\mathrm{i}}{|p|^2}\, p \times \hat{H}_n(p).$$

Aus

$$\big|\hat{H}_n(p)\big| \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_G \big|H_n(x)\big|\, dx \le c(G) < \infty$$

folgt

$$\big\|\hat{A}_n\big\|^2 \le c \int_{|p|<1} \frac{dp}{|p|^2} + \int_{|p|>1} \big|\hat{H}_n(p)\big|^2\, dp \le c < \infty.$$

Außerdem ist $p^{tr}\hat{A}_n(p) = 0$, $\mathrm{i}\, p \times \hat{A}_n(p) = \hat{H}_n(p)$ und

$$|p|\,\big|\hat{A}_n(p)\big| \le \big|\hat{H}_n(p)\big|.$$

Damit gilt $A_n \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div} A_n = 0$, $H_n = \operatorname{rot} A_n$ und

$$\sup_n \|A_n\|_1 < \infty.$$

Die Felder A_n sind also Kandidaten für F_n, aber leider ist die Randbedingung $F_n \in \mathring{\mathcal{R}}(G)$ noch nicht erfüllt. Deshalb müssen wir die A_n etwas modifizieren. Dazu wählen wir eine genügend große Kugel B mit $G \Subset B$.

In $K := B\backslash\bar{G}$ verschwinden $\operatorname{rot} A_n$ und $\operatorname{div} A_n$. Deshalb ist dort

$$\Delta A_n = 0.$$

Aus dem Weylschen Lemma folgt mithin

$$A_n \in \mathcal{C}_\infty(K).$$

K ist – aufgrund der Annahme – einfach zusammenhängend. Deshalb gilt dort das klassische Resultat

$$\exists\, f_n \in \mathcal{C}_\infty(K) \qquad A_n = \nabla f_n.$$

Mithin ist $\nabla f_n \in \mathcal{L}^2(K)$ und $f_n \in \mathcal{L}^2_{loc}(K)$.

Nun gilt, analog *FA, Folgerung 6.3.2,* für beschränkte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit strikter Segmenteigenschaft

Lemma 5.7.2:

$$\exists\, \gamma > 0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0,1] \quad \exists\, \Omega_\varepsilon \Subset \Omega \quad \forall\, u \in \mathcal{L}^2_{loc}(\Omega) \;\; mit \;\; \nabla u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$
$$\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \le \gamma\left\{\varepsilon\,\|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega_\varepsilon)}\right\}.$$

Damit ist also $f_n \in \mathcal{H}_1(K)$ und wegen $\nabla f_n = A_n \in \mathcal{H}_1(K)$ sogar $f_n \in \mathcal{H}_2(K)$. Schließlich wählen wir $c_n \in \mathbb{C}$ und

$$g_n := f_n + c_n$$

mit $(g_n, 1) = 0$. Dann ist

$$A_n\big|K = \nabla g_n,$$

und aus der Dritten Poincaréschen Ungleichung folgt

$$\|g_n\|^2_2(K) = \|g_n\|^2(K) + \|A_n\|^2_1(K) \le c\,\|A_n\|^2_1(K) \le c < \infty.$$

Wir setzen nun g_n vermöge des Witschschen Fortsetzungssatzes auf den $\mathbb{R}^3$ fort, bezeichnen diese Fortsetzung, die in $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3)$ liegen möge, wieder mit g_n und bilden

$$F_n := \begin{cases} A_n - \nabla g_n & \text{in } B, \\ o & \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\bar{B}. \end{cases}$$

(F_n) ist die gesuchte Folge. Wegen $A_n|K = (\nabla g_n)|K$ ist $F_n \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^3)$, $F_n|(\mathbb{R}^3\backslash G) = o$ und $\operatorname{rot} F_n = H_n$. (F_n) enthält eine konvergente Teilfolge wegen $\|A_n\|_1 \le c$ und nach Konstruktion der (g_n). Wir müssen also nur noch die Randbedingung $F_n \in \mathring{\mathcal{R}}(G)$ nachweisen. Sie folgt aus

$$\forall\, \Phi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^3) \qquad \big(\nabla\times\Phi, F_n\big)(G) = \big(\nabla\times\Phi, F_n\big)(\mathbb{R}^n) = \big(\Phi, \nabla\times F_n\big)(\mathbb{R}^n) = \big(\Phi, \nabla\times F_n\big)(G).$$

Damit ist der Auswahlsatz bewiesen. □

5.7.4 Ein Auswahlsatz in der Elastizitätstheorie

Es sei G wieder ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^3$ mit strikter p-Spitzeneigenschaft, $1 \leq p < 2$. Dann zeigen wir

Satz 5.7.3: *Es gibt einen kompakten Fortsetzungsoperator*

$$T \ : \ \mathcal{E}(G) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3).$$

Dieses Resultat stammt von *Weck [1994].*

Der Beweis ähnelt dem in §5.7.2 gegebenen. Wir skizzieren ihn hier nur und verweisen wegen der Einzelheiten auf die Originalarbeit. Es ist

$$\mathcal{E}(G) = \left\{ U \in \mathcal{L}^2(G) \ \middle| \ \varepsilon_{nm} \in \mathcal{L}^2(G) \right\}$$

mit

$$\varepsilon_{mn} := \frac{1}{2} \left\{ \partial_m U_n + \partial_n U_m \right\}.$$

Wir wählen die Bezeichnungen von §5.7.2 und zeigen als erstes die Wecksche Darstellungsformel

Satz 5.7.4 (Wecksche Darstellungsformel): *Es sei $K := C_p(h, \Xi) \subset \mathbb{R}^3$ eine p-Spitze im Nullpunkt mit $1 \leq p < 2$ und $w \in (\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^3))^3$. Dann gilt*

$$w_k(0) = B_k w + A_k w.$$

Dabei ist

$$B_k w := \sum_{n,m} \int_K b_{k,mn}(y)\, \varepsilon_{nm}(y)\, dy$$

$$A_k w := \sum_{n} \int_K a_{k,n}(y)\, w_n(y)\, dy$$

mit $b_{k,mn} \in \mathcal{L}^1(K)$ und $a_{k,n} \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(K)$.

Aus dieser Darstellungsformel folgt dann Satz 5.7.3, analog zu Satz 5.4.7.

Beweisskizze der Darstellungsformel: Wie in §5.7.2 parametrisieren wir mit

$$H(t, \xi) = \left(t^p \xi, t\right)$$

und gehen wieder von der Taylorschen Darstellung

$$w_k\big(H(s,\xi)\big) = \int_s^h (t - s)\, \partial_t^2 \left\{ \chi(t)\, w_k \circ H(t,\xi) \right\} \, dt$$

aus. Mit

$$\psi_1(s,t) := t - s \quad \text{und} \quad \psi_2(s,t) := (p-1)\, t^p - s\, p\, t^{p-1} + s^p$$

lautet der Term mit den höchsten Ableitungen der w_k

$$w_k\big(H(s,\xi)\big) \cong \int_s^h \chi\, \psi_1 \big((\partial_n \partial_m w_k) \circ H \big) \, (\partial_t H_n)\, (\partial_t H_m)\, dt - \int_s^h \chi\, \psi_2\, \xi_\mu \big((\partial_n \partial_\mu w_k) H \big) \, (\partial_t H_n)\, dt.$$

Nun gilt

$$2\, \partial_n \partial_m w_k = \partial_n (\partial_m w_k + \partial_k w_m) + \partial_m (\partial_n w_k + \partial_k w_m) - \partial_k (\partial_m w_n + \partial_n w_m)$$

oder

$$\partial_n \partial_m w_k = \partial_n \varepsilon_{km} + \partial_m \varepsilon_{kn} - \partial_k \varepsilon_{mn}.$$

Damit können wir die zweiten Ableitungen der w_k durch die ersten Ableitungen der ε_{ij} ersetzen, und mit etwas Rechnen folgt die Darstellungsformel. □

5.7.5 Das Prinzip von der eindeutigen Fortsetzbarkeit

Das Prinzip von der eindeutigen Fortsetzbarkeit spielt eine große Rolle in der Theorie elliptischer Differentialgleichungen. Es besagt, daß eine Lösung von $Lu = o$, die in der Umgebung $U(x_0)$ eines Punktes x_0 verschwindet, identisch verschwindet. Das Prinzip gilt auch unter schwächeren Voraussetzungen. Für analytische Funktionen (Potentialfunktionen) ist es klar, bemerkenswert ist es aber doch, daß es auch bei nicht analytischen Koeffizienten richtig ist.

Das Prinzip gilt ziemlich allgemein für Gleichungen zweiter Ordnung und für Systeme mit einfacher Charakteristik. Für Gleichungen höherer Ordnung und für Systeme mit mehrfacher Charakteristik existieren jedoch Gegenbeispiele. Für die Elastizitätsgleichungen und die Maxwellschen Gleichungen läßt es sich aber zeigen (vgl. *Leis [1986], S. 167, 218*). Das Prinzip wurde [1954] von Claus Müller, *1920, für

$$\Delta u(x) = F(x,u)$$

formuliert und bewiesen. Wir zeigen es hier für Gleichungen zweiter Ordnung und benutzen dabei eine Beweisidee von *Protter [1960]*.

Das Prinzip von der eindeutigen Fortsetzbarkeit: *Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$, $a_{ik} \in \mathcal{C}_1(G)$, $u \in \mathcal{H}_2^{loc}(G)$ und*

$$\forall K \Subset G \quad \exists c > 0 \qquad \sum_{i,k} \left|a_{ik}\,\partial_i\partial_k u\right| \leq c\left\{|u| + |\nabla u|\right\} \text{ f.ü. in } K.$$

u verschwinde in der Umgebung eines Punktes $x_0 \in G$. Dann ist $u = o$.

Bemerkung 5.7.5: *Es seien $a_{ik} \in \mathcal{C}_1(G)$,*

$$M(u,v) := \sum_{i,k}(a_{ik}\partial_k u, \partial_i v) + \sum_i (a_i\partial_i u, v) + (au, v)$$

wie zu Beginn von §5 und $u \in \mathcal{H}_1^{loc}(G)$ mit

$$\forall \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad M(u,\varphi) = 0.$$

Dann folgt $u \in \mathcal{H}_2^{loc}(G)$ und

$$\sum_{i,k} \left|a_{ik}\,\partial_i\partial_k u\right| \leq c\left\{|u| + |\nabla u|\right\}.$$

Das Prinzip kann also auf u angewandt werden.

Die Regularität $u \in \mathcal{H}_2^{loc}(G)$ folgt nach §5.4.2.

Zum Beweis des Prinzips wählen wir $R \in (0,1)$ mit $B(x_0,R) \subset G$ und wollen

$$u \,\big|\, B(x_0, R/2) = o$$

zeigen. Daraus folgt dann $u = o$ durch einen Kugelkettenschluß.

Es sei $\psi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty\big(B(x_0,R)\big)$ mit $1 \geq \psi \geq 0$ und $\psi|B(x_0,R/2) = 1$ und

$$\hat{u} := \psi u.$$

Wir setzen $\hat{u}$ durch Null in $\mathbb{R}^n$ fort. Dann können Integrale, die ψ enthalten, über $\mathbb{R}^n$ erstreckt werden, und bei partiellen Integrationen treten keine Randterme mehr auf. Für $\beta > 0$ definieren wir nun

$$\varphi_\beta(x) := \exp\left(|x - x_0|^{-\beta}\right),$$

$v := \varphi_\beta u$, $\hat{v} := \varphi_\beta \psi u$ sowie

$$P_1 := \int \frac{|\hat{v}(x)|^2}{|x-x_0|^{2\beta+2}}dx, \quad P_2 := \int \varphi_\beta^2(x)\left|\nabla\hat{u}(x)\right|^2 dx, \quad Q := \int \varphi_\beta^2(x)\left|x-x_0\right|^{\beta+2}\left|a_{ik}(x)\,\partial_i\partial_k\hat{u}(x)\right|^2 dx.$$

Dabei sollen die Integrale über $B(x_0,R)$ erstreckt werden, und wir verabreden für diesen Abschnitt, über gleiche Indizes zu summieren.

Die Idee des Beweises ist auszunutzen, daß u in $U(x_0)$ besser verschwindet als jedes φ_β^{-1}. Das wird im folgenden Lemma ausgedrückt, das wir am Anschluß an diesen Beweis zeigen.

Lemma 5.7.6: *Es sei $a_{ik} \in \mathcal{C}_1(G)$, und u verschwinde in einer Umgebung von $x_0 \in G$. Dann gilt*

$$\exists\, c_0, \beta_0 > 0 \quad \forall\, \beta > \beta_0 \qquad \beta^4 P_1 + \beta^2 P_2 \le c_0\, Q.$$

Wir fahren zunächst mit dem Beweis des Prinzips fort und nehmen o.B.d.A. $x_0 = o$ an. Dann gilt für alle $\beta > \beta_0$

$$\int_{|x|<\frac{R}{2}} \varphi_\beta^2 \left(\beta^4 \frac{|u|^2}{|\cdot|^{2\beta+2}} + \beta^2 |\nabla u|^2\right) \le c_0\, Q \le 2c_0c^2 \int_{|x|<\frac{R}{2}} \varphi_\beta^2 \left\{|u|^2 + |\nabla u|^2\right\} + c_0 \int_{|x|>\frac{R}{2}} \varphi_\beta^2 \left|a_{ik}\, \partial_i \partial_k \hat{u}\right|^2.$$

Hieraus erhalten wir für alle $\beta > \max\left(\beta_0, (2c_0c^2)^{1/2}, (2c_0c^2)^{1/4}\right)$ mit

$$g(\beta) := \frac{c_0}{\beta^4 - 2c_0c^2}$$

$$\int_{|x|<\frac{R}{2}} \frac{\varphi_\beta^2\, |u|^2}{|\cdot|^{2\beta+2}} \le g(\beta) \int_{|x|>\frac{R}{2}} \frac{\varphi_\beta^2\, |a_{ik}\, \partial_i \partial_k \hat{u}|^2}{|\cdot|^{2\beta+2}}$$

oder wegen der Monotonie von $\varphi_\beta^2(x)|x|^{-(2\beta+2)}$

$$\int_{|x|<\frac{R}{2}} |u|^2 \le g(\beta) \int_{|x|>\frac{R}{2}} \left|a_{ik}\, \partial_i \partial_k \hat{u}\right|^2 \le c_1\, g(\beta).$$

Dabei hängt die Konstante c_1 von $\|u\|_{\mathcal{H}_2(B(x_0,R))}$ ab. Die Aussage des Prinzips folgt dann durch den Grenzübergang $\beta \to \infty$. □

Beweis von Lemma 5.7.6: Es seien o.B.d.A. u reellwertig, $u \in \mathcal{C}_2(G)$, wieder $x_0 = o$ und $Du := a_{ik}\partial_i\partial_k u$. Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_\beta(x) &= -\beta\, x\, |x|^{-(\beta+2)}\, \varphi_\beta(x) \\ \nabla \varphi_\beta^{-1}(x) &= \beta\, x\, |x|^{-(\beta+2)}\, \varphi_\beta^{-1}(x). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun der Reihe nach:

1.

$$Q \ge \beta \int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v}) \left\{D\hat{v} + \varphi_\beta\, \hat{v}\, D\varphi_\beta^{-1}\right\}.$$

Das folgt aus

$$\begin{aligned} \varphi_\beta^2\, |D\hat{u}|^2 &= \left|\varphi_\beta\, D(\varphi_\beta^{-1}\hat{v})\right|^2 = \left|D\hat{v} + 2\, a_{ij}\, \varphi_\beta\, (\partial_i \varphi_\beta^{-1})\, \partial_j \hat{v} + \varphi_\beta\, \hat{v}\, D\varphi_\beta^{-1}\right|^2 \ge \\ &\ge a_{ij}\, \varphi_\beta\, (\partial_i \varphi_\beta^{-1})(\partial_j \hat{v})\left(D\hat{v} + \varphi_\beta\, \hat{v}\, D\varphi_\beta^{-1}\right) = \beta\, a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v})\, |x|^{-\beta-2}\left(D\hat{v} + \varphi_\beta\, \hat{v}\, D\varphi_\beta^{-1}\right). \end{aligned}$$

2.

$$\exists\, p_1 > 0 \quad \forall\, \beta > 0 \qquad \left|\int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v})\, D\hat{v}\right| \le p_1\left(\beta^2 P_1 + P_2\right).$$

Das folgt durch partielles Integrieren, nämlich

$$\int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v})\, D\hat{v} = \int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v})\, a_{kl}\, \partial_k \partial_l \hat{v} = -\int \left(\partial_k\, a_{ij}\, x_i\, a_{kl}\right)(\partial_j \hat{v})\, \partial_l \hat{v} - \underbrace{\int a_{ij}\, x_i\, a_{kl}\, (\partial_k \partial_j \hat{v})\, \partial_l \hat{v}}_{=:I}.$$

Für das letzte Integral erhalten wir

$$I = -\int \left(\partial_j a_{ij} x_i a_{kl}\right)(\partial_k \hat{v})\, \partial_l \hat{v} - \int a_{ij}\, x_i\, a_{kl}\, (\partial_k \hat{v})\, \partial_j \partial_l \hat{v}.$$

Wegen $a_{kl} = a_{lk}$ ist das Integral rechts wieder gleich I, es folgt also

$$\left|\int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v})\, D\hat{v}\right| \le \frac{p_1}{2} \int |\nabla \hat{v}|^2,$$

und aus

$$|\nabla \hat{v}|^2 = \left|\varphi_\beta\, \nabla \hat{u} + \hat{u}\, \nabla \varphi_\beta\right|^2 = \varphi_\beta^2\left|\nabla \hat{u} - \beta\, \hat{u}\, x\, |x|^{-\beta-2}\right|^2 \le 2\varphi_\beta^2\left\{|\nabla \hat{u}|^2 + \beta^2\, |\hat{u}|^2 |x|^{-2\beta-2}\right\}$$

erhalten wir die Behauptung.

3.
$$\exists\, p_2, \beta_1 > 0 \quad \forall\, \beta > \beta_1 \qquad \int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v})\, \hat{v}\, \varphi_\beta\, D\varphi_\beta^{-1} \geq p_2\, \beta^3 P_1.$$

Um das zu zeigen, gehen wir von

$$\varphi_\beta\, D\varphi_\beta^{-1} = \beta^2\, \frac{a_{kl}\, x_k x_l}{|x|^{2\beta+4}} - \beta(\beta+2)\, \frac{a_{kl}\, x_k x_l}{|x|^{\beta+4}} + \beta\, \frac{a_{kk}}{|x|^{\beta+2}}$$

aus und bemerken, daß wegen $|x| < R < 1$ rechts der erste Term dominiert. Für genügend große β erhalten wir also

$$-\partial_j \big(a_{ij}\, x_i\, \varphi_\beta\, D\varphi_\beta^{-1}\big) = \beta^2 (2\beta+4)\, \frac{a_{ij}\, x_i x_j\, a_{kl}\, x_k x_l}{|x|^{2\beta+6}} + \cdots \geq 2\, p_2\, \beta^3 |x|^{-2\beta-2}.$$

Daraus folgt dann

$$\int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v})\, \hat{v}\, \varphi_\beta\, D\varphi_\beta^{-1} = \frac{1}{2} \int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v}^2)\, \varphi_\beta\, D\varphi_\beta^{-1} = -\frac{1}{2} \int \hat{v}^2\, \partial_j \big(a_{ij} x_i \varphi_\beta\, D\varphi_\beta^{-1}\big) \geq p_2\, \beta^3 P_1.$$

4.
$$\exists\, \beta_2 > 0 \quad \forall\, \beta > \beta_2 \qquad p_2 \beta^4 P_1 \leq 2Q + 2 p_1 \beta P_2.$$

Aus der dritten Abschätzung folgt nämlich

$$p_2 \beta^4 P_1 \leq \beta \int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v})\, \hat{v}\, \varphi_\beta\, D\varphi_\beta^{-1} = \beta \int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j \hat{v}) \Big\{ D\hat{v} + \hat{v}\, \varphi_\beta\, D\varphi_\beta^{-1} \Big\} - \beta \int a_{ij}\, x_i\, (\partial_j v)\, D\hat{v},$$

zusammen mit der ersten und zweiten also

$$p_2\, \beta^4 P_1 \leq Q + p_1 \beta\, \big(\beta^2 P_1 + P_2\big).$$

5.
$$\exists\, p_3, \beta_3 > 0 \quad \forall \beta > \beta_3 \qquad P_2 \leq p_3 \Big\{ \Big| \int \hat{v}\, \varphi_\beta\, D\hat{u} \,\Big| + \beta^2 P_1 \Big\}.$$

Zum Beweis dieser Abschätzung gehen wir von

$$P_2 \leq \frac{1}{p} \int \varphi_\beta^2\, a_{ik}\, (\partial_i \hat{u})\, \partial_k \hat{u} = -\frac{1}{p} \int \varphi_\beta^2\, \hat{u}\, D\hat{u} - \frac{1}{p} \int \hat{u}\, (\partial_k \hat{u})\, \partial_i \big(\varphi_\beta^2 a_{ik}\big)$$

aus. Wegen

$$\big|\partial_i \big(\varphi_\beta^2\, a_{ik}\big)\big| = \big|2\, \varphi_\beta\, (\partial_i \varphi_\beta)\, a_{ik} + \varphi_\beta^2\, \partial_i a_{ik}\big| \leq c\, \big\{\beta\, \varphi_\beta^2\, |x|^{-\beta-1} + \varphi_\beta^2\big\} \leq 2\, c\, \beta\, \varphi_\beta^2\, |x|^{-\beta-1}$$

ist für alle $\varepsilon > 0$

$$\left| \int \hat{u}\, (\partial_k \hat{u})\, \partial_i \big(\varphi_\beta^2\, a_{ik}\big) \right| \leq 2\, c\, \beta \int \frac{|\hat{v}|}{|x|^{\beta+1}}\, \varphi_\beta\, |\nabla \hat{u}| \leq 2\, c\, \beta\, \sqrt{P_1 P_2} \leq c \left\{ \varepsilon\, P_2 + \frac{\beta^2}{\varepsilon} P_1 \right\}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

6.
$$\exists\, p_4, \beta_4 > 0 \quad \forall\, \beta > \beta_4 \qquad \beta^4\, P_1 \leq p_4\, Q.$$

Aus der fünften Abschätzung folgt nämlich

$$\begin{aligned} P_2 &\leq p_3 \Big| \int \hat{v}\, \varphi_\beta\, D\hat{u} \,\Big| + p_3\, \beta^2 P_1 \leq \\ &\leq p_3 \sqrt{\int \frac{\beta \hat{v}^2}{|x|^{\beta+2}}} \sqrt{\int \frac{|x|^{\beta+2}}{\beta}\, \varphi_\beta^2\, |D\hat{u}|^2} + p_3\, \beta^2 P_1 \leq \frac{p_3}{2} \Big\{ \beta\, P_1 + \beta^{-1} Q + 2\, \beta^2 P_1 \Big\} \end{aligned}$$

und zusammen mit der vierten Abschätzung daraus die Behauptung.

7.
$$\exists\, p_5, \beta_5 > 0 \quad \forall\, \beta > \beta_5 \qquad \beta^2\, P_2 \leq p_5\, Q.$$

Auch diese Abschätzung folgt aus der fünften, nämlich

$$P_2 \leq p_3 \left| \int \hat{v}\, \varphi_\beta\, D\hat{u} \right| + p_3\, \beta^2 P_1 \leq \frac{p_3}{2} \left\{ \beta^2 P_1 + \beta^{-2} Q + 2\beta^2 P_1 \right\}.$$

Damit ist Lemma 5.7.6 bewiesen. □

Als Anwendung des Prinzips von der eindeutigen Fortsetzbarkeit zeigen wir die Eindeutigkeit des folgenden Cauchy-Problems:

Satz 5.7.7: *Es sei* $u \in \mathring{\mathcal{H}}_2(G)$ *eine Lösung von*

$$L\, u = o.$$

Ferner gebe es ein $x_0 \in \partial G$, *eine Kugel* $B = B(x_0, r)$ *und eine positiv definite* $\mathcal{C}_1\big(G \cup B\big)$-*Matrix* $(\tilde{a}_{ik})$ *mit* $\tilde{a}_{ik}|G = a_{ik}$. *Dann ist* $u = o$.

Beweis: Wir setzen die Koeffizienten a_i, a und u durch Null in B fort. Es sei $\tilde{L}$ der analog L zu diesen $\tilde{a}_{ik}, a_i, a$ gebildete Operator. Dann ist $u \in \mathring{\mathcal{H}}_2(G \cup B)$, und in $G \cup B$ gilt

$$\tilde{L}\, u = o.$$

Damit verschwindet u identisch. □

6 Eigenwertaufgaben

6.1 Einführung

Die Spektraldarstellung linearer Operatoren hat große theoretische und praktische Bedeutung. Erinnert sei zum Beispiel an das Problem der schwingenden Saite: In $I := (0, \pi)$ seien $u^0, u^1 \in \mathcal{L}^2(I)$ vorgegeben. Gesucht wird eine Lösung von

$$u_{tt} + Au = o \tag{1}$$

mit $u(0) = u^0$ und $u_t(0) = u^1$. Dabei sollen

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ v \in \mathring{\mathcal{H}}_1(I) \;\middle|\; v'' \in \mathcal{L}^2(I) \right\} \subset \mathcal{L}^2(I)$$

und $Av = -v''$ sein. Der Lösungsbegriff für Gl. (1) muß natürlich noch festgelegt werden. Wir denken etwa an „Lösungen mit endlicher Energie“

$$u \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{D}(A^{1/2})\big) \cap \mathcal{C}_1\big(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{L}^2(I)\big)\,,$$

denn es repräsentiert

$$E(t) := \big(A^{1/2}u, A^{1/2}u\big)(t) + \big(u_t, u_t\big)(t)$$

die Energie des Vorgangs. $A^{1/2}$ wird über die Spektraldarstellung von A definiert und steht für den Gradienten. Es ist $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$.

Klassisch „separiert“ man nun die Variablen und entwickelt die Lösung nach „stehenden Wellen“. Man macht also einen Ansatz

$$w(t, x) = a(t)\, v(x)$$

und erhält mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{C}$

$$a'' + \lambda\, a = o$$

$$v'' + \lambda\, v = o \quad \text{mit } v(0) = v(\pi) = 0.$$

Die zweite Gleichung besitzt nur für

$$\lambda_n = n^2 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

nichttriviale Lösungen, nämlich nach Normierung zu $\|v\| = 1$

$$v_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin\,(nx) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin\big(\sqrt{\lambda_n}\,x\big).$$

Damit erhalten wir die stehenden Wellen

$$w_n(t, x) = \Big(\alpha_n \cos\big(\sqrt{\lambda_n}\,t\big) + \beta_n \sin\big(\sqrt{\lambda_n}\,t\big)\Big)\, v_n(x)$$

mit Konstanten $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$. Die λ_n sind „Eigenwerte“ von A, die v_n „Eigenfunktionen“.

Es stellt sich nun die Frage, ob man eine beliebige Lösung aus diesen stehenden Wellen aufbauen kann. Da es sich um eine lineare Aufgabe handelt, versucht man zu superponieren, macht also den Ansatz

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t, x).$$

Man überlegt sich leicht, daß dieser Ansatz im vorliegenden Fall zum Ziel führt. Man setze nämlich u^0 und u^1 antisymmetrisch und dann periodisch fort und entwickle in Fourierreihen

$$u^0(x) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, v_n(x),$$

$$u^1(x) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sqrt{\lambda_n}\, v_n(x).$$

Das ist mit

$$\alpha_n := (u^0, v_n), \qquad \beta_n := \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\,(u^1, v_n)$$

möglich. Verwendet man diese Koeffizienten in der Reihe für u, dann konvergiert sie und stellt die Lösung dar. Die Reihe konvergiert sogar klassisch, wenn die Daten genügend glatt sind, und es ist

$$E(t) = \|u_x(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \|A^{1/2}u^0\|^2 + \|u^1\|^2.$$

Setzt man $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ voraus, dann existiert $E(t)$ also und ist konstant.

Etwas anders formuliert lautet unser Resultat:

1. Die Folge (v_n) der Eigenfunktionen von A bildet ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{L}^2(I)$.
2. Für $f \in \mathcal{D}(A)$ ist

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, v_n)\, v_n$$

und

$$A^{1/2}f = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, (f, v_n)\, v_n.$$

3. Die Lösung unserer Anfangsrandwertaufgaben lautet

$$u(t) = \cos(\sqrt{A}t) \circ u^0 + \frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}} \circ u^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\cos(\sqrt{\lambda_n}\, t)(u^0, v_n) + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}\, t)}{\sqrt{A}} (u^1, v_n)\Big) v_n.$$

Aus der Funktionalanalysis wissen wir natürlich, daß es im allgemeinen neben dem Punktspektrum auch ein kontinuierliches und ein Residuenspektrum geben kann. In diesem Kapitel wollen wir uns aber nur mit Punktspektren beschäftigen. Bei Differentialoperatoren treten sie meist bei beschränkten Gebieten auf. Deshalb setzen wir in den ersten Abschnitten dieses Kapitels das zugrunde liegende Gebiet G als beschränkt voraus. Nur im letzten Abschnitt §6.6 diskutieren wir die Eigenwerte des Schrödingeroperators. Dort ist $G = \mathbb{R}^3$. Außenraumaufgaben werden erst in §8 behandelt.

6.2 Spektraldarstellung elliptischer Operatoren

Als typisches Beispiel wählen wir wieder den elliptischen Differentialoperator

$$L = -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k + \sum_i a_i \partial_i + a$$

mit der Dirichletschen Form

$$M(u, v) = \sum_{i,k} (\partial_i u, a_{ik} \partial_k v) + \sum_i (a_i \partial_i u, v) + (au, v)$$

und

$$\mathcal{D}(L) = \Big\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\Big|\; \sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k u \in \mathcal{L}^2(G) \Big\} \subset \mathcal{H}.$$

Gelegentlich betrachten wir auch die Neumannsche Randwertaufgabe. Dabei sollen $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$ sein. Wie wir bereits wissen, gelten die Abschätzungen

$$|M(u, v)| \leq c\, \|u\|_1 \|v\|_1,$$
$$\operatorname{Re} M(u, u) \geq p\, \|u\|_1^2 - k\, \|u\|^2.$$

Nach Satz 5.1.1 liegt $\sigma(L)$ innerhalb einer Parabel, und nach §5.2 handelt es sich um ein reines Punktspektrum.

Im folgenden behandeln wir nun selbstadjungierte Operatoren und setzen $a_i = o$ voraus. Dann existiert für $\lambda = k$ die Resolvente $(L - \lambda)^{-1}$. Sie ist kompakt, und wir wissen aus der Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Abbildungen, daß L eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten mit $\lambda_n \to \infty$ besitzt, und daß die zugehörenden Eigenfunktionen ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

Ein direkter Beweis soll hier skizziert werden: Aus der Symmetrie von $M(u,v)$ folgt, daß mögliche Eigenwerte von L reell sind und daß sogar (mit $\|u\|=1$)

$$\lambda = M(u,u) \geq p\,\|u\|_1^2 - k > -k$$

ist.

Zur Vereinfachung verschieben wir nun das Spektrum, indem wir von L zu

$$L_0 := L + k \quad \text{ und } \quad M_0(u,v) := M(u,v) + k(u,v)$$

übergehen. Dann ist

$$M_0(u,u) \geq p\,\|u\|_1^2,$$

und $\sigma(L_0)$ liegt in $\mathbb{R}^+$.

Deshalb nehmen wir im folgenden o.B.d.A. an, es sei bereits

$$M(u,u) \geq p\,\|u\|_1^2,$$

und $\sigma(L) \subset \mathbb{R}^+$.

Es sei nun (mit $S_{\mathcal{H}} := \{u \in \mathcal{H} \mid \|u\| = 1\}$)

$$\lambda_1 := \inf_{u \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \cap S_{\mathcal{H}}} M(u,u)$$

Dann ist

$$0 < p \leq \lambda_1 .$$

Es sei (φ_n) eine Minimalfolge, also $\varphi_n \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \cap S_{\mathcal{H}}$ und

$$M(\varphi_n, \varphi_n) \to \lambda_1 .$$

Dann gilt

$$p\,\|\varphi_n\|_1^2 \leq M(\varphi_n, \varphi_n) \to \lambda_1 .$$

Mithin ist (φ_n) in $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ beschränkt und besitzt deshalb eine in $\mathcal{H}$ konvergente Teilfolge. Es sei (φ_n) bereits diese Teilfolge. Dann gilt

$$\exists\, u_1 \in \mathcal{H} \qquad \|\varphi_n - u_1\| \to 0.$$

Die Folge (φ_n) konvergiert sogar in $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$. Das sieht man folgendermaßen: Es ist

$$\forall\, \zeta \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \qquad M(\varphi_n + \varepsilon\zeta,\ \varphi_n + \varepsilon\zeta) \geq \lambda_1 \|\varphi_n + \varepsilon\zeta\|^2$$

oder

$$M(\varphi_n, \varphi_n) + 2\varepsilon\, M(\varphi_n, \zeta) + \varepsilon^2 M(\zeta,\zeta) \geq \lambda_1 \left\{ 1 + 2\varepsilon\,(\varphi_n, \zeta) + \varepsilon^2\,\|\zeta\|^2 \right\}.$$

Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt deshalb

$$\underbrace{\{M(\varphi_n,\varphi_n) - \lambda_1\}}_{=:A\geq 0} + 2\varepsilon \underbrace{\{M(\varphi_n,\zeta) - \lambda_1(\varphi_n,\zeta)\}}_{=:B} + \varepsilon^2 \underbrace{\{M(\zeta,\zeta) - \lambda_1\|\zeta\|^2\}}_{=:C\geq 0} \geq 0.$$

Dann folgt aber elementar

$$B^2 \leq A\,C,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ M(\varphi_n,\zeta) - \lambda_1(\varphi_n,\zeta) \right\} = 0,$$

und zwar gleichmäßig bzgl. ζ mit $\|\zeta\|_1 \leq 1$.

Es gilt also auch

$$M(\varphi_m - \varphi_n, \zeta) - \lambda_1(\varphi_m - \varphi_n, \zeta) \to 0,$$

und mit $\zeta := \varphi_m - \varphi_n$ erhalten wir wegen $\|\zeta\|_1 \leq 2\sqrt{\lambda_1/p}$ die Behauptung aus

$$p\,\|\varphi_m - \varphi_n\|_1 \leq M(\varphi_m - \varphi_n, \varphi_m - \varphi_n) \to 0.$$

Es gibt also ein $v \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ mit
$$\|\varphi_n - v\|_1 \to 0,$$
und damit ist $u_1 = v \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$. Insbesondere gilt $\|u_1\| = 1$,
$$\forall\, \zeta \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad M(u_1, \zeta) = \lambda_1 (u_1, \zeta),$$
und
$$L\, u_1 = \lambda_1\, u_1.$$
Somit haben wir den kleinsten Eigenwert λ_1 gefunden. Aus der Ersten Poincaréschen Abschätzung folgt
$$\lambda_1 = M(u_1, u_1) \ge p\, \|u_1\|_1^2 = p\left\{1 + \|\nabla u_1\|_1^2\right\} \ge p\left\{1 + \frac{1}{\delta^2}\right\} \to \infty \quad \text{für } \delta \to 0.$$
Dabei ist δ der Durchmesser von G. In §6.4 werden wir zeigen, daß die Eigenwerte monoton von der Größe von G abhängen.

Um die nächsten Eigenwerte zu erhalten, geht man analog vor. Es sei $\mathcal{X}_1 := \mathcal{H}$ und für $n \ge 2$
$$\mathcal{X}_n := \left\{ x \in \mathcal{H} \;\middle|\; \forall\, i = 1, \ldots, n-1 \quad (x, u_i) = 0 \right\}.$$
Für $n = 2$ sei ferner
$$\lambda_2 := \inf_{u \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \cap S_{\mathcal{X}_2}} M(u, u)$$
und (φ_n) eine Minimalfolge mit $\varphi_n \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \cap S_{\mathcal{X}_2}$ und
$$M(\varphi_n, \varphi_n) \to \lambda_2.$$
Die Folge (φ_n) sei bereits so gewählt, daß
$$\|\varphi_n - u_2\| \to 0$$
gilt mit $u_2 \in \mathcal{X}_2$. Analog zum Fall $n = 1$ erhält man
$$\forall\, \zeta \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \cap \mathcal{X}_2 \qquad M(\varphi_n, \zeta) - \lambda_2\, (\varphi_n, \zeta) \to 0.$$
Wir benötigen diese Aussage aber für alle $\psi \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$. Dazu projezieren wir
$$\psi = r\, u_1 + \zeta$$
mit $r = (\psi, u_1) \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \cap \mathcal{X}_2$. Es folgt
$$M(\varphi_n, \psi) = r\, M(\varphi_n, u_1) + M(\varphi_n, \zeta) = r\, \lambda_1 (\varphi_n, u_1) + M(\varphi_n, \zeta) = M(\varphi_n, \zeta)$$
sowie
$$(\varphi_n, \psi) = r\, (\varphi_n, u_1) + (\varphi_n, \zeta) = (\varphi_n, \zeta),$$
also
$$\forall\, \psi \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad M(\varphi_n, \psi) - \lambda_2\, (\varphi_n, \psi) = M(\varphi_n, \zeta) - \lambda_2\, (\varphi_n, \zeta) \to 0.$$
Damit gilt
$$\begin{array}{ll} \exists\, u_2 \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \cap \mathcal{X}_2 & \|\varphi_n - u_2\|_1 \to 0 \\ \forall\, \psi \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) & M(u_2, \psi) = \lambda_2\, (u_2, \psi) \end{array}$$
oder $u_2 \in \mathcal{D}(L)$, $(u_2, u_1) = 0$,
$$L\, u_2 = \lambda_2\, u_2$$
und
$$0 < p \le \lambda_1 \le \lambda_2.$$

Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen, und man erhält eine Folge (λ_n) von Eigenwerten mit
$$0 < p \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$$
und eine orthonormale Folge (u_n) von Eigenfunktionen mit $u_n \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \cap \mathcal{X}_n$ und
$$\forall\, \zeta \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad M(u_n, \zeta) = \lambda_n (u_n, \zeta),$$
also
$$L\, u_n = \lambda_n\, u_n.$$
Ferner gilt

Lemma 6.2.1: *L besitzt unendlich viele Eigenwerte.*

Beweis: Es ist $\dim \mathring{\mathcal{H}}_1(G) = \infty$. Zu $u_1, \ldots, u_N$ gibt es deshalb ein $\varphi \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \cap \mathcal{X}_{N+1}$ mit $\|\varphi\| = 1$. Daher existiert

$$\lambda_{N+1} := \inf_{\varphi \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \cap S_{\mathcal{X}_{N+1}}} M(\varphi, \varphi). \qquad \Box$$

Lemma 6.2.2: *Die Eigenwerte häufen sich im Endlichen nicht.*

Insbesondere besitzt also jeder Eigenwert endliche Vielfachheit.

Beweis: Es sei $\lambda_n \to \lambda < \infty$. Dann gilt

$$\lambda \leftarrow \lambda_n = \lambda_n(u_n, u_n) = M(u_n, u_n) \geq p \, \|u_n\|_1^2.$$

Aus dem Rellichschen Auswahlsatz folgt deshalb die Existenz einer Teilfolge (u_n) und eines $u \in \mathcal{H}$ mit

$$\|u_n - u\| \to 0.$$

Das steht im Widerspruch zu

$$\|u_n - u_m\|^2 = 2 \quad \text{für } m \neq n. \qquad \Box$$

Das Verfahren liefert sämtliche Eigenwerte von L. Es sei nämlich

$$L\, u = \lambda\, u$$

mit $\|u\| = 1$ und $(u, u_n) = 0$ für alle n. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda_{m-1} \leq \lambda < \lambda_m.$$

Wegen

$$\lambda_m = \inf_{\varphi \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \cap S_{\mathcal{X}_m}} M(\varphi, \varphi)$$

folgt aber der Widerspruch

$$\lambda_m \leq M(u, u) = \lambda. \qquad \Box$$

Damit haben wir bewiesen

Satz 6.2.3: *L besitzt abzählbar unendlich viele Eigenwerte λ_n, die sich im Endlichen nicht häufen, und zugehörige orthonormale Eigenfunktionen $u_n \in \mathcal{D}(L)$ mit*

$$0 < p \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

und

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \qquad M(u_n, \varphi) = \lambda_n(u_n, \varphi).$$

Als nächstes zeigen wir die Vollständigkeit des Orthonormalsystems (u_n): Es seien $f \in \mathcal{H}$, $f_i := (f, u_i)$ und

$$g_n := f - \sum_{i=1}^{n} f_i u_i.$$

Dann ist

$$\|g_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2,$$

es gilt also die *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \leq \|f\|^2.$$

Folgerung 6.2.4: *Zu $f \in \mathcal{H}$ gibt es ein $f^* \in \mathcal{H}$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} f_i u_i - f^* \Big\| \to 0.$$

Wir möchten $f^* = f$ beweisen. Dazu wählen wir zunächst $f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ und erhalten dafür

$$0 < M(g_n, g_n) = M(f, f) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f_i|^2$$

oder

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f_i|^2 \leq M(f, f) \leq c \, \|f\|_1^2$$

und

$$M(g_n, g_n) \leq M(f, f) \leq c \, \|f\|_1^2.$$

Nun ist für $m < n$

$$p \, \|g_m - g_n\|_1^2 \leq M(g_m - g_n, g_m - g_n) = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \, |f_i|^2.$$

Mithin konvergiert (g_n) sogar in $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$. Es gibt also ein $g \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ mit

$$\|g_n - g\|_1 \to 0.$$

Ferner ist $g_n \in \mathcal{X}_{n+1}$, also wegen

$$\lambda_{n+1} = \inf_{\varphi \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \cap \mathcal{X}_{n+1}} \frac{M(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2}$$

$$\|g_n\|^2 \leq \frac{M(g_n, g_n)}{\lambda_{n+1}} \leq \frac{c \, \|f\|_1^2}{\lambda_{n+1}} \to 0.$$

Deshalb ist $g = o$, und wir haben bewiesen

Satz 6.2.5: *Es sei $f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$. Dann gilt:*

1. $\|f - \Sigma_1^n f_i u_i\|_1 \to 0$,
2. $\Sigma_1^\infty |f_i|^2 = \|f\|^2$,
3. $M(f, f) = \Sigma_1^\infty \lambda_i |f_i|^2$.

Für $f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ ist also $f^* = f$. Weil $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ in $\mathcal{H}$ dicht ist, folgt daraus

Satz 6.2.6: *Das Orthonormalsystem (u_n) ist in $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(G)$ vollständig.*

Beweis: Es sei $f \in \mathcal{H}$ und $F := f - f^*$. Dann ist $F \in \mathcal{X}_n$ für alle n. Es sei $F \neq o$, etwa $\|F\| = 1$. Wir wählen ein $\varphi \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ mit

$$\|F - \varphi\| < \frac{1}{2}$$

und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\|\varphi - \sum_{i=1}^{N} (\varphi, u_i) \, u_i\right\| < \frac{1}{2}.$$

Dann folgt der Widerspruch

$$1 \leq \sqrt{\|F\|^2 + \sum_{i=1}^{N} |(\varphi, u_i)|^2} = \left\|F - \sum_{i=1}^{N} (\varphi, u_i) u_i\right\| \leq \|F - \varphi\| + \left\|\varphi - \sum_{i=1}^{N} (\varphi, u_i) u_i\right\| < 1. \qquad \square$$

Für $f \in \mathcal{D}(L)$ folgt aus dem Vorangegangenen mit $F := Lf \in \mathcal{H}$ wegen

$$F_i := (F, u_i) = (Lf, u_i) = \lambda_i \, (f, u_i)$$

die Darstellung

$$Lf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \, f_i \, u_i$$

und

$$\|f\|_L^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (1+\lambda_i^2)\, |f_i|^2.$$

Wir halten noch einmal fest:

1. Für $f \in \mathcal{H} = \mathcal{L}^2(G)$ gilt in $\mathcal{H}$

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\, u_i \quad \text{und} \quad \|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2.$$

2. Für $f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ gilt diese Darstellung in $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ und

$$\|f\|_1^2 \leq \frac{1}{p}\, M(f,f) \leq \frac{c}{p}\, \|f\|_1^2 \quad \text{mit} \quad M(f,f) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, |f_i|^2.$$

3. Für $f \in \mathcal{D}(L)$ gilt diese Darstellung in $\mathcal{D}(L)$. Ferner ist

$$L\, f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, f_i\, u_i$$

mit

$$\|f\|_L = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (1+\lambda_i^2)\, |f_i|^2}$$

und

$$\mathcal{D}(L) = \Big\{ f \in \mathcal{H} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2\, |f_i|^2 < \infty \Big\}.$$

Um den Anschluß an die in der Spektraltheorie übliche Notation zu finden, wählen wir

$$\begin{aligned} E_n \quad : \quad \mathcal{H} &\longrightarrow \operatorname{span}(u_n) \subset \mathcal{H}, \\ f &\longmapsto f_n\, u_n. \end{aligned}$$

E_n ist die Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\operatorname{span}(u_n)$. Wegen

$$(E_n f, g) = f_n (u_n, g) = f_n\, \bar{g}_n = (f, E_n g)$$

ist E_n eine Orthogonalprojektion mit

$$\forall\, f \in \mathcal{H} \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} E_n f.$$

Für $u \in \mathcal{D}(L)$ und $(L-\lambda)u =: f \in \mathcal{H}$ folgt

$$(L-\lambda)u = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda) E_i u = \sum_{i=1}^{\infty} E_i f,$$

also für $\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} E_i f.$$

Ist umgekehrt $f \in \mathcal{H}$ gegeben, dann löst dieses u die Gleichung $(L-\lambda)u = f$. Es ist also

$$(L-\lambda)^{-1} f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} E_i f,$$

und die Resolvente besitzt Pole erster Ordnung in den Eigenwerten.

Schließlich verwenden wir noch

$$P(\lambda) := \sum_{\lambda_i \leq \lambda} E_i.$$

Dann ist $P(\lambda)$ die Spektralschar von L. $P(\lambda)$ ist nämlich ein orthogonaler Projektor wegen $P^2 = P$ und der Symmetrie der E_i. Auch die anderen Eigenschaften einer Spektralschar sind unmittelbar klar. Damit ist dann

$$\forall\, u \in \mathcal{D}(L) \quad \forall\, v \in \mathcal{H} \qquad (Lu, v) = \int_0^\infty \lambda\, d\big(P(\lambda)u, v\big) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i\, \big(E_i u, v\big),$$

und wir können mit Hilfe dieser Darstellung wieder Funktionen von L definieren, zum Beispiel

$$\sqrt{L}\, u := \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, dP(\lambda)u = \sum_{i=1}^\infty \sqrt{\lambda_i}\; E_i u \quad \text{mit } \mathcal{D}(\sqrt{L}) := \Big\{ u \in \mathcal{H} \;\Big|\; \sum_{i=1}^\infty \lambda_i\, \|E_i u\|^2 < \infty \Big\}.$$

Aus

$$p\,\|f\|_1^2 \leq M(f,f) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i |f_i|^2 \leq c\,\|f\|_1^2$$

folgt die Äquivalenz der Normen

$$\|f\|_1 \quad \text{und} \quad \|f\|_{\sqrt{L}}.$$

Damit ist $\mathcal{D}(\sqrt{L}) = \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$.

6.3 Darstellung der Greenschen Funktion in der Potentialtheorie

Existiert die klassische Lösung der Randwertaufgabe, etwa bei glatten Daten, dann kann man mit Hilfe der Greenschen Funktion Γ den Lösungsoperator darstellen, findet also

$$L^{-1} f = \int_G f(y)\, \Gamma(x,y)\, dy.$$

Es sei $R := L^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} R \;:\; \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{D}(L), \\ f &\longmapsto \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i} E_i f, \end{aligned}$$

und es ist

$$\big\|Rf\big\| \leq \frac{1}{\lambda_1}\, \big\|f\big\| \leq \frac{1}{p}\, \big\|f\big\|.$$

Der Operator R „glättet"; in der Potentialtheorie in $\mathbb{R}^3$ ist

$$0 \leq \Gamma(x,y) \leq \frac{1}{4\pi|x-y|},$$

also

$$\big|(Rf)(x)\big|^2 \leq \|f\|^2 \int_G |\Gamma(x,y)|^2 dy \leq c\,\|f\|^2$$

oder

$$R \;:\; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{L}^\infty(G).$$

Lokal kann man natürlich noch besser abschätzen.

Um nun klassische Darstellungen für die Greensche Funktion zu erhalten, nutzt man dieses Glätten aus und iteriert genügend oft:

$$\begin{aligned} \Gamma_0(x,y) &:= \delta(x-y), \\ \Gamma_1(x,y) &:= \Gamma(x,y), \\ &\;\;\vdots \\ \Gamma_k(x,y) &:= \int_G \Gamma_{k-1}(x,t)\, \Gamma(t,y)\, dt. \end{aligned}$$

Die $\Gamma_k(x,y)$ nennt man *iterierte Greensche Funktionen.* Es ist

$$0 \le \int_G \left(\Gamma(x,y) - \sum_{i=1}^n \frac{u_i(x)u_i(y)}{\lambda_i}\right)^2 dy = \Gamma_2(x,x) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{u_i(x)}{\lambda_i}\right)^2.$$

In $\mathbb{R}^3$ erhält man also für alle $x \in G$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{u_i(x)}{\lambda_i}\right)^2 \le \Gamma_2(x,x) \le c < \infty.$$

Integriert man noch einmal, dann folgt

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \le c\,|G| < \infty.$$

Es sei nun $y \in G \subset \mathbb{R}^3$ fest. Dann gilt in $\mathcal{H}$ für $k \ge 1$

$$\Gamma_k(\,\cdot\,,y) = \sum_{i=1}^\infty \frac{u_i(\,\cdot\,)u_i(y)}{\lambda_i^k},$$

und für $k \ge 3$ konvergiert

$$\Gamma_k(x,y) = \sum_{i=1}^\infty \frac{u_i(x)u_i(y)}{\lambda_i^k}$$

sogar absolut und gleichmäßig bezüglich beider Variablen. Es ist nämlich, etwa für $k = 3$ und $n > m$,

$$\left(\sum_{i=m}^n \left|\frac{u_i(x)u_i(y)}{\lambda_i^3}\right|\right)^2 \le \left(\sum_{i=m}^n \frac{u_i^2(x)}{\lambda_i^2}\right)\left(\sum_{i=m}^n \frac{u_i^2(y)}{\lambda_i^4}\right) \le \frac{c^2}{\lambda_m^2}$$

wegen

$$\Gamma_2(x,x) = \sum_{i=1}^\infty \frac{u_i^2(x)}{\lambda_i^2} \le c < \infty.$$

Ist die Greensche Funktion nicht bekannt, dann kann man natürlich als Ersatz die

$$\Gamma_k^*(x,y) := \sum_{i=1}^\infty \frac{u_i(x)u_i(y)}{\lambda_i^k}$$

verwenden und muß Eigenschaften der Γ_k^* herausarbeiten.

6.4 Monotonieaussagen für die Eigenwerte

Die in §6.2 gegebene Charakterisierung des n-ten Eigenwerts λ_n hat den Nachteil, daß dabei die Kenntnis der vorherigen eingeht. Das ist ungünstig, wenn man feinere Aussagen über λ_n beweisen möchte. Das *Courantsche Maximum-Minimumprinzip [1920]* vermeidet dies.

Das Courantsche Maximum-Minimumprinzip: *Es seien $h_1,\ldots,h_{n-1} \in \mathcal{H}$ und*

$$\mu_n(h_1,\ldots,h_{n-1}) := \inf_{x \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \cap S_{\mathcal{H}_n}} M(x,x)$$

mit $\mathcal{H}_n := \operatorname{span}(h_1,\ldots,h_{n-1})^\perp$. Dann erhält man den n-ten Eigenwert λ_n von L durch

$$\lambda_n = \sup_{h_1,\ldots,h_{n-1}} \mu_n(h_1,\ldots,h_{n-1}).$$

<u>Beweis:</u> Aus dem soeben Bewiesenen folgt

$$\lambda_n = \mu_n(u_1,\ldots,u_{n-1}).$$

Wir haben also nur noch

$$\forall\, h_1, \ldots, h_{n-1} \in \mathcal{X} \qquad \mu_n(h_1, \ldots, h_{n-1}) \leq \lambda_n$$

zu zeigen. Es seien also $h_1, \ldots, h_{n-1}$ vorgegeben. Dann wählen wir

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, u_i$$

mit $\xi_i \in \mathbb{C}$, $||x|| = 1$ und $x \in \mathcal{H}_n$ Eine solche Wahl ist möglich, weil das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,(u_i, h_k) \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n-1 \\ 1 &= \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \end{aligned}$$

stets nach den ξ_i aufgelöst werden kann. Dann folgt

$$M(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} \xi_i\, \bar{\xi}_k\, M(u_i, u_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |\xi_i|^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = \lambda_n,$$

also

$$\mu_n(h_1, \ldots, h_{n-1}) \leq \lambda_n. \qquad \square$$

Wir wollen dieses Prinzip nun benutzen, um Monotonieaussagen für λ_n zu gewinnen. Es seien G^* und G zwei Gebiete mit

$$G^* \subset G,$$

und es sollen die Eigenwerte λ_n^* und λ_n verglichen werden.

Betrachten wir wieder die Dirichletsche Randwertaufgabe: Dann ist der Vergleich der beiden ersten Eigenwerte leicht. Es ist ja

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \cap S_{\mathcal{H}}} M(u,u) \tag{2}$$

und

$$\lambda_1^* = \inf_{u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G^*) \cap S_{\mathcal{H}}} M(u,u). \tag{3}$$

Der Übergang von G zu G^* bedeutet nun eine Verschärfung der äußeren Nebenbedingungen. In Gl. (3) dürfen dann ja rechts nur noch solche Funktionen zugelassen werden, die ihren Träger in G^* haben. Umgekehrt, denken wir uns Funktionen aus $\mathring{\mathcal{H}}_1(G^*)$ durch Null in G fortgesetzt, dann ist

$$\mathring{\mathcal{H}}_1(G^*) \subset \mathring{\mathcal{H}}_1(G).$$

Für die ersten Eigenwerte bedeutet dies

$$\lambda_1^* \geq \lambda_1.$$

Wir zeigen nun allgemein

Satz 6.4.1: *Es seien $G^* \subset G$ und λ_n^* bzw. λ_n jeweils der n-te Eigenwert zur Dirichletschen Randwertaufgabe für G^* bzw. G. Dann ist*

$$\lambda_n^* \geq \lambda_n.$$

Beweis: Für $n = 1$ haben wir den Satz bereits bewiesen. Es sei also $n > 1$. Dann wählen wir $h_1, \ldots, h_{n-1} \in \mathcal{H}$ und erhalten

$$\mu_n^*(h_1, \ldots, h_{n-1}) = \inf_{\varphi^* \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G^*) \cap S_{\mathcal{H}_n}} M(\varphi^*, \varphi^*) \geq \inf_{\varphi \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \cap S_{\mathcal{H}_n}} M(\varphi, \varphi) = \mu_n(h_1, \ldots, h_{n-1}),$$

also

$$\lambda_n^* \geq \mu_n^*(u_1, \ldots, u_{n-1}) \geq \mu_n(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \lambda_n.$$

Dabei ist u_j Eigenfunktion zu λ_j in G. $\square$

Bei der Neumannschen Randwertaufgabe kann man monotones Verhalten in der anderen Richtung zeigen. Der Übergang von G zu G^* bedeutet hier nämlich eine Lockerung der äußeren Nebenbedingungen. Es werden jetzt Unstetigkeiten der Funktionen aus $\mathcal{H}_1(G)$ zugelassen, es ist ja

$$\mathcal{H}_1(G) \subset \mathcal{H}_1(G^*) \cup \mathcal{H}_1(G \backslash G^*).$$

Deshalb gilt

Satz 6.4.2: *Es seien $G^* \subset G$ und λ_n^* der n-te Eigenwert aus der Menge der Eigenwerte der Neumannschen Randwertaufgabe für G^* und $G \backslash G^*$. Dann ist*

$$\lambda_n^* \leq \lambda_n .$$

Die Aussage von Satz 6.4.1 läßt sich verschärfen, und man kann sogar die strenge Monotonie zeigen, nämlich

Satz 6.4.3: *Es seien $G^* \subset G$ mit $G \backslash G^* \neq \emptyset$, $a_{ik} \in \mathcal{C}_1(G)$ und λ_n^* bzw. λ_n jeweils der n-te Eigenwert zur Dirichletschen Randwertaufgabe für G^* bzw. G. Dann ist*

$$\lambda_n^* > \lambda_n .$$

<u>Beweis</u>: Es seien wie in Abbildung 6.1 skizziert

$$G_1 := D_1 := G^*, \quad G_2 := D_1 \cup \Gamma_1 \cup D_2, \quad \ldots \quad G_m := G.$$

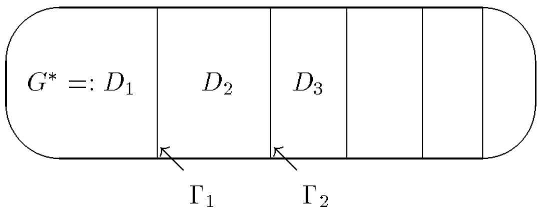

Abbildung 6.1.

Dabei wählen wir $m > 0$ so, daß $\lambda_m > \lambda_n$ ist. Es sei $\lambda_n^* = \lambda_n$. Dann ist λ_n Eigenwert für alle G_j mit $1 \leq j \leq m$. Es seien v_j die entsprechenden Eigenfunktionen in G_j, also

$$L\, v_j = \lambda_n\, v_j .$$

Wegen $v_j \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G_j)$ können wir wieder v_j durch Null zu $v_j \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ fortsetzen. Die v_j sind linear unabhängig. Aus

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = o$$

folgt zum Beispiel $c_1 = c_2 = 0$. Wäre nämlich $c_2 \neq 0$, dann würde $v_2 | D_2 = o$ sein. Aus dem Prinzip von der eindeutigen Fortsetzbarkeit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, das wir in §5.7.5 bewiesen haben, würde daraus $v_2 = o$ folgen. An dieser Stelle wird $a_{ik} \in \mathcal{C}_1(G)$ benötigt.

Es sei nun

$$v := \sum_{j=1}^{m} c_j v_j \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G).$$

Die Koeffizienten c_j wählen wir so, daß $\|v\| = 1$ und

$$\forall\, k = 1, \ldots, m-1 \qquad (v, u_k) = 0$$

ist. Dabei seien die $u_k \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ Eigenfunktionen zu λ_k in G, also $Lu_k = \lambda_k u_k$. Dann folgt

$$\lambda_m \leq M(v,v) = \sum_{i,j=1}^{m} c_i \bar{c}_j M(v_i, v_j) = \lambda_n \sum_{i,j=1}^{m} c_i \bar{c}_j \, (v_i, v_j) = \lambda_n .$$

Das ist ein Widerspruch. □

Im Falle der Neumannschen Randwertaufgabe kann die strenge Monotonie der Eigenwerte nicht gelten, denn $\lambda_1 = 0$ ist Eigenwert für alle Gebiete.

6.5 Zur Asymptotik der Eigenwerte

Über die Asymptotik der Eigenwerte ist viel gearbeitet worden. Zu nennen sind besonders HERMANN WEYL und später RICHARD COURANT. Die Kenntnis der Asymptotik der Eigenwerte war damals wichtig bei der Herleitung der *Jeansschen Strahlungsformel* (Theorie der Hohlraumstrahlung, Plancksche Strahlungsformel). Auch heute noch sind solche Aussagen interessant, zum Beispiel bei *inversen Problemen.* So möchte man aus der Kenntnis des Spektrums Aussagen über die Gestalt des Gebietes zurückerhalten. *„Can one hear the shape of a drum?“* lautet der Titel einer Arbeit von *Kac [1966].*

Hier kann nur eine kurze Einführung gegeben werden. Wir beschränken uns auf den $\mathbb{R}^3$ und beweisen als erstes die in §6.3 gefundenen Aussagen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \le c\,|G|, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{u_i(x)}{\lambda_j^2}\right)^2 \le c, \tag{5}$$

für Operatoren mit variablen Koeffizienten und ohne Kenntnis der Greenschen Funktion.

Dazu verwenden wir im folgenden die Regularitätsabschätzung

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, x \in \bar{G} \subset \mathbb{R}^3 \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_2(G) \qquad |u(x)| \le c\,\|u\|_2, \tag{6}$$

die für Gebiete mit strikter Kegeleigenschaft gilt. Man erhält sie aus der Darstellungsformel Satz 5.7.1, indem man dort $p = 1$ wählt (Sobolevsche Darstellungsformel).

Sind die Koeffizienten von L und ∂G genügend glatt, dann gilt nach §5.4.2

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(L) \qquad \|u\|_2 \le c\left\{\|Lu\| + \|u\|\right\}. \tag{7}$$

Es sei nun mit $a_j \in \mathbb{R}$ und $Lu_j = \lambda_j u_j$

$$u := \sum_{j=1}^{n} a_j u_j.$$

Dann ist

$$v := L^{-1}u \in \mathcal{H}_2(G)$$

mit

$$\|v\|_2 \le c\left\{\|u\| + \|v\|\right\} \le c_1\|u\|$$

sowie

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\,\frac{u_j(x)}{\lambda_j}\right| = \left|v(x)\right| \le c\,\|v\|_2 \le c_2\,\|u\| \le c_2\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2}.$$

Für festes $x \in G$ und

$$a_j := \frac{u_j(x)}{\lambda_j},$$

folgt deshalb

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{u_j(x)}{\lambda_j}\right)^2\right| \le c_2\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{u_j(x)}{\lambda_j}\right)^2}$$

oder

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{u_j(x)}{\lambda_j}\right)^2 \le c_2^2.$$

Das sollte gezeigt werden. Abschätzung (4) folgt daraus durch Integration über G. □

Als nächstes soll uns das asymptotische Verhalten der Eigenwerte λ_n für große n beschäftigen. Das Gebiet $G \in \mathbb{R}^3$ sei wieder glatt berandet und zur Vereinfachung $L = -\Delta$ mit Dirichletscher Randbedingung. Von HERMANN WEYL [1912] stammt die Aussage

$$\lambda_n \sim \left(\frac{6\pi^2 n}{|G|}\right)^{2/3}$$

mit $|G| := \mathrm{Vol}(G)$. Dafür soll ein Beweis skizziert werden.

Es sei

$$N(\lambda) := \sum_{\lambda_j \le \lambda} 1$$

die Anzahl der Eigenwerte $\lambda_j \le \lambda$. Nach Weyl gilt

$$N(\lambda) = \frac{|G|}{6\pi^2}\,\lambda^{3/2} + o\Big(\lambda^{3/2}\Big)\,.$$

Richard Courant [1920] konnte diese Aussage durch Verwenden seines Maximum-Minimumprinzips verbessern und sogar für nur stückweise glatt berandete Gebiete zeigen, nämlich

$$N(\lambda) = \frac{|G|}{6\pi^2}\,\lambda^{3/2} + \mathcal{O}(\lambda \log \lambda).$$

In *Courant & Hilbert [1993], S. 373f* werden diese Ergebnisse dargestellt.

Hier wollen wir etwas anders vorgehen und von der Spektralschar ausgehend argumentieren. Es sei $\big(P(\lambda)\big)$ die Spektralschar von L. Dann ist

$$P(\lambda)f = \sum_{\lambda_j \le \lambda} (f, u_j)u_j = \int_G f(y)\, p(\,\cdot\,, y, \lambda)\, dy$$

mit

$$p(x, y, \lambda) := \sum_{\lambda_j \le \lambda} u_j(x) u_j(y).$$

Man nennt $p(x, y, \lambda)$ *Spektralfunktion* zu L. Für große λ konvergiert sie formal gegen $\delta(x-y)$. Damit wird

$$N(\lambda) = \int_G p(x, x, \lambda)\, dx.$$

Im allgemeinen ist es schwer, dieses Integral direkt auszuwerten. Man denke zum Beispiel wieder an die Anfangsrandwertaufgabe zur schwingenden Saite in $\mathbb{R}^1$. In diesem Fall sind $G = (0, \pi)$,

$$\lambda_n = n^2 \quad \text{und} \quad u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx).$$

Es folgt also direkt

$$N(\lambda) = \sqrt{\lambda} + \mathcal{O}(1),$$

während das Hantieren mit

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n \le \sqrt{\lambda}} \big(\sin(nx)\big)^2$$

schwierig sein dürfte.

Um weiterzukommen transformiert man p und verwendet dazu die Grundlösungen entsprechender zeitabhängiger Gleichungen. Mathematisch ist es leicht, die Wärmeleitungsgleichung zu benutzen, weil ihre Lösungen bezüglich der Zeit exponentiell abklingen. Man erhält damit aber auch nur relativ grobe Resultate. Wesentlich schärfere Abschätzungen kann man beweisen, wenn man die Wellengleichung heranzieht. Das wird aber aufwendiger, man vergleiche *Seeley [1978]*.

Hier beschränken wir uns auf die Wärmeleitungsgleichung

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + L\Big)u = o$$

mit $u(0) = u^0$. Dabei sei $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$ eine schwache Lösung dieser Gleichung. Man erhält sie in der Form

$$u(t) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} dP(\lambda)u^0 =: \int_G u^0(y)\, h(\,\cdot\,, y, t)\, dy$$

mit dem *Wärmekern*

$$h(x,y,t) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dp(x,y,\lambda) = \sum_{j=1}^\infty \mathrm{e}^{-\lambda_j t}\, u_j(x)u_j(y).$$

Für $t > 0$ ist die Konvergenz dieser Summe sehr viel besser als beim „Dirac-Kern“

$$\sum_{j=1}^\infty u_j(x)u_j(y).$$

Das möchte man ausnutzen.

Für $x \geq 0$ ist

$$x^2 \mathrm{e}^{-x} \leq 2,$$

also etwa

$$\mathrm{e}^{-\lambda_j t} \leq \frac{2}{\lambda_j^2 t^2}.$$

Zusammen mit Abschätzung (4) folgt also

$$\left|h(x,y,t)\right| \leq \frac{2}{t^2} \sum_{j=1}^\infty \frac{|u_j(x)\, u_j(y)|}{\lambda_j^2} \leq \frac{c\,|G|}{t^2}.$$

Diese Abschätzung ist aber noch zu grob, sie liefert noch nicht die richtige Größenordnung. Unser Ziel ist vielmehr, in $\mathbb{R}^3$

$$h(x,y,t) \leq \frac{c}{t^{3/2}} \tag{8}$$

zu beweisen. Abschätzung (8) würde unmittelbar aus einer verbesserten Abschätzung (4) folgen, nämlich aus

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\lambda_j^{3/2}} \leq c.$$

Diese Abschätzung ist aber leider im allgemeinen falsch. Das zeigt das folgende

Beispiel 6.5.1: *Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Würfel mit der Kante a. Dann gilt mit $l, m, n \in \mathbb{N}_0$*

$$\lambda_{l,m,n} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(l^2 + m^2 + n^2\right).$$

Das folgt wie bei der Saite unmittelbar durch Separieren. Die Anzahl der Gitterpunkte kann man abschätzen, man findet

$$N(\lambda) = \frac{a^3}{6\pi^2}\, \lambda^{3/2}\left(1 + f(\lambda)\right)$$

und mit einer Konstanten c

$$\left|f(\lambda)\right| \leq \frac{c}{a}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Daraus folgt mit $K := (6\pi^2 n/a^3)^{2/3}$

$$\lambda_n = K\frac{1}{(1+f)^{2/3}} \sim K\left(1 + \frac{2c}{3a}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \sim K\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}\frac{c}{a}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}}\right)$$

oder

$$\left(\sqrt{\lambda_n} - \frac{c}{3a}\right)^2 \sim K + \frac{c^2}{9a^2} = \left(\sqrt{K}\sqrt{1 + \frac{c^2}{9a^2 K}}\right)^2,$$

also

$$\lambda_n = K\left\{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)\right\}.$$

Das bedeutet

$$\lambda_n = \left(\frac{6\pi^2}{a^3} n\right)^{2/3}\left\{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)\right\},$$

und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{3/2}}$$

divergiert. □

Um Abschätzung (8) zu beweisen, verwenden wir nun Resultate aus der Theorie der Wärmeleitungsgleichung, die wir erst später in §9.4 beweisen werden. Das Folgende wird jetzt also eigentlich nur plausibel gemacht, wir wählen die Darstellung aber direkt für den $\mathbb{R}^n$:

Die Abbildung $h(x,y,t)$ ist eine *Grundlösung* zur Wärmeleitungsgleichung für G. Damit ist gemeint, daß für festes y bezüglich (t,x)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) h(x,y,t) = \delta(t)\delta(x-y)$$

gilt, oder genauer:

1. $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) h(x,y,t) = 0$ für $t > 0$ und $x \in G$,
2. $h(x,y,t) = 0$ für $t > 0$ und $x \in \partial G$,
3. $h(x,y,0) = \delta(x-y)$.

Diese Grundlösung h vergleichen wir mit der entsprechenden Grundlösung h_0 für den ganzen $\mathbb{R}^n$, nämlich mit

$$h_0(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

Es sei

$$\chi := h - h_0.$$

Dann ist χ bei glattem Rand eine reguläre Lösung der Wärmeleitungsgleichung in G mit

$$\chi(x,y,0) = 0.$$

In der Theorie der Wärmeleitungsgleichung gilt ein *Maximumprinzip*, vgl. Beispiel 9.4.1. Aus

$$\chi(x,y,0) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(x,y,t)\big|_{x\in\partial G} = -h_0(x,y,t) \leq 0$$

folgt nämlich

$$\forall\, x \in G \quad \forall\, t \geq 0 \qquad \chi(x,y,t) \leq 0.$$

Damit ist

$$h(x,y,t) \leq h_0(x,y,t) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}},$$

und wir haben Abschätzung (8) bewiesen.

Der Rest ist nun leicht: Es ist für $t > 0$

$$\begin{aligned} p(x,x,\lambda) = \int_0^\lambda dp(x,x,\mu) \leq e^{\lambda t} \int_0^\lambda e^{-\mu t}\, dp(x,x,\mu) \leq \\ \leq e^{\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu t}\, dp(x,x,\mu) = e^{\lambda t}\, h(x,x,t) \leq \frac{e^{\lambda t}}{(4\pi t)^{n/2}}. \end{aligned}$$

Wählen wir $t := 1/\lambda$, dann folgt

$$p(x,x,\lambda) \leq \frac{e}{(4\pi)^{n/2}} \lambda^{n/2}.$$

Damit erhalten wir

$$N(\lambda) \leq \frac{e\,|G|}{(4\pi)^{n/2}} \lambda^{n/2}.$$

Das ist die gewünschte Abschätzung mit dem richtigen Exponenten. Die genauere Asymptotik mit der richtigen Konstanten folgt erst durch Verwenden der Grundlösung zur Wellengleichung.

6.6 Eigenwerte des Schrödingeroperators

Elliptische Differentialoperatoren in einem unbeschränkten Gebiet besitzen im allgemeinen ein kontinuierliches Spektrum. Das soll in §8 diskutiert werden. Es können aber auch (zusätzlich) Punkteigenwerte auftreten. Ein typisches Beispiel dafür ist der Schrödingeroperator A in $G = \mathbb{R}^3$, den wir in §5.5.1 eingeführt haben. Es ist $C\sigma(A) = \mathbb{R}_0^+$, wie wir in §9.7 sehen werden. Jetzt soll nur $P\sigma(A)$ interessieren.

Wir wählen die Bezeichnungen von §5.5.1. Dann ist

$$\sigma(A) \subset [-q^2, \infty),$$

und wir wollen als erstes

$$P\sigma(A) \subset [-q^2, 0) \tag{9}$$

beweisen: Es sei $\lambda \in P\sigma(A)$ und

$$Au = \lambda u$$

mit $\|u\| = 1$. Dann ist $u \in \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$. Wir wählen $a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ und $u_a(x) := u(ax)$. Man sieht leicht

$$\lim_{a \to 1} \|u_a - u\| = 0.$$

Mit

$$\Delta_a := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial(ax_i)^2}$$

ist

$$\Delta u_a = a^2 \Delta_a u_a$$

und

$$0 = \left(-\Delta_a - \frac{q}{a|\cdot|} - \lambda\right) u_a = \frac{1}{a^2}\left(A + \frac{(1-a)q}{|\cdot|} - a^2\lambda\right) u_a$$

oder

$$a^2\lambda(u_a, u) = \left(\left(A - \frac{(a-1)q}{|\cdot|}\right) u_a, u\right) = \lambda(u_a, u) + (a-1)(Vu_a, u).$$

Für $a \neq 1$ folgt daraus

$$(a+1)\lambda(u_a, u) = (u_a, Vu),$$

also für $a \to 1$

$$2\lambda = 2\lambda \|u\|^2 = (u, Vu) < 0.$$

Das beweist Aussage (9).

Als nächstes zeigen wir, daß $[-q^2, 0) \cap \sigma(A)$ höchstens aus isolierten Eigenwerten mit endlicher Vielfachheit besteht: Es sei $\lambda \in [-q^2, 0)$ und $A_0 = -\Delta$ in $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$. Dann ist

$$(A_0 - \lambda)^{-1} \in \mathcal{CL}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_2)$$

mit

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3) \qquad \|u\|_2 \leq c\,\|(A_0 - \lambda)u\|.$$

Betrachten wir nun die Gleichung

$$(A - \lambda)u \overset{!}{=} f \tag{10}$$

mit $f \in \mathcal{H}$. Sie ist äquivalent zu

$$\left(id + V(A_0 - \lambda)^{-1}\right) v \overset{!}{=} f \tag{10'}$$

mit $v := (A_0 - \lambda)u$ und

$$V(A_0 - \lambda)^{-1} \in \mathcal{KL}(\mathcal{H}). \tag{11}$$

Um letzteres zu zeigen, sei $v_n \in \mathcal{H}$ mit $\|v_n\| \leq 1$. Dann ist

$$\left\|(A_0 - \lambda)^{-1} v_n\right\|_2 \leq c,$$

und aus dem Rellichschen Auswahlsatz folgt die Existenz einer Teilfolge, die in jedem $G_R := G \cap B(0, R)$ bezüglich $\mathcal{H}_1(G_R)$ konvergiert. Es sei

$$\left((A_0 - \lambda)^{-1} v_n\right)$$

bereits diese Teilfolge. Weiterhin ist für $w \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3)$

$$\|Vw\| \leq 2q\,|w|_1$$

und

$$\int_{|x|>R} \big|(Vw)(x)\big|^2 dx \leq \frac{q^2}{R^2} \int_{|x|>R} |w(x)|^2 dx \leq \frac{q^2}{R^2}\|w\|^2.$$

Mithin gilt Aussage (11).

Für festes $\lambda \in [-q^2, 0)$ gilt also für Gleichung (10) die Riesz-Schauder Theorie. Mithin gehört die Zahl λ zur Resolventenmenge des Schrödingeroperators oder ist ein Eigenwert endlicher Vielfachheit. Das beweist die zweite Aussage.

Als drittes zeigen wir, daß die Eigenwerte in $[-q^2, 0)$ keinen Häufungspunkt besitzen: Es seien nämlich $\lambda_n \in [-q^2, 0)$ eine Folge von Eigenwerten mit $\lambda_n \to \lambda \in [-q^2, 0)$ und u_n die zugehörigen Eigenfunktionen, also

$$Au_n = \lambda_n u_n.$$

Dann folgt aus

$$|u|_1^2 \leq B(u,u) + 2q\,|u|_1\,\|u\|$$

und $B(u_n, u_n) = \lambda_n$

$$|u_n|_1^2 \leq 2B(u_n, u_n) + 4q^2 = 2\lambda_n + 4q^2 \leq 4q^2.$$

Mithin ist

$$v_n := (A_0 - \lambda)u_n = (-V + \lambda_n - \lambda)u_n$$

beschränkt, und es gilt

$$\big(id + V(A_0-\lambda)^{-1}\big)v_n = (\lambda_n - \lambda)u_n \to 0.$$

Wegen $V(A_0-\lambda)^{-1} \in \mathcal{KL}(\mathcal{H})$ gibt es eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit

$$\big(V(A_0-\lambda)^{-1}\big)v_n$$

bezeichnen. Mithin konvergiert auch (v_n), und wegen $(A_0-\lambda)^{-1} \in \mathcal{CL}(\mathcal{H})$ ist

$$(u_n) = \big((A_0-\lambda)^{-1}v_n\big)$$

ebenfalls eine Cauchyfolge. Das ist ein Widerspruch, die Folge (λ_n) besitzt also keinen Häufungspunkt $\lambda \in [-q^2, 0)$.

Als letztes zeigen wir, daß es unendlich viele Eigenwerte gibt. Diese haben dann Null als Häufungspunkt. Dazu wählen wir ein $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $o \notin \operatorname{supp}\varphi$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$\varphi_n(x) := \varphi\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Dann folgt für $n \to \infty$

$$B(\varphi_n, \varphi_n) = \int_{\mathbb{R}^3}\Big(\big|\nabla\varphi_n\big|^2 - \frac{q}{|\cdot|}\big|\varphi_n\big|^2\Big) = n^2\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{1}{n}\big|\nabla\varphi\big|^2 - \frac{q}{|\cdot|}\big|\varphi\big|^2\Big) < 0.$$

Wir wählen nun eine Teilfolge der (φ_n) mit $B(\varphi_n, \varphi_n) < 0$, und zwar so, daß die φ_n disjunkte Träger besitzen. Wir bezeichnen diese Folge wieder mit (φ_n).

Dann folgt die Existenz eines negativen Eigenwerts aus

$$B(\varphi_1, \varphi_1) = (A\varphi_1, \varphi_1) = \int_{-q^2}^{\infty} \lambda\, d\big(P(\lambda)\varphi_1, \varphi_1\big) < 0.$$

Im Falle $[-q^2, 0) \subset \rho(A)$ könnte das Integral nämlich keine negativen Werte annehmen.

Es seien schließlich $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Eigenwerte von A mit den zugehörigen orthonormalen Eigenfunktionen $u_1, \ldots, u_k$. Wir zeigen die Existenz eines weiteren Eigenwerts λ_{k+1}: Es sei

$$B := A - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\,\cdot\,, u_i)\,u_i$$

und $\psi \in \operatorname{span}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ mit
$$\forall\, i = 1, \ldots, k \qquad (\psi, u_i) = 0.$$
Dann ist
$$(B\psi, \psi) = (A\psi, \psi) < 0$$
und nach dem Vorangegangenen besitzt B einen negativen Eigenwert λ_{k+1} mit der dazugehörenden Eigenfunktion u_{k+1},
$$B\, u_{k+1} = \lambda_{k+1}\, u_{k+1}.$$
Ferner gilt
$$\forall\, j = 1, \ldots, k \qquad \lambda_{k+1}(u_{k+1}, u_j) = (Bu_{k+1}, u_j) = (u_{k+1}, Bu_j) = 0,$$
also
$$A\, u_{k+1} = B\, u_{k+1} = \lambda_{k+1}\, u_{k+1}.$$
Damit besitzt A unendlich viele negative Eigenwerte $\lambda_n \in [-q^2, 0)$ mit dem Häufungspunkt Null.

Es sei schließlich noch bemerkt, daß sich die Eigenwerte und Eigenfunktionen von A explizit angeben lassen. Man kann dazu die Methode der Separation der Variablen verwenden. Ursprünglich ist man auf diese Weise an das Problem herangegangen, das Verhalten eines Elektrons in der Umgebung einer Punktladung zu beschreiben. Man erhält
$$\lambda_n = -\frac{q^2}{4n^2}.$$
Einzelheiten kann man in *Triebel [1972]* und in vielen anderen Büchern finden.

7 Die Wellengleichung

In diesem Kapitel beginnen wir mit der Behandlung hyperbolischer Gleichungen. Dabei beschränken wir uns zunächst auf die Wellengleichung, andere Gleichungen der Mathematischen Physik werden in §9 vorgestellt.

7.1 Formulierung von Anfangsrandwertaufgaben

Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $J \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, etwa $J = [0, T]$ mit $T > 0$ oder $J = \mathbb{R}_0^+$, und

$$u \ : \ J \times G \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Abbildung. Es sei ferner $\langle t, x\rangle \in J \times G$. Wir werden in der Notation häufig die Abhängigkeit von x unterdrücken, also kurz $u(t)$ für $u(t, x)$ und auch u' für u_t schreiben. Dann betrachten wir die Wellengleichung

$$Wu := \partial_t^2 u + Au = o$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = u^0 \quad \text{ und } \quad u'(0) = u^1.$$

Dabei sind u^0, u^1 vorgegebene Funktionen und A ein selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung. Einzelheiten werden wir sogleich präzisieren. In den Anwendungen steht vor dem Term $\partial_t^2 u$ als Faktor eine positive Massendichtefunktion, die wir zur Vereinfachung hier als Eins gewählt haben.

Als erstes wollen wir den Lösungsbegriff präzisieren. Es gibt eine ganze Reihe von Lösungsbegriffen; klassische, schwache, strikte, sowie Lösungen mit endlicher Energie oder Lösungen im Distributionensinn. Wir beginnen mit den schwachen Lösungen für $J = \mathbb{R}_0^+$: Es seien $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$, $\mathring{\mathcal{C}}(G, \cdot\,) := \{u \in \mathcal{C}(G, \cdot\,) \mid \operatorname{supp} u \Subset G\}$,

$$\mathcal{V} := \mathring{\mathcal{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$$

ein Testraum und A zunächst analog §5.1 definiert, also

$$A = -\sum_{i,k} \partial_i a_{ik} \partial_k \quad \text{mit } \mathcal{D}(A) = \left\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\middle|\; \partial_i a_{ik} \partial_k u \in \mathcal{H} \right\}.$$

Dann geben wir

Definition 7.1.1: *Es seien $u^0, u^1 \in \mathcal{H}$. Dann heißt u* schwache Lösung *von $Wu = o$ für $t \geq 0$, wenn folgendes gilt:*

1. $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$,

2.
$$\forall\, v \in \mathcal{V} \qquad \int_{\mathbb{R}^+ \times G} u\, \overline{Wv} \; + \big(u^0, v_t(0, \cdot\,)\big) - \big(u^1, v(0, \cdot\,)\big) = 0.$$

Definition 7.1.2: *Es seien $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ und $u^1 \in \mathcal{H}$. Dann heißt u* Lösung mit endlicher Energie *von $Wu = o$ für $t \geq 0$, wenn folgendes gilt:*

1. u ist schwache Lösung,

2. $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{D}(A^{1/2})) \cap \mathcal{C}_1(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$.

Dabei ist

$$E(t) := \big\|u_t(t, \cdot\,)\big\|^2 + \big\|(A^{1/2}u)(t, \cdot\,)\big\|^2$$

die *Energie*.

Es gibt, wie gesagt, viele Lösungsbegriffe. Man findet auch

Definition 7.1.3: *Es seien $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ und $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Dann heißt u* strikte Lösung *von $Wu = o$ für $t \geq 0$, wenn folgendes gilt:*

1. u ist schwache Lösung,

2. $u \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{D}(A)\big) \cap \mathcal{C}_1\big(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{D}(A^{1/2})\big) \cap \mathcal{C}_2\big(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H}\big)$.

Es sei u eine strikte Lösung. Dann ist $E(t)$ differenzierbar mit

$$E'(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{(u_t, u_{tt}) + (A^{1/2}u, A^{1/2}u_t)\right\} = 2\,\mathrm{Re}\,(u_t, u_{tt} + Au) = 0,$$

also

$$\forall\, t \geq 0 \qquad E(t) = E(0) = \|u^1\|^2 + \|A^{1/2}u^0\|^2.$$

Beispiel 7.1.4: *Es seien $G = (0, \pi)$, A der Δ-Operator mit Dirichletscher Randbedingung und $u^0 = 1$ sowie $u^1 = 0$.*

Wie wir bereits wissen, besitzt A die Eigenwerte $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, und die Eigenfunktionen

$$u_n(x) = \sqrt{2/\pi}\, \sin(nx).$$

Es gilt folglich

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, (\,\cdot\,, u_n)\, u_n.$$

Nun ist

$$u_n^0 := (u^0, u_n) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = 2\sqrt{2/\pi} \begin{cases} 1/n & \text{für ungerades } n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $u^0 \notin \mathcal{D}(A^{1/2})$, denn es ist ja

$$\|A^{1/2}f\|^2 = (Af, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, |f_n|^2.$$

Wir können folglich nur schwache Lösungen erwarten, nämlich (das wird im nächsten Abschnitt gezeigt)

$$\begin{aligned} u(t,x) = \Big(\cos(A^{1/2}t)\, u^0\Big)(x) &= \sqrt{2/\pi} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0\, \cos(nt) \cdot \sin(nx) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} \cos\big((2j-1)t\big) \cdot \sin\big((2j-1)x\big) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} \left\{ \sin\big((2j-1)(x+t)\big) + \sin\big((2j-1)(x-t)\big) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ u^0(x+t) + u^0(x-t) \right\}. \end{aligned}$$

Das ist die d'Alembertsche Lösung. Dabei ist u^0 antisymmetrisch und periodisch fortzusetzen. Man betrachte hierzu Abbildung 7.1.

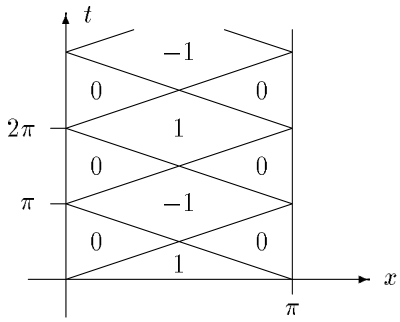

Abbildung 7.1.

□

Beispiel 7.1.5: *Es seien $G = (0, \pi)$, A der Δ-Operator mit Neumannscher Randbedingung und $u^0 = 1$ sowie $u^1 = 0$.*

Jetzt hat A die Eigenwerte $\lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}_0$, und die Eigenfunktionen

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2/\pi}\cos(nx) & \text{für } n \geq 1, \\ 1/\sqrt{\pi} & \text{für } n = 0, \end{cases}$$

also

$$u_n^0 := (u^0, u_n) = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $u^0 \in \mathcal{D}(A^n)$ für alle n, und wir erwarten „sehr glatte Lösungen". In der Tat ist

$$u(t,\cdot) = \cos(A^{1/2}t)\, u^0 = 1.$$

□

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß u bezüglich der Zeit nicht quadratintegrabel ist. Insbesondere bei Außenraumaufgaben werden wir das asymptotische Verhalten der Lösungen für große Werte des Zeitparameters eingehend diskutieren.

7.2 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Wir beginnen mit der Diskussion schwacher Lösungen. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist

Satz 7.2.1: *Es seien $u^0, u^1 \in \mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$. Dann gibt es genau eine schwache Lösung von*

$$Wu = o$$

für $t \geq 0$ mit $u(0) = u^0$ und $u'(0) = u^1$.

Beweis der Eindeutigkeit: Es sei u eine schwache Lösung zu $u^0 = u^1 = o$. Dann gilt

$$\forall\, v \in \mathcal{V} \qquad \int_{\mathbb{R}^+ \times G} u\, \overline{Wv} = 0,$$

und wir wollen zeigen, daß für alle $I \subset \mathbb{R}^+$ die Menge $\{Wv \mid v \in \mathcal{V}\}$ in $\mathcal{L}^2(I \times G)$ dicht ist. Dazu wählen wir ein $\tau < 0$ und ein $\zeta \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ mit

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t \leq \tau \end{cases}$$

und definieren

$$V \;:\; \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^+ \times G) \longrightarrow \mathcal{V}$$

mit

$$(V\psi)(t,\cdot) := -\zeta(t) \int_t^\infty \Big(\int_0^\infty \frac{\sin\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)}{\sqrt{\lambda}}\, d\big(P(\lambda)\psi\big)(s,\cdot)\Big)\, ds.$$

Dabei handelt es sich beim äußeren Integral um das *Bochnerintegral:* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \to \mathcal{H}$. Ein $x(s) \in \mathcal{H}$ ist Bochner-integrabel gerade dann, wenn $\|x(s)\|$ integrabel ist. Einzelheiten findet man in *Wloka [1982], S. 372.*

Unser Ziel ist es, für festes $\psi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^+ \times G)$

$$v := V\psi \in \mathcal{V} \quad \text{und} \quad Wv = \psi \quad \text{für } t > 0$$

zu zeigen. Damit wäre die Dichte und damit dann die Eindeutigkeit gezeigt. Wir führen den Nachweis in vier Schritten:

1. *Wegen* $\|\int_0^\infty f(\lambda) dP(\lambda) x\| \leq \|f\|_\infty \|x\|$ *ist* $\big\|\big(\int_{\lambda=0}^\infty \cdots\big)\big\| \leq |t-s|\,\|\psi(s,\cdot)\|$. *Mithin existiert v und hat bezüglich t kompakten Träger.*
2. *Es ist $v(t,\cdot) \in \mathcal{D}(A)$*: Zum Beweis wählen wir ein festes Intervall $I \subset \mathbb{R}_0^+$. Dann ist $AP(I)$ ein beschränkter Operator und

$$AP(I)v(t,\cdot) = -\zeta(t) \int_t^\infty \Big(\int_{\lambda \in I} \frac{\sin\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)}{\sqrt{\lambda}} d\big(P(\lambda)A\psi\big)(s,\cdot)\Big)\, ds,$$

also
$$\big\|AP(I)v(t,\cdot)\big\| \le \zeta(t)\int_t^\infty |t-s|\,\|A\psi(s,\cdot)\|\,ds < \infty.$$
Es seien nun $I_n := (-n,n]$. Dann konvergiert die Folge
$$\big(P(I_n)v(t,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$
bezüglich der Graphennorm von A. Mithin ist $v(t,\cdot) \in \mathcal{D}(A)$.

3. *Es ist $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathcal{D}(A))$*: Wegen
$$|\sin\alpha - \sin\beta| = |\alpha-\beta|\cdot|\cos\theta| \le |\alpha-\beta|$$
folgt das analog aus
$$\begin{aligned}\big\|v(t,\cdot)-v(t_0,\cdot)\big\| &\le \\ &\le |\zeta(t)-\zeta(t_0)|\,\Big\|\int_t^\infty \cdots\Big\| + \zeta(t_0)\,\Big\|\int_t^{t_0}\cdots\Big\| + \zeta(t_0)\,|t-t_0|\int_{t_0}^\infty \|\psi(s,\cdot)\|\,ds \le \\ &\le |\zeta(t)-\zeta(t_0)|\int_t^\infty |t-s|\,\|\psi(s,\cdot)\|\,ds + \zeta(t_0)\Big|\int_{t_0}^t |t-s|\,\|\psi(s,\cdot)\|\,ds\Big| + \\ &\qquad + \zeta(t_0)\,|t-t_0|\int_{t_0}^\infty \|\psi(s,\cdot)\|\,ds.\end{aligned}$$

4. *Es ist $v \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R},\mathcal{H})$ und $Wv=\psi$*: Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen. Wegen
$$\begin{aligned}&\Big|\frac{\sin\big(\sqrt{\lambda}(t-s+h)\big)-\sin\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)}{\sqrt{\lambda}\,h} - \cos\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)\Big| = \\ &\qquad = \Big|\sin\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)\,\frac{\cos(\sqrt{\lambda}h)-1}{\sqrt{\lambda}h} + \cos\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)\Big(\frac{\sin(\sqrt{\lambda}h)}{\sqrt{\lambda}h}-1\Big)\Big| \le 3\end{aligned}$$
folgt aus dem Lebesgueschen Satz
$$\frac{d}{dt}\int_t^\infty\Big(\int_0^\infty \frac{\sin\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)}{\sqrt{\lambda}}\,dP(\lambda)\psi(s,\cdot)\Big)ds = \int_t^\infty\Big(\int_0^\infty \cos\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)\,dP(\lambda)\psi(s,\cdot)\Big)ds$$
und analog
$$\frac{d^2}{dt^2}\int_t^\infty\Big(\cdots\Big)ds = -\psi(t,\cdot) - A\int_t^\infty\Big(\int_0^\infty \frac{\sin\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)}{\sqrt{\lambda}}dP(\lambda)\psi(s,\cdot)\Big)ds,$$
also
$$v'' + Av = \psi.$$

<u>Beweis der Existenz</u>: Die formale Lösung unserer Aufgabe lautet
$$u(t) = \cos(\sqrt{A}t)\circ u^0 + \frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\circ u^1 := \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda}t)\,dP(\lambda)u^0 + \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}dP(\lambda)u^1.$$
Wir haben zu zeigen, daß das so definierte u wirklich eine schwache Lösung ist. Den Nachweis führen wir in drei Schritten:

1. *Für alle t ist $u(t)\in\mathcal{H}$*: Das folgt unmittelbar aus
$$\Big|\cos(\sqrt{\lambda}t)\Big| \le 1 \quad \text{und} \quad \Big|\frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}\Big| \le |t|.$$

2. *Es ist $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+,\mathcal{H})$*: Das folgt aus
$$\begin{aligned}\big\|u(t)-u(t_0)\big\|^2 \le 2\Big\{&\underbrace{\int_0^\infty \Big|\cos(\sqrt{\lambda}t)-\cos(\sqrt{\lambda}t_0)\Big|^2 d\big\|P(\lambda)u^0\big\|^2}_{=:I_1} + \\ &+ \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\Big|\sin(\sqrt{\lambda}t)-\sin(\sqrt{\lambda}t_0)\Big|^2 d\big\|P(\lambda)u^1\big\|^2}_{=:I_2}\Big\}\end{aligned}$$

mit

$$I_1 \leq \lambda_0 \, |t - t_0|^2 \int_0^{\lambda_0} d\big\|P(\lambda)u^0\big\|^2 + 4\int_{\lambda_0}^{\infty} d\big\|P(\lambda)u^0\big\|^2 \leq$$
$$\leq \lambda_0 \, |t-t_0|^2 \, \big\|u^0\big\|^2 + 4\big(\|u^0\|^2 - \|P(\lambda_0))u^0\|^2\big)$$

und

$$I_2 \leq |t - t_0|^2 \, \big\|u^1\big\|^2.$$

3. *Es gilt*

$$\forall\, v \in \mathcal{V} \qquad \int_{\mathbb{R}^+ \times G} u\,\overline{Wv} \; + \big(u^0, v'(0)\big) - \big(u^1, v(0)\big) = 0 :$$

Zum Nachweis behandeln wir zuerst den Term

$$\cos\,(\sqrt{A}t) \circ u^0$$

und approximieren u^0 durch $P(I)u^0$ mit $I := I_n := (-n, n]$. Es sei zunächst $u^0 \in P(I)\mathcal{H}$. Dann werden die Integrale bezüglich λ eigentlich, und wir erhalten

$$-\big(u^0, v'(0)\big) = -\int_0^\infty d\big(P(\lambda)u^0, v'(0)\big) = -F(0)$$

mit

$$F(t) := \int_0^\infty \cos\,(\sqrt{\lambda}t)\, d\big(P(\lambda)u^0, v'(t)\big).$$

Es ist $F(\infty) = 0$, und F ist differenzierbar wegen $u^0 \in P(I)\mathcal{H}$, also

$$-\big(u^0, v'(0)\big) = \int_0^\infty F'(t)\,dt = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Big\{\cos\,(\sqrt{\lambda}t)\, d\big(P(\lambda)u^0, v''(t)\big) - \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}t)\, d\big(P(\lambda)u^0, v'(t)\big)\Big\}\,dt.$$

Analog ist

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\int_0^\infty \sqrt{\lambda}\sin\,(\sqrt{\lambda}t)\, d\big(P(\lambda)u^0, v(t)\big)\,dt \\ &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Big\{\cos\,(\sqrt{\lambda}t)\, d\big(P(\lambda)u^0, Av(t)\big) + \sqrt{\lambda}\sin\,(\sqrt{\lambda}t)\, d\big(P(\lambda)u^0, v'(t)\big)\Big\}\,dt, \end{aligned}$$

also

$$\big(\cos\,(\sqrt{A}t) \circ u^0, v'' + Av\big) = -\big(u^0, v'(0)\big).$$

Den zweiten Term

$$\frac{\sin\,(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}} \circ u^1$$

behandelt man analog. □

Existenzsätze für strikte Lösungen und für Lösungen mit endlicher Energie lassen sich analog führen. Wir zeigen noch

Satz 7.2.2: *Es seien $u^0 \in \mathcal{D}(\sqrt{A})$, $u^1 \in \mathcal{H}$ und u Lösung mit endlicher Energie. Dann ist $E(t)$ konstant, nämlich*

$$E(t) = \big\|u'(t)\big\|^2 + \big\|\sqrt{A}u(t)\big\|^2 = \big\|u^1\big\|^2 + \big\|\sqrt{A}u^0\big\|^2.$$

Beweis: Für strikte Lösungen haben wir den Satz bereits bewiesen. Wir können also entweder die Anfangswerte durch glattere approximieren und dieses Ergebnis verwenden oder direkt nachrechnen, nämlich

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\sin\,(\sqrt{A}t) \circ \sqrt{A}u^0 + \cos\,(\sqrt{A}t) \circ u^1, \\ \sqrt{A}\,u(t) &= \cos\,(\sqrt{A}t) \circ \sqrt{A}u^0 + \sin\,(\sqrt{A}t) \circ u^1 \end{aligned}$$

und erhalten daraus die Behauptung. □

Bemerkung 7.2.3: *Sind die Anfangsdaten genügend regulär, dann ist*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{2j} u(t) = (-1)^j \left\{\cos(\sqrt{A}t) \circ A^j u^0 + \sin(\sqrt{A}t) \circ A^{j-\frac{1}{2}} u^1\right\}.$$

Aus $u^0 \in \mathcal{D}(A^j)$ und $u^1 \in \mathcal{D}(A^{j-\frac{1}{2}})$ folgt für u Regularität bezüglich der Zeit, nämlich

$$u \in \mathcal{C}_{2j}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H}).$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit folgendem

Beispiel 7.2.4: *Es seien* $G = \mathbb{R}^+, u^0 := o$, A *der* Δ*-Operator mit Dirichletscher Randbedingung und*

$$u^1(x) := 2\left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right).$$

Gesucht wird eine Lösung mit endlicher Energie.

Es ist

$$u^1(x) = -2\left(\frac{\sin x}{x}\right)'.$$

In einer Umgebung des Nullpunktes gilt

$$u^1(x) = \mathcal{O}(x) \quad \text{sowie} \quad u^{1\prime}(x) = \mathcal{O}(1)$$

und für große x

$$u^1(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{sowie} \quad u^{1\prime}(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mithin ist $u^1 \in \mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$ und auch $u^1 \in \mathcal{D}(\sqrt{A})$. Es existiert also sogar eine strikte Lösung.

Wir wollen das Beispiel explizit durchrechnen, bestimmen dazu als erstes die Spektralschar und lösen dann die Anfangsrandwertaufgabe.

1. *Wir bestimmen die Spektralschar* $P(\lambda)$: Für $\lambda \in \rho(A) = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+$ ist

$$((A-\lambda)^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{\sin(\sqrt{\lambda}x)\int_x^\infty f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}y}\,dy + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x}\int_0^x f(y)\sin(\sqrt{\lambda}y)\,dy\right\}.$$

Mit $\mu > 0$ und $\sqrt{\mu \pm \mathrm{i}\varepsilon} \to \pm\sqrt{\mu}$ für $\varepsilon \downarrow 0$ folgt daraus

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\left(A-(\mu+i\varepsilon)\right)^{-1}f - \left(A-(\mu-i\varepsilon)\right)^{-1}f\right\} = \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{\mu}}\sin(\sqrt{\mu}x)\int_0^\infty f(y)\sin(\sqrt{\mu}y)\,dy.$$

Für $f, g \in \mathcal{L}^{2f}(G)$ folgt deshalb aus der Stoneschen Formel (vgl. *FA, §9.2*); $\mathcal{L}^{2f}(G)$ ist die Menge der quadratintegrablen Funktionen mit finitem Träger)

$$\begin{aligned}(P(\lambda)f,g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\mu}x)}{\sqrt{\mu}}\left(\int_0^\infty f(y)\ \sin(\sqrt{\mu}y)\,dy\right)\overline{g(x)}\,dx\,d\mu \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty \sin(\sigma x)\left(\int_0^\infty f(y)\ \sin(\sigma y)\,dy\right)\overline{g(x)}\,dx\,d\sigma.\end{aligned}$$

Es seien nun

$$u_\sigma(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\sigma x)$$

und mit $FS_0 : \mathcal{L}^{2f}(G) \to \mathcal{H}$

$$\tilde{f}(\sigma) := (FS_0 f)(\sigma) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(y)\ \sin(\sigma y)\,dy = (f, u_\sigma).$$

Dann ist

$$(P(\lambda)f,g) = \int_0^{\sqrt{\lambda}} \tilde{f}(\sigma)\,\overline{\tilde{g}(\sigma)}\,d\sigma$$

und

$$(P(\lambda)f)(x) = \int_0^{\sqrt{\lambda}} \tilde{f}(\sigma)\, u_\sigma(x)\, d\sigma.$$

Wie bei der Herleitung der Fouriertransformation sieht man, daß sich FS_0 unitär zu

$$FS \ : \ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

fortsetzen läßt mit $(FS)^2 = id$. Die Abbildung FS ist die *Fouriersinustransformation*, und es gilt

$$\big(FS\, Af\big)(\sigma) = \sigma^2 \big(FS\, f\big)(\sigma).$$

2. Die Lösung der Randwertaufgabe lautet

$$u(t) = \frac{\sin(\sqrt{A}\, t)}{\sqrt{A}} \circ u^1 = \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\, t)}{\sqrt{\lambda}}\, dP(\lambda) u^1$$

oder mit $s := \sqrt{\lambda}$

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin(st)\, \sin(sx)}{s}\, \tilde{u}^1(s)\, ds.$$

Wir berechnen $\tilde{u}^1$: Es ist

$$\tilde{u}^1(s) = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(sx) \left(\frac{\sin x}{x}\right)' dx = 2s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \underbrace{\int_0^\infty \cos(sx)\, \frac{\sin x}{x}\, dx}_{=: g(s)}.$$

Wir wollen g bestimmen. Dazu berechnen wir die schwache Ableitung von g. Mit $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^+)$ folgt aus dem Satz von Fubini

$$(g,\varphi') = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \Big(\int_0^\infty \frac{\sin x\, \cos(sx)}{x}\, \varphi'(s)\, ds \Big) dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \Big(\int_0^\infty \sin x\, \sin(sx)\, \varphi(s)\, ds \Big) dx =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sin x\, \tilde{\varphi}(x)\, dx = \frac{\pi}{2}\, \varphi(1),$$

letzteres wegen $(FS)^2 = id$. Daher ist

$$g'(s) = -\frac{\pi}{2}\delta(1-s).$$

Nun ist $g(0) = \pi/2$ wohlbekannt. Es folgt also

$$g(s) = \frac{\pi}{2} H(1-s)$$

oder

$$\tilde{u}^1(s) = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, s\, H(1-s).$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$u(t,x) = \Big(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\, u^1 \Big)(x) = \Big(\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}\, dP(\lambda) u^1 \Big)(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(st)}{s}\, \tilde{u}^1(s)\, u_s(x)\, ds =$$

$$= 2\int_0^1 \sin(st)\, \sin(sx)\, ds = \int_0^1 \Big\{ \cos\big((t-x)s\big) - \cos\big((t+x)s\big) \Big\}\, ds = \frac{\sin(t-x)}{t-x} - \frac{\sin(t+x)}{t+x}.$$

7.3 Die Fourierdarstellung der Lösung im Ganzraumfall

Für viele Anwendungen ist es wichtig, Lösungseigenschaften einer einfachen Wellengleichung herauszuarbeiten, um so einen Referenzfall zur Hand zu haben. Man verwendet dazu gerne den *Ganzraumfall*, also den Fall $G = \mathbb{R}^n$ mit $A = A_0 := -\Delta$.

Es sei u eine schwache Lösung dieser Gleichung. Dann ist in $\mathbb{R}^1$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left\{ u^0(x+t) + u^0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} u^1(s)\, ds \right\}.$$

Dies ist die *d'Alembertsche Lösung.* Es sei

$$\big(I(t)v\big)(x) := \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v(s)\,ds.$$

Dann ist

$$u(t) = \frac{\partial}{\partial t} I(t)u^0 + I(t)u^1.$$

Auch in $\mathbb{R}^n$ gibt es eine solche Darstellung. Aus

$$u(t) = \cos\big(A_0^{1/2}t\big)\circ u^0 + A_0^{-1/2}\sin\big(A_0^{1/2}t\big)\circ u^1$$

folgt nämlich mit

$$I(t)f := A_0^{-1/2}\sin\big(A_0^{1/2}t\big)\circ f$$

wieder

$$u(t) = \frac{\partial}{\partial t} I(t)u^0 + I(t)u^1.$$

Wir wollen nun die Fouriertransformation benutzen und für $I(t)$ die Fourierdarstellung angeben. Mit $k_n := (2\pi)^{-n/2}$, $p_0 := p/|p|$, $q := |p|$ und

$$v_0(x,p) := k_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}$$

ist $\hat{f}(p) = \big(Ff\big)(p) = \big(f, v_0(\cdot\,,p)\big)$ und

$$\big(P_0(\lambda)f\big)(x) = \int_{|p|<\sqrt{\lambda}} \hat{f}(p)\,v_0(x,p)\,dp = \int_0^{\sqrt{\lambda}}\left(\int_{S^{n-1}} \hat{f}(p)\,v_0(x,p)\,dp_0\right) q^{n-1}\,dq.$$

Das haben wir in *FA, Beispiel 9.3.9,* in $\mathbb{R}^1$ ausgerechnet, in $\mathbb{R}^n$ folgt es analog. Deshalb ist

$$I(t)f = \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\,t)}{\sqrt{\lambda}}\,dP_0(\lambda)f$$

oder

$$\big(I(t)f\big)(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(st)}{s}\int_{S^{n-1}} \hat{f}(sp_0)\,v_0(x,sp_0)\,s^{n-1}\,ds = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\sin(|p|t)}{|p|}\hat{f}(p)\,v_0(x,p)\,dp,$$

und

$$F\big(I(t)f\big)(p) = \frac{\sin(|p|t)}{|p|}\hat{f}(p).$$

Damit erhalten wir

$$u(t) = \int_{\mathbb{R}^n} v_0(\cdot,p)\left\{\cos(|p|t)\,\hat{u}^0(p) + \frac{\sin(|p|t)}{|p|}\,\hat{u}^1(p)\right\}dp$$

und

$$\hat{u}(t,p) = \cos(|p|t)\,\hat{u}^0(p) + \frac{\sin(|p|t)}{|p|}\,\hat{u}^1(p).$$

Natürlich kann man aus dieser Darstellung in $\mathbb{R}^1$ die d'Alembertsche Lösung wieder zurückrechnen.

7.4 Distributionenlösungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns weiterhin mit dem Ganzraumfall beschäftigen und Lösungen im Distributionensinn mit einbeziehen.

Wir verwenden die in *FA, §6.5,* eingeführten Bezeichnungen und geben

Definition 7.4.1: *Es seien $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}^n$ und $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$* Distributionenlösung *zu*

$$\Box u = f \qquad \textit{mit } u(0) = u^0 \textit{ und } u'(0) = u^1$$

für $t \geq 0$, wenn folgendes gilt:

1. $\operatorname{supp} u \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$,

2. $\forall \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \qquad (u, \Box\varphi)_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} = (f, \varphi)_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} - (u^0, \varphi'(0))_{\mathbb{R}^n} + (u^1, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n}$.

Dafür schreiben wir symbolisch

$$\Box u = g$$

mit

$$g(t,x) := f(t,x) + \delta'(t)u^0(x) + \delta(t)u^1(x).$$

In dieser Formulierung erscheinen die Anfangsdaten auf der rechten Seite der Gleichung, und das Symbol $\Box$ (der d'Alembertsche Operator oder „Quabla") steht für die Wellengleichung im Ganzraumfall,

$$\Box := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Eine Grundlösung ist eine spezielle Distributionenlösung, nämlich

Definition 7.4.2: *Eine Distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ heißt* Grundlösung *zu $\Box$ für $t \geq 0$, wenn folgendes gilt:*

1. $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$,

2. $(\Box S)(t,x) = \delta(t,x) := \delta(t)\,\delta(x)$.

Wir schreiben auch $S^{(n)} := S$ und $\delta^{(n)} := \delta$, wenn die Abhängigkeit von der Ortsdimension n gekennzeichnet werden soll. Wir werden im folgenden

$$S(t,x) = I(t)\delta(x)$$

herleiten.

Als erstes beweisen wir die Existenz einer Grundlösung und werden anschließend die eindeutige Lösbarkeit von

$$\Box u \stackrel{!}{=} g \tag{$*$}$$

im Distributionensinn zeigen.

7.4.1 Existenz einer Grundlösung

Es sei wieder $P_0(\lambda)$ die Spektralschar zu A_0 und

$$V \;:\; \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$$

mit

$$(V\varphi)(t,x) := -\int_t^\infty \Big(\int_0^\infty \frac{\sin\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)}{\sqrt{\lambda}}\, d\big(P_0(\lambda)\varphi\big)(x,s)\Big)\, ds.$$

Dann gilt

Satz 7.4.3: *Es sei $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Dann definiert*

$$S \;:\; \varphi \longmapsto S\varphi = \big(V\varphi\big)(0,0)$$

eine Distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. S ist Grundlösung zu $\Box$ für $t \geq 0$.

Den Beweis führen wir in zwei Schritten:

1. *Es ist $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$:* Zum Beweis gehen wir von der Fourierdarstellung

$$\big(V\varphi\big)(t,x) = -k_n \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin\big(|p|(t-s)\big)}{|p|}\, (F\varphi)(s,p)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}\, dp\, ds$$

aus. Für Testfunktionen φ ist

$$\big(F\,\partial^\alpha\varphi\big)(q) = (-\mathrm{i}\,q)^\alpha \big(F\varphi\big)(q)$$

und

$$\big|\hat{\varphi}(q)\big| \leq k_n \,\|\varphi\|_{\mathcal{L}^1} < \infty,$$

also für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $(s,p) \to \infty$

$$\big|(F\varphi)(s,p)\big| \leq \frac{c_\alpha}{|p|^\alpha}$$

mit $c_\alpha = c_\alpha(\,\|\partial^\alpha \varphi\|_{\mathcal{L}^1})$. Mithin existiert

$$\big(V\varphi\big)(0,0) \in \mathbb{C}.$$

Deshalb ist S ein lineares Funktional, und wir haben nur noch die Stetigkeit zu zeigen. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(-\Delta)^m\,\big(V\varphi\big)(t,x) = -\int_t^\infty \int_0^\infty \lambda^m\,\frac{\sin\big(\sqrt{\lambda}(t-s)\big)}{\sqrt{\lambda}}\,d\big(P_0(\lambda)\varphi\big)(s,x)\,ds,$$

also

$$\big\|\Delta^m(V\varphi)(t,\cdot)\big\| \leq \int_t^\infty |t-s|\,\big\|\Delta^m\varphi(s,\cdot)\big\|\,ds.$$

Es sei nun (φ_j) eine $\mathcal{D}$-Nullfolge mit $\operatorname{supp}\varphi_j \subset B =: B(0,R)$. Dann ist

$$\big\|\Delta^m(V\varphi_j)(0,\cdot)\big\| \leq \int_0^R s\,\big\|\Delta^m\varphi_j(s,\cdot)\big\|\,ds \leq R^{3/2}\sqrt{\int_0^R \big\|\Delta^m\varphi_j(s,\cdot)\big\|^2\,ds} \leq R^{3/2}\,\big\|\varphi_j\big\|_{2m,B}.$$

Aus der Koerzitivitätsabschätzung für Δ^m oder durch Fouriertransformation erhält man deshalb

$$\big|(V\varphi_j)(0,\cdot)\big|_{2m,\mathbb{R}^n} \leq c\,\big\|\Delta^m\,(V\varphi_j)(0,\cdot)\big\|_{\mathbb{R}^n} \leq c(R)\,\big\|\varphi_j\big\|_{2m,B}.$$

Ist schließlich $\zeta \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}_0^+)$ mit $\zeta(0) = 1$, dann folgt aus dem Sobolevschen Einbettungssatz für $\mathring{\mathcal{H}}_{2m}(\mathbb{R}^n)$, $2m > \frac{n}{2}$,

$$\big|(V\varphi_j)(0,0)\big| = \big|\zeta(0)\,(V\varphi_j)(0,0)\big| \leq c\,\big\|(\zeta V\varphi_j)(0,\cdot)\big\|_{2m,\mathbb{R}^n} \leq c\,\big\|\varphi_j\big\|_{2m,B} \to 0.$$

Mithin ist $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

2. *S ist eine Grundlösung:* Es sei $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Aussage $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$ klar, und wie im Beweis zu Satz 7.2.1 folgt

$$S(\Box\varphi) = \big(V\,\Box\varphi\big)(0,0) = \varphi(0,0),$$

also

$$\Box S = \delta.$$

□

Im nächsten Abschnitt werden wir S explizit bestimmen und insbesondere

$$\operatorname{supp} S \subset \overline{C^+(o)}$$

zeigen. Dabei ist

$$C^+(x_0) := \Big\{(t,x)\;\Big|\; t > 0 \text{ und } |x - x_0| < t\Big\}$$

der *Zukunftskegel.*

7.4.2 Eindeutige Lösbarkeit von $\Box u = g$

Wir zeigen

Satz 7.4.4: *Es sei $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} g \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$. Dann ist*

$$\Box u = g$$

für $t \geq 0$ eindeutig lösbar.

Den Beweis führen wir in zwei Schritten:

1. Zum Nachweis der Existenz von u verwenden wir bereits die Aussage $\operatorname{supp} S \subset \overline{C^+(o)}$. Dann erfüllen S und g die *Streifenbedingung*

$$\forall\, r > 0 \qquad \big(\operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} g\big) \cap S_r \text{ ist beschränkt,}$$

und zwar mit

$$S_r := \Big\{ \langle X, Y\rangle \;\Big|\; |X+Y| < r \Big\}.$$

Es seien nämlich $X := \langle s, x\rangle$, $Y := \langle t, y\rangle$ und

$$\langle X, Y\rangle \in \Big(\overline{C^+(o)} \times \big(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}\big)\Big) \cap S_r.$$

Dann ist

$$(s+t)^2 + |x+y|^2 < r^2,$$

also $s < r$, $t < r$, $|x+y| < r$ sowie

$$|x| < s < r$$

und auch

$$|y| \le |y+x| + |x| < 2r.$$

Damit ist $|\langle X, Y\rangle| < \sqrt{5}\, r$, also beschränkt. Deshalb existiert die Faltung (vgl. *FA, §6.4.1,* oder *Jantscher [1971], S. 193*)

$$u := S * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$$

mit $\operatorname{supp} u \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, und aus den Differentiationsregeln für Faltungen erhält man schließlich

$$\Box u = (\Box S) * g = \delta * g = g.$$

2. Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, es seien u_1, u_2 Lösungen mit

$$\Box u_1 = \Box u_2 = g.$$

Es sei $u := u_1 - u_2$. Wegen $\operatorname{supp} u \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ erfüllen u, S die Streifenbedingung. Es gilt also

$$u = \delta * u = (\Box S) * u = S * (\Box u) = o. \qquad \Box$$

7.5 Grundlösungen

Die explizite Darstellung der Grundlösungen ist etwas mühsam, und die Kenntnis spezieller Funktionen geht dabei ein.

Zunächst halten wir noch einmal fest: Es war

$$I(t)f := A_0^{-1/2} \sin\big(A_0^{1/2} t\big) \circ f,$$

und mit $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ ist Iv Distributionenlösung zu $\delta(t)v(x)$, also

$$\Box\big(I(t)v\big) = \delta(t)\, v$$

oder

$$\big(I(t)v\big)(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \delta(s)\, v(y)\, S(t-s, x-y)\, ds\, dy = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} v(y)\, S(t, x-y)\, dy.$$

Es ist also

$$I(t)\delta^{(n)} = S^{(n)}(t, \cdot\,).$$

Damit haben wir die Grundlösung S mit der Abbildung I verknüpft.

7.5.1 Grundlösungen zur Helmholtzgleichung

Wie gesagt, bei der expliziten Berechnung von S gehen Kenntnisse spezieller Funktionen ein. Wir betrachten deshalb kurz die *Helmholtzsche Schwingungsgleichung (Helmholtzgleichung)*, benannt nach Hermann von Helmholtz, 1821–94, und lösen

$$(-\Delta - \lambda) g_\lambda = \delta.$$

Weil δ nicht von der Richtung $x_0 := x/|x|$ abhängt, suchen wir nach Lösungen, die nur von $r := |x|$ abhängen.

Im Falle $\lambda = 0$ folgt dann wie in §3.2 in $\mathbb{R}^n$ für $r > 0$ die Gleichung

$$g_0^{(n)\,\prime\prime}(r) + \frac{n-1}{r} g_0^{(n)\,\prime}(r) = 0$$

und daraus

$$g_0^{(n)}(r) = \begin{cases} -r/2 & \text{für } n = 1, \\ -\ln r/(2\pi) & \text{für } n = 2, \\ 1/\big((n-2)\omega_n r^{n-2}\big) & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Dabei ist $\omega_n := |S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

Für $\lambda \neq 0$ erhält man analog eine *Besselsche Gleichung*

$$g_\lambda^{(n)\,\prime\prime}(r) + \frac{n-1}{r} g_\lambda^{(n)\,\prime}(r) + \lambda\, g_\lambda^{(n)}(r) = 0.$$

Sie wird nach Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846, benannt. Wichtig ist nun, daß daraus für

$$w_\lambda^{(n)}(r) := \frac{g_\lambda^{(n)\,\prime}(r)}{r}$$

die Gleichung

$$w_\lambda^{(n)\,\prime\prime}(r) + \frac{n+1}{r} w_\lambda^{(n)\,\prime}(r) + \lambda\, w_\lambda^{(n)}(r) = 0$$

folgt. Man muß also nur für $n = 1$ und $n = 2$ die Funktionen $g_\lambda^{(n)}(r)$ wirklich bestimmen, für größere n erhält man sie dann rekursiv. Interessant ist, daß sich hieraus spezifische Unterschiede der Lösungseigenschaften ergeben werden, je nachdem ob die räumliche Dimension gerade oder ungerade ist. Es ist

$$g_\lambda^{(n+2)}(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{g_\lambda^{(n)\,\prime}(r)}{r}.$$

Es seien nun $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} \geq 0$ und

$$\nu := \frac{n-2}{2}.$$

Dann ist

$$g_\lambda^{(n)}(r) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{r}\right)^{\nu} H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}\, r)$$

mit

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + \mathrm{i}\, N_\nu.$$

Die $H_\nu^{(1)}$ sind *Hankelfunktionen* (benannt nach Hermann Hankel, 1839–73), J_ν und N_ν *Besselfunktionen*. Für $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ist $g_\lambda^{(n)}(r) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Wir verwenden ferner

$$\gamma_\lambda^{(n)}(r) := 2 \operatorname{Im} g_\lambda^{(n)}(r) = \frac{\mathrm{i}\pi}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{r}\right)^{\nu} J_\nu(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Speziell ist

n	$J_\nu(r)$	$\gamma_\lambda^{(n)}(r)$
1	$\sqrt{2/\pi}\,\dfrac{\cos r}{\sqrt{r}}$	$\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{\lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}\, r)$
2	$\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{\mathrm{i}r}{2}\right)^{2l}$	$\dfrac{\mathrm{i}}{2} J_0(\sqrt{\lambda}\, r)$
3	$\sqrt{2/\pi}\,\dfrac{\sin r}{r}$	$\dfrac{\mathrm{i}}{2\pi r} \sin(\sqrt{\lambda}\, r)$.

Einzelheiten findet man in *Magnus, Oberhettinger & Soni [1966]*. Das folgende Lemma ist für die Darstellung von Besselfunktionen interessant.

Lemma 7.5.1: *Es sei für* $x_0 \in S^{n-1}$

$$h(r) := \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}r(x_0,z)} dz.$$

Dann ist

$$h''(r) + \frac{n-1}{r} h'(r) + \lambda\, h(r) = 0$$

mit

$$h(0) = |S^{n-1}| \quad \textit{und} \quad h'(0) = 0.$$

Beweis: Offenbar ist $h(0) = |S^{n-1}|$ und

$$h'(r) = \mathrm{i}\sqrt{\lambda} \int_{S^{n-1}} (x_0 z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}r(x_0,z)}\, dz = \mathrm{i}\sqrt{\lambda} \int_{|z|<1} (x_0 \nabla) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}r(x_0,z)}\, dz = -\lambda\, r \int_{|z|<1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}r(x_0,z)}\, dz,$$

also $h'(0) = 0$ und

$$h''(r) = -\lambda \int_{|z|<1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}r(x_0,z)}\, dz - \lambda r \big(\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\big) \int_{|z|<1} (x_0 z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}r(x_0,z)}\, dz.$$

Zusammen mit

$$h(r) = \int_{S^{n-1}} z^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}r(x_0,z)}\, dz = \int_{|z|<1} \nabla\big(z\mathrm{e}^{\cdots}\big)\, dz = n \int_{|z|<1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}r(x_0,z)}\, dz + \mathrm{i}\sqrt{\lambda}r \int_{|z|<1} (x_0 z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}r(x_0,z)}\, dz$$

folgt die Behauptung. □

Aus diesem Lemma erhalten wir die Darstellung

$$\gamma_\lambda^{(n)}(|x|) = \frac{\gamma_\lambda^{(n)}(0)}{|S^{n-1}|}\, h(|x|) = \frac{\mathrm{i}\,\pi}{(2\pi)^n} \lambda^\nu \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}xz}\, dz.$$

7.5.2 Berechnung der Grundlösung

Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+$ ist

$$(A_0 - \lambda)^{-1} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g_\lambda^{(n)}(|\cdot - y|)\, dy.$$

Aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen folgt daraus analog Beispiel 7.2.4 für $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$

$$(P_0(\lambda) f, g) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \gamma_\mu^{(n)}(|x-y|)\, dy \Big) \overline{g(x)}\, dx\, d\mu.$$

Es ist also

$$\begin{aligned}(V\varphi)(0,0) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\lambda}s)}{\sqrt{\lambda}} \Big(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(s,y) \gamma_\lambda^{(n)}(|y|)\, dy \Big) d\lambda\, ds = \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\,\pi} \int_0^\infty \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ \int_0^\infty \sin(\mu s)\, \gamma_{\mu^2}^{(n)}(|y|)\, d\mu \Big\} \varphi(s,y)\, dy \Big)\, ds.\end{aligned}$$

Speziell für $n = 1$ folgt daraus wie in Beispiel 7.2.4

$$\int_0^\infty \sin(\mu s)\, \gamma_{\mu^2}^{(1)}(|y|)\, d\mu = \mathrm{i} \int_0^\infty \frac{\sin(\mu s) \cos(\mu|y|)}{\mu}\, d\mu = \mathrm{i} \int_0^\infty \frac{\sin q}{q} \cos\big(\frac{q|y|}{s}\big)\, dq = \mathrm{i}\, \frac{\pi}{2}\, H(s - |y|),$$

also

$$(V\varphi)(0,0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^1} H(s - |y|)\, \varphi(s,y)\, ds\, dy$$

oder

$$S^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}\, H(t - |x|).$$

Für beliebiges n wollen wir auf diese Weise nicht weiterrechnen, sondern zunächst allgemeinere Überlegungen anstellen.

1. Mit
$$\Phi(s,p) := \int_{S^{n-1}} \varphi(s,pz)\,dz \quad \text{und} \quad A^{(n)}(s,p) = \int_0^\infty \sin(\mu s)\, \gamma_{\mu^2}^{(n)}(p)\, d\mu$$
ist
$$S^{(n)}\varphi = (V\varphi)(0,0) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty A^{(n)}(s,p)\, \Phi(s,p)\, p^{n-1}\, dp\, ds.$$
Deshalb läßt sich $S^{(n)}(t,x)$ mit $r = |x|$ als
$$S^{(n)}(t;r)$$
schreiben. In dieser Form gilt
$$S^{(n+2)}(t;r) = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} S^{(n)}(t;r).$$
Insbesondere ist
$$S^{(3)}(t,x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t-|x|)}{|x|},$$
und wir erhalten auf diese Weise aus $S^{(1)}(t,x)$ alle $S^{(2n+1)}(t,x)$.

2. Es fehlt also nur $S^{(2)}(t,x)$. Diese Grundlösung läßt sich natürlich wie im Fall $n=1$ direkt berechnen. Es ist
$$A^{(2)}(s,p) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int_0^\infty \sin(\mu s)\, J_0(\mu p)\, d\mu,$$
das heißt, man benötigt die Fouriersinustransformierte von J_0. *Magnus, Oberhettinger & Soni [1966]*, geben
$$A^{(2)}(s,p) = \frac{\mathrm{i}}{2} \frac{H(s^2-p^2)}{\sqrt{s^2-p^2}},$$
also
$$(V\varphi)(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{H(s^2-p^2)}{\sqrt{s^2-p^2}}\, \varphi(s,y)\, p\, ds\, dp,$$
und daraus folgt
$$S^{(2)}(t,x) = \frac{1}{2\pi} \frac{H(t-|x|)}{\sqrt{t^2-|x|^2}}.$$

3. Eleganter ist jedoch die *Hadamardsche Absteigemethode*. Die Idee ist, $S^{(n-1)}$ aus $S^{(n)}$ zu berechnen, indem man eine Variable festhält. Lassen Sie mich das skizzieren: Es seien $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x = (y,z) \in \mathbb{R}^n$ sowie
$$D(t,x) := \delta(t)\,\delta(y).$$
Die Distributionen $S^{(n)}$ und D erfüllen die Streifenbedingung: Es seien nämlich
$$X = (t,x),\ \Xi = (\tau,\xi) \text{ und } S_r = \big\{\langle X,\Xi\rangle \;\big|\; |X+\Xi| < r\big\}$$
und
$$\langle X,\Xi\rangle \in \Big(\operatorname{supp} S^{(n)} \times \operatorname{supp} D\Big) \cap S_r = \Big(\overline{C^+(0)} \times \Big\{(\tau,\xi) \;\Big|\; \tau = 0,\ \xi = (\eta,\zeta) = (0,\zeta)\Big\}\Big) \cap S_r.$$
Dann folgt
$$(t+\tau)^2 + (x+\xi)^2 < r^2,$$
also $\tau = 0$, $t < r$, $|x+\xi| < r$ und $|x| < t$. Mithin ist auch
$$|x| < r$$
sowie $|\xi| = |\zeta|$ und
$$|\xi| \le |\xi + x| + |x| < 2r.$$

Mithin ist $\langle X, \Xi \rangle$ beschränkt, $S^{(n)}$ kann mit D gefaltet werden, und es folgt

$$\square_{n-1}\Big(D * S^{(n)}\Big) = \square_n\Big(D * S^{(n)}\Big) = D * \Big(\square_n S^{(n)}\Big) = D * \delta = \delta(t)\,\delta(y).$$

Es ist also

$$S^{(n-1)} = D * S^{(n)}.$$

4. Als Beispiel wählen wir $n = 3$. Dann ist

$$S^{(2)}(t,y) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}} \delta(t-\tau)\delta(y-\eta)\frac{\delta\big(\tau-\sqrt{|\eta|^2+\zeta^2}\big)}{\sqrt{|\eta|^2+\zeta^2}}\,d\tau\,d\eta\,d\zeta =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(t-\sqrt{|y|^2+\zeta^2})}{\sqrt{|y|^2+\zeta^2}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|}^{\infty} \frac{\delta(t-u)}{\sqrt{u^2-|y|^2}}\,du.$$

Mit $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2)$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2} S^{(2)}(t,y)\varphi(t,y)\,dt\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2}\varphi(t,y)\int_{|y|}^{\infty}\frac{\delta(t-u)}{\sqrt{u^2-|y|^2}}\,du\,dt\,dy =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{|y|}^{\infty}\frac{\varphi(u,y)}{\sqrt{u^2-|y|^2}}\,du\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2}\frac{H(u-|y|)}{\sqrt{u^2-|y|^2}}\,\varphi(u,y)\,du\,dy$$

oder

$$S^{(2)}(t,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{H(t-|y|)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}.$$

7.5.3 Klassische Lösungsformeln

Für $n = 1, 2, 3$ sollen schließlich noch die klassischen Lösungsformeln angegeben werden:

1. Es sei $n = 1$. Dann ist

$$\Big(I^{(1)}(t)v\Big)(x) = \int_{\mathbb{R}^1} S^{(1)}(t,y)\,v(x-y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^1} H(t-|y|)\,v(x-y)\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} v(x-y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v(z)\,dz.$$

Das ist die *d'Alembertsche Formel.*

2. Es sei $n = 2$. Dann ist

$$\Big(I^{(2)}(t)v\Big)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{H(t-|y|)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}v(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<t}\frac{v(x-y)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}\,dy.$$

Das ist die *Poissonsche Formel.*

3. Es sei $n = 3$. Dann ist

$$\Big(I^{(3)}(t)v\Big)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\delta(t-|y|)}{|y|}v(x-y)\,dy = \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} v(x-tz)\,dz.$$

Das ist die *Kirchhoffsche Formel*, benannt nach Gustav Robert Kirchhoff, 1824–87.

Als letztes bemerken wir noch, daß für gerades n und $n = 1$

$$\operatorname{supp} S^{(n)} = \overline{C^+(o)}$$

ist. Für ungerades $n \geq 3$ gilt jedoch

$$\operatorname{supp} S^{(n)} = \partial C^+(o).$$

Man sagt auch, für ungerades $n \geq 3$ gelte das *Huygenssche Prinzip.* Dieses Verhalten der Grundlösungen hat großen Einfluß auf die Ausbreitung von Wellen. Liegt der Träger nur am Rande des Wellenkegels, dann setzen Signale scharf ein und wieder aus. Andernfalls setzen sie nur scharf ein, es gibt aber Nachhall. Man vergleiche Abbildung 2.1 und die Bemerkungen dort.

7.6 Zur Existenz schwacher Lösungen unter Verwendung von Energieabschätzungen

In diesem Abschnitt soll noch ein zweiter Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zur Wellengleichung vorgestellt werden. In diesem Beweis werden Energieabschätzungen und der Rieszsche Darstellungssatz benutzt. Solche Energieabschätzungen sind besonders wichtig. Man kann sie auch zum Nachweis der Existenz von Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen verwenden. In §10.2 wird darüber mehr berichtet.

Wir beginnen wieder mit der Wellengleichung in $\mathbb{R}^n$

$$\Box y = y_{tt} - \Delta y \overset{!}{=} g \quad \text{mit } y(0,\cdot) = y^0,\ y_t(0,\cdot) = y^1 \text{ und } g = g(t,x)$$

und wollen diese Gleichung als System erster Ordnung schreiben. Es seien

$$\partial_0 := \frac{\partial}{\partial t},\quad \partial_k := \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, n$$

sowie

$$u := \begin{pmatrix} \partial_0 y \\ \nabla y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f := \begin{pmatrix} g \\ o \end{pmatrix}.$$

Dann ist zunächst formal

$$u_t = \begin{pmatrix} y_{tt} \\ \nabla y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta y + g \\ \nabla y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} v + g \\ \nabla v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 & \cdots & \partial_n \\ \partial_1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \partial_n & 0 & & 0 \end{pmatrix} u + f$$

oder

$$u_t + \sum_{k=1}^{n} A_k\, \partial_k u \overset{!}{=} f \quad \text{mit } u(0,\cdot) = u^0 := \begin{pmatrix} y^1 \\ \nabla y^0 \end{pmatrix} \text{ und } f = f(t,x).$$

Dabei ist A_k eine symmetrische $(m \times m)$-Matrix mit $m := n+1$,

$$A_k = \left(a_{k;i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}(n+1)} = \left(\delta_{i,1}\delta_{j,k+1} + \delta_{j,1}\delta_{i,k+1}\right) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Allgemeiner betrachten wir den Operator

$$L := A_0(t,x)\partial_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k(t,x)\partial_k + B(t,x).$$

Dabei seien die Matrizen A_0, A_k, B $(m \times m)$-reihig, A_0 sei positiv definit und die A_k symmetrisch. Die Koeffizienten seien reellwertig, beschränkt und meßbar; weitere Glattheitsvoraussetzungen werden wir noch präzisieren, wenn sie benötigt werden.

Außerdem wählen wir verschwindende Anfangsdaten $u^0 = o$. Es ist klar, daß man das bei glatten Daten u^0 stets erreichen kann, indem man von u zu $u - u^0$ übergeht und ein geeignetes neues f wählt. Damit lautet unsere verallgemeinerte Wellengleichung

$$L\,u \overset{!}{=} f \quad \text{mit } u(0,\cdot) = o. \tag{1}$$

Solche Systeme werden nach Kurt Otto Friedrichs, 1901–83, *symmetrische hyperbolische Systeme* genannt. Wir wollen sie im folgenden kurz behandeln.

Es sei $T > 0$ eine feste Zahl und für $0 < \tau \le T$

$$R_\tau := \left\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 \le t \le \tau\right\}$$

ein Streifen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Es sei ferner

$$\mathcal{C}_1^0(R_\tau) := \{u \in \mathcal{C}_1(R_\tau) \mid \operatorname{supp} u \Subset [0,\tau] \times \mathbb{R}^n\} .$$

Dann folgt für $u \in \mathcal{C}_1^0(R_T)$ aus Gl. (1)

$$2u^{tr} f = 2u^{tr} Lu = \partial_0(u^{tr} A_0 u) + \sum_{k=1}^n \partial_k(u^{tr} A_k u) + u^{tr} C u \tag{2}$$

mit

$$C := 2B - (\partial_0 A_0) - \sum_{k=1}^n (\partial_k A_k).$$

Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten von C beschränkte meßbare Funktionen sind. Ist

$$E(\tau) := \int_{\mathbb{R}^n} u^{tr}(\tau,x) A_0(\tau,x) u(\tau,x)\, dx,$$

die *Energie*, dann folgt aus dem Gaußschen Satz und Gl. (2)

$$E(\tau) = E(0) + \int_{R_\tau} \{2u^{tr} f - u^{tr} C\, u\} . \tag{3}$$

Wir wollen die Energie für alle

$$u \in \mathcal{A}_1^0(R_T) := \Big\{u \in \mathcal{C}_1^0(R_T) \;\Big|\; u(0,\cdot) = o\Big\} .$$

weiter abschätzen. Dazu machen wir folgende Annahmen:

$$\exists\, \alpha, \beta > 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad \forall\, (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \qquad \alpha\, v^{tr} v \le v^{tr} A_0(t,x)\, v \le \beta\, v^{tr} v,$$

$$\exists\, \gamma \ge 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad \forall\, (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \qquad \left|v^{tr}\, C(t,x)\, v\right| \le \gamma\, v^{tr} A_0(t,x_0)\, v.$$

Dann ist für alle $v, w \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$2v^{tr} w \le \alpha\, v^{tr} v + \frac{1}{\alpha}\, w^{tr} w \le v^{tr} A_0\, v + \frac{1}{\alpha^2}\, w^{tr} A_0\, w,$$

und es folgt aus Gl. (3)

$$E(\tau) \le (1+\gamma) \int_0^\tau E(t) dt + \frac{1}{\alpha^2} \int_{R_\tau} f^{tr} A_0 f.$$

Wir verwenden nun das Gronwallsche Lemma (vgl. zum Beispiel *Racke [1992], S. 34*)

Gronwallsches Lemma: *Es seien $\varphi \in \mathcal{C}([0,a],\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{L}^1([0,a],\mathbb{R}_0^+)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und*

$$\forall\, t \in [0,a] \qquad \varphi(t) \le \alpha + \int_0^t h(s)\varphi(s) ds.$$

Dann ist

$$\varphi(t) \le \alpha \exp\Big(\int_0^t h(s) ds\Big).$$

Daraus erhalten wir

$$E(\tau) \le \frac{e^{(1+\gamma)\tau}}{\alpha^2} \int_{R_\tau} f^{tr} A_0 f \le \frac{e^{(1+\gamma)\tau}}{\alpha^2} \int_{R_T} f^{tr} A_0 f$$

oder

$$\int_0^T E(\tau) d\tau \le \frac{e^{(1+\gamma)T} - 1}{1+\gamma}\, \frac{1}{\alpha^2} \int_{R_T} f^{tr} A_0 f.$$

Ist

$$(u,v) := \int_{R_T} u^{tr} v$$

das $\mathcal{L}^2(R_T)$-Skalarprodukt, dann gilt

$$\alpha\,\|u\|^2 \le (A_0 u, u) \le \beta\,\|u\|^2,$$

und es folgt

$$\forall\, u \in \mathcal{A}_1^0(R_T) \qquad (A_0 u, u) \le \Gamma\,(A_0 f, f) \quad \text{mit } \Gamma := \frac{\mathrm{e}^{(1+\gamma)T} - 1}{\alpha^2(1+\gamma)} \le \frac{T\mathrm{e}^{(1+\gamma)T}}{\alpha^2}.$$

Die Energieabschätzung zur Gl. (1) lautet daher

$$(A_0 u, u) \le \Gamma\,(A_0 Lu, Lu). \tag{4}$$

Aus ihr erhält man unmittelbar die Eindeutigkeit der Lösungen von Gl. (1) in $\mathcal{A}_1^0(R_T)$.

Aus Abschätzung (4) folgt aber auch die Existenz einer schwachen Lösung, wenn man den Rieszschen Darstellungssatz verwendet. Das sieht man so: Es sei

$$\mathcal{E}_1^0(R_T) := \left\{ u \in \mathcal{C}_1^0(R_T) \;\middle|\; u(T,\cdot\,) = o \right\}.$$

Durch partielles Integrieren erhält man dann für $u \in \mathcal{A}_1^0(R_T)$ und $v \in \mathcal{E}_1^0(R_T)$

$$(v, Lu) = (\tilde{L}v, u) \tag{5}$$

mit

$$\tilde{L}v := -Lv + (C + B^{tr} - B)v.$$

Gleichung (5), also

$$\forall\, v \in \mathcal{E}_1^0(R_T) \qquad (\tilde{L}v, u) = (v, f), \tag{6}$$

wollen wir zur Definition schwacher Lösungen verwenden. Setzt man nämlich für v zunächst Testfunktionen in Gl. (6) ein, dann folgt etwa aus $u \in \mathcal{L}^2_{loc}(R_T)$ die Differenzierbarkeit von u in inneren Punkten von R_T und $Lu = f$. Wählt man dann im zweiten Schritt v beliebig aus $\mathcal{E}_1^0(R_T)$, dann ist

$$\forall\, v \in \mathcal{E}_1^0(R_T) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (v^{tr} A_0 u)(0,\cdot\,) = 0,$$

und in diesem Sinne verschwindet $u(0,\cdot\,)$.

Um das zu präzisieren, wählen wir den Hilbertraum $\mathcal{H}$, der durch Vervollständigung von $\mathcal{E}_1^0(R_T)$ unter der Norm

$$|\!|\!| v |\!|\!| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \qquad \text{mit } \langle v, w\rangle := (\tilde{L}\,v, \tilde{L}\,w)$$

entsteht. Daß $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ eine Norm ist, sieht man leicht. Für $\tilde{L}$ erhält man nämlich eine Energieabschätzung wie für L (man ersetze bei der Herleitung nur t durch $T - t$), also

$$\forall\, v \in \mathcal{H} \qquad \alpha(v, v) \le (A_0 v, v) \le \tilde{\Gamma}\,(A_0\,\tilde{L}\,v, \tilde{L}\,v) \le \beta\,\tilde{\Gamma}\,\langle v, v\rangle. \tag{7}$$

Es sei nun für $v \in \mathcal{H}$

$$Fv := (v, f).$$

Dann ist

$$|Fv| \le \|v\|\,\|f\| \le \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\,\tilde{\Gamma}}\,|\!|\!| v |\!|\!|\,\|f\|.$$

Die Abbildung F ist also ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{H}$, und aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt die Existenz eines $U \in \mathcal{H}$ mit

$$\forall\, v \in \mathcal{H} \qquad Fv = \langle v, U\rangle$$

Wir wählen $u := \tilde{L}\,U$. Dann gilt

$$\forall\, v \in \mathcal{E}_1^0(R_T) \qquad \langle v, U\rangle = (\tilde{L}\,v, u) = (v, f).$$

In diesem Sinne löst u die Differentialgleichung.

Definition 7.6.1: *Eine Funktion* $u = \tilde{L}\,U$ *mit* $U \in \mathcal{H}$ *und*

$$\forall\, v \in \mathcal{E}_1^0(R_T) \qquad (\tilde{L}\,v, u) = (v, f)$$

heißt schwache Lösung der Gleichung (1) für $t \in (0, T]$.

Natürlich muß man im nächsten Schritt wieder die Regularität von u untersuchen, wenn das erforderlich ist. Dazu benötigt man dann Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten. Diese Frage soll aber jetzt nicht weiter vertieft werden, es sei vielmehr auf *Friedrichs [1954]* und auf *John [1982], S. 167,* verwiesen. Weil unsere Überlegungen für beliebiges T galten, erhalten wir auf diese Weise auch eine bezüglich t globale Lösung der Wellengleichung.

8 Außenraumaufgaben

In diesem Abschnitt sollen die Untersuchungen des fünften Kapitels fortgesetzt und Außenraumaufgaben behandelt werden. Unter einem Außenraum in $\mathbb{R}^n$ wollen wir das Komplement eines beschränkten Gebietes verstehen. Natürlich gibt es auch andere Klassen unbeschränkter Gebiete, die interessant und für die Anwendungen wichtig sind. Denken Sie zum Beispiel an Wellenleiter oder keilförmige Gebiete. Darauf soll aber im folgenden nicht weiter eingegangen werden.

Solche Randwertaufgaben treten auf, wenn man die entsprechende zeitabhängige Gleichung

$$\partial_t u + A\, u = o$$

bezüglich der Zeit separiert, also

$$u(t,x) = a(t)\, v(x)$$

ansetzt, und nach „stehenden Wellen" fragt. Das sind Lösungen von

$$(A - \lambda)v = o$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Aus solchen stehenden Wellen möchte man dann die Lösung u superponieren.

Randwertaufgaben für unbeschränkte Gebiete unterscheiden sich von den Randwertaufgaben für beschränkte, weil jetzt im allgemeinen ein stetiges Spektrum auftritt. Es geht im folgenden also zunächst einmal darum, dies zu bestätigen und das Spektrum zu bestimmen. Damit lassen sich dann auch Anfangsrandwertaufgaben für die entsprechenden zeitabhängigen Gleichungen lösen.

In den Anwendungen möchte man aber mehr über die Lösungen wissen. Zum Beispiel, wie regulär sie sind oder wie sie sich asymptotisch für große t verhalten. Letzteres soll in §10 behandelt werden. Für solche Fragen interessiert man sich in der Streutheorie. Dazu muß man nicht nur die Existenz eines stetigen Spektrums nachweisen, sondern auch Eigenschaften der Spektralschar herausarbeiten. So zeigt man unter anderem, daß das Spektrum absolut stetig ist.

Das soll im folgenden geschehen. Die Resultate und Beweisideen gelten im Prinzip für viele Gleichungen aus der Mathematischen Physik. Weil Systeme erster Ordnung in den Anwendungen besonders wichtig sind und weil wir uns schon mehrfach mit der Wellengleichung beschäftigt haben, behandeln wir in diesem Kapitel exemplarisch das System erster Ordnung aus der Linearen Akustik in $\mathbb{R}^3$. Man vergleiche §5.5.2.

Es seien also im folgenden $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Außengebiet und $\rho_{ik} = \rho_{ki}$, κ reellwertige, beschränkte und meßbare Funktionen mit

$$\exists\, \rho_0 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad \forall\, x \in G \qquad \sum_{i,k} \xi_i\, \rho_{ik}(x)\, \xi_k \geq \rho_0 |\xi|^2$$

$$\exists\, \kappa_0 > 0 \quad \forall\, x \in G \qquad \kappa(x) \geq \kappa_0 .$$

Wir setzen voraus, daß das Medium außerhalb einer Kugel $B(0, r_a)$ *homogen* und *isotrop* ist. In $G_a := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| > r_a\} \subset G$ soll also etwa

$$\rho_{ik} = \delta_{ik} \quad \text{und} \quad \kappa = 1$$

sein. Auch diese Voraussetzung läßt sich abschwächen. Wir verwenden die Koeffizientenmatrix

$$M := \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}$$

mit $\rho := (\rho_{ik})$ und behandeln im folgenden die Neumannsche Randwertaufgabe, wählen also

$$\mathcal{D}(A) := \mathring{\mathcal{D}}(G) \times \mathcal{H}_1(G) \subset \mathcal{H}$$

mit $\mathcal{H} := \mathcal{H}(G) := \left(\mathcal{L}^2(G)\right)^3 \times \mathcal{L}^2(G)$ und

$$A\, U := -\,\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} o & \operatorname{grad} \\ \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix} .$$

8.1 Das Spektrum des zugrundeliegenden Operators

In §5.5.2 haben wir bereits gezeigt, daß A eine selbstadjungierte Abbildung ist und daß

$$\forall\,\tau\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\qquad \left\|(A-\mathrm{i}\,\tau)^{-1}\right\|\le\frac{1}{|\tau|}$$

gilt. Das Spektrum $\sigma(A)$ liegt also auf der reellen Achse. Ferner ist

$$\mathcal{N}(A)=\mathring{\mathcal{D}}_0(G)\times\mathcal{O}$$

und

$$\overline{\mathcal{R}(A)}=\overline{\rho^{-1}\nabla\mathcal{H}_1(G)}\times\overline{\kappa^{-1}\operatorname{div}\mathring{\mathcal{D}}(G)}.$$

Offenbar ist $\dim\mathcal{N}(A)=\infty$. Es seien nämlich $B(x_i,r_i)\subset G$ disjunkte Kugeln und $\Phi_i\in\mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$ mit $\operatorname{supp}\Phi_i\subset B(x_i,r_i)$ und $\|\nabla\times\Phi_i\|=1$ gewählt. Dann bilden die

$$V_i:=\nabla\times\Phi_i\in\mathring{\mathcal{D}}_0(G)$$

ein Orthonormalsystem in $\left(\mathcal{L}^2(G)\right)^3$.

Aus dem Projektionssatz und der Selbstadjungiertheit von A folgt

$$\mathcal{H}=\overline{\mathcal{R}(A)}\oplus\mathcal{N}(A)\quad\text{orthogonal.}$$

Es sei

$$P\ :\ \mathcal{H}\longrightarrow\overline{\mathcal{R}(A)}$$

der orthogonale Projektor auf den abgeschlossenen Wertebereich $\overline{\mathcal{R}(A)}$. Dann reduziert dieser A, es gilt also $PA\subset AP$. Besitzt G die strikte Segmenteigenschaft, dann ist $P\mathcal{D}(A)$ in $\mathcal{H}$ lokal kompakt eingebettet (Satz 5.5.4).

Wir diskutieren nun das Spektrum von A und zeigen als erstes

Satz 8.1.1: *Es sei $\rho\in\mathcal{C}_1(G)$. Dann gilt*

$$P\sigma(A)=\{0\}.$$

Beweis: Die Aussage $0\in P\sigma(A)$, und zwar mit unendlicher Vielfachheit, ist aus dem Vorangegangenen klar. Es sei also $\lambda\neq 0$ mit

$$A\,U=\lambda\,U.$$

Dann ist $A\,U\in\mathcal{D}(A)$, und es folgt durch Quadrieren

$$A^2\,U=\lambda^2\,U.$$

Dabei ist formal

$$A^2=-\begin{pmatrix}\rho^{-1}\operatorname{grad}\kappa^{-1}\operatorname{div} & o\\ o & \kappa^{-1}\operatorname{div}\rho^{-1}\operatorname{grad}\end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem $A^2\,U=\lambda^2\,U$ zerfällt also. Es seien

$$\mathcal{D}(B):=\left\{u\in\mathcal{H}_1(G)\ \middle|\ \rho^{-1}\nabla u\in\mathring{\mathcal{D}}(G)\right\}$$

mit

$$Bv:=-\,\kappa^{-1}\operatorname{div}\rho^{-1}\operatorname{grad}v$$

und $v:=U_2$. Dann folgen

$$U_1=-\,\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\,\rho^{-1}\operatorname{grad}v$$

sowie

$$Bv=\lambda^2\,v.$$

Die skalarwertige Abbildung v genügt damit einer Neumannschen Randwertaufgabe. Insbesondere gilt in G_a

$$-\Delta v=\lambda^2 v.$$

Damit ist v dort beliebig oft differenzierbar, und außerdem ist $v\in\mathcal{L}^2(G_a)$. Dann verschwindet v aber in G_a, und damit U. Das folgt aus der Rellichschen Abschätzung, die wir unmittelbar anschließend beweisen. Das Prinzip von der eindeutigen Fortsetzbarkeit liefert dann schließlich $v=o$ in G und damit auch $U=o$.

□

Rellichsche Abschätzung: *Die Abbildung $u \in \mathcal{C}_2(G_a)$ möge nicht identisch verschwinden, und mit $\lambda > 0$ sei*

$$(\Delta + \lambda)u = o.$$

Dann gilt

$$\exists\, p > 0 \quad \exists\, r_0 > r_a \quad \forall\, r > r_0 \qquad \int_{r_a<|x|<r} |u(x)|^2\, dx \geq p\, r.$$

Den <u>Beweis</u> dieser Abschätzung, die auf Franz Rellich, 1906–55, [1943] zurückgeht, führen wir durch explizites Nachrechnen. In $\mathbb{R}^3$ gilt in Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_0.$$

Dabei ist Δ_0, der *Beltramioperator*, eine selbstadjungierte Abbildung in $\mathcal{L}^2(S^2)$ und besitzt ein abzählbares Punktspektrum mit einem vollständigen Orthonormalsystem von Eigenfunktionen, den *Kugelfunktionen* $K_{n,j}$ mit

$$-\Delta_0 K_{n,j} = n(n+1) K_{n,j},$$

$n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$. Für $v := ru$ folgt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\Delta_0 + \lambda\right) v = o.$$

Auch v verschwindet nicht identisch. Es gibt deshalb ein $r_1 > r_a$ und eine Kugelfunktion K_n so, daß mit

$$g(r) := \int_{S^2} v(rx) K_n(x)\, dx$$

$g(r_1)$ von Null verschieden ist.

Wir leiten nun eine Differentialgleichung für g her. Es ist

$$\begin{aligned} 0 = \int_{S^2} \left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\Delta_0 + \lambda\right) v(rx)\right\} K_n(x)\, dx &= g''(r) + \lambda\, g(r) + \frac{1}{r^2}\int_{S^2} v(rx)\; \Delta_0 K_n(x)\, dx = \\ &= g''(r) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) g(r). \end{aligned}$$

Dies ist eine *Besselsche Differentialgleichung.* Ihre Lösungen sind wohlbekannt. Mit $\mu = n + \frac{1}{2}$ besitzt sie die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$\sqrt{r}\, J_\mu(\sqrt{\lambda} r) \quad \text{und} \quad \sqrt{r}\, N_\mu(\sqrt{\lambda} r),$$

die *Besselschen* und die *Neumannschen Funktionen.* Das asymptotische Verhalten dieser Funktionen ist bekannt. Man vergleiche etwa *Magnus, Oberhettinger & Soni [1966], S. 139.* Für große r gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{r}\, J_\mu(r) &= \sqrt{2/\pi}\cos(r - c_n) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \\ \sqrt{r}\, N_\mu(r) &= \sqrt{2/\pi}\sin(r - c_n) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

mit $c_n := n(n+1)/2$. Mithin gibt es Konstanten a_1, a_2 so, daß für $r \to \infty$

$$g(r) = \sqrt{\frac{r\pi}{2}}\left\{a_1\, J_\mu\left(\sqrt{\lambda} r\right) + a_2\, N_\mu\left(\sqrt{\lambda} r\right)\right\} = a_1 \cos\left(\sqrt{\lambda} r - c_n\right) + a_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} r - c_n\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ist. Wegen $g(r_1) \neq 0$ ist auch $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$.

Damit erhalten wir aus der Besselschen Ungleichung

$$\int_{S^2} |u(rx)|^2\, r^2\, dx = \int_{S^2} |v(rx)|^2\, dx \geq |g(r)|^2,$$

also

$$\int_{r_a<|x|<r} |u(x)|^2\,dx \geq \int_{r_a}^{r} |g(s)|^2\,ds \geq \int_{r_a}^{r} \left\{a_1^2 \cos^2\left(\sqrt{\lambda}s - c_n\right) + a_2^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda}s - c_n\right)\right\} ds + \mathcal{O}(\ln\, r)$$
$$\geq \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)\, r + \mathcal{O}(\ln\, r).$$

Daraus folgt die Rellichsche Abschätzung. □

Es sei betont, daß die Rellichsche Abschätzung für $\lambda \leq 0$ nicht mehr gilt. Das zeigt für $\lambda = 0$ schon die Abbildung

$$u(x) := \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|x|}.$$

Damit haben wir die Existenz von von Null verschiedenen Punkteigenwerten ausschließen können. Es gilt sogar

Satz 8.1.2: *Es sei $\rho \in \mathcal{C}_1(G)$. Dann ist*

$$C\sigma(A) = \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Beweis: Wir wissen bereits, daß $(A-\lambda)^{-1}$ für $\lambda \neq 0$ existiert, haben also nur noch zu zeigen, daß diese Abbildung für reelle λ unbeschränkt ist. Dazu konstruieren wir eine Folge (F_σ), $\sigma \in (0,1)$, mit

$$\sup_\sigma \|F_\sigma\| < \infty \quad \text{und} \quad \|(A-\lambda)^{-1} F_\sigma\| \to \infty \text{ für } \sigma \to 0.$$

Es sei $\varphi \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}_0^+)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|(0, r_a) = 0$ und $\varphi|(r_a+1, \infty) = 1$. Es sei ferner

$$U_\sigma(x) := \varphi(|x|)\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda|x|}}{|x|}\, \mathrm{e}^{-\sigma|x|} \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$$

und

$$F_\sigma(x) := (A-\lambda) U_\sigma(x).$$

Dann ist

$$F_\sigma(x) = -\mathrm{i}\,\sigma\, U_\sigma(x) + g_\sigma(x)$$

mit

$$\|g_\sigma\| \leq const.$$

Wegen $\sigma|x| \leq e^{\sigma|x|}$ ist

$$\forall\, \sigma \in (0,1) \qquad \left|\sigma\, U_\sigma(x)\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{|x|^2}$$

und deshalb auch $\sup_\sigma \|F_\sigma\| < \infty$. Andererseits ist $(A-\lambda)^{-1} F_\sigma = U_\sigma$ und

$$\left\|U_\sigma\right\|^2 \geq \sqrt{2} \int_{|x|>r_a+1} \frac{\mathrm{e}^{-2\sigma|x|}}{|x|^2}\, dx = 4\sqrt{2}\pi\, \frac{\mathrm{e}^{-2\sigma(r_a+1)}}{2\sigma} \to \infty \text{ für } \sigma \to 0.$$

Weil A selbstadjungiert ist, besitzt A kein Residuenspektrum. Damit gilt $\lambda \in C\sigma(A)$. □

8.2 Formulierung von Außenraumaufgaben

Im folgenden wollen wir Außenraumaufgaben lösen, zunächst formal also Gleichungen der Form

$$(A-\lambda)U = F \quad \text{ für } \lambda \neq 0. \tag{1}$$

Diese treten bei der Behandlung der entsprechenden zeitabhängigen Gleichung nach Separation der Variablen auf. Aber auch bei der Bestimmung der Spektralschar $P(\lambda)$ von A aus der Stoneschen Formel wird man auf diese Problematik geführt. Gerade an dieser Spektralschar sind wir besonders interessiert. Dabei wissen wir bereits, daß komplexe $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ zur Resolventenmenge von A gehören. Wenn wir also von Außenraumaufgaben sprechen, dann denken wir an reelle $\lambda \neq 0$ oder an λ der Form $\lambda = \mu + i\,\sigma$ mit $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\sigma \in \mathbb{R}$ und $\sigma \to 0$ (Stonesche Formel).

Darin liegt die besondere Schwierigkeit der Außenraumaufgaben: Reelle λ gehören zum Spektrum von A. Man möchte Gl. (1) also im Spektrum lösen. Das ist nicht für alle $F \in \mathcal{H}$ möglich, denn sonst wäre $(A-\lambda)^{-1}$ aufgrund des Satzes vom abgeschlossenen Graphen beschränkt, und λ würde zur Resolventenmenge gehören. Es ist also $\mathcal{R}(A-\lambda) \neq \overline{\mathcal{R}(A-\lambda)}$.

Gleichung (1) zu lösen, bedeutet also, $\mathcal{R}(A-\lambda)$ zu bestimmen. Dies erweist sich als schwierig. Wir werden deshalb anders vorgehen. Einmal wählen wir F aus einem geeigneten dichten Teilraum von $\mathcal{H}$, zum Beispiel aus $\mathcal{L}^{2f}(G)$. Und andererseits setzen wir A geeignet fort, vergrößern also $\mathcal{D}(A)$ so, daß man dann Gleichung (1) lösen kann, und zwar mit einer beschränkten Inversen.

Das soll zunächst am Falle der Potentialtheorie verdeutlicht werden: Es sei Δ der übliche Deltaoperator mit

$$\mathcal{D}(\Delta) := \left\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\middle|\; \Delta u \in \mathcal{L}^2(G) \right\}.$$

Formal besitzt die Gleichung $\Delta u = o$ zwei kugelsymmetrische Lösungen mit verschiedener Asymptotik im Unendlichen, nämlich für große $|x|$

$$1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{|x|}.$$

Beide sind nicht quadratintegrabel, gehören also nicht zu $\mathcal{D}(\Delta)$. Wir wollen $\mathcal{D}(\Delta)$ vergrößern, aber nur eine von ihnen zulassen. Andernfalls wäre $1 - 1/|x|$ Eigenlösung für das Äußere einer Kugel, und man hätte keine Eindeutigkeit. Es liegt deshalb nahe, geeignet gewichtete Hilberträume einzuführen und so die Lösung mit größter Singularität im Unendlichen auszuschließen, hier also die Konstante.

Dazu verwenden wir die Zweite Poincarésche Abschätzung in der Form

$$\mathring{\mathcal{J}}_1(G) := \left\{ \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G);\ |\cdot|_1 \right\}^\sim \hookrightarrow \mathcal{L}^2_\tau(G) := \left\{ f \in \mathcal{L}^2_{loc}(G) \;\middle|\; \tau f \in \mathcal{L}^2(G) \right\}$$

mit

$$\tau(x) := \frac{1}{1+|x|}$$

und $\|f\|_\tau := \|\tau f\|$. Unser Ziel ist,

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad (\nabla u, \nabla\varphi) \stackrel{!}{=} (f, \varphi) \tag{2}$$

zu vorgegebenem f zu lösen. Wählen wir zunächst $f \in \mathcal{D}(\Delta^{-1/2})$, dann ist wegen $\|\Delta^{1/2}\varphi\| = |\varphi|_1$

$$\left|(f,\varphi)\right| = \left|\left(\Delta^{-1/2} f, \Delta^{1/2}\varphi\right)\right| \leq c \left\|\Delta^{-1/2} f\right\| |\varphi|_1.$$

Mithin ist (f,φ) ein beschränktes lineares Funktional über $\mathring{\mathcal{J}}_1(G)$. Gleichung (2) ist damit in $\mathring{\mathcal{J}}_1(G)$ eindeutig lösbar, und es gilt

Satz 8.2.1: *Es sei*

$$\check{\Delta} \;:\; \mathcal{D}(\check{\Delta}) \subset \mathcal{L}^2_\tau(G) \longrightarrow \mathcal{D}(\Delta^{-1/2})$$

mit

$$\mathcal{D}(\check{\Delta}) := \left\{ u \in \mathring{\mathcal{J}}_1(G) \;\middle|\; \exists\, v \in \mathcal{D}(\Delta^{-1/2}) \quad \forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \quad (\nabla u, \nabla\varphi) = (v, \varphi) \right\}$$

und $\check{\Delta} u := -v$. *Dann existiert* $\check{\Delta}^{-1}$ *und ist beschränkt.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Rieszschen Darstellungssatz und der Zweiten Poincaréschen Abschätzung. Es gilt nämlich

$$\frac{1}{2}\|u\|_\tau \leq |u|_1 \leq c\,\|\Delta^{-1/2} f\|. \qquad \square$$

Der Nachteil dieses Vorgehens liegt vielleicht darin, daß wir $\mathcal{D}(\Delta^{-1/2})$ nicht genügend kennen. Das läßt sich leicht ändern. Es seien

$$\sigma(x) := \frac{1}{\tau(x)} = 1 + |x|$$

und $\mathcal{L}^2_\sigma(G)$ analog $\mathcal{L}^2_\tau(G)$ definiert. Dann ist $\mathcal{L}^2_\sigma(G)$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{L}^2(G)$, und es gilt für $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$ und $f \in \mathcal{L}^2_\sigma(G)$

$$|(f,\varphi)| = |(\sigma f, \tau\varphi)| \leq \|f\|_\sigma\, \|\varphi\|_\tau \leq 2\,\|f\|_\sigma\, |\varphi|_1.$$

Es ist (f,φ) deshalb auch jetzt ein beschränktes lineares Funktional. Wählen wir nun

$$\tilde{\Delta} \ : \ \mathcal{D}(\tilde{\Delta}) \subset \mathcal{L}^2_\tau(G) \longrightarrow \mathcal{L}^2_\sigma(G)$$

mit

$$\mathcal{D}(\tilde{\Delta}) := \Big\{ u \in \mathring{\mathcal{J}}_1(G) \ \Big| \ \exists\, v \in \mathcal{L}^2_\sigma(G) \quad \forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \quad (\nabla u, \nabla\varphi) = (v,\varphi) \Big\} \subset \mathcal{L}^2_\tau(G)$$

und $\tilde{\Delta} u := -v$, dann folgt analog

Satz 8.2.2: *Für alle $f \in \mathcal{L}^2_\sigma(G)$ ist*

$$-\tilde{\Delta} u \stackrel{!}{=} f$$

eindeutig lösbar mit

$$\frac{1}{2}\|u\|_\tau \le |u|_1 \le 2\,\|f\|_\sigma .$$

Damit haben wir die Außenraumaufgabe im Tupel $\big(\mathcal{L}^2_\sigma(G),\ \mathcal{L}^2_\tau(G)\big)$ lösen können. Es gilt

Korollar 8.2.3: *Es ist $\mathcal{L}^2_\sigma(G) \subset \mathcal{D}(\Delta^{-1/2})$.*

Beweis: Wir verwenden wieder

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G) \qquad \|\Delta^{1/2}\varphi\| = |\varphi|_1 .$$

Es seien $f \in \mathcal{L}^2_\sigma(G)$, $-\tilde{\Delta} u = f$ und $\varphi_n \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$ mit $|\varphi_n - u|_1 \to 0$. Dann ist (φ_n) eine Cauchyfolge mit

$$v := \lim_{n\to\infty} \Delta^{1/2}\varphi_n \in \mathcal{H}.$$

Für alle $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$ folgt

$$(v, \Delta^{1/2}\varphi) \leftarrow (\Delta^{1/2}\varphi_n, \Delta^{1/2}\varphi) = (\nabla\varphi_n, \nabla\varphi) \to (\nabla u, \nabla\varphi) = (f,\varphi),$$

also

$$\forall\, w \in \mathcal{D}(\Delta^{1/2}) \qquad (v, \Delta^{1/2} w) = (f, w)$$

oder $v \in \mathcal{D}(\Delta^{-1/2})$ und $f = \Delta^{-1/2} v$. □

Außenraumaufgaben in der Potentialtheorie haben wir damit also gelöst. Schwieriger wird es aber schon bei der interessanteren nächst einfachen Gleichung, der *Helmholtzschen Schwingungsgleichung*,

$$(-\Delta - \lambda) u \stackrel{!}{=} f,$$

für $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Auch jetzt hat man für große $|x|$ zwei kugelsymmetrische Lösungen mit verschiedener Asymptotik, nämlich

$$\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sqrt{\lambda}|x|}}{|x|},$$

die sich aber nicht mehr so einfach durch ein Gewicht trennen lassen. Beide gehören zu $\mathcal{L}^2_\tau(G)$.

Um diese Lösungen unterscheiden zu können, verwendet man die auf Arnold Sommerfeld, 1868–1951, [1912] zurückgehende *Ausstrahlungsbedingung* (mit $x_0 := x/|x|$)

$$x_0 \nabla u - \mathrm{i}\sqrt{\lambda} u \in \mathcal{L}^2(G_a)$$

bzw. die *Einstrahlungsbedingung*

$$x_0 \nabla u + \mathrm{i}\sqrt{\lambda} u \in \mathcal{L}^2(G_a).$$

Diese Bedingungen charakterisieren physikalisch die Richtung des Energietransports. Analoge Bedingungen in der Potentialtheorie sind uns schon in §3.5.1 begegnet.

Kehren wir nun zu unserer ursprünglichen Aufgabe (1) zurück: Wir wählen zunächst die Räume

$$\mathcal{H}_\sigma(G) := \big(\mathcal{L}^2_\sigma(G)\big)^3 \times \mathcal{L}^2_\sigma(G) \quad \text{ und } \quad \mathcal{H}_\tau(G) := \big(\mathcal{L}^2_\tau(G)\big)^3 \times \mathcal{L}^2_\tau(G).$$

Um eine Ausstrahlungsbedingung zu finden, bemerken wir, daß es für $\lambda \neq 0$ Lösungen der Form

$$U(x) = \frac{e^{\pm \mathrm{i}\lambda|x|}}{|x|} \begin{pmatrix} x_0\big[\pm 1 + \frac{\mathrm{i}}{\lambda|x|}\big] \\ 1 \end{pmatrix}$$

gibt. Mit

$$B_0 := B(x_0) := \begin{pmatrix} o & x_0 \\ x_0^{tr} & 0 \end{pmatrix}$$

lassen sich dann durch

$$B_0 U - U \in \mathcal{L}^2(G)$$

ausstrahlende Lösungen beschreiben und entsprechend einstrahlende. Wir werden diese Bedingungen in §8.3 systematischer herleiten.

Wir wählen deshalb die Hilberträume

$$\mathcal{H}_\tau^\pm(G) := \left\{\mathcal{H}(G);\ \|\cdot\|_\tau^\pm\right\}^\sim$$

mit den Skalarprodukten

$$(U,V)_\tau^\pm := (U,V)_\tau + \Big((B_0 \mp id)U, (B_0 \mp id)V\Big)\,.$$

Es seien

$$\mathcal{D}(\tilde{A}^\pm) := \left\{U \in \mathcal{H}_\tau^\pm(G) \;\middle|\; \exists\, F \in \mathcal{H}_\sigma(G) \quad \forall\, V \in \mathcal{D}(A)^f \quad (U, AV) = (F, V)\right\} \subset \mathcal{H}_\tau(G)$$

und

$$\tilde{A}^\pm \ :\ \mathcal{D}(\tilde{A}^\pm) \subset \mathcal{H}_\tau(G) \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma(G)$$

mit

$$\tilde{A}^\pm U = -\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} o & \mathrm{grad} \\ \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\mathcal{D}(A)^f$ die Menge der Abbildungen aus $\mathcal{D}(A)$ mit finitem Träger. Analog §5.5.2.1 folgt wieder aus der Argumentation „stark gleich schwach", daß dann mit $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(G)$ und $\varphi = 1$ in einer Umgebung des Randes ∂G aus $U \in \mathcal{D}(\tilde{A}^\pm)$

$$\varphi U \in \mathring{\mathcal{D}}(G) \times \mathcal{H}_1(G)$$

folgt. Die Abbildungen $\tilde{A}^\pm$ sind die gesuchten Fortsetzungen von A, und wir wollen im folgenden für $F \in \mathcal{H}_\sigma$ und $\lambda \neq 0$ Gleichungen der Form

$$(\tilde{A}^+ - \lambda)U \stackrel{!}{=} F$$

und

$$(\tilde{A}^- - \lambda)U \stackrel{!}{=} F$$

lösen.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem Nachweis der Eindeutigkeit

Satz 8.2.4: *Für alle $\lambda \neq 0$ gilt*

$$\mathcal{N}(\tilde{A}^\pm - \lambda) = \{o\}.$$

Wir führen den Beweis für $\mathcal{N}(\tilde{A}^+ - \lambda)$, wählen wir ein $V \in \mathcal{N}(\tilde{A}^+ - \lambda)$ und ein $\zeta_r \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\zeta_r | B(0,r) = 1$. Dann hat $\zeta_r V$ finiten Träger, und wir erhalten

$$0 = \big((\tilde{A}^+ - \lambda)V, \zeta_r V\big) = \big(V, (A-\lambda)\zeta_r V\big) = \int_{|x|>r} \cdots \ = -\mathrm{i}\int_{|x|=r} V^{tr} M^{-1} B_0 \bar{V}$$

und

$$\int_{|x|=r} \left|(B_0 - id)V\right|^2 = \int_{|x|=r} \left\{|B_0 V|^2 + |V|^2\right\}.$$

Daraus folgt $V \in \mathcal{H}$ und damit $V = o$ auf Grund der Rellichschen Abschätzung. $\square$

8.3 Der Ganzraumfall

Wir unterbrechen nun die Diskussion der Abbildungen $\tilde{A}^{\pm}$ im Außenraum und studieren zur Referenz kurz den „Ganzraumfall“. Damit ist der Fall eines isotropen homogenen Mediums überall in $\mathbb{R}^3$ gemeint, vereinfacht also etwa

$$\begin{aligned} A_0 \ : \ \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{H}_0 &\longrightarrow \mathcal{H}_0, \\ U &\longmapsto DU \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{D}(A_0) := \mathcal{D} \times \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0 := \left((\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))\right)^4.$$

und dem Differentiationssymbol

$$D := -\mathrm{i}\begin{pmatrix} o & \mathrm{grad} \\ \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden die Fouriertransformation, um leicht explizit rechnen zu können. Dabei müssen wir nur

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_i} \rightsquigarrow p_i$$

mit $p \in \mathbb{R}^3$ ersetzen. Es folgt

$$\hat{D}(p) = B(p) = \begin{pmatrix} o & p \\ p^{tr} & 0 \end{pmatrix},$$

und aus

$$(A_0 - \lambda)U = F$$

wird

$$(\hat{A}_0 - \lambda)\hat{U} = \hat{F}.$$

Betrachten wir zunächst für festes p

$$B(p) \ : \ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4.$$

Dann ist

$$\det\left(B(p) - \lambda\right) = \lambda^2\left(\lambda^2 - |p|^2\right).$$

Die Matrix B besitzt also den doppelten Eigenwert $\lambda_0 = 0$ und die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_+(p) = |p|$, $\lambda_-(p) = -|p|$. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$V_{0,i}(p) = \begin{pmatrix} q_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit linear unabhängigen } q_i \in S^2,\ q_i \perp p,\ i = 1,2$$

und

$$V_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -p_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist wieder $p_0 := p/|p|$. Es seien Q_-, Q_0 und Q_+ die orthogonalen Projektoren auf die Eigenräume. Dann folgt

$$Q_+(p) = V_+(p)\, V_+^{tr}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_0\, p_0^{tr} & p_0 \\ p_0^{tr} & 1 \end{pmatrix},$$

$Q_-(p) = Q_+(-p)$ und

$$Q_0(p) = id - Q_+(p) - Q_-(p) = id - \begin{pmatrix} p_0\, p_0^{tr} & o \\ o & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_0 \times p_0 \times & o \\ o & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned} B(p) &= |p|\left\{Q_+(p) - Q_-(p)\right\}, \\ B^2(p) &= |p|^2\left\{Q_+(p) + Q_-(p)\right\}, \\ B^3(p) &= |p|^2 B(p), \\ Q_\pm(p)\, B(p) &= B(p)\, Q_\pm(p) = \pm\, |p|\, Q_\pm(p), \\ Q_0(p)\, B(p) &= B(p)\, Q_0(p) = O. \end{aligned}$$

Ist H die Heaviside-Abbildung, dann erhalten wir durch

$$\hat{P}_0(\lambda;p) := H(\lambda+|p|)\,Q_-(p) + H(\lambda)\,Q_0(p) + H(\lambda-|p|)\,Q_+(p)$$

die Spektralschar von $B(p)$.

Im zweiten Schritt betrachten wir nun im Raum der Fouriertransformierten

$$\hat{A}_0 \;:\; \mathcal{D}(\hat{A}_0) \subset \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0$$

mit $\mathcal{H}_0 := \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^4$, $\hat{A}_0\,\hat{U} := B\,\hat{U}$ und

$$\mathcal{D}(\hat{A}_0) := \left\{\hat{U} \in \mathcal{H}_0 \;\middle|\; U \in \mathcal{D}(A_0)\right\}.$$

$\hat{A}_0$ besitzt den Eigenwert $\lambda = 0$ mit

$$\mathcal{N}(\hat{A}) = \left\{U \in \mathcal{H}_0 \;\middle|\; p^{tr}\,U_1(p) = 0 \text{ und } U_2(p) = 0\right\}.$$

Von Null verschiedene Eigenwerte gibt es nicht, denn für $\lambda \neq 0$ würde aus $(\hat{A}_0 - \lambda)U = o$

$$\operatorname{supp} U \subset \left\{p \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |p| = |\lambda|\right\}$$

folgen. Es gibt aber keine nicht verschwindende $\mathcal{L}^2$-Funktion mit diesem Träger. Man nennt jedoch für $\lambda \neq 0$ und $q_0 \in S^2$

$$\hat{U}_\lambda(p,q_0) := \begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta(p - \lambda\,q_0)$$

„verallgemeinerte Eigenfunktion" zu λ, denn es ist

$$\left(\hat{A}_0(p) - \lambda\right)\hat{U}_\lambda(p,q_0) = o.$$

Es folgt

$$U_\lambda(x,q_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x q_0}.$$

Wir definieren nun

$$\hat{P}_0(\lambda) \;:\; \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0$$
$$\hat{P}_0(\lambda) := H(\lambda + |\cdot|)\,Q_- + H(\lambda)\,Q_0 + H(\lambda - |\cdot|)\,Q_+.$$

Dann ist $\hat{P}_0(\lambda)$ die Spektralschar von $\hat{A}_0$.

Durch Fourierrücktransformation erhält man daraus die Spektralschar von A_0, nämlich

$$P_0(\lambda) = F^*\hat{P}_0(\lambda)F.$$

Es seien $\Pi_0 := F^* Q_0 F$ und

$$P_0(\lambda) =: \Pi(\lambda) + \Pi_0 H(\lambda).$$

Wegen

$$(F^* H(\lambda - |\cdot|)Q_+\hat{U})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{|p|<\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}\,(Q_+\hat{U})(p)\,dp$$

folgt dann

$$(\Pi(\lambda)U)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\left\{\int_{|p|>-\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}\,(Q_-\hat{U})(p)\,dp + \int_{|p|<\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}\,(Q_+\hat{U})(p)\,dp\right\}.$$

Der Anteil $\Pi(\lambda)$ von $P_0(\lambda)$ ist damit absolut stetig.

Als letztes wollen wir eine *Grundlösung* G_λ zu $D - \lambda$ angeben, also die Gleichung

$$(D - \lambda)G_\lambda \stackrel{!}{=} \delta\,id$$

lösen. Es ist

$$(B-\lambda)\hat{G}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\, id,$$

und für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned}
\hat{G}_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mu-\lambda}\,d\hat{P}_0(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\left\{-\frac{Q_-}{|\cdot|+\lambda} - \frac{Q_0}{\lambda} + \frac{Q_+}{|\cdot|-\lambda}\right\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\left\{-\frac{Q_-}{|\cdot|+\lambda} + \frac{Q_+}{|\cdot|-\lambda} + \frac{Q_+ + Q_-}{\lambda} - \frac{id}{\lambda}\right\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\left\{\frac{1}{|\cdot|^2-\lambda^2}\Big[|\cdot|(Q_+ - Q_-) + \frac{|\cdot|^2}{\lambda}(Q_+ + Q_-)\Big] - \frac{id}{\lambda}\right\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\left\{\Big(B + \frac{1}{\lambda}B^2\Big)\frac{1}{|\cdot|^2-\lambda^2} - \frac{id}{\lambda}\right\}.
\end{aligned}$$

Es sei

$$g_\lambda(x) := \begin{cases}\gamma_\lambda^+(x) & \text{für } \operatorname{Im}\lambda > 0,\\ \gamma_\lambda^-(x) & \text{für } \operatorname{Im}\lambda < 0.\end{cases}$$

Dabei sind

$$\gamma_\lambda^\pm(x) = \frac{e^{\pm i\lambda|x|}}{4\pi|x|}$$

Grundlösungen der Helmholtzschen Schwingungsgleichung. Dann ist

$$\hat{g}_\lambda(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\,\frac{1}{|p|^2-\lambda^2}.$$

Wir erhalten deshalb

$$\hat{G}_\lambda = \Big(B + \frac{1}{\lambda}B^2\Big)\hat{g}_\lambda - \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{id}{\lambda}$$

oder

$$G_\lambda = \Big(D + \frac{1}{\lambda}D^2\Big)g_\lambda - \frac{\delta}{\lambda}\, id.$$

Das asymptotische Verhalten von G_λ für $|x| \to \infty$ folgt aus dem von g_λ. Es gilt

$$(Dg_\lambda)(x) = \frac{\partial g_\lambda(x)}{\partial |x|}\,(D|x|)\, id = \Big(\pm\,\lambda - \frac{i}{|x|}\Big)g_\lambda(x)\,B(x_0) = \pm\,\lambda\,B(x_0)\,g_\lambda(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big)$$

und

$$\begin{aligned}
&(D^2 g_\lambda)(x) =\\
&= \left\{\Big(\lambda^2 \mp \frac{i\lambda}{|x|} + \frac{1}{|x|^2}\Big)B^2(x_0) \mp \Big(i\,\lambda \pm \frac{1}{|x|}\Big)\frac{1}{|x|}\begin{pmatrix} id & o\\ o & 3\end{pmatrix}\right\}g_\lambda(x) = \lambda^2\,B^2(x_0)\,g_\lambda(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big),
\end{aligned}$$

also gleichmäßig für alle λ mit $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$

$$G_\lambda(x) = \lambda\big(\pm\,B(x_0) + B_0^2(x_0)\big)g_\lambda(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big)$$

oder

$$B(x_0)\,G_\lambda(x) = \pm G_\lambda(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big).$$

Charakterisieren wir wieder ausstrahlende Vorgänge durch das Pluszeichen und einstrahlende durch das Minuszeichen, dann lautet die *Ausstrahlungsbedingung*

$$(B_0 - id)\,U \in \big(\mathcal{L}^2(G_a)\big)^4$$

und entsprechend die Einstrahlungsbedingung. Das stimmt mit den in §8.2 angegebenen Bedingungen überein.

Es sei noch folgendes bemerkt: Möchte man in $\mathbb{R}^3$ für $\lambda \neq 0$ die Gleichung

$$(A_0 - \lambda)U \stackrel{!}{=} F \tag{$*$}$$

lösen, dann bietet sich natürlich wieder die orthogonale Zerlegung

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{R}(A_0)} \oplus \mathcal{N}(A_0)$$

mit $\mathcal{N}(A_0) = \mathcal{D}_0 \times \mathcal{O}$ an. Es sei

$$P_0 \;:\; \mathcal{H}_0 \longrightarrow \overline{\mathcal{R}(A_0)}$$

der Projektor auf $\overline{\mathcal{R}(A_0)}$; dieser Teilraum reduziert A_0. Es sei $F = F_{\mathcal{R}} + F_{\mathcal{N}}$ mit $F_{\mathcal{R}} := P_0 F$. Dann zerfällt Gleichung ($*$), und man kann in $\mathcal{N}(A_0)$ den Anteil

$$-\lambda\, U_{\mathcal{N}} \stackrel{!}{=} F_{\mathcal{N}}$$

trivial lösen. Es geht also eigentlich nur um die Gleichung

$$(A_0 - \lambda)U_{\mathcal{R}} \stackrel{!}{=} F_{\mathcal{R}} \tag{$**$}$$

in $\overline{\mathcal{R}(A_0)}$.

Deshalb ist auch der Anteil Γ_λ der Grundlösung mit

$$\hat{\Gamma}_\lambda := \hat{G}_\lambda\, P_0 = \hat{G}_\lambda\,(Q_- + Q_+)$$

besonders interessant. Es ist für $\lambda \neq 0$

$$\hat{\Gamma}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\left\{-\frac{Q_-}{|\cdot|+\lambda} + \frac{Q_+}{|\cdot|-\lambda}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\left\{\frac{(Q_+ - Q_-)|\cdot|}{|\cdot|^2-\lambda^2} + \frac{(Q_- + Q_+)\lambda}{|\cdot|^2-\lambda^2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\left\{\frac{B}{|\cdot|^2-\lambda^2} + \frac{B^2}{\lambda}\left(\frac{1}{|\cdot|^2-\lambda^2} - \frac{1}{|\cdot|^2}\right)\right\}.$$

Nun ist

$$\hat{h}(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\,\frac{1}{|p|^2}.$$

die Fouriertransformierte von

$$h(x) = \frac{1}{4\pi|x|}.$$

Es folgt also

$$\Gamma_\lambda = D\,g_\lambda + D^2\,\frac{g_\lambda - h}{\lambda},$$

und es ist

$$\frac{g_\lambda - h}{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\left\{\pm\mathrm{i} - \frac{\lambda}{2}|x| \mp \mathrm{i}\,\frac{\lambda^2}{6}|x|^2 + \cdots\right\}.$$

Für $|x| \to 0$ erhält man daraus

$$\Gamma_\lambda(x) = \left\{\lambda\Big(\pm B(x_0) + B^2(x_0)\Big) \mp \frac{\mathrm{i}}{|x|}\left(B^2(x_0) + \begin{pmatrix} id & o \\ p & 3\end{pmatrix}\right)\right\} g_\lambda = \lambda\Big(\pm B(x_0) + B^2(x_0)\Big)\, g_\lambda + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

und

$$\Big(B_0 \mp id\Big)\Gamma_\lambda(x) = \frac{\mathrm{i}}{|x|}\left\{\pm B(x_0) + B^2(x_0) + \Big(id \mp B(x_0)\Big)\begin{pmatrix} id & o \\ p & 3\end{pmatrix}\right\} g_\lambda(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

8.4 Eine Darstellungsformel und a priori Abschätzungen

Für Potentialfunktionen haben wir bereits in §3.3 eine Darstellungsformel für beschränkte Gebiete hergeleitet. Wir wollen nun eine analoge Darstellung für Außengebiete angeben, beschränken uns dabei aber auf den Ganzraumfall und zeigen

Satz 8.4.1: *Es seien* $F \in \left(\mathcal{L}^{2f}(\mathbb{R}^3)\right)^4$, $\lambda \neq 0$ *mit* $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, $U \in \left(\mathcal{C}_1(\mathbb{R}^3)\right)^4$ *mit* $(D-\lambda)U = F$ *und* $(B_0 - id)U \in \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^4$. *Dann ist*

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G_\lambda(x-y)F(y)\,dy.$$

Auch für $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$ gilt diese Darstellung, wenn man die Einstrahlungsbedingung

$$(B_0 + id)U \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$$

voraussetzt, im Falle $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ genügt $U \in \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^4$.

Zum <u>Beweis</u> des Satzes wählen wir ein $j \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ mit $j \geq 0$, $j|(-\infty,0) = 1$ und $j|(1,\infty) = 0$ sowie $\psi_r := j(|\cdot| - r)$. Es seien $x \in G$ fest und $r_0 > |x|$ mit $\operatorname{supp} F \subset B(0,r_0)$. Dann gilt für $r > r_0$

$$\begin{aligned} U(x) = \psi_r(x)U(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x-y)(\psi_r U)(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{\left(-D_y - \lambda\right)G_\lambda(x-y)\right\}(\psi_r U)(y)\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} G_\lambda(x-y)\left\{\left(D-\lambda\right)(\psi_r U)\right\}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^3} G_\lambda(x-y)F(y)\,dy + I_r(x) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I_r(x) &:= \int_{\mathbb{R}^3} G_\lambda(x-y)\left\{\left(D\,\psi_r\right)U\right\}(y)\,dy = -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^3} j'(|y|-r)\,G_\lambda(x-y)\,B(y_0)\,U(y)\,dy = \\ &= -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{j'(|\cdot|-r)}{2}\Big\{G_\lambda(x-\cdot)\,(B_0 - id)\,U + G_\lambda(x-\cdot)\,(B_0+id)\,U\Big\}. \end{aligned}$$

Nun gilt für $r \to \infty$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3} j'(|\cdot|-r)\,G_\lambda(x-\cdot)\,(B_0 - id)\,U\right|^2 \leq c\int_{r<|y|<r+1} \left|(B_0 - id)\,U\right|^2(y)\,dy \to 0,$$

wegen $|G_\lambda(x-y)| \leq c/|y|$ und $(B_0 - id)U \in \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^4$. Dasselbe gilt für den zweiten Anteil von $I_r(x)$, wenn wir $U \in \mathcal{L}^2_\tau(\mathbb{R}^3)$ zeigen können. Wegen

$$G_\lambda(x-y)B(y) = -G_\lambda(x-y)B(-y)$$

genügt G_λ nämlich bzgl. y der Einstrahlungsbedingung, also für $|y| \to \infty$

$$\left|G_\lambda(x-y)\big(B(y_0) + id\big)\right| \leq \frac{c}{|y|^2},$$

und daraus folgt dann

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3} j'(|\cdot|-r)\,G_\lambda(x-\cdot)\,(B_0+id)\,U\right|^2 \leq c\int_{r<|y|<r+1} \frac{|U(y)|^2}{|y|^2}\,dy \to 0. \qquad \square$$

Es bleibt zu also zu zeigen

Lemma 8.4.2: *Die Voraussetzungen von Satz 8.4.1 seien erfüllt. Dann ist* $U \in \left(\mathcal{L}^2_\tau(\mathbb{R}^3)\right)^4$.

<u>Beweis</u>: Für $r > r_a$ gilt

$$\int_{|x|=r} \left((B_0 - id)U\right)^{tr}(B_0 - id)\bar{U} = \int_{|x|=r} \Big\{\left(B_0 U\right)^{tr} B_0\bar{U} + U^{tr}\,\bar{U} - 2\operatorname{Re}\left(B_0 U\right)^{tr}\bar{U}\Big\}$$

mit

$$\int_{|x|=r} (B_0U)^{tr}\,\bar U = \int_{|x|=r_a} (B_0U)^{tr}\,\bar U + \int_{r_a<|x|<r} \mathrm{i}\,(DU)^{tr}\,\bar U =$$
$$= c_0 + \mathrm{i}\int_{r_0<|x|<r} \left\{(DU)^{tr}\,\bar U + U^{tr}\,(D\bar U)\right\} = c_0 - 2\,\mathrm{Im}\,\lambda \int_{r_0<|x|<r} |U|^2.$$

Es folgt also mit einer Konstanten c_0

$$\int_{|x|=r} |U|^2 \le c_0 + \int_{|x|=r} |(B_0 - id)U|^2$$

und daraus $U \in \left(\mathcal{L}^2_\tau(\mathbb{R}^3)\right)^4$. □

Als nächstes geben wir drei Abschätzungen:

Lemma 8.4.3: *Es seien $f \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ und*

$$v(x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\,\frac{dy}{|x-y|}.$$

Dann gilt

$$\|v\|_\tau \le c\,\|f\|_\sigma$$

mit

$$c := \sup_{x_0\in S^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dr}{|x_0 - r|\sqrt{|r|}^5}.$$

Beweis: Es ist

$$\|v\|_\tau^2 = \int \frac{1}{(1+|x|)^2}\left(\int f(y)\,\frac{dy}{|x-y|}\right)^2 dx \le$$
$$\le \int \frac{1}{(1+|x|)^2}\left(\int \frac{|f(y)|^2(1+|y|)^2\sqrt{|y|}}{|x-y|}dy \int \frac{dy}{|x-y|(1+|y|)^2\sqrt{|y|}}\right)dx.$$

Wegen

$$\int \frac{dy}{|x-y|(1+|y|)^2\sqrt{|y|}} \le \int \frac{dy}{|x-y|\sqrt{|y|}^5} = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\int \frac{dr}{|x_0 - r|\sqrt{r}^5} \le \frac{c}{\sqrt{|x|}}$$

folgt daraus

$$\|v\|_\tau^2 \le c\int |f(y)|^2(1+|y|)^2\sqrt{|y|}\left(\int \frac{dx}{|x-y|(1+|x|)^2\sqrt{|x|}}\right)dy \le c^2\,\|f\|_\sigma^2.$$ □

Lemma 8.4.4: *Es seien $f \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ und*

$$w(x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\frac{dy}{|x-y|^2}.$$

Dann gilt

$$\exists\,\gamma \in \mathbb{R}^+ \qquad \|w\| \le \gamma\,\|f\|_\sigma.$$

Der Beweis von Lemma 8.4.4 verläuft analog dem zu Lemma 8.4.3. Es ist

$$\|w\|^2 = \int\left(\int f(y)\frac{dy}{|x-y|^2}\right)^2 dx \le \int\left(\int \frac{|f(y)|^2(1+|y|)^2\sqrt{|y|}}{|x-y|^2}dy \int \frac{dy}{|x-y|^2(1+|y|)^2\sqrt{|y|}}\right)dx$$

und

$$\int \frac{dy}{|x-y|^2(1+|y|)^2\sqrt{|y|}} = \frac{1}{\sqrt{|x|}^3}\int \frac{dr}{|x_0-r|^2\left(\frac{1}{|x|}+|r|\right)^2\sqrt{|r|}} \le \frac{1}{\sqrt{|x|}^3}\int \frac{dr}{|x_0-r|^2\sqrt{|r|}^5} \le \frac{c}{\sqrt{|x|}^3}.$$

Mit

$$c_1 := \sup_{y_0 \in S^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dr}{|y_0 - r|^2 \sqrt{|r|}^3}$$

und $\gamma^2 := \sqrt{cc_1}$ folgt also

$$\|w\|^2 \leq cc_1 \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|^2 \,(1 + |y|^2)\, dy = \gamma^2 \, \|f\|_\sigma^2 . \qquad \square$$

Besonders wichtig ist es, auch einen Term, der die Ausstrahlungsbedingung enthält, abzuschätzen. Mit der gerade verwandten Technik folgt unmittelbar für die Lösungen der Helmholtzschen Schwingungsgleichung

Lemma 8.4.5: *Es seien* $f \in \mathcal{L}^2_{\sigma^2}(G)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ *und*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|}\, dy.$$

Dann gilt

$$\exists\, c > 0 \qquad \big\|(x_0\nabla - \mathrm{i}\,\lambda)u\big\| \leq c\, \|f\|_{\sigma^2} .$$

Der Beweis erfolgt wieder durch analoges Abschätzen. Zu diskutieren ist

$$\big|(x_0\nabla - \mathrm{i}\lambda)u(x)\big| \leq w(x) := \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|\, \frac{A(x,y)}{|x-y|^2}\, dy$$

mit

$$A(x,y) := \big|\, x_0(x-y) - |x-y|\,\big| = |x-y| \left| x_0 \frac{x_0 - r}{|x_0 - r|} - 1 \right| =: |x-y|\, \alpha(x_0, r)$$

und $r := y/|x|$. Es ist

$$\alpha(x_0, r) = \mathcal{O}\begin{pmatrix} |r| & \text{für } |r| \to 0 \\ 1 & \text{für } |r| \to \infty \end{pmatrix} .$$

Damit ist

$$\int_{\mathbb{R}^3} w^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(y)| A(x,y)}{|x-y|^2} dy \right)^2 dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int \frac{f^2(y)(1+|y|)^4 \sqrt{|y|}}{|x-y|^2}\, dy \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{A^2(x,y)}{|x-y|^2 (1+|y|)^4 \sqrt{|y|}} dy}_{=:I_1} \right) dx$$

mit

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{|x|}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\alpha^2(x_0, r) dr}{\left(\frac{1}{|x|} + |r|\right)^4 \sqrt{|r|}} \leq \frac{c}{\sqrt{|x|}^3} .$$

Wir erhalten also

$$\int_{\mathbb{R}^3} w^2(x) dx \leq c \int_{\mathbb{R}^3} f^2(y)(1+|y|)^4 \sqrt{|y|}\, \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{dx}{|x-y|^2 \sqrt{|x|}^3} \right)}_{=:I_2} dy$$

mit

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{|y|}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dr}{|r - y_0|^2 \sqrt{|r|}^3} \leq \frac{c}{\sqrt{|y|}} .$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Schärfer und allgemeiner als diese Lemmata ist jedoch die folgende Resolventenabschätzung, die zur Vereinfachung nur für den Δ-Operator vorgestellt werden soll. Wegen $\sigma(\Delta) = \mathbb{R}_0^+$ interessiert hier der Grenzübergang $\lambda \to \lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ für $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_0^+$. Das bringen wir schon in der Formulierung der Abschätzung zum Ausdruck. Außerdem seien $r := |x|$ und $\partial := x_0 \nabla = \partial / \partial r$.

Resolventenabschätzung: *Es seien* $s \in (1/2, 1]$, $u \in \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *mit* $u\big|B(0,1) = o$, $k \in \mathbb{R}$ *mit* $|k| \geq k_0 > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$ *sowie*

$$\big(\Delta + (k^2 + \mathrm{i}\, k\, \varepsilon)\big)\, u =: f$$

mit $r^s f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$. *Dann gilt mit* $K := B(0,\rho)$

$$\forall\, \rho > 1 \quad \exists\, c = c\,\big(n, s, k_0, \rho\big)$$

$$\big\| r^{s-1}(\partial u - \mathrm{i}\, k\, u)\big\| + \big\| r^{-s} u\big\| \leq\, c\,\big\{\, \|r^s f\| + \|u\|_{\mathcal{L}^2(K)} \big\}.$$

Man beachte, daß in dieser Formulierung ausstrahlende Vorgänge durch positive k und einstrahlende durch negative k charakterisiert werden.

Den Beweis führen wir in vier Schritten:

1. Es seien $w \in \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ mit $w\big|B(0,1) = o$, $B(R) := B(0,R)$, $S(R) := \partial B(R)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann folgt aus

$$\nabla \partial = \partial \nabla + \frac{1}{r^2}\, \nabla_0$$

und

$$\mathrm{Re}\,(\nabla w)\, \nabla (r^{\alpha+1} \partial \overline{w}) = \alpha r^{\alpha} |\partial w|^2 + r^{\alpha} |\nabla w|^2 + \tfrac{1}{2} r^{\alpha+1} \partial (|\nabla w|^2)$$

durch partielles Integrieren

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} \int_{B(R)} r^{\alpha+1} (\Delta w)\, \partial \overline{w} \;&=\; \frac{1}{2} \int_{B(R)} r^{\alpha}\, \big((n+\alpha-2)\, |\nabla w|^2 - 2\alpha\, |\partial w|^2\big) + \\ &\quad + \int_{S(R)} R^{\alpha+1} \Big(|\partial w|^2 - \frac{1}{2} |\nabla w|^2\Big), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathrm{Re} \int_{B(R)} r^{\alpha+1} w \partial \overline{w} \;=\; -\frac{1}{2} \int_{B(R)} r^{\alpha} (n+\alpha)\, |w|^2 \,+\, \frac{1}{2} \int_{S(R)} R^{\alpha+1}\, |w|^2 \tag{4}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} \int_{B(R)} r^{\alpha}\, (\Delta w)\, \overline{w} \;&=\; -\int_{B(R)} \Big(r^{\alpha}\, |\nabla w|^2 - r^{\alpha-2}\, \frac{\alpha(n+\alpha-2)}{2}\, |w|^2 \Big) + \\ &\quad + \int_{S(R)} R^{\alpha} \Big(\mathrm{Re}\; (\partial w) \overline{w} - \frac{\alpha}{2R}\, |w|^2 \Big). \end{aligned} \tag{5}$$

2. Es sei nun

$$v := \mathrm{e}^{-\mathrm{i} k r}\, u.$$

Dann gelten

$$\nabla v = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\, \big(\nabla u - \mathrm{i}\, k\, x_0 u\big) \tag{6}$$

und

$$\Delta v + \mathrm{i}k \Big(\varepsilon\, v + \frac{n-1}{r} v + 2\, \partial v \Big) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} f =: g. \tag{7}$$

3. Wir schätzen $\|r^{s-1}(\partial u - \mathrm{i}\, k u)\| = \|r^{s-1} \partial v\|$ ab: Es ist

$$\begin{aligned} A := \mathrm{Re} \int_{B(R)} g \left\{ r^{2s-1} \partial \overline{v} + \frac{n-1}{2} r^{2s-2}\, \overline{v} \right\} = \\ = \; \mathrm{Re} \int_{B(R)} r^{2s-1} (\Delta v)\, \partial \overline{v} \,+ \mathrm{Re}\, \frac{n-1}{2} \int_{B(R)} r^{2s-2} (\Delta v)\, \overline{v} \,+ \mathrm{Re}\; \mathrm{i}k\varepsilon \int_{B(R)} r^{2s-1}\, v\, \partial \overline{v}. \end{aligned}$$

Nun folgt aus der Differentialgleichung (7)

$$\mathrm{i}\, k\varepsilon\, \partial \overline{v} = \frac{\varepsilon}{2} \Big(\Delta \overline{v} - \mathrm{i}k\varepsilon \overline{v} - \mathrm{i}k \frac{n-1}{r} \overline{v} - \overline{g} \Big),$$

zusammen mit Gln. (3) – (5) also

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}\int_{B(R)} & r^{2s-2}\Big\{(2s-3)\,|\nabla v|^2 + 4(1-s)\,|\partial v|^2 - \frac{\varepsilon}{2} r\,|\nabla v|^2\Big\} + \\ & + (n-1)(s-1)\big(\tfrac{n}{2}+s-2\big)\int_{B(R)} r^{2s-4}\,|v|^2 + \\ & + \frac{\varepsilon}{2}(2s-1)\frac{n+2s-3}{2}\int_{B(R)} r^{2s-3}\,|v|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{Re}\int_{B(R)} r^{2s-1} g\,\overline{v} + \int_{S(R)} \{\,\cdots\,\}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\big|\{\cdots\}\big| \le c_1\, R^{2s-1}\left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right).$$

Wegen

$$2s-3 = (4s-4) - (2s-1)$$

wird aus dem ersten Integral

$$\int_{B(R)} r^{2s-2}\{\cdots\} = -\int_{B(R)} r^{2s-2}\Big\{(2s-1)|\nabla v|^2 + 4(1-s)\left(|\nabla v|^2 - |\partial v|^2\right) + \frac{\varepsilon}{2} r|\nabla v|^2\Big\},$$

und weil v und ∇v quadratintegrabel sind, ist

$$\liminf_{R\to\infty}\int_{S(R)}\{\,\cdots\,\} = 0.$$

Deshalb erhalten wir

$$\|r^{s-1}\,\nabla v\|^2 \le c_2\Big\{\|r^s g\|\left(\|r^{s-1}\,\partial v\| + \|r^{s-2} v\| + \varepsilon\,\|r^{s-1} v\|\right) + \|r^{s-2} v\|^2 + \varepsilon\,\|r^{s-2} v\|\,\|r^{s-1} v\|\Big\}.$$

Aus der Differentialgleichung ersieht man unmittelbar

$$|k|\,\varepsilon\,\|v\|^2 = |k|\,\varepsilon\,\|u\|^2 = \big|\mathrm{Im}\,(f,u)\big| \le \|f\|\,\|u\| = \|g\|\,\|v\|$$

oder

$$\varepsilon\,\|r^{s-1} v\| \le \varepsilon\,\|v\| \le c_3\,\|g\| \le c_3\,\|r^s g\|.$$

Zusammengefaßt folgt also

$$\|r^{s-1}\nabla v\| \le c_4\left\{\|r^s g\| + \|r^{s-2} v\|\right\} \le c_4\left\{\|r^s g\| + \|r^{-s} v\|\right\}. \tag{8}$$

4. Wir schätzen schließlich $\|r^{-s} u\| = \|r^{-s} v\|$ ab: Es ist

$$\mathrm{Im}\, g\,\bar{v} = \mathrm{Im}\,(\Delta v)\bar{v} + k\Big(\varepsilon\, v + \frac{n-1}{r} v\Big)\bar{v} + 2\,k\,\mathrm{Re}\,(\partial v)\bar{v}.$$

Daraus folgt durch partielles Integrieren

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\int_{B(R)} & r^{1-2s}\, g\,\overline{v} = \\ & = \mathrm{Im}\,(2s-1)\int_{B(R)} r^{-2s}\,(\partial v)\,\overline{v} + \varepsilon\, k\int_{B(R)} r^{1-2s}\,|v|^2 + (2s-1)k\int_{B(R)} r^{-2s}\,|v|^2 + \int_{S(R)}\{\,\cdots\,\} \end{aligned}$$

mit

$$\big|\{\cdots\}\big| \le c_5\, R^{1-2s}\left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right),$$

und wir erhalten

$$\|r^{-s} v\|^2 \le c_5\left(\|r^s g\| + \|r^{s-1}\partial v\|\right)\|r^{1-3s} v\|.$$

Nun ist für $\rho > 1$ mit $K := B(0,\rho)$

$$\|r^{1-3s} v\|^2 \le \|v\|^2_{\mathcal{L}^2(K)} + \rho^{2(1-2s)}\,\|r^{-s} v\|^2.$$

Damit ist die Resolventenabschätzung bewiesen. □

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, für die Lösungen von

$$(A-\lambda)\,U \overset{!}{=} F$$

eine a priori Abschätzung anzugeben, nämlich

Satz 8.4.6: *Es seien G ein Außengebiet, $F \in \mathcal{L}^2_\sigma(G)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Dann gilt*

$$\exists\, k > 0 \quad \exists\, K \Subset G \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}^+,\, \lambda_1 \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_2,$$

$$\forall\, U \in \mathcal{D}(A),\, (A-\lambda)U = F, \qquad \|U\|_\tau^+ \le k\left\{\|U\|_{\mathcal{L}^2(K)} + \|F\|_\sigma\right\}.$$

Eine analoge Abschätzung gilt für $\operatorname{Im}\lambda < 0$ und $\|U\|_\tau^-$.

Zum Beweis des Satzes wählen wir ein $\varphi \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\operatorname{supp}\varphi \in \{x \mid r_a < |x| < \infty\}$ und $\varphi\big|\{x \mid |x| > r_a + 1\} = 1$. Wir zerlegen

$$U = \underbrace{(1-\varphi)\,U}_{=:V} + \underbrace{\varphi\,U}_{=:W}.$$

Dann ist

$$\operatorname{supp} V \in K \Subset G,$$

und wir müssen nur noch W abschätzen. Setzen wir W durch Null in $\mathbb{R}^3$ fort, dann ist W eine Lösung für den Ganzraumfall, und es ist

$$(D-\lambda)W = \varphi\,F + (D\varphi)\,U =: H \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$$

mit

$$\|H\|_\sigma \le \|F\|_\sigma + c\,\|U\|_{\mathcal{L}^2(K)}.$$

Wir zerlegen nun wieder

$$\left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^4 = \overline{\mathcal{R}(A_0)} \oplus \mathcal{N}(A_0)$$

mit dem Projektor $P_0 : (\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))^4 \to \overline{\mathcal{R}(A_0)}$. In $\mathcal{N}(A_0)$ ist die zugrundeliegende Differentialgleichung trivial lösbar. Es sei

$$W_1 := -\frac{1}{\lambda}(id - P_0)H.$$

Dann ist mit $c = c(\lambda)$

$$\|W_1\| \le \frac{1}{|\lambda|}\|H\| \le c\left\{\|F\| + \|U\|_{\mathcal{L}^2(K)}\right\}$$

oder

$$\|W_1\|_\tau^+ \le 3\,\|W_1\| \le c\left\{\|F\|_\sigma + \|U\|_{\mathcal{L}^2(K)}\right\}.$$

Es geht also nur noch um den Anteil

$$W_2 := W - W_1 \subset \overline{\mathcal{R}(A_0)}.$$

Dieser ist eindeutige Lösung von

$$(D-\lambda)\,W_2 = P_0\,H$$

und kann nach Satz 8.4.1 dargestellt werden, und zwar mit Γ_λ anstelle G_λ, also

$$W_2(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\lambda(x-y)\,\big(P_0 H\big)(y)\,dy.$$

Aus der expliziten Gestalt von Γ_λ und den vorangegangenen Abschätzungen folgt dann die Behauptung. □

8.5 Das Prinzip von der Grenzabsorption

In diesem Abschnitt soll die Spektralschar $P(t)$ unseres Operators A angegeben werden. Dazu verwenden wir die Stonesche Formel

$$(P(t)F, V) = \lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{t+\delta}\left(\left([A-(s+\mathrm{i}\varepsilon)]^{-1} - [A-(s-\mathrm{i}\varepsilon)]^{-1}\right)F, V\right)ds,$$

und führen den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durch. Weil komplexe Werte von λ in den Anwendungen gedämpfte Vorgänge beschreiben, spricht man auch vom *Prinzip von der Grenzabsorption.* Wir zeigen, daß die Limites

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[A-(s\pm\mathrm{i}\varepsilon)]^{-1}F$$

gerade die aus- bzw. einstrahlenden Lösungen zu F sind. Die Differenz beider bestimmt also die Spektralschar.

Wir wissen bereits, daß A nur einen Punkteigenwert besitzt, nämlich $\lambda = 0$, falls $\rho \in \mathcal{C}_1(G)$ ist. Das sei im folgenden vorausgesetzt. Es sei wieder

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A)$$

die orthogonale Zerlegung mit dem Projektor P von $\mathcal{H}$ auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$. Weil $\overline{\mathcal{R}(A)}$ die Abbildung A reduziert, können Außenraumaufgaben in

$$\mathcal{H}_p := \mathcal{N}(A) \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_c := \overline{\mathcal{R}(A)}$$

getrennt betrachten. Man spricht auch von dem *unstetigen* und dem *stetigen Teilraum* von $\mathcal{H}$.

Im folgenden interessiert besonders $\mathcal{H}_c$. Es seien $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\tau \in \mathbb{R}^+$,

$$Q^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 < z < \lambda_2,\ 0 < \operatorname{Im} z < \tau\}$$
$$Q^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 < z < \lambda_2,\ -\tau < \operatorname{Im} z < 0\}$$

und

$$R(\lambda)F := (A - \lambda)^{-1}F$$

für $\lambda \in Q^\pm$. Dann zeigen wir als erstes

Satz 8.5.1: *Das Außengebiet G besitze die strikte Segmenteigenschaft, und es sei $\rho \in \mathcal{C}_1(G)$. Dann gilt*

$$\exists\, \gamma > 0 \quad \forall\, \lambda \in Q^+ \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_\sigma \qquad \|R(\lambda)F\|_\tau^+ \leq \gamma\, \|F\|_\sigma .$$

Natürlich gilt der Satz auch, wenn man den Index $+$ durch $-$ ersetzt.

<u>Beweis</u>: Für $F \in \mathcal{H}_p$ ist die Behauptung wegen $R(\lambda)F = -F/\lambda$ trivial. Es sei also $F \in \mathcal{H}_{c,\sigma} := \mathcal{H}_c \cap \mathcal{H}_\sigma$. Dann gehen wir indirekt vor: Es sei mit $\lambda_n \in Q^+$

$$\|R(\lambda_n)F_n\|_\tau = 1 \qquad \text{und} \qquad \|F_n\|_\sigma < \frac{1}{n}.$$

O.B.d.A. können wir $\lambda_n \to \lambda \in \overline{Q^+}$ annehmen. Dann folgt aus der lokalen Kompaktheit (Satz 5.5.4) für jedes R die Existenz einer in $(\mathcal{L}^2(G_R))^4$ konvergenten Teilfolge von $(R(\lambda_n)F_n)$. Dabei ist $G_R := G \cap B(0,R)$. Es sei $(R(\lambda_n)F_n)$ bereits diese Teilfolge und R größer als r_a gewählt. Dann folgt aus Satz 8.4.6 die Konvergenz in $\mathcal{H}_\tau(G)$. Es gibt also ein $U \in \mathcal{H}_\tau(G)$ mit

$$\|R(\lambda_n)F_n - U\|_\tau^+ \to 0.$$

Ist $\operatorname{Im}\lambda > 0$, dann verschwindet U, und im Falle $\operatorname{Im}\lambda = 0$ erhalten wir

$$\forall\, V \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{L}^{2f}(G) \qquad \big(R(\lambda_n)F_n,\ (A - \bar{\lambda}_n)V\big) = (F_n, V) \to 0,$$

also

$$\forall\, V \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{L}^{2f}(G) \qquad \big(U, (A - \bar{\lambda})V\big) = 0.$$

Daraus folgt $U \in \mathcal{D}(\tilde{A}^+)$ und $(\tilde{A}^+ - \lambda)U = o$. Wegen der bereits bewiesenen Eindeutigkeit verschwindet dann U, und wir erhalten den Widerspruch

$$\|R(\lambda_n)F_n\|_\tau \to 0. \qquad \square$$

Aus Satz 8.5.1 folgt

Das Prinzip von der Grenzabsorption: *Das Außengebiet G besitze die strikte Segmenteigenschaft, und es seien $\rho \in \mathcal{C}_1(G)$ sowie $F \in \mathcal{H}_\sigma$. Dann läßt sich die Abbildung*

$$R(\cdot)F \;:\; Q^+ \longrightarrow \mathcal{H}_\tau^+(G),$$
$$\lambda \longmapsto R(\lambda)F$$

stetig fortsetzen zu

$$R^+(\cdot)F \;:\; \overline{Q^+} \longrightarrow \mathcal{H}_\tau^+(G).$$

Beweis: Auch hier interessiert nur der Fall $F \in \mathcal{H}_c$. Wir zeigen, daß dann die Abbildung $R(\cdot)F \; : Q^+ \longrightarrow \mathcal{H}_\tau^+$ gleichmäßig stetig ist: Es seien $\varepsilon > 0$ und (μ_n), (ν_n) Folgen in Q^+ mit

$$|\mu_n - \nu_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \left\| R(\mu_n)F - R(\nu_n)F \right\|_\tau^+ \geq \varepsilon.$$

O.b.d.A. nehmen wir $\mu_n \to \lambda \in \overline{Q^+}$ an. Dann gilt auch $\nu_n \to \lambda$, und aus dem vorangegangenen Beweis folgt die Existenz von $U, V \in \mathcal{D}(\tilde{A}^+)$ mit

$$\left\| R(\mu_n)F - U \right\|_\tau^+ + \left\| R(\nu_n)F - V \right\|_\tau^+ \to 0.$$

Beschränken wir uns auf den Fall $\operatorname{Im}\lambda = 0$, dann ist $\tilde{A}^+U = \tilde{A}^+V = F$ und damit wegen der bereits bewiesenen Eindeutigkeit $U = V$. Das ist aber der Widerspruch

$$\left\| R(\mu_n)F - R(\nu_n)F \right\|_\tau^+ \to 0. \qquad \square$$

Aus dem Prinzip von der Grenzabsorption und den vorangegangenen Abschätzungen folgt unmittelbar

Satz 8.5.2: *Es seien G ein Außengebiet mit der strikten Segmenteigenschaft, $\rho \in \mathcal{C}_1(G)$, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\lambda_2 > 0$ und $F \in \mathcal{H}_\sigma(G)$. Dann ist die Gleichung $(\tilde{A}^+ - \lambda)\,U = F$ eindeutig lösbar, und es gilt*

$$\exists\,\gamma > 0 \quad \forall\,\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2) \qquad \|U\|_\tau^+ \leq \gamma\,\|F\|_\sigma.$$

Beweis: Die Eindeutigkeit wurde bereits in Satz 8.2.4 bewiesen. Zum Nachweis der Existenz wählen wir für $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$

$$U := R^+(\lambda)F := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} R(\lambda + \mathrm{i}\varepsilon)F.$$

Dann ist

$$\|U\|_\tau^+ \leq \gamma\,\|F\|_\sigma$$

und $(\tilde{A}^+ - \lambda)U = F$. $\square$

Bisher haben wir das Spektrum von A in sein Punktspektrum und seinen stetigen Anteil zerlegt. Für viele Anwendungen aus der Physik ist diese Zerlegung aber noch zu grob. Wenn man beispielsweise asymptotische Aussagen über das Verhalten von Lösungen bezüglich der Zeit machen möchte, ist es wichtig zu wissen, daß der stetige Anteil sogar absolut stetig ist. Man definiert den *absolut stetigen Teilraum*

$$\mathcal{H}_{ac} := \Big\{ U \in \mathcal{H}_c \;\Big|\; (P(\lambda)U, U) \text{ ist bezüglich des Lebesgueschen Maßes absolut stetig} \Big\}$$

von $\mathcal{H}$ und zerlegt

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}.$$

Dabei ist $\mathcal{H}_{sc}$ der *singulär stetige Teilraum* von $\mathcal{H}$. Es gilt also

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_{sc}}_{=:\mathcal{H}_s} \oplus \mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_p \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{ac}}_{=\mathcal{H}_c}.$$

Es ist $\mathcal{H}_s$ der *singuläre Teilraum* von $\mathcal{H}$. Ein singulär stetiges Maß, das auf der Cantormenge – einer Lebesgue-Nullmenge – lebt, läßt sich leicht angeben. Es gibt auch Beispiele stark oszillierender Potentiale, die auf singulär stetige Spektren führen (vgl. *Pearson [1978]*). Wir zeigen

Satz 8.5.3: *Es seien G ein Außengebiet mit der strikten Segmenteigenschaft, $\rho \in \mathcal{C}_1(G)$, P, Q die Projektoren auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$ bzw. $\mathcal{N}(A)$ und $F, V \in \mathcal{H}_\sigma(G)$. Dann gilt*

$$\big(P(\lambda)F, V\big) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\lambda} \big(R^+(\mu)F - R^-(\mu)F, PV\big)\, d\mu + H(\lambda)\big(F, QV\big).$$

Insbesondere ist $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{ac}$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Stoneschen Formel und den vorangegangenen Resultaten. Für $F \in \mathcal{H}_\sigma$ und $\mu \neq 0$ existiert

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \big(R(\mu + \mathrm{i}\varepsilon)F - R(\mu - \mathrm{i}\varepsilon)F, F\big) = \big(R^+(\mu)F - R^-(\mu)F, F\big) =: \mathrm{i}\, h(\mu)$$

mit einer reellwertigen Abbildung h und

$$\big|\big(R(\mu + \mathrm{i}\varepsilon)F - R(\mu - \mathrm{i}\varepsilon)F, F\big)\big| \leq 2\gamma \, \|F\|_\sigma^2.$$

Aus dem Lebesgueschen Majorantenkriterium folgt also $h \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und

$$\big(P(\lambda)F, F\big) = \big(P(\lambda_0)F, F\big) + \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_0}^{\lambda} h(\mu)\, d\mu.$$

Nun wächst $(P(\lambda)F, F)$ monoton und ist beschränkt. Deshalb ist $h \geq 0$, und die Limites für $\lambda_0 \to -\infty$ bzw. $\lambda_0 \to \pm 0$ existieren, also

$$\big(P(\lambda)F, F\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} h(\mu)\, d\mu.$$

Daraus folgt $\mathcal{H}_{c,\sigma} := \mathcal{H}_c \cap \mathcal{H}_\sigma \subset \mathcal{H}_{ac}$. Weiterhin ist $\mathcal{H}_{ac}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}_c$, und $\mathcal{H}_{c,\sigma}$ ist in $\mathcal{H}_c$ dicht. Deshalb ist $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{ac}$. Der Rest folgt durch Polarisieren und Ausrechnen. □

Als Anwendung des Vorangegangenen betrachten wir noch

Beispiel 8.5.4: *Es sei A der Δ-Operator in $\mathbb{R}^n$, also*

$$\mathcal{D}(A) := \big\{u \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) \;\big|\; \Delta u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)\big\} = \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt für alle $f, g \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$

$$\big(P(\lambda)f, g\big) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \gamma_\mu(|x-y|)\, dy\, \overline{g(x)}\, dx\, d\mu$$

und für alle $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$

$$\big(P(\lambda)f, g\big) = \int_{|z|<\sqrt{\lambda}} \hat{f}(z)\, \overline{\hat{g}(z)}\, dz.$$

Dabei ist

$$\gamma_\lambda := g_\lambda - \overline{g_\lambda}$$

und g_λ die in §7.5.1 definierte Grundlösung zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung, in $\mathbb{R}^3$ also

$$\gamma_\lambda(|x|) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi |x|} \sin\big(\sqrt{\lambda}\, |x|\big).$$

Der Beweis der ersten Aussage folgt unmittelbar aus

$$(A - \lambda)^{-1} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g_\lambda(|\cdot - y|)\, dy$$

und der Stoneschen Formel. Verwenden wir noch Lemma 7.5.1, also

$$\gamma_\lambda(|x|) = \frac{\mathrm{i}\pi}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda} x z}\, dz,$$

dann erhalten wir

$$\big(P(\lambda)f, g\big) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|z|<\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\cdot - y)z}\, dy\, \overline{g(x)}\, dx\, dz.$$

Definieren wir nun

$$F_0 \;:\; \mathcal{L}^{2f}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n),$$

$$(F_0 f)(x) := \hat{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, dy,$$

dann folgt schließlich

$$(P(\lambda)f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{|z|<\sqrt{\lambda}} \hat{f}(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xz}\,dz$$

oder

$$\big(P(\lambda)f,g\big) = \int_{|z|<\sqrt{\lambda}} \hat{f}(z)\,\overline{\hat{g}(z)}\,dz.$$

Damit haben wir die Spektralschar des Δ-Operators über die Fouriertransformation dargestellt. Erinnert sei an *FA, Beispiel 9.3.8.* Dort wurde die Fouriertransformation in $\mathbb{R}^1$ aus der Stoneschen Formel zur Abbildung

$$\begin{aligned} A \;:\; \mathcal{H}_1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ u &\longmapsto -\mathrm{i}\,u' \end{aligned}$$

gewonnen. F_0 ist eine beschränkte Abbildung, und aus dem Spektralsatz folgt für $r\to\infty$

$$\|F_0 f\|^2_{\mathcal{L}^2(B(0,r))} = \big(P(r^2)f,f\big) \to \|f\|^2$$

und

$$\big(f,g\big) = \lim_{\lambda\to\infty}\big(P(\lambda)f,g\big) = \big(\hat{f},\hat{g}\big).$$

Mithin ist F_0 eine Isometrie. Es sei

$$F \;:\; \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$$

ihr Abschluß. Dann ist F, die *Fouriertransformation*, eine unitäre Abbildung mit

$$F^* f = \overline{(F\bar{f})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} f(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\cdot\, y)}\,dy.$$

Es gilt die *Parsevalsche Gleichung*

$$(Ff,Fg) = (f,g),$$

und für alle $f,g\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ ist

$$\big(P(\lambda)f,g\big) = \int_{|z|<\sqrt{\lambda}} \hat{f}(z)\,\overline{\hat{g}(z)}\,dz. \qquad \square$$

8.6 Integraltransformationen

Für beschränkte Gebiete G haben wir in §6 bereits gesehen, daß eine große Klasse selbstadjungierter elliptischer Differentialoperatoren ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen besitzt und daß sich eine beliebige quadratintegrable Funktion danach entwickeln läßt. Insbesondere erhält man auf diese Weise auch die übliche Fourierreihe. Es sei nämlich $G := (-\pi,\pi)$ und

$$\begin{aligned} A \;:\; \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ u &\longmapsto -\mathrm{i}\,u' \end{aligned}$$

mit $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$ und

$$\mathcal{D}(A) := \big\{u\in\mathcal{H}_1(G) \;\big|\; u(-\pi) = u(\pi)\big\}.$$

Diese Definition ist möglich, weil aus dem Sobolevschen Einbettungssatz aus $u\in\mathcal{H}_1(G)$ die Aussage $u\in\mathcal{C}(\bar{G})$ folgt. Die Randwerte $u(0)$ und $u(\pi)$ existieren also. Die Aufgabe

$$A\,u = \lambda\,u$$

ist also eine Eigenwertaufgabe für den gewöhnlichen Differentialoperator erster Ordnung A. Man findet leicht, daß $\lambda_n = n$, $n\in\mathbb{Z}$, die Eigenwerte sind und

$$u_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

die Eigenfunktionen.

Für Außengebiete G erhält man entsprechend Integraltransformationen. Die Fouriertransformation als vielleicht wichtigstes Beispiel haben wir bereits kennengelernt. Solche Integraltransformationen spielen eine große Rolle in der Mathematischen Physik. Obwohl Integraltransformationen nicht Gegenstand dieser Vorlesung sind, sollen doch als Anwendung der Resultate dieses Kapitels vier Beispiele vorgestellt werden, nämlich die *Fouriersinustransformation*, die *Laplacetransformation*, die *Lebedevtransformation* und die *Entwicklung nach verzerrten ebenen Wellen.*

8.6.1 Die Fouriersinustransformation

Wie wir bereits gesehen haben, läßt sich die Fouriertransformation als Entwicklung nach verallgemeinerten Eigenfunktionen von $-\mathrm{i}\, d/dx$ oder d^2/dx^2 in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ deuten. Entsprechend erhält man die Fouriersinustransformation, wenn man mit

$$A := -\frac{d^2}{dx^2}$$

die Dirichletsche Randwertaufgabe in $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+)$ beschreibt, also

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^+) \;\middle|\; u'' \in \mathcal{H} \right\} \subset \mathcal{H}$$

wählt. Auch jetzt ist A eine selbstadjungierte Abbildung mit

$$\sigma(A) = C\sigma(A) = \mathbb{R},$$

und es ist

$$u_\lambda(x) := \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$

verallgemeinerte Eigenfunktion.

Es sei nun $\lambda = \mu \pm \mathrm{i}\,\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\sqrt{\lambda}$ stets mit $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \geq 0$. Für $\varepsilon \to 0$ gilt also $\sqrt{\mu + \mathrm{i}\,\varepsilon} \to \sqrt{\mu}$ und $\sqrt{\mu - \mathrm{i}\,\varepsilon} \to -\sqrt{\mu}$. Es sei $f \in \mathcal{L}^{2f}(\mathbb{R}^+)$. Dann ist für $\varepsilon > 0$

$$\big((A-\lambda)^{-1} f\big)(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \sin(\sqrt{\lambda} x) \int_x^\infty f(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda} x}\, dy + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda} x} \int_0^x f(y) \sin(\sqrt{\lambda} y)\, dy \right\}.$$

Das Prinzip von der Grenzabsorption liefert deshalb die ausstrahlende Lösung

$$u^+(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left\{ \sin(\sqrt{\mu} x) \int_x^\infty f(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\mu} y}\, dy + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\mu} x} \int_0^x f(y) \sin(\sqrt{\mu} y)\, dy \right\}$$

und die einstrahlende

$$u^-(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left\{ \sin(\sqrt{\mu} x) \int_x^\infty f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\mu} y}\, dy + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\mu} x} \int_x^\infty f(y) \sin(\sqrt{\mu} y)\, dy \right\}.$$

Es ist also

$$u^+(x) - u^-(x) = \frac{2\,\mathrm{i}}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu} x) \int_0^\infty f(y) \sin(\sqrt{\mu} y)\, dy$$

und damit

$$\big(P(\lambda) f, g\big) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu} x) \left\{ \int_0^\infty f(y) \sin(\sqrt{\mu} y)\, dy \right\} \overline{g(x)}\, dx\, d\mu.$$

Es sei nun mit $v(x,\lambda) := u_{\lambda^2}(x) = \sqrt{2/\pi} \sin(\lambda x)$

$$\begin{aligned} FS_0 \;:\; \mathcal{L}^{2f}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+), \\ f &\longmapsto \hat{f}(x) := \big(f, v(x,\cdot)\big). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\big(P(\lambda) f, g\big) = \int_0^{\sqrt{\lambda}} \hat{f}(t)\, \overline{\hat{g}(t)}\, dt,$$

und es folgt wieder die Parsevalsche Gleichung

$$(f,g) = (\hat{f}, \hat{g}).$$

Damit läßt sich FS_0 durch Abschließen zu

$$FS \;:\; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

fortsetzen. FS ist die Fouriersinustransformation.

8.6.2 Die Laplacetransformation

Es seien $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, $\rho(x) := \mathrm{e}^{-cx}$ eine Gewichtsfunktion und $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2_\rho(\mathbb{R})$. Es seien ferner

$$\langle f, g\rangle := (\rho f, \rho g) = \int_{\mathbb{R}} \rho^2 f \, \bar{g}$$
$$\langle f, g\rangle_1 := \langle f, g\rangle + \langle f', g'\rangle$$

und $\mathcal{H}_1$ die Vervollständigung der $\mathcal{C}_1$-Funktionen bezüglich $\langle f, g\rangle_1$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$A := -\mathrm{i}\frac{d}{dx} + \mathrm{i}\, c$$

mit $\mathcal{D}(A) := \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$. Aus der Aussage „stark gleich schwach" folgt wieder leicht die Selbstadjungiertheit von A

$$\sigma(A) = C\sigma(A) = \mathbb{R}.$$

Die verallgemeinerten Eigenfunktionen von A haben die Form

$$u_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{(c+\mathrm{i}\lambda)x}.$$

Es seien nun $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{H}$ und $u := (A-\lambda)^{-1} f$. Dann ist

$$u(x) = \begin{cases} \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{(c+\mathrm{i}\lambda)x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(y)\, \mathrm{e}^{-(c+\mathrm{i}\lambda)y}\, dy & \text{für } \operatorname{Im}\lambda > 0, \\ -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{(c+\mathrm{i}\lambda)x} \displaystyle\int_{x}^{\infty} f(y)\, \mathrm{e}^{-(c+\mathrm{i}\lambda)y}\, dy & \text{für } \operatorname{Im}\lambda < 0. \end{cases}$$

Aus dem Prinzip von der Grenzabsorption folgt deshalb für $f, g \in \mathcal{L}^{2f}(\mathbb{R})$.

$$\Big\langle \big[P(\lambda) - P(\lambda_0)\big] f, g\Big\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{(c+\mathrm{i}\mu)x}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-(c+\mathrm{i}\mu)y}\, dy\right)\overline{g(x)}\,\rho^2(x)\, dx\, d\mu =$$
$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \tilde{f}(\mu)\int_{\mathbb{R}} u_\mu(x)\,\overline{g(x)}\,\rho^2(x)\, dx\, d\mu = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \tilde{f}(\mu)\,\overline{\tilde{g}(\mu)}\, d\mu$$

mit

$$(L_0 f)(\mu) := \tilde{f}(\mu) := \langle f, u_\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-(c+\mathrm{i}\mu)y}\, dy = \big(F(\rho f)\big)(\mu).$$

Es ist wieder

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \langle f, g\rangle$$

und

$$L_0 \ : \ \mathcal{L}^{2f}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

eine Isometrie. Es sei

$$L \ : \ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

der Abschluß von L_0. Dann ist

$$L^* L = id$$

mit

$$(L^* g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(\mu)\, \mathrm{e}^{(c+\mathrm{i}\mu)x}\, d\mu = \mathrm{e}^{cx}\big(F^* g\big)(x).$$

Deshalb ist $\mathcal{N}(L^*) = \{o\}$ und L surjektiv. L ist die *Laplacetransformation.*

In der Literatur findet man oft eine andere Beschreibung der Laplacetransformation, nämlich

$$(\Lambda f)(p) := \sqrt{2\pi}\, \tilde{f}\big(\mathrm{i}(c-p)\big) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, \mathrm{e}^{-px} dx$$

mit der Inversionsformel

$$f(x) = \big(L^* \tilde{f}\big)(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} (\Lambda f)(p)\, \mathrm{e}^{xp}\, dp.$$

Für $c = 0$ wird aus der Laplacetransformation wieder die Fouriertransformation. Es sei betont, daß wir für positive c zum Beispiel exponentielles Wachsen von f für positive x zugelassen haben. Bezahlt haben wir dafür mit dem exponentiellen Fallen von f für negative x. In der Literatur wird das manchmal verschleiert, indem man $f(x) = 0$ für negative x fordert (Einseitige Laplacetransformation).

8.6.3 Die Lebedevtransformation

Die Lebedevtransformation tritt auf, wenn man das Dirichletproblem zum Δ-Operator in einem Keil

$$\Big\{(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; r, z \in \mathbb{R}^+, \varphi \in (0,\alpha)\Big\}$$

lösen möchte. Man wendet zunächst die Fouriersinustransformation bezüglich z an. Dann entwickelt man bezüglich φ in eine Fourierreihe und wird schließlich auf

$$A := -x^2\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - 1\right)$$

geführt. Wir wählen $\rho(x) := 1/\sqrt{x}$, $m(x) := x$,

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &:= (\rho f, \rho g) = \int_0^\infty \frac{1}{x} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,\\ \langle f, g\rangle_1 &:= \langle f, g\rangle + \langle mf, mg\rangle + \langle mf', mg'\rangle\end{aligned}$$

und definieren $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_1$ als Vervollständigung von $\mathring{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^+)$ bezüglich dieser Skalarprodukte. Dann wählen wir

$$\mathcal{D}(A) := \Big\{u \in \mathcal{H}_1 \;\Big|\; m^2(u'' - u) \in \mathcal{H}\Big\} \subset \mathcal{H}.$$

A ist wieder ein selbstadjungierter Operator mit

$$\sigma(A) = C\sigma(A) = \mathbb{R}_0^+.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+$ und $f \in \mathcal{H}$ ist

$$\big((A-\lambda)^{-1}f\big)(x) = I_{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}(x)\int_x^\infty \frac{f(y)}{y}\,K_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}(y)\,dy + K_{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}(x)\int_0^x \frac{f(y)}{y}\,I_{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}(y)\,dy.$$

Dabei sind I, K modifizierte Besselfunktionen. Man kann wieder die Spektralschar von A bestimmen und wird so auf die Lebedevtransformation geführt. Einzelheiten findet man in *Leis [1986], S. 91*. Es sei jedoch betont, daß die „Singularität" hier nicht im Unendlichen sondern im Nullpunkt liegt. Man muß also im Nullpunkt eine „Ausstrahlungsbedingung" stellen, nämlich

$$\frac{d}{dx}u(x) \pm \frac{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}{x}\,u(x) = \mathcal{O}(x) \quad \text{für } |x| \to 0.$$

8.6.4 Entwicklung nach verzerrten ebenen Wellen

Als letztes wollen wir die Fouriertransformation für beliebige Außengebiete G verallgemeinern. Dazu benutzen wir den Δ-Operator mit Dirichletscher Randbedingung in G. Es seien jetzt wieder $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^n)$ und $A_0 u = -\Delta u$. Dann ist mit $p \in \mathbb{R}^n$

$$v_0(x, p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}$$

eine verallgemeinerte Eigenfunktion zu A_0. Die zugehörige Entwicklung nach diesen Funktionen ist die Fouriertransformation, insbesondere ist

$$\big(P_0(\lambda)f\big)(x) = \int_{|p|<\sqrt{\lambda}} \hat{f}(p)\,v_0(x,p)\,dp.$$

Macht man zur Lösung der Wellengleichung einen Seperationsansatz nach stehenden Wellen der Form

$$u(t, x, p) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|p|t}\,w(x, p),$$

dann ist gerade $w = v_0$. Man nennt v_0 auch *ebene Welle* in der Richtung p. Die Ebenen $xp = const$ sind die Wellenfronten.

Es sei ferner A wie in §5 definiert, also

$$\mathcal{D}(A) := \Big\{u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\Big|\; \sum_{i,k} \partial_i\, a_{ik}\, \partial_k u \in \mathcal{H}\Big\}$$

mit $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$ und

$$Au := \sum_{i,k} \partial_i \, a_{ik} \, \partial_k u.$$

Eine Entwicklung nach verallgemeinerten Eigenfunktionen von A, die auf Calvin Wilcox, *1924, ([1975], S. 84 f.) zurückgeht, soll angegeben werden.

Dazu wählen wir ein $j \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$, $j \geq 0$, $j \,\big|\, B(0, r_a) = 0$ und $j(x) = 1$ für $|x| > r_a + 1$. Es sei wieder $p \in \mathbb{R}^3$. Dann kann man die Gleichungen

$$\tilde{A}^{\pm}_{|p|} \, w^{\pm}(\,\cdot\,, p) = \left(\Delta + |p|^2\right) \left(j \, v_0(\,\cdot\,, p)\right) \in \mathcal{L}^{2f}(G)$$

eindeutig lösen. Es seien für $x \in G$

$$v^{\pm}(x, p) := j(x) \, v_0(x, p) + w^{\pm}(x, p).$$

Dann ist formal

$$\left(A - |p|^2\right) v^{\pm}(\,\cdot\,, p) = 0,$$

und wir erhalten zwei Familien von *verzerrten ebenen Wellen*, nämlich eine ausstrahlende und eine einstrahlende. Sie hängen nicht von der speziellen Wahl von j ab, weil die Differenz zweier $v_1^{\pm} - v_2^{\pm}$ der homogenen Gleichung genügt und damit verschwindet.

Es ist nun möglich, sowohl bezüglich $v^+(x, p)$ als auch bezüglich $v^-(x, p)$ Integraltransformationen zu konstruieren. Nennen wir sie F^+ bzw. F^-. Dann gilt

$$F^{\pm} \;:\; \mathcal{L}^2(G) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\left(P(\lambda) f\right)(x) = \int_{|p| < \sqrt{\lambda}} \hat{f}^{\pm}(p) \, v^{\pm}(x, p) \, dp$$

mit

$$\hat{f}^{\pm}(p) := \left(F^{\pm} f\right)(p) := \left(f, v^{\pm}(\,\cdot\,, p)\right)_{\mathcal{L}^2(G)}.$$

Näheres findet man in den bereits zitierten Lecture Notes von *Wilcox [1975]* oder auch in *Leis [1986], S. 95.*

8.7 Außenraumaufgaben in den Räumen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}^*$

Bisher haben wir Außenraumaufgaben

$$(A - \lambda) u = f \tag{9}$$

in den gewichteten Hilberträumen $\mathcal{L}^2_\sigma$ und $\mathcal{L}^2_\tau$ studiert, also

$$A \;:\; \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{L}^2_\tau \longrightarrow \mathcal{L}^2_\sigma$$

betrachtet. Dabei waren

$$\sigma(x) := 1 + |x|, \qquad \tau(x) := \frac{1}{1 + |x|}$$

und

$$(f, g)_{\mathcal{L}^2_\sigma} := \int \sigma^2 f \, \bar{g}.$$

Diese Gewichtsfunktionen σ, τ waren zunächst in einem gewissen Bereich willkürlich gewählt. Allgemeiner definiert man in $\mathbb{R}^n$ für $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, (1 + |\cdot|)^s u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{\mathcal{L}^2_s} := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{2s} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx.$$

Für $t > 0$ gilt dann

$$\mathcal{L}^2_t(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^2_{-t}(\mathbb{R}^n),$$

und wir hätten die Außenraumaufgaben analog auch in den Paaren $\mathcal{L}_t^2$, $\mathcal{L}_{-t}^2$ mit $t > \frac{1}{2}$ lösen können. Für $0 < t < \frac{1}{2}$ ist das nicht möglich. Das sieht man schon am Verhalten der Grundlösung in $\mathbb{R}^3$ für $|x| \to \infty$.

Es fragt sich natürlich, ob man die Wahl des Parameters t optimieren kann. Dazu definiert man Räume $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$ und $\mathring{\mathcal{B}}^*$ mit

$$\mathcal{L}_t^2 \hookrightarrow \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{L}_{1/2}^2 \hookrightarrow \mathcal{L}^2 \hookrightarrow \mathcal{L}_{-1/2}^2 \hookrightarrow \mathring{\mathcal{B}}^* \hookrightarrow \mathcal{B}^* \hookrightarrow \mathcal{L}_{-t}^2 \tag{$*$}$$

für $t > \frac{1}{2}$ und zeigt die Lösbarkeit der Außenraumaufgaben in dem Paar $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$. Auch für Anwendungen ist das von Interesse, etwa bei Problemen in unbeschränkten Gebieten mit unbeschränktem Komplement (zum Beispiel in Halbräumen) oder bei der Schrödingergleichung.

Im folgenden wird kurz über diese Entwicklung berichtet. Dabei wird die Darstellung auf den Δ-Operator in $\mathbb{R}^3$ beschränkt.

Wir beginnen mit der Definition der Räume $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^n)$, die auf Shmuel Agmon, *1922, und Lars Hörmander, *1931, zurückgeht: Es seien $R_0 = 0$, $R_j = 2^{j-1}$ für $j \in \mathbb{N}$ und

$$\Omega_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; R_{j-1} < |x| < R_j \right\}.$$

Es sei ferner für $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{\mathcal{B}} := \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{R_j \int_{\Omega_j} |u|^2}.$$

Dann ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der mit dieser Norm ausgestattete Banachraum, also

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n);\ \|\cdot\|_{\mathcal{B}} \right\}^{\sim}.$$

Der Raum $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist separabel, aber nicht reflexiv. Sein Dualraum $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^n)$ besteht aus allen $u \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|u\|_{\mathcal{B}^*} := \sup_{j \in \mathbb{N}} \sqrt{\frac{1}{R_j} \int_{\Omega_j} |u|^2} < \infty.$$

Äquivalent dazu ist

$$\|u\|_{\mathcal{B}^*} := \sup_{R > 1} \sqrt{\frac{1}{R} \int_{|x|<R} \left|u(x)\right|^2 dx}.$$

Schließlich verwendet man noch den Teilraum $\mathring{\mathcal{B}}^*(\mathbb{R}^n)$ von $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\mathring{\mathcal{B}}^*(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{|x|<R} |u(x)|^2 \, dx = 0 \right\}.$$

Es ist $\left(\mathring{\mathcal{B}}^*(\mathbb{R}^n)\right)^* = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, und es gelten die in $(*)$ angegebenen Inklusionen sowie

$$\forall\, f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, g \in \mathcal{B}^*(\mathbb{R}^n) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \left|fg\right| \le \|f\|_{\mathcal{B}} \cdot \|g\|_{\mathcal{B}^*}.$$

Der Raum $\mathring{\mathcal{B}}^*(\mathbb{R}^n)$ dient zur Charakterisierung der Ausstrahlung. Näheres findet man in *Hörmander [1983], S. 225f.* Für das folgende interessant ist besonders auch *Agmon [1990], S. 39–76.*

Es sei nun A der Δ-Operator in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, also

$$\mathcal{D}(A) := \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3),$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ und $k := \sqrt{\lambda}$. Dann existiert für

$$k \in \mathbb{C}^+ := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im} z > 0 \right\}$$

die Resolvente

$$\begin{aligned} G \;:\; \mathbb{C}^+ &\longrightarrow \mathcal{CL}(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)), \\ k &\longmapsto (A - k^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Die Abbildung $G(k)$ ist ein Integraloperator mit dem Kern $G(k;x,y)$, also

$$\big(G(k)f\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\, G(k;x,y)\, dy$$

mit

$$G(k;x,y) := \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{|x-y|}.$$

Sie ist analytisch in $\mathbb{C}^+$, kann aber als $\mathcal{L}^2$-Resolvente in keinen Punkt der reellen Achse hinein stetig fortgesetzt werden.

Um dennoch zu einer Lösung von Gleichung (9) auch im Fall $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ zu gelangen, betrachtet man G als operatorwertige Abbildung mit Werten in $\mathcal{CL}\big(\mathcal{L}^2_t(\mathbb{R}^3),\, \mathcal{L}^2_{-t}(\mathbb{R}^3)\big)$ mit $t > \frac{1}{2}$. So sind wir in §8.5 vorgegangen. Lösungen in diesem Raum sind im allgemeinen noch nicht eindeutig; Eindeutigkeit wird vielmehr erst durch eine Ausstrahlungsbedingung erreicht. Sie lautet für den Δ-Operator

$$x_0 \nabla u - \mathrm{i}\, k\, u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \tag{10}$$

und wird nun zu

$$x_0 \nabla u - \mathrm{i}\, k\, u \in \mathring{\mathcal{B}}^*(\mathbb{R}^3) \tag{11}$$

verallgemeinert. Hat f finiten Träger, dann überzeugt man sich leicht anhand der expliziten Darstellung, daß beide Formulierungen äquivalent sind.

Wichtig für das Folgende ist nun

Satz 8.7.1: *Es seien $f \in \mathcal{B}$ und $k \in \overline{\mathbb{C}^+}\backslash\{0\}$. Dann gilt für alle $R > 0$*

$$\sqrt{\frac{1}{R}\int_{|x|<R} \big|G(k)f\big|^2(x)\, dx} \le \frac{4}{|k|}\, \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Diese Abschätzung wird in *Agmon [1990], S. 44f* bewiesen. Mit

$$u(k) := (A - k^2)^{-1} f$$

folgt also insbesondere

$$\big\|u(k)\big\|_{\mathcal{B}^*} \le \frac{4}{|k|}\, \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Diese Abschätzung verallgemeinert das in Satz 8.5.1 bewiesene Resultat, nämlich

$$\big\|u(k)\big\|_{\tau} \le \gamma\, \|f\|_{\sigma},$$

welches im Falle des Δ-Operators für alle $k \in K \Subset \mathbb{C}^+\backslash\{0\}$ gilt.

Zum Beweis des Prinzips von der Grenzabsorption benötigt man aber außerdem eine Aussage über die eindeutige Lösbarkeit. Dazu verallgemeinert man auch die stärkere Abschätzung in Satz 8.5.1 und zeigt in $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

$$x_0\, \nabla u - \mathrm{i}\, k\, u \in \mathring{\mathcal{B}}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}). \tag{12}$$

Das ist in dieser Formulierung die Ausstrahlungsbedingung.

Genügt u dieser Bedingung, und ist für $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$(\Delta + k^2)u = 0,$$

dann folgt mit $\zeta_r \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, $\zeta_r = 1$ in $B(0,r)$,

$$0 = k^2\big(\zeta_r u, u\big) - \big(\nabla \zeta_r u, \nabla u\big) = \underbrace{\int_{|x|<r} \cdots}_{\in \mathbb{R}} + \int_{|x|>r} \cdots\,,$$

also

$$0 = \mathrm{Im} \int_{|x|=r} u\, \frac{\partial}{\partial n} \bar{u}.$$

Es ist deshalb

$$|x_0 \nabla u - i\,k\,u|^2 = |x_0 \nabla u|^2 + k^2 |u|^2,$$

also

$$u \in \mathring{\mathcal{B}}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}).$$

Damit verschwindet u. Andernfalls würde nämlich aus der Rellichschen Abschätzung (vgl. §8.1)

$$\exists\, p > 0 \quad \exists\, r_0 > r_a \quad \forall\, r > r_0 \qquad \int_{r_a < |x| < r} |u(x)|^2\, dx \geq p\, r$$

die Aussage

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_{|x| < r} |u(x)|^2\, dx \geq p > 0,$$

also $u \notin \mathring{\mathcal{B}}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, folgen.

Damit läßt sich das Prinzip von der Grenzabsorption verallgemeinern, nämlich

Satz 8.7.2: *Es sei $K \Subset \overline{\mathbb{C}^+} \backslash \{0\}$. Dann besitzt die Abbildung*

$$\begin{aligned} G \ : \ K \cap \mathbb{C}^+ \backslash \{0\} &\longrightarrow \mathcal{CL}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}), \mathcal{B}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})\big), \\ k &\longmapsto (A - k^2)^{-1} \end{aligned}$$

eine schwach-stern-stetige Fortsetzung auf $K \cap \overline{\mathbb{C}^+} \backslash \{0\}$.

Für $\mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ existiert also die Abbildung $\bar{G}(\mu) \in \mathcal{CL}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}), \mathcal{B}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})\big)$ mit

$$\forall\, f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \qquad \big(\bar{G}(\mu) f\big) g = \lim_{\substack{k \to \mu \\ \operatorname{Im} k > 0}} \big(G(k) f\big) g.$$

Der schwach-stern-Grenzwert $u := \bar{G}(\mu) f \in \mathcal{B}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ löst die Differentialgleichung

$$(A - \mu^2) u = f$$

und genügt der Ausstrahlungsbedingung

$$\big(x_0 \nabla - \mathrm{i}\, \mu\big) u \in \mathring{\mathcal{B}}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}).$$

Für $\mu > 0$ erhält man ausstrahlende Lösungen nach Sommerfeld und für $\mu < 0$ einstrahlende.

Diese Aussagen lassen sich auf Außenraumaufgaben und variable Koeffizienten übertragen.

9 Spezielle Gleichungen der Mathematischen Physik

In §5.5 wurden bereits spezielle ortsabhängige Differentialoperatoren aus der Mathematischen Physik vorgestellt. Wir wollen jetzt die entsprechenden zeitabhängigen Gleichungen diskutieren. In §7 ist das für die Wellengleichung bereits geschehen. Deshalb beginnen wir mit

9.1 Die Gleichungen der Linearen Akustik

Wie in §5.5.2 seien $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $\rho_{ik} = \rho_{ki}$, κ reellwertige, beschränkte und meßbare Funktionen mit

$$\exists\, \rho_1 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad \forall x \in G \qquad \sum_{i,k} \xi_i\, \rho_{ik}(x)\, \xi_k \geq \rho_1\, |\xi|^2,$$

$$\exists\, \kappa_1 > 0 \quad \forall x \in G \qquad \kappa(x) \geq \kappa_1.$$

Es seien ferner $\rho = (\rho_{ik})$,

$$M = \begin{pmatrix} \rho & o \\ o & \kappa \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{H} := \left(\mathcal{L}^2(G)\right)^3 \times \left(\mathcal{L}^2(G)\right)$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(U, V) := \int_G U^{tr}\, M\, \bar{V}.$$

Mit $\mathcal{D}(A) := \mathring{\mathcal{D}}(G) \times \mathcal{H}_1(G) \subset \mathcal{H}$ sei schließlich

$$A := -\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} o & \mathrm{grad} \\ \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist A ein selbstadjungierter Operator mit

$$\mathcal{R}(A) = \rho^{-1} \nabla \mathcal{H}_1(G) \times \kappa^{-1}\, \mathrm{div}\, \mathring{\mathcal{D}}(G),$$

$$\mathcal{N}(A) = \mathring{\mathcal{D}}_0(G) \times \begin{cases} \mathrm{span}(1) & \text{für beschränktes G,} \\ \{o\} & \text{für unbeschränktes G.} \end{cases}$$

Es ist

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A),$$

und es sei P der Projektor auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Die zugehörige zeitabhängige Gleichung lautet dann

$$\partial_t U + \mathrm{i}\, A\, U = 0 \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$U(0) =: U^0 \in \mathcal{H}. \tag{2}$$

Dabei soll $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$ eine schwache Lösung von Gl. (1), (2) sein. Es soll also

$$\forall\, \Phi \in \mathring{\mathcal{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \qquad \int_{\mathbb{R}^+ \times G} M\, U(-\partial_t \bar{\Phi} + \mathrm{i}\, A \bar{\Phi}) \; - \left(U^0, \Phi(0, \cdot)\right)_{\mathcal{H}} = 0$$

gelten.

Die Größe

$$E(t) := ||U(t)||^2_{\mathcal{H}}$$

repräsentiert die Energie. Sie ist konstant. Das folgt analog Satz 7.2.2 aus

$$||U(t)||^2 = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}At}\, U^0, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}At}\, U^0\right) = ||U^0||^2.$$

Die schwache Lösung U ist also eine Lösung mit endlicher konstanter Energie.

Weil A selbstadjungiert ist, folgt für $\varepsilon \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\|(A+\mathrm{i}\,\varepsilon)U\|^2 = \|AU\|^2 + \varepsilon^2\|U\|^2$$

und

$$\mathcal{R}(A+\mathrm{i}\,\varepsilon) = \overline{\mathcal{R}(A+\mathrm{i}\,\varepsilon)} = \mathcal{H}.$$

Es gilt

Satz 9.1.1: *Die Anfangsrandwertaufgabe (1), (2) ist schwach eindeutig lösbar.*

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus der Energieerhaltung, die Existenz aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen, nämlich

$$U(t) = e^{-\mathrm{i}At}U^0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}\lambda t}\, dP(\lambda)U^0.$$

Man vergleiche den entsprechenden Nachweis bei der Wellengleichung. □

9.1.1 Der Ganzraumfall

In diesem Abschnitt behandeln wir den Ganzraumfall und geben zunächst eine Fourierdarstellung für die Spektralschar des zugrundeliegenden Operators. Es folgt die Lösung der zeitabhängigen Gleichung und insbesondere die Konstruktion der Grundlösung. All das ist wichtig, um bei der Bestimmung der Zeitasymptotik in §10 einen Referenzfall zu haben.

Im folgenden seien also $G = \mathbb{R}^3$, $\rho, \kappa \in \mathbb{R}^+$ und $\rho_{ik} := \rho\,\delta_{ik}$. Es sei $\mathcal{H}_0 := \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^3 \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(U,V)_{\mathcal{H}_0} := \int_{\mathbb{R}^3} U^{tr}\, M\, \bar{V}.$$

Dabei ist

$$M := \begin{pmatrix} \rho\, id & o \\ o & \kappa \end{pmatrix}.$$

Wie in §8.3 sei

$$\begin{aligned} A_0 \;:\; \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{H}_0 &\longrightarrow \mathcal{H}_0, \\ U &\longmapsto M^{-1}D\,U \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{D}(A_0) := \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{H}_0$$

und dem Differentiationssymbol

$$D := -\mathrm{i}\begin{pmatrix} o & \mathrm{grad} \\ \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}.$$

Verwenden wir die Fouriertransformation, dann ist

$$(\hat{A}_0\hat{U})(p) = M^{-1}B(p)\hat{U}(p)$$

mit

$$B(p) := \begin{pmatrix} o & p \\ p^{tr} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die für das Folgende notwendigen Rechnungen haben wir für den Fall $M = id$ schon in §8.3 ausgeführt. Die Matrix $\hat{A}_0(p) = M^{-1}B(p)$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_0(p) = 0$ und $\lambda_\pm(p) = \pm|p|/\sqrt{\kappa\rho}$. Dabei ist λ_0 ein doppelter Eigenwert. Es seien Q_0, Q_+ und Q_- wieder die orthogonalen Projektoren auf die Eigenräume. Dann ist

$$Q_+(p) := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_0\, p_0^{tr} & \sqrt{\kappa/\rho}\, p_0 \\ \sqrt{\rho/\kappa}\, p_0^{tr} & 1 \end{pmatrix},$$

$Q_-(p) = Q_+(-p)$ und

$$Q_0(p) = id - Q_+(p) - Q_-(p) = id - \begin{pmatrix} p_0\, p_0^{tr} & o \\ o & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_0 \times p_0 \times & o \\ o & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten auch

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0(p) &= \frac{|p|}{\sqrt{\kappa\rho}}\Big\{Q_+(p) - Q_-(p)\Big\},\\
\hat{A}_0^2(p) &= \frac{|p|^2}{\kappa\rho}\Big\{Q_+(p) + Q_-(p)\Big\},\\
\hat{A}_0^3(p) &= \frac{|p|^2}{\kappa\rho}\hat{A}_0(p),\\
Q_\pm(p)\hat{A}_0(p) &= \hat{A}_0(p)Q_\pm(p) = \pm\frac{|p|}{\sqrt{\kappa\rho}}Q_\pm(p),\\
Q_0(p)\hat{A}_0(p) &= \hat{A}_0(p)Q_0(p) = O.
\end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir für festes $p \in \mathbb{R}^3$

$$\hat{P}_0(\lambda;p) = H\Big(\lambda + \frac{|p|}{\sqrt{\kappa\rho}}\Big)Q_-(p) + H(\lambda)Q_0(p) + H\Big(\lambda - \frac{|p|}{\sqrt{\kappa\rho}}\Big)Q_+(p).$$

Daraus folgt für die *Spektralschar* $\hat{P}_0(\lambda)$ von

$$\hat{A}_0 \ : \ \mathcal{D}(\hat{A}_0) \subset \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0$$

die Darstellung

$$\hat{P}_0(\lambda) = H\Big(\lambda + \frac{|\cdot|}{\sqrt{\kappa\rho}}\Big)Q_- + H(\lambda)Q_0 + H\Big(\lambda - \frac{|\cdot|}{\sqrt{\kappa\rho}}\Big)Q_+.$$

Es sei schließlich $P_0(\lambda)$ die Spektralschar von A_0. Dann erhalten wir

$$P_0(\lambda) = F^*\hat{P}_0(\lambda)F = \Pi(\lambda) + \Pi_0\, H(\lambda)$$

mit $\Pi_0 := F^*Q_0F$ und

$$\big(\Pi(\lambda)U\big)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\Big\{\int_{|p|>-\lambda\sqrt{\kappa\rho}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}\,(Q_-\hat{U})(p)\,dp + \int_{|p|<\lambda\sqrt{\kappa\rho}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}\,(Q_+\hat{U})(p)\,dp\Big\}.$$

Wie in §8.3 kann man auch eine *Grundlösung* ausrechnen. Man findet jetzt

$$\hat{G}_\lambda = \kappa\rho\left(\hat{A}_0 + \frac{1}{\lambda}\hat{A}_0^2\right)\hat{g}_\lambda - \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\,\frac{id}{\lambda}$$

oder

$$G_\lambda = \kappa\rho\left(A_0 + \frac{1}{\lambda}A_0^2\right)g_\lambda - \frac{\delta}{\lambda}id.$$

Wir wollen nun die *zeitabhängige Gleichung* diskutieren. Aus Gl. (1) wird durch Fouriertransformation

$$\partial_t\hat{U} + \mathrm{i}\,\hat{A}_0\hat{U} = 0. \tag{3}$$

Hinzu tritt die Anfangsbedingung

$$\hat{U}(0) = \hat{U}^0 \in \mathcal{H}_0. \tag{4}$$

Diese Gleichungen werden durch

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{A}_0t}\hat{U}^0 &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\,d\hat{P}_0(\lambda)\hat{U}^0\\
&= Q_0\hat{U}^0 + \Big\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\cdot|\tau}Q_- + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\cdot|\tau}Q_+\Big\}\,\hat{U}^0\\
&=: \hat{U}_0 + \hat{U}_1(t)
\end{aligned}$$

mit $\tau := t/\sqrt{\kappa\rho}$ gelöst. Daraus folgt

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A_0t}U^0 = U_0 + U_1(t).$$

Dabei ist

$$U_0 := \Pi_0 U^0 \quad \text{und} \quad U_1(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\, d\,\Pi(\lambda) U^0.$$

Der Anteil U_0 hängt natürlich nicht von der Zeit ab. Es gilt $\hat{U}_0(p) = Q_0(p)\hat{U}^0(p)$ und

$$\hat{U}_1(t,p) = \begin{pmatrix} p_0\, p_0^{tr} \cos(|p|\tau) & -\mathrm{i}\sqrt{\kappa/\rho}\, p_0 \sin(|p|\tau) \\ -\mathrm{i}\sqrt{\rho/\kappa}\, p_0^{tr} \sin(|p|\tau) & \cos(|p|\tau) \end{pmatrix} \hat{U}^0(p).$$

Als letztes wollen wir eine *Grundlösung* für unsere Gleichung angeben, lösen also

$$\left\{ \partial_t + M^{-1} \begin{pmatrix} o & \operatorname{grad} \\ \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix} \right\} S(t,x) \stackrel{!}{=} \delta(t)\delta(x)\, id.$$

Benutzen wir wieder die Fouriertransformation, dann haben wir Integrale der Form

$$\begin{aligned}
F^*(p_0 \times p_0 \times id) &= -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\, F^*\Big(\frac{id}{|p|^2}\Big), \\
F^*(p_0 p_0^{tr} \cos(|p|\tau)) &= -\operatorname{grad}\operatorname{div}\, F^*\Big(\frac{\cos(|p|\tau)}{|p|^2}\Big), \\
F^*(p_0 \sin(|p|\tau)) &= -\mathrm{i}\ \operatorname{grad}\, F^*\Big(\frac{\sin(|p|\tau)}{|p|}\Big) = \mathrm{i}\ \operatorname{grad}\partial_\tau\, F^*\Big(\frac{\cos(|p|\tau)}{|p|^2}\Big), \\
F^*(p_0^{tr} \sin(|p|\tau)) &= -\mathrm{i}\ \operatorname{div}\, F^*\Big(\frac{\sin(|p|\tau)}{|p|}\Big) = \mathrm{i}\ \operatorname{div}\partial_\tau\, F^*\Big(\frac{\cos(|p|\tau)}{|p|^2}\Big), \\
F^*(\cos(|p|\tau)) &= -\partial_\tau^2\, F^*\Big(\frac{\cos(|p|\tau)}{|p|^2}\Big)
\end{aligned}$$

auszurechnen. Dazu verwendet man

$$\int_{S^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xz}\, dz = 4\pi \frac{\sin|x|}{|x|}$$

und

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(sx)\cos(tx)}{x}\, dx = H(s-t)$$

für $s,t \geq 0$. Man vergleiche Lemma 7.5.1 und Beispiel 7.2.4. Es folgt

$$F^*\Big(\frac{\cos(|p|\tau)}{|p|^2}\Big) = \sqrt{\pi/2}\, \frac{H(|x|-\tau)}{|x|}$$

und $S(t,x) = S_0(x) + S_1(t,x)$ mit

$$S_0(x) = (\Pi_0 \delta\, id)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \begin{pmatrix} \operatorname{rot}\operatorname{rot} & o \\ o & 0 \end{pmatrix} F^*\left(\frac{id}{|p|^2}\right) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \operatorname{rot}\operatorname{rot} & o \\ o & 0 \end{pmatrix} \frac{id}{|x|}$$

und

$$S_1(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\, d\,\Pi(\lambda)\delta\, id = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -\operatorname{grad}\operatorname{div} & \sqrt{\kappa/\rho}\, \operatorname{grad}\partial_\tau \\ \sqrt{\rho/\kappa}\, \operatorname{div}\partial_\tau & -\partial_\tau^2 \end{pmatrix} \frac{H(|x|-\tau)}{|x|} id.$$

Es sei P_0 der Projektor auf $\overline{\mathcal{R}(A_0)}$. Wegen

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} + \Delta$$

und

$$-\Delta \frac{1}{4\pi|x|} = \delta(x)$$

folgt dann aus dieser Darstellung

$$\operatorname{supp}\,(S_1(t,\,\cdot\,)P_0)(x) \subset \partial\big\{\langle t,x\rangle \;\big|\; t>0 \text{ und } \sqrt{\kappa\rho}\,|x| < t\big\}.$$

In $\overline{\mathcal{R}(A_0)}$ gilt also das *Huygenssche Prinzip*.

9.2 Die Maxwellschen Gleichungen

Als nächstes behandeln wir die Maxwellschen Gleichungen, und zwar völlig analog zu den Gleichungen der Linearen Akustik.

In $\mathbb{R}^3$ lauten die Maxwellschen Gleichungen

$$\partial_t U + \mathrm{i}\, A\, U = 0 \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung $U(0) = U^0$. Dabei ist, wie in §5.5.2,

$$\mathcal{H} := \left(\mathcal{L}^2(G)\right)^3 \times \left(\mathcal{L}^2(G)\right)^3,$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(U, V) := \int_G U^{tr} M\, \bar{V},$$

$U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$ und

$$A = -\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} o & -\operatorname{rot} \\ \operatorname{rot} & o \end{pmatrix}$$

etwa mit

$$\mathcal{D}(A) = \mathring{\mathcal{R}}(G) \times \mathcal{R}(G) \subset \mathcal{H}$$

und

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon & o \\ o & \mu \end{pmatrix}$$

sowie $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$, $\mu = (\mu_{ij})$. Erinnert sei auch an

$$\mathcal{N}(A) = \mathring{\mathcal{R}}_0(G) \times \mathcal{R}_0(G), \qquad \mathcal{R}(A) = \left(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{R}(G)\right) \times \left(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathring{\mathcal{R}}(G)\right),$$

sowie an die Zerlegungen von $\mathcal{H}$ in Satz 5.5.8.

Es sei wieder

$$E(t) := \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Dann ist

$$\operatorname{Re}\,(\partial_t U, U) = -\operatorname{Re}\, \mathrm{i}(AU, U) = 0,$$

also

$$E(t) = E(0) = \|U^0\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Damit ist auch die Anfangsrandwertaufgabe zu den Maxwellschen Gleichungen im schwachen Sinne eindeutig lösbar. Es ist

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}At}\, U^0.$$

9.2.1 Der Ganzraumfall

In diesem Abschnitt wollen wir wieder den Ganzraumfall explizit durchrechnen. Es seien

$$\mathcal{H}_0 := \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^3 \times \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^3,$$

$\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}^+$,

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon\, id & o \\ o & \mu\, id \end{pmatrix}$$

und

$$A_0 := -\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} o & -\operatorname{rot} \\ \operatorname{rot} & o \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathcal{D}(A_0) := \mathcal{R} \times \mathcal{R} \subset \mathcal{H}_0.$$

Es seien ferner

$$\mathcal{D}(\hat{A}_0) := \left\{ \hat{U} \in \mathcal{H}_0 \;\middle|\; U \in \mathcal{D}(A_0) \right\} \subset \mathcal{H}_0$$

und
$$(\hat{A}_0\hat{U})(p) := M^{-1}\begin{pmatrix} o & -p\times \\ p\times & o \end{pmatrix}\hat{U}(p).$$
Dann folgt durch Fouriertransformation
$$\partial_t \hat{U} + \mathrm{i}\,\hat{A}_0\hat{U} = 0$$
mit $\hat{U}(0) = \hat{U}^0 \in \mathcal{H}_0$.

Die *Spektralschar* von A_0 berechnen wir wieder in zwei Schritten. Es sei zunächst $p \in \mathbb{R}^3$ fest. Dann betrachten wir die Matrix
$$\hat{A}_0(p) \quad : \quad \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$$
und erhalten wegen $p\times p\times = p\,p^{tr} - |p|^2$
$$\varepsilon\,\mu\,\hat{A}_0^2(p) = |p|^2\,id - \begin{pmatrix} p\,p^{tr} & o \\ o & p\,p^{tr} \end{pmatrix},$$
also
$$\hat{A}_0(p)\Big(\hat{A}_0^2(p) - \frac{|p|^2}{\varepsilon\mu}id\Big) = 0.$$
Mithin besitzt $\hat{A}_0(p)$ die Eigenwerte $\lambda_0 = 0$ und
$$\lambda_\pm(p) := \pm\frac{|p|}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$
Alle Eigenwerte haben doppelte Vielfachheit. Für λ_0 ist das klar, weil
$$V_{0,1}(p) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\begin{pmatrix} p_0 \\ o \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_{0,2}(p) := \frac{1}{\sqrt{\mu}}\begin{pmatrix} o \\ p_0 \end{pmatrix}$$
linear unabhängige Eigenvektoren sind. Um zu zeigen, daß auch die $\lambda_\pm(p)$ doppelt sind, wählen wir ein $a_1(p)$ mit
$$p^{tr}a_1(p) = 0 \quad \text{und} \quad |a_1(p)| = 1.$$
Es sei
$$a_2(p) := a_1(p) \times p_0.$$
Dann sind
$$V_{\pm,i}(p) := \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mu}}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\mu}\,a_i(p) \\ \sqrt{\varepsilon}\,p_0 \times a_i(p) \end{pmatrix}$$
für $i = 1, 2$ linear unabhängige Eigenvektoren.

Mithin besitzt $\hat{A}_0(p)$ keine weiteren Eigenwerte. Es seien wieder Q_0, Q_+ und Q_- die orthogonalen Projektoren auf die entsprechenden Eigenräume. Es ist
$$Q_0(p) = \begin{pmatrix} p_0\,p_0^{tr} & o \\ o & p_0\,p_0^{tr} \end{pmatrix},$$
$$Q_\pm(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -p_0\times p_0\times & \mp\sqrt{\mu/\varepsilon}\,p_0\times \\ \pm\sqrt{\varepsilon/\mu}\,p_0\times & -p_0\times p_0\times \end{pmatrix},$$
und man bestätigt leicht
$$\begin{aligned}
Q_-(p) &= Q_+(-p),\\
\hat{A}_0(p) &= \frac{|p|}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Big\{Q_+(p) - Q_-(p)\Big\},\\
\hat{A}_0^2(p) &= \frac{|p|^2}{\varepsilon\mu}\Big\{Q_+(p) + Q_-(p)\Big\},\\
\hat{A}_0^3(p) &= \frac{|p|^2}{\varepsilon\mu}\hat{A}_0(p),\\
Q_\pm(p)\hat{A}_0(p) &= \hat{A}_0(p)Q_\pm(p) = \pm\frac{|p|}{\sqrt{\varepsilon\mu}}Q_\pm(p),\\
Q_0(p)\hat{A}_0(p) &= \hat{A}_0(p)Q_0(p) = O.
\end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir für festes $p \in \mathbb{R}^3$

$$\hat{P}_0(\lambda; p) = H\Big(\lambda + \frac{|p|}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Big)Q_-(p) + H(\lambda)Q_0(p) + H\Big(\lambda - \frac{|p|}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Big)Q_+(p).$$

Im nächsten Schritt betrachten wir

$$\hat{A}_0 \; : \; \mathcal{D}(\hat{A}_0) \subset \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0.$$

Diese Abbildung besitzt keine von Null verschiedenen Eigenwerte. Zu $q_0 \in S^2$ und $V \in \mathcal{H}_0$ sind jedoch für $\lambda \neq 0$

$$\hat{U}_\lambda(p, q_0) := Q_+(q_0)V\delta\,(p - \lambda\sqrt{\varepsilon\mu}\, q_0)\,,$$

also

$$U_\lambda(x, q_0) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}}{\sqrt{2\pi}^3} Q_+(q_0)V,$$

verallgemeinerte Eigenvektoren.

Es sei nun

$$\hat{P}_0(\lambda) := H\Big(\lambda + \frac{|\cdot|}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Big)Q_- + H(\lambda)Q_0 + H\Big(\lambda - \frac{|\cdot|}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Big)Q_+.$$

Dann ist $\hat{P}_0(\lambda)$ die Spektralschar zu $\hat{A}_0$, und es folgt

$$P_0(\lambda) = F^*\hat{P}_0(\lambda)F = \Pi(\lambda) + \Pi_0\, H(\lambda)$$

mit $\Pi_0 := F^*Q_0F$ und

$$(\Pi(\lambda)U)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\Big\{\int_{|p|>-\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}(Q_-\hat{U})(p)\,dp + \int_{|p|<\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}(Q_+\hat{U})(p)\,dp\Big\}.$$

Die Lösung der zeitabhängigen Gleichung erhalten wir dann wieder aus

$$\hat{U}(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A_0t}\hat{U}^0 = \hat{U}_0 + \hat{U}_1(t)$$

mit

$$\hat{U}_0 := Q_0\hat{U}^0$$

und $(\tau := t/\sqrt{\varepsilon\mu})$

$$\hat{U}_1(t) := \Big\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\cdot|\tau}Q_- + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\cdot|\tau}Q_+\Big\}\,\hat{U}^0.$$

Es ist

$$\hat{U}_0(p) = \begin{pmatrix} p_0\, p_0^{tr} & o \\ o & p_0\, p_0^{tr} \end{pmatrix}\hat{U}^0(p)$$

und

$$\hat{U}_1(t,p) = \begin{pmatrix} -p_0 \times p_0 \times \cos(\tau|p|) & \mathrm{i}\sqrt{\mu/\varepsilon}\, p_0 \times \sin(\tau|p|) \\ -\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon/\mu}\, p_0 \times \sin(\tau|p|) & -p_0 \times p_0 \times \cos(\tau|p|) \end{pmatrix}\hat{U}^0(p).$$

Als letztes wollen wir noch *Grundlösungen* angeben. Für die zeitunabhängige Gleichung erhält man aus

$$(\hat{A}_0 - \lambda)\hat{G}_\lambda \stackrel{!}{=} \frac{id}{\sqrt{2\pi}^3}$$

analog zu §8.3

$$\hat{G}_\lambda = \frac{\varepsilon\mu}{\sqrt{2\pi}^3}\left\{\Big(B + \frac{1}{\lambda}B^2\Big)\frac{1}{|\cdot|^2 - \lambda^2\varepsilon\mu} - \frac{id}{\lambda}\right\}$$

mit

$$B(p) := \begin{pmatrix} \varepsilon & o \\ o & \mu \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} o & -p\,\times \\ p\,\times & o \end{pmatrix},$$

und es folgt

$$G_\lambda = \varepsilon\mu\Big(A_0 + \frac{1}{\lambda}A_0^2\Big)g_\lambda - \frac{\delta}{\lambda}id = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}\operatorname{grad}\operatorname{div} & \mathrm{i}\,\mu\operatorname{rot} \\ -\mathrm{i}\,\varepsilon\operatorname{rot} & \frac{1}{\lambda}\operatorname{grad}\operatorname{div}\end{pmatrix} + \varepsilon\,\mu\,\lambda\,id\right\}g_\lambda$$

mit

$$g_\lambda(x) := \begin{cases} \gamma_\lambda^+(x) & \text{für } \operatorname{Im}\lambda > 0, \\ \gamma_\lambda^-(x) & \text{für } \operatorname{Im}\lambda < 0 \end{cases}$$

und

$$\gamma_\lambda^\pm(x) := \frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}|x|}}{4\pi|x|}.$$

Insbesondere folgt hieraus für große $|x|$

$$G_\lambda(x) = \pm\sqrt{\varepsilon\mu}\,B(x_0)G_\lambda(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big).$$

Mithin ist

$$\sqrt{\varepsilon/\mu}\,x_0 \times U_1(x) \mp U_2(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big) \tag{6}$$

die *Aus-* bzw. *Einstrahlungsbedingung.*

Im zeitabhängigen Fall erhält man die *Grundlösung* $S(t,x)$ als Lösung von

$$\left\{\partial_t + M^{-1}\begin{pmatrix} o & -\operatorname{rot} \\ \operatorname{rot} & o\end{pmatrix}\right\}S(t,x) \overset{!}{=} \delta(t)\delta(x)id,$$

und wir erhalten aus unserer Lösungsformel

$$S(t,x) = S_0(x) + S_1(t,x)$$

mit

$$S_0(x) = \big(\Pi_0\delta\,id\big)(x) = -\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{1}{4\pi|x|}id$$

und $(\tau = t/\sqrt{\varepsilon\mu})$

$$S_1(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\,d\big(\Pi(\lambda)\delta\,id\big)(x) = \begin{pmatrix}\operatorname{rot}\operatorname{rot} & -\sqrt{\mu/\varepsilon}\operatorname{rot}\partial_\tau \\ \sqrt{\varepsilon/\mu}\operatorname{rot}\partial_\tau & \operatorname{rot}\operatorname{rot}\end{pmatrix}\frac{H(|x|-\tau)}{4\pi|x|}id.$$

Damit ist wieder

$$\operatorname{supp}S(t,x) = \partial\big\{\langle t,x\rangle \;\big|\; t>0 \text{ und } \sqrt{\varepsilon\mu}\,|x| < t\big\}$$

in $\overline{\mathcal{R}(A_0)}$, und es gilt dort das *Huygenssche Prinzip.*

9.3 Lineare Elastizitätsgleichungen

In $\mathbb{R}^3$ lauten die zeitabhängigen linearen Elastizitätsgleichungen

$$\partial_t^2 U + A\,U = 0 \tag{7}$$

mit den Anfangsbedingungen $U(0) = U^0$ und $\partial_t U(0) = U^1$. Dabei ist, wie in §5.5.3,

$$\mathcal{H} = \big(\mathcal{L}^2(G)\big)^3,$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(U,V) := \int_G U^{tr}M\,\bar{V},$$

$U \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_0^+,\mathcal{H}),\;\; U^0, U^1 \in \mathcal{H}$ und

$$A = -M^{-1}D^{tr}S\,D$$

mit
$$\mathcal{D}(A)=\left\{U\in\mathring{\mathcal{E}}(G)\;\middle|\;D^{tr}S\,D\,U\in\mathcal{H}\right\}$$
(Dirichletsche Randwertaufgabe). Die positiv definite Matrix M der Massendichte wählen wir zur Vereinfachung als $M=id$. Das Skalarprodukt von $\mathcal{E}$ war von der Graphennorm von D erzeugt, also
$$(U,V)_{\mathcal{E}}=(U,V)+(DU,DV).$$

Wie bei der Wellengleichung zeigt man, daß diese Anfangsrandwertaufgabe schwach eindeutig gelöst werden kann. Sind $U^0\in\mathcal{D}(A^{1/2})$, $U^1\in\mathcal{H}$ und $U\in\mathcal{C}\big(\mathbb{R}_0^+,\mathcal{D}(A^{1/2})\big)\cap\mathcal{C}_1(\mathbb{R}_0^+,\mathcal{H})$, dann nennt man U *schwache Lösung mit endlicher Energie*. In diesem Falle repräsentiert
$$E(t):=\left\|(\partial_tU)(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2+\left\|(A^{1/2}U)(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2=\left\|(\partial_tU)(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2+\left(DU,\,SDU\right)_{\mathcal{L}^2}$$
die Energie. Für solche Lösungen ist $E(t)$ konstant, also
$$E(t)=E(0)=\|U^1\|^2+\|A^{1/2}U^0\|^2.$$

9.3.1 Der Ganzraumfall

In diesem Abschnitt wollen wir wieder einen Ganzraumfall explizit durchrechnen, und zwar für $M=id$ und homogenes isotropes Medium. Es seien also
$$\mathcal{H}_0:=\left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^3.$$
Außerdem wählen wir
$$P:=\begin{pmatrix}p_1&0&0\\0&p_2&0\\0&0&p_3\\0&p_3&p_2\\p_3&0&p_1\\p_2&p_1&0\end{pmatrix}.$$
Dann ist
$$\hat{D}=\mathrm{i}\,P$$
und
$$P^{tr}S\,P=\mu\,|p|^2+(\mu+\kappa)\,p\,p^{tr}=\nu\,|p|^2+(\mu+\kappa)\,p\times p\times=\mu\,p\times p\times+\nu\,p\,p^{tr}$$
mit den *Lamékonstanten* $\mu>0$ und κ. Dabei ist $2\mu+3\kappa>0$ und $\nu:=2\mu+\kappa>0$. Es folgt auch
$$\left(P^{tr}S\,P\right)^2=|p|^2\left\{\mu^2|p|^2+(\mu+\kappa)(3\mu+\kappa)p\,p^{tr}\right\}.$$

Aus unserer Differentialgleichung wird deshalb durch Fouriertransformation
$$\partial_t^2\hat{U}+\hat{A}_0\hat{U}=0$$
mit $\hat{U}(0)=\hat{U}^0$, $\partial_t\hat{U}(0)=\hat{U}^1$ und
$$\hat{A}_0=P^{tr}S\,P.$$

Halten wir zunächst p fest und betrachten
$$\hat{A}_0(p)\ :\ \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3.$$
Dann folgt
$$\hat{A}_0^2(p)-(3\mu+\kappa)\,|p|^2\,\hat{A}_0(p)+\mu\,(2\mu+\kappa)\,|p|^4=0$$
oder
$$\left\{\hat{A}_0(p)-\mu|p|^2\right\}\left\{\hat{A}_0(p)-\nu|p|^2\right\}=0.$$
Dabei ist
$$\hat{A}_0(p)-\mu|p|^2=(\mu+\kappa)\,p\,p^{tr},$$
$$\hat{A}_0(p)-\nu|p|^2=(\mu+\kappa)\,p\times p\times.$$

Der Eigenwert $\lambda_1(p) := \mu|p|^2$ besitzt deshalb doppelte Vielfachheit, und $\lambda_2(p) := \nu|p|^2$ ist einfach. Das charakteristische Polynom lautet

$$\left\{\hat{A}_0(p) - \mu|p|^2\right\}^2 \left\{\hat{A}_0(p) - \nu|p|^2\right\} = 0.$$

Die entsprechenden Projektoren auf die Eigenräume sind

$$P_1(p) := id - p_0\, p_0^{tr} = -p_0 \times p_0 \times$$

$$P_2(p) := p_0\, p_0^{tr}.$$

Ferner gilt

$$\hat{A}_0(p) - \mu|p|^2 = (\mu + \kappa)\, |p|^2\, P_2(p),$$

$$\hat{A}_0(p) - \nu|p|^2 = -(\mu + \kappa)\, |p|^2\, P_1(p)$$

und

$$\hat{P}_0(\lambda; p) = H\big(\lambda - \lambda_1(p)\big)\, P_1(p) + H\big(\lambda - \lambda_2(p)\big)\, P_2(p)$$

Betrachten wir nun

$$\hat{A}_0 \;:\; \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0.$$

Diese Abbildung besitzt keine Eigenwerte, weil eine Eigenfunktion den Träger

$$\left\{p \;\middle|\; |p|^2 = \lambda/\mu\right\} \quad \text{oder} \quad \left\{p \;\middle|\; |p|^2 = \lambda/\nu\right\}$$

mit Lebesgueschem Maß Null haben würde. Die *Spektralschar* von $\hat{A}_0$ lautet

$$\begin{aligned} \hat{P}_0(\lambda) \;:\; \mathcal{H}_0 &\longrightarrow \mathcal{H}_0, \\ U &\longmapsto \hat{P}_0(\lambda;\cdot\,)\, U(\cdot\,), \end{aligned}$$

und wegen

$$\left(\hat{P}_0(\lambda)U, U\right) = \sum_{i=1}^{2} \left(H(\lambda - \lambda_i) P_i\, U, U\right)$$

ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}$.

Als nächstes bestimmen wir eine *Grundlösung* von $A_0 - \lambda$. Es sei

$$(A_0 - \lambda)\, G_\lambda = \delta\, id$$

oder

$$(\hat{A}_0 - \lambda)\, \hat{G}_\lambda = \frac{id}{\sqrt{2\pi}^3}.$$

Dann folgt für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+$

$$\hat{G} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\infty \frac{d\,\hat{P}_0(s)}{s - \lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \left\{\frac{P_1}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{P_2}{\lambda_2 - \lambda}\right\}.$$

Es seien

$$\gamma_1(\lambda; x) := \frac{1}{4\pi|x|} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda/\mu}\,|x|} - 1\right) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} - \frac{\lambda}{8\pi\mu}|x| + \cdots$$

und $\gamma_2(\lambda; x)$ analog definiert. Dann ist

$$\hat{\gamma}_1(\lambda; p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\left(\frac{1}{|p|^2 - \frac{\lambda}{\mu}} - \frac{1}{|p|^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\, \frac{\lambda}{|p|^2\,(\lambda_1(p) - \lambda)}.$$

Es folgt

$$\hat{G}_\lambda(p) = \frac{|p|^2}{\lambda} \left\{P_1(p)\, \hat{\gamma}_1(\lambda; p) + P_2(p)\, \hat{\gamma}_2(\lambda; p)\right\}$$

und

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\Big\{\mathrm{rot\,rot}\ \gamma_1(\lambda;x) - \mathrm{grad\,div}\ \gamma_2(\lambda;x)\Big\}\,id.$$

Wir möchten das asymptotische Verhalten von $G_\lambda(x)$ für $x \to \infty$ angeben und eine *Ausstrahlungsbedingung* formulieren. Es ist

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\nabla\mathcal{H}_1} \oplus \mathcal{D}_0 = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{D}_0$$

und

$$U \in \mathcal{R}_0 \iff P_1\hat{U} = 0$$

$$U \in \mathcal{D}_0 \iff P_2\hat{U} = 0.$$

Man bezeichnet auch mit

$$\mathcal{H}_0^p := \overline{\nabla\mathcal{H}_1} = \mathcal{R}_0$$

die „Potentialfelder“ und mit

$$\mathcal{H}_0^s := \mathcal{D}_0$$

die „Solenoidalfelder“. Diese Zerlegung spielt eine wichtige Rolle. Es ist also

$$U = U^p + U^s \quad \text{mit } U^p := F^*P_2\hat{U} \text{ und } U^s := F^*P_1\hat{U}.$$

Entsprechend zerlegt man auch die Grundlösung G_λ in

$$\hat{G}_\lambda^p := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\,\frac{P_2}{\lambda_2-\lambda}, \qquad G_\lambda^p = -\frac{1}{\lambda}\,\nabla\nabla^{tr}\gamma_2(\lambda;\cdot\,)\,id$$

und

$$\hat{G}_\lambda^s := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\,\frac{P_1}{\lambda_1-\lambda}, \qquad G_\lambda^s = \frac{1}{\lambda}\,\nabla\times\nabla\times\gamma_1(\lambda;\cdot\,)\,id.$$

Beide Anteile haben verschiedenes asymptotisches Verhalten, und man erhält deshalb in $\mathcal{H}_0^p$ und $\mathcal{H}_0^s$ verschiedene Ausstrahlungsbedingungen.

Es seien $k_1 := \sqrt{\lambda/\mu}$ und $k_2 := \sqrt{\lambda/\nu}$. Dann lauten diese Aus- (bzw. Ein-)strahlungsbedingungen

$$\nabla U^p(x) = \pm\,\mathrm{i}\,k_2\,x_0U^p(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \tag{8}$$

$$\nabla U^s(x) = \pm\,\mathrm{i}\,k_1\,x_0U^s(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \tag{9}$$

für $|x| \to \infty$, und zwar gleichmäßig bezüglich x_0. Insbesondere ist also

$$x_0 \times U^p = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right),$$

$$x_0^{tr}\,U^s = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

Weitere Einzelheiten, auch für die folgenden Rechnungen, findet man in *Leis [1986], S. 210f.*

Wir wollen kurz die *zeitabhängige Gleichung* betrachten. Gelöst wird sie durch

$$U(t) = \cos\left(\sqrt{A_0}t\right)U^0 + \frac{\sin(\sqrt{A_0}t)}{\sqrt{A_0}}\,U^1 = \frac{\partial}{\partial t}I(t)\,U^0 + I(t)\,U^1$$

mit

$$I(t) := \frac{\sin(\sqrt{A_0}t)}{\sqrt{A_0}}.$$

Es seien V ein beliebiger fester Vektor, $U^0 = 0$, $U^1 = V\,\delta$ und

$$\hat{U}(t) := \hat{I}(t)\,\hat{U}^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\,\hat{I}(t)V.$$

Dann ist

$$\hat{I}(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\,t)}{\sqrt{\lambda}}\, d\,\hat{P}_0(\lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda_1}\,t)}{\sqrt{\lambda_1}} P_1 + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_2}\,t)}{\sqrt{\lambda_2}} P_2.$$

und wir erhalten

$$\big(I(t)U^1\big)(x) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla\times\nabla\times\frac{1}{|x|}\,J\big(\sqrt{\mu}\,t,|x|\big) - \frac{1}{\sqrt{\nu}}\nabla\nabla^{tr}\frac{1}{|x|}\,J\big(\sqrt{\nu}\,t,|x|\big)\right\}V.$$

Dabei ist

$$J(\sigma t,|x|) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(|x|r)\sin(\sigma t r)}{r^2}\,dr = \begin{cases} |x| & \text{für } |x| < \sigma\,t, \\ \sigma\,t & \text{für } |x| > \sigma\,t, \end{cases}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial|x|} J\big(\sigma\,t,|x|\big) &= H\big(\sigma\,t - |x|\big), \\ \frac{\partial}{\partial t} J\big(\sigma\,t,|x|\big) &= \sigma H\big(|x| - \sigma\,t\big). \end{aligned}$$

Für $\mu \le \nu$ wird daraus

$$4\pi\big(I(t)U^1\big)(x) = \begin{cases} O & \text{für } |x| < \sqrt{\mu}\,t, \\ t\,\nabla\times\nabla\times\dfrac{1}{|x|}V & \text{für } \sqrt{\mu}\,t < |x| < \sqrt{\nu}\,t, \\ O & \text{für } \sqrt{\nu}\,t < |x|. \end{cases}$$

Das ist das *Huygenssche Prinzip* für Signale, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit ausbreiten. Im Falle $\mu = \nu$ erhalten wir die alte Formulierung für die Wellengleichung zurück.

Auch für anisotrope Medien kann man Grundlösungen und Singularitätenfunktionen angeben. Das wollen wir in dieser Vorlesung nicht weiter verfolgen.

9.4 Die Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir ganz kurz auf die Wärmeleitungsgleichung eingehen. Es sei wieder

$$A = \sum_{i,k} \partial_i\, a_{ik}\, \partial_k + a$$

ein elliptischer Differentialoperator, etwa mit Dirichletscher Randbedingung, also

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\middle|\; \partial_i\, a_{ik}\, \partial_k u \in \mathcal{H} \right\} \subset \mathcal{H}$$

mit $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$, $G \subset \mathbb{R}^3$, und $u^0 \in \mathcal{H}$. Dann heißt $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$ schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u + A\,u = 0 \tag{10}$$

mit $u(0) = u^0$, wenn für alle $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}\times G)$

$$\int_{\mathbb{R}^+\times G} u\,(-\partial_t\varphi + A\,\varphi) = \big(u^0, \varphi(0,\cdot)\big)$$

ist. Wie bei der Wellengleichung zeigt man, daß diese Anfangsrandwertaufgabe eindeutig in der Form

$$u(t) = \mathrm{e}^{-At}u^0 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dP(\lambda)u^0$$

gelöst werden kann. Es ist klar, daß diese Lösung für beliebiges $u^0 \in \mathcal{H}$ bei negativem t nicht existiert.

Die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung haben noch viele Eigenschaften mit den Lösungen elliptischer Gleichungen gemeinsam. Signale besitzen unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, und man kann auch *Maximumprinzipien* beweisen.

Beispiel 9.4.1: *Es sei $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wie in Abbildung 9.1 skizziert mit $\partial B = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 offen, $u \in \mathcal{C}(\bar{B})$, $u_t, u_{xx} \in \mathcal{C}(B \cup \Gamma_1)$ und $u_t = u_{xx}$ in B. Dann nimmt u auf Γ_2 das Maximum und das Minimum an.*

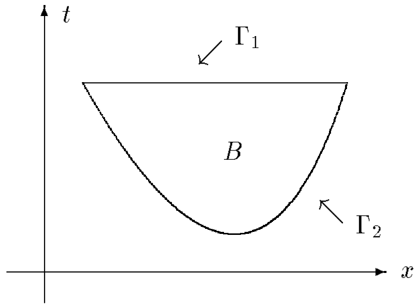

Abbildung 9.1: Ein Maximumprinzip.

Wir zeigen die Behauptung für das Maximum. Es sei mit $\varepsilon > 0$

$$v(t,x) := u(t,x) - \varepsilon\, t.$$

Dann ist auch v in $\bar{B}$ stetig, nimmt also in $(t_0, x_0) \in \bar{B}$ das Maximum an. Wir wollen $(t_0, x_0) \in \Gamma_2$ zeigen und führen diesen Nachweis indirekt. Es sei also $(t_0, x_0) \in B \cup \Gamma_1$. Dann ist $v_{xx}(t_0, x_0) \le 0$ und damit auch $u_{xx}(t_0, x_0) \le 0$. Aus der Differentialgleichung folgt

$$v_t(t_0, x_0) = u_t(t_0, x_0) - \varepsilon = u_{xx}(t_0, x_0) - \varepsilon \le -\varepsilon,$$

und wegen der speziellen Gestalt des Gebietes B gibt es ein $h > 0$ mit

$$I := \Big\{(t,x) \;\Big|\; t_0 - h \le t \le t_0,\ x = x_0\Big\} \subset B \cup \Gamma_1$$

und

$$v_t\big|I \le -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist aber

$$v(t_0, x_0) = v(t_0 - h, x_0) + \int_{t_0 - h}^{t_0} v_t(t, x_0)\, dt \le v(t_0 - h, x_0) - \frac{\varepsilon h}{2} < v(t_0 - h, x_0)$$

im Widerspruch zur Annahme. Weil ε beliebig klein gewählt werden kann, muß auch die Lösung u auf Γ_2 das Maximum annehmen. □

Wir betrachten noch kurz den *Ganzraumfall*, diskutieren also in $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{mit } u(0) = u^0.$$

Diese Gleichung wird durch

$$u(t, \cdot\,) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dP_0(\lambda) u^0 = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|p|^2 t}\, v_0(\,\cdot\,, p)\, \hat{u}^0(p)\, dp$$

gelöst; dabei ist

$$v_0(x,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}.$$

Speziell mit $u^0(x) = \delta(x)$ folgt daraus für die *Grundlösung*

$$\hat{S}(t,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}}\, \mathrm{e}^{-|p|^2 t}$$

und

$$S(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}^{\,n}}.$$

Im Falle der Wärmeleitungsgleichung ist also

$$\operatorname{supp} u = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n,$$

und wir haben keine endliche Signalgeschwindigkeit.

9.5 Lineare Thermoelastizitätsgleichungen

Interessant ist auch die Behandlung von Gleichungen oder Systemen, in denen eine Kopplung zwischen einem hyperbolischen und einem parabolischen Term auftritt. Ein typisches Beispiel sind die Thermoelastizitätsgleichungen.

Zur Formulierung knüpfen wir an §9.3 an und verwenden dieselben Bezeichnungen wie dort. Es seien außerdem $T = T(t,x)$ die Temperatur, $\theta := T - T_0$ die Temperaturdifferenz, c die spezifische Wärme, $L = (l_{ij})$ der Wärmeleitungstensor und $G = (g_{ij})$ der Spannungs-Temperatur Tensor. Er beschreibt die Kopplung zwischen linearer Elastizitätstheorie und Thermodynamik.

All diese Koeffizienten seien wieder reellwertige, beschränkte und meßbare Funktionen in einem Gebiet G des $\mathbb{R}^3$, es seien $l_{ij} = l_{ji}$ und $g_{ij} = g_{ji}$ sowie

$$\exists\, l_1 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad \forall\, x \in G \qquad \xi_i\, l_{ij}(x)\xi_j \geq l_1 |\xi|^2,$$

$$\exists\, c_1 > 0 \quad \forall\, x \in G \qquad c(x) \geq c_1 .$$

Bei Außengebieten fordern wir außerdem die Existenz positiver Konstanten l_0, c_0 und eines $g_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall\, x, |x| > r_a, \qquad l_{ij}(x) = l_0\, \delta_{i,j}, \quad g_{ij}(x) = g_0\, \delta_{ij}, \quad c(x) = c_0.$$

Im Unterschied zur Elastizitätstheorie verwenden wir nun das *Duhamel-Neumannsche Prinzip* (im Gegensatz zum Hookeschen) und setzen

$$\tau_{jk} = C_{jkmn}\, U_{mn} - g_{jk}\, \theta.$$

Außerdem fügen wir eine Wärmeleitungsgleichung hinzu. In der Sommerfeldschen Notation sei

$$\Gamma^{tr} := \big(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6\big) := \big(g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{23}, g_{31}, g_{12}\big).$$

Dann lautet unser System

$$M\, \partial_t^2 U - D^{tr} S D\, U + D^{tr}\Gamma\, \theta = F,$$

$$c\, \partial_t \theta - \nabla^{tr} L \nabla\, \theta + T_0\, \Gamma^{tr} D\, \partial_t U = f$$

mit

$$U(0) = U^0, \;\; \partial_t U(0) = U^1, \;\; \theta(0) = \theta^0.$$

Hinzu kommen, wie üblich, Randbedingungen. Für $\Gamma = 0$ zerfallen diese Gleichungen.

In dieser Vorlesung können wir nicht ausführlich auf die Thermoelastizitätsgleichungen eingehen; wir wollen uns vielmehr mit ihrer Hilbertraumformulierung begnügen. Im übrigen sei auf *Leis [1986], S. 231f* und die Literatur verwiesen.

Wir fragen im folgenden nach Lösungen mit endlicher „totaler Energie", nämlich mit

$$E(t) := \Big\{ \big(DU, SDU\big) + \big(\partial_t U, M\, \partial_t U\big) + \frac{1}{T_0}\big(\theta, c\,\theta\big) \Big\}(t) < \infty,$$

und schreiben die Gleichungen als System erster Ordnung:

$$V := \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} SD\,U \\ \partial_t U \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Der Vektor V besitzt also zehn Komponenten. Es sei vereinfacht $T_0 = 1$. Dann folgt

$$Q\, \partial_t V + N\, V = H$$

mit

$$Q := \begin{pmatrix} S^{-1} & o & o \\ o & M & o \\ o & o & c \end{pmatrix}, \qquad N := \begin{pmatrix} o & -D^{tr} & o \\ -D^{tr} & o & D^{tr}\Gamma \\ o & \Gamma^{tr} D & -\nabla^{tr} L \nabla \end{pmatrix}$$

und $H^{tr} := (O, F, f)$. Es sei

$$\mathcal{H} := \big(\mathcal{L}^2(G)\big)^{10}$$

mit dem gewichteten Skalarprodukt
$$(V,W)_{\mathcal{H}} := (V, QW)_{\mathcal{L}^2}.$$
Dann ist
$$E(t) = \|V(t)\|^2_{\mathcal{H}}.$$
Wir formulieren die Dirichletsche Randwertaufgabe und wählen dazu
$$\mathcal{D}(A) := \Big\{ U \in \mathcal{H} \ \Big| \ U_2 \in \mathring{\mathcal{H}}_1,\ U_3 \in \mathring{\mathcal{H}}_1,\ NU \in \mathcal{H} \Big\}$$
sowie
$$A\,U := Q^{-1} N\,U.$$
Es sei schließlich
$$V^0 := \begin{pmatrix} SDU^0 \\ U^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$
Dann suchen wir ein $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$, welches die Gleichung
$$\partial_t V + A\,V = O \tag{11}$$
mit $V(0) = V^0$ schwach löst.

Zum Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit diskutieren wir zuerst das Spektrum von A. Aus
$$(AU, U) = (\nabla U_3, L\nabla U_3) + 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\big\{(U_1, DU_2) + (\Gamma^{tr} D\,U_2, U_3)\big\}$$
folgt
$$\mathrm{Re}\,(AU, U) = (\nabla U_3, L\nabla U_3) \geq l_1\,|U_3|_1^2 \geq 0, \tag{12}$$
und es ist
$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{D}_0^{\mathcal{E}} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O}$$
mit
$$\mathcal{D}_0^{\mathcal{E}} := \Big\{ U \in \big(\mathcal{L}^2(G)\big)^6 \ \Big| \ D^{tr} U = 0 \Big\}.$$
Außerdem ist $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ und $A^* = Q^{-1} N^*$ mit
$$N^* = \begin{pmatrix} o & D & o \\ D^{tr} & o & -D^{tr}\Gamma \\ o & -\Gamma^{tr} D & -\nabla^{tr} L \nabla \end{pmatrix}.$$
Damit ist auch $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A)$, und es folgt
$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A)$$
mit
$$\mathcal{R}(A) = SD\,\mathring{\mathcal{H}}_1(G) \times \big(\mathcal{L}^2(G)\big)^3 \times \mathcal{L}^2(G).$$
Die Räume $\overline{\mathcal{R}(A)}$ und $\mathcal{N}(A)$ reduzieren A; zur Diskussion von Gl. (11) kann man sich deshalb auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$ beschränken. Es gilt
$$\big\{ \lambda \in \mathbb{C} \ \big| \ \mathrm{Re}\,\lambda < 0 \big\} \subset \rho(A).$$
Es sei nämlich $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ und $(A-\lambda)U = 0$. Dann folgt aus Gl. (12) die Aussage $U = 0$. Dasselbe Argument liefert auch $\mathcal{N}(A^* - \bar{\lambda}) = \mathcal{O}$. Mithin existiert $(A-\lambda)^{-1}$, und es ist
$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A-\lambda)}.$$
Es sei $(A-\lambda)U = F$. Dann folgt, wiederum aus Gl. (12),
$$-\mathrm{Re}\,\lambda\,\|U\|^2 \leq \big|(U,F)\big|$$
oder
$$\big\|(A-\lambda)^{-1}\big\| \leq -\frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}.$$

Die Halbgruppentheorie (vgl. FA, Beispiel 10.1.24) liefert deshalb die Existenz der stark stetigen Kontraktionshalbgruppe

$$\mathrm{e}^{-At} \;:\; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

für $t \geq 0$ und mit $\|\mathrm{e}^{-At}\| \leq 1$. Für $V^0 \in \mathcal{D}(A)$ ist e^{-At} differenzierbar, mithin löst

$$V(t) := \mathrm{e}^{-At}\, V^0$$

die Differentialgleichung.

An dieser Stelle soll die Diskussion der Thermoelastizitätsgleichungen abgebrochen werden. Es sei nur noch bemerkt, daß das Spektrum von A aus drei Komponenten besteht, nämlich aus der imaginären Achse (von den Elastizitätsgleichungen herrührend), aus der positiven reellen Achse (von der Wärmeleitungsgleichung herrührend) und aus einem dritten Anteil mit positivem Realteil, welcher die Kopplung enthält. Vgl. hierzu die Abbildungen in *Leis [1986], S. 242.*

9.6 Die Plattengleichung

Wie in §5.5.4 sei

$$\begin{aligned} A \;:\; \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ u &\longmapsto \operatorname{div} D^{tr} S\, D \operatorname{grad} u \end{aligned}$$

mit Dirichletscher Randbedingung und $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(G)$. Wählen wir wieder die Massendichte als Eins, dann lautet die zugehörige zeitabhängige Gleichung

$$\partial_t^2 u + A\, u = o \tag{13}$$

mit den Anfangsbedingungen $u(0) = u^0$ und $(\partial_t u)(0) = u^1$. Schwache Lösungen werden wie üblich definiert, und man erhält sie wieder in der Form

$$u(t) = \partial_t I(t) u^0 + I(t) u^1$$

mit

$$I(t) := \frac{\sin(\sqrt{A}\, t)}{\sqrt{A}}.$$

Auch der *Ganzraumfall* läßt sich wie bei den vorangegangenen Gleichungen vollständig durchrechnen. Für isotrope Medien findet man

$$P_0(\lambda) = F^* H(\lambda - \lambda_1) id$$

mit

$$\lambda_1(p) = \nu\, |p|^4.$$

Für eine *Grundlösung* G_λ mit

$$(A_0 - \lambda) G_\lambda \stackrel{!}{=} \delta$$

folgt

$$\hat{G}_\lambda(p) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}^3} \frac{1}{\sqrt{\lambda\nu}} \Big(\frac{1}{|p|^2 - \sqrt{\lambda/\nu}} - \frac{1}{|p|^2 + \sqrt{\lambda/\nu}} \Big).$$

Verwendet man wieder

$$g_\lambda(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}|x|}}{4\pi|x|}, \qquad \hat{g}_\lambda(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{1}{|p|^2 - \lambda},$$

dann ist

$$\hat{G}_\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\nu}} \left(\hat{g}_{\sqrt{\lambda/\nu}} - \hat{g}_{-\sqrt{\lambda/\nu}} \right),$$

also

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{8\pi|x|} \frac{1}{\sqrt{\lambda\nu}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt[4]{\lambda/\nu}\,|x|} - \mathrm{e}^{-\sqrt[4]{\lambda/\nu}\,|x|} \right).$$

Die Lösungen enthalten also einen schwingenden Anteil und einen exponentiell abklingenden. Die Aus- bzw. Einstrahlungsbedingung lautet

$$x_0 \nabla u \mp \mathrm{i}\, \sqrt{\lambda/\nu}\, u \in \mathcal{H}_0.$$

Im isotropen Ganzraumfall ist

$$\big(I_0(t)\delta\big)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp} \frac{\sin(p^2 t)}{p^2}\, dp =: \frac{1}{4\pi|x|}\, F\Big(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}\Big).$$

Dabei ist

$$F(y) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y (\cos s^2 - \sin s^2)\, ds$$

ein „Fresnel-Integral". Weiteres findet man in *Leis [1986], S. 220f.*

9.7 Eine Schrödingergleichung

Als letztes behandeln wir eine zeitabhängige Schrödingergleichung. Wir wählen die Bezeichnungen wie in §5.5.1, also mit $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(G)$ und $q > 0$

$$\begin{aligned} A \ : \ \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ u &\longmapsto (-\Delta + V)\, u \end{aligned}$$

mit

$$(Vu)(x) := -\frac{q}{|x|} u(x)$$

und

$$\mathcal{D}(A) := \Big\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \ \Big| \ \Delta u \in \mathcal{H} \Big\}.$$

Dabei sollen wir im folgenden $G = \mathbb{R}^3$ annehmen, also

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3).$$

Es ist A dann ein selbstadjungierter Operator, und mit

$$B(u,v) := (\nabla u, \nabla v) + (Vu, v)$$

folgt leicht

$$B(u,u) \ge \frac{1}{2}|u|_1^2 - 2\,q^2\,\|u\|^2$$

sowie

$$\sigma(A) \subset [-q^2, \infty).$$

In §6.6 haben wir bereits bewiesen, daß A abzählbar unendlich viele negative Punkteigenwerte mit dem Häufungspunkt Null besitzt. Es ist

$$C\sigma(A) = \mathbb{R}_0^+.$$

Letzteres zeigt man wie in Satz 8.1.2. Es sei nämlich für $\sigma > 0$

$$u_\sigma(x) := \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-\sigma|x|}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,|x|}}{|x|}$$

mit $\varphi \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^+)$, $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi|U(0) = 0$ und $\varphi|U(\infty) = 1$. Dann folgt für $\sigma \to 0$

$$\big\|(\Delta + \lambda)u_\sigma\big\| \le c < \infty,$$

aber $\|u_\sigma\| \to \infty$. Nun ist

$$\big|(Vu_\sigma)(x)\big| \le \frac{c}{|x|^2},$$

also

$$\|Vu_\sigma\| \le c < \infty.$$

Deshalb ist auch

$$\big\|(A - \lambda)u_\sigma\big\| \le c < \infty,$$

aber $\|u_\sigma\| \to \infty$. Mithin existiert $(A-\lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{R}^+$, ist jedoch unbeschränkt. Der Nullpunkt selbst gehört ebenfalls zu $C\sigma(A)$.

Wir definieren nun eine schwache Lösung $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung als Lösung von

$$\partial_t u + \mathrm{i}\, Au = o \tag{14}$$

mit der Anfangsbedingung $u(0) = u^0 \in \mathcal{H}$. Diese Gleichung ist eindeutig lösbar. Das folgt wie bei der Wellengleichung aus

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, At} u^0 = \int_{-q^2}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\lambda t}\, dP(\lambda) u^0.$$

Auch bei der Schrödingergleichung kann man durch Fouriertransformation explizit Lösungen bestimmen. Für den Deltaoperator A_0 im Ganzraumfall haben wir bereits

$$P_0(\lambda) f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{|p|<\sqrt{\lambda}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\cdot\, p)} \hat{f}(p)\, dp$$

und die *Grundlösung*

$$g_\lambda(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}|x|}}{4\pi|x|}$$

gefunden. Es sei nun

$$(A - \lambda) h_\lambda = \delta.$$

Dann erhalten wir für $r > 0$

$$\left(\frac{1}{r^2}\partial r^2 \partial + \frac{q}{r} + \lambda\right) h_\lambda(r) = 0.$$

Im Falle $\lambda = 0$ findet man

$$h_0(r) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{q}{r}}\, Y_1(2\sqrt{qr}).$$

Dabei ist Y_1 eine *Neumannsche Funktion*. Im Falle $\lambda \neq 0$ kann man substituieren und erhält die *Whittakersche Differentialgleichung*.

Es sei schließlich

$$(\partial_t - \mathrm{i}\,\Delta) S(t,x) \stackrel{!}{=} \delta(t)\,\delta(x).$$

Dann ist

$$\hat{S}(t,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|p|^2}$$

und

$$S(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{i}\, t}^3}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}|x|^2/4t}.$$

10 Das asymptotische Verhalten der Lösungen für große Werte der Zeitvariablen

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir uns primär mit der Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beschäftigt. Daneben spielt natürlich auch die Diskussion qualitativer Eigenschaften der erhaltenen Lösungen eine große Rolle. Hierbei kann man zunächst an Regularitätsaussagen denken. Wir haben sie gelegentlich gestreift. Bei den zeitabhängigen Gleichungen aus der Mathematischen Physik ist es jedoch besonders interessant und wichtig, die Abhängigkeit der Lösung von der Zeitvariablen t genauer zu studieren.

Dabei stellt sich zunächst die Frage, für welche (positive oder negative) Werte von t die Lösung überhaupt existiert. Das ist besonders bei nichtlinearen Gleichungen wichtig. Man definiert hier die „Lebensdauer" T einer Lösung und meint damit, daß eine Lösung, die zur Zeit $t = 0$ beginnt, im Intervall $[0, T)$ als genügend reguläre Lösung existiert. Erinnert sei in diesem Zusammenhang an das Auftreten von Stoßwellen. Die Lösung der Straßenverkehrsgleichung in §1.2.2 hat die Lebensdauer $T = 1$. Im zweiten Teil dieses Kapitels wollen wir auf solche Fragen eingehen und insbesondere für eine Klasse von Wellengleichungen zeigen, daß bei kleinen Anfangsdaten globale glatte Lösungen existieren, das heißt, daß dann $T = \infty$ ist. Es zeigt sich dabei, daß man zum Beweis solcher Aussagen den linearen Fall recht gut beherrschen muß.

Bei linearen Gleichungen ist es normalerweise leicht zu zeigen, daß die Lösungen in $\mathbb{R}_0^+$ oder sogar in ganz $\mathbb{R}$ „leben". Hier interessiert man sich besonders für das asymptotische Verhalten der Lösungen, sagen wir für $t \to \infty$. In der Streutheorie möchte man diese Asymptotik mit der Asymptotik eines bekannten besonders einfachen Falles vergleichen, mit dem „Referenzfall". Als Referenzfall wählt man gerne den Ganzraumfall, also den Fall eines homogenen isotropen Mediums überall in $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Im letzten Kapitel haben wir diesen Ganzraumfall für einige Gleichungen bereits durchgerechnet. Es sind aber auch kompliziertere Referenzfälle von großem Interesse, zum Beispiel Halb- oder Viertelräume, Wellenleiter oder anisotrope Medien.

In der Streutheorie wird dann die Abweichung vom Referenzfall durch „Streu-" oder „Wellenoperatoren" beschrieben.

Auf solche Fragen soll im ersten Teil dieses Kapitels etwas eingegangen werden. Zur Vereinfachung wird dabei exemplarisch im allgemeinen die Wellengleichung zugrunde gelegt.

10.1 Lineare Streutheorie

In diesem Abschnitt wollen wir also lineare Phänomene untersuchen. Wir betrachten zunächst die Wellengleichung und beginnen mit den sogenannten „$\mathcal{L}^p - \mathcal{L}^q$ Abschätzungen".

10.1.1 $\mathcal{L}^p - \mathcal{L}^q$ Abschätzungen

In $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ sei $y(t)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\Box\, y = 0 \quad \text{mit } y(0) = o \text{ und } \partial_t y(0) = y^1, \tag{1}$$

also

$$y(t) = W(t)\, y^1 \quad \text{mit } W(t) = \frac{\sin(\sqrt{-\Delta}t)}{\sqrt{-\Delta}}.$$

Wir schreiben diese Gleichung auch als System und verwenden

$$u := Dy \quad \text{mit } D := \begin{pmatrix} \partial_t \\ \nabla \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\partial_t u = \begin{pmatrix} 0 & \nabla^{tr} \\ \nabla & o \end{pmatrix} u \quad \text{mit } u(0) = u^0 = \begin{pmatrix} y^1 \\ o \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Für $u^0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ folgt nun aus der Energieerhaltung unmittelbar

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}^2} = \|u^0\|_{\mathcal{L}^2}. \tag{3}$$

Das ist die aller einfachste und triviale Abschätzung für $u(t)$.

Eine andere Abschätzung für $u(t)$ lautet für $t \geq 0$

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq c_\infty \frac{1}{(1+t)^k} \|u^0\|_{\mathcal{L}^1_n}. \tag{4}$$

Dabei sind $k := (n-1)/2$,

$$\mathcal{L}^1_m(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \forall\, \alpha,\, |\alpha| \leq m, \quad \partial^\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \right\},$$

und es wird $u^0 \in \mathcal{L}^1_n(\mathbb{R}^n)$ vorausgesetzt.

Wir wollen Abschätzung (4) beweisen, zur Vereinfachung in $\mathbb{R}^3$: Dort ist

$$\big(W(t)g\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} g(x-y)\,\gamma(t,y)\,dy$$

mit

$$\gamma(t,y) = \frac{\delta(t-|y|)}{4\pi|y|} = -\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{J(t,|y|)}{|y|}$$

und

$$J(t,|y|) := \begin{cases} |y| & \text{für } |y| < t, \\ t & \text{für } |y| > t. \end{cases}$$

Es folgt also

$$\big(W(t)g\big)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\nabla_y g(x-y)\Big)\,\nabla\frac{J(t,|y|)}{|y|}\,dy = -\frac{t}{4\pi}\int_{|y|>t}\Big(\nabla_y g(x-y)\Big)\,\frac{y_0}{|y|^2}\,dy$$

oder für $t \geq 1$

$$\big|\big(W(t)g\big)(x)\big| \leq \frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla g|.$$

Aus

$$\big(W(t)g\big)(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\Delta_y g(x-y)\Big)\,\frac{J(t,|y|)}{|y|}\,dy$$

erhält man für $0 \leq t \leq 1$

$$\big|\big(W(t)g\big)(x)\big| \leq \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta g|,$$

zusammen also

$$\big|\big(W(t)g\big)(x)\big| \leq \frac{c}{1+t}\,\|g\|_{\mathcal{L}^1_2}.$$

Analog folgt

$$\big|\big(\nabla W(t)g\big)(x)\big| \leq \frac{c}{1+t}\,\|g\|_{\mathcal{L}^1_3},$$

und es fehlt nur noch eine Abschätzung für $|\partial_t W(t)g|$.

Um sie zu erhalten, gehen wir von

$$\big|\big(\partial_t W(t)g\big)(x)\big| = \frac{1}{4\pi}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\Delta g(x-y)\Big)\,\partial_t\frac{J(t,|y|)}{|y|}\,dy\right| = \frac{1}{4\pi}\left|\int_{|y|>t}\Big(\Delta g(x-y)\Big)\,\frac{1}{|y|}\,dy\right|$$

aus. Für $1 \leq t$ folgt

$$\big|\big(\partial_t W(t)g\big)(x)\big| \leq \frac{c}{t}\,\|g\|_{\mathcal{L}^1_2}.$$

Es sei deshalb $0 \leq t \leq 1$. Dann ist

$$\big|\big(\partial_t W(t)g\big)(x)\big| \leq \frac{1}{4\pi}\left\{\left|\int_{t<|y|<1}\cdots\right| + c\,\|g\|_{\mathcal{L}^1_2}\right\},$$

und übrig bleibt nur noch

$$\int_{t<|y|<1}\frac{\Delta g(x-y)}{|y|}\,dy = \int_{S^2}\left\{\int_t^1\Big(\Delta g(x-y)\Big)\,|y|\,d|y|\right\}d\omega.$$

Wegen

$$|y| = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial|y|}\,|y|^2$$

verhält sich das innere Integral wie

$$\Big\{\cdots\Big\} = -\frac{1}{2}\int_t^1 \Big(\frac{\partial}{\partial|y|}\Delta g(x-y)\Big)\,|y|^2\,d|y| + \frac{1}{2}\Big(\Delta g(x-y)\Big)\,|y|^2\,\Big|_t^1,$$

also

$$\Big|\int_{t<|y|<1}\cdots\Big| \le c\Big\{\,\|g\|_{\mathcal{L}^1_3} + \Big|\int_{|y|=1}\Delta g(x-y)\,dy\Big| + \Big|\int_{|y|=t}\Delta g(x-y)\,dy\Big|\Big\} \le c\,\|g\|_{\mathcal{L}^1_3}.$$

Die letzte Abschätzung folgt aus

$$\Big|\int_{|y|=c}\Delta g(x-y)\,dy\Big| = \Big|\int_{|y|=c} y_0^{tr}\,y_0\,\Delta g(x-y)\,dy\Big| = \Big|\int_{|y|<c}\nabla^{tr}\big(y_0\Delta g(x-y)\big)\,dy\Big| \le c\,\|g\|_{\mathcal{L}^1_3}.$$

Damit haben wir Abschätzung (4) im Falle $n = 3$ bewiesen. □

Abschätzungen (3) und (4) sind die wichtigen Fälle der gesuchten $\mathcal{L}^p - \mathcal{L}^q$ Abschätzung. Man erhält diese daraus durch eine technisch durchaus aufwendige Interpolation, nämlich

Satz 10.1.1: *Es seien $q \ge 2$, $p := q/(q-1)$ und $k := (n-1)/2$. Dann gibt es eine Zahl N_p mit*

$$n\Big(1-\frac{2}{q}\Big) \le N_p \le n$$

und eine Konstante c_q so, daß

$$\forall\, u^0 \in \mathcal{L}^p_{N_p}(\mathbb{R}^n) \qquad \|u(t)\|_{\mathcal{L}^q} \le c_q\,(1+t)^{-k(1-2/q)}\,\|u^0\|_{\mathcal{L}^p_{N_p}}$$

gilt.

Zum Beweis dieses Satzes sei verwiesen auf *Racke [1992], S. 19 und 226f*, sowie *Pecher [1976] S. 159–183.*

10.1.2 Asymptotische Wellenprofile

In diesem Abschnitt soll das asymptotische Verhalten der Lösungen der Wellengleichung im Ganzraumfall diskutiert werden. Dabei folgen wir der Darstellung in *Wilcox [1975]*. Es sei also in $\mathbb{R}^n$

$$\Box\, y = o \quad \text{ mit } y(0) = y^0 \text{ und } \partial_t y(0) = y^1.$$

Dabei seien y^0, y^1 reellwertig, sowie $y^0 \in \mathcal{H}_0 := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und $y^1 \in \mathcal{D}(A_0^{-1/2})$ mit $A_0 := -\Delta$. Zur Vereinfachung wählen wir eine komplexe Darstellung, nämlich

$$v^0 := y^0 + \mathrm{i}\,A_0^{-1/2}y^1 \in \mathcal{H}_0$$

und

$$v(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA_0^{1/2}}\,v^0.$$

Dann ist $y(t) = \mathrm{Re}\; v(t)$.

Die Fourierdarstellung von v lautet

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(xp-t|p|)}\,\hat v^0(p)\,dp$$

mit

$$\hat v^0(p) := \hat y^0(p) + \mathrm{i}\,\frac{\hat y^1(p)}{|p|}.$$

Wir bestimmen das asymptotische Verhalten von $v(t)$ zunächst für

$$v^0 \in \mathring{\mathcal{H}}_0(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n)\;\Big|\; \hat f \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{supp}\,\hat f \Subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\Big\}.$$

Durch ein Dichteargument folgen dann die Resultate für alle $v^0 \in \mathcal{H}_0$.

Es sei also $v^0 \in \mathring{\mathcal{H}}_0$. Dann gibt es Konstanten $a, b > 0$ mit

$$\operatorname{supp} \hat{v}^0 \subset \left\{ p \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \;\middle|\; 0 < a \leq |p| \leq b < \infty \right\},$$

und wir erhalten

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_a^b \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r(xz-t)}\, \hat{v}^0(rz)\, r^{n-1}\, dz\, dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}rt}\, V(x,r)\, r^{n-1}\, dr$$

mit

$$V(x,r) := \int_{S^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}rxz}\, \hat{v}^0(rz)\, dz.$$

Man rechnet leicht nach, daß $V(x,r)$ die Helmholtzsche Schwingungsgleichung löst, daß also

$$(\Delta + r^2)V(\,\cdot\,, r) = 0$$

ist.

Wir bestimmen nun zunächst das asymptotische Verhalten von $V(x,r)$ für $|x| \to \infty$ und leiten daraus anschließend das Verhalten von $v(t,x)$ für $t \to \infty$ ab. Dazu verwenden wir die „Methode der stationären Phase“, die zunächst an einem Beispiel erläutert werden soll.

Beispiel 10.1.2: *Es seien $I := (\alpha, \beta)$, $g \in \mathcal{C}(\bar{I})$ und $h \in \mathcal{C}_2(\bar{I})$. Es sei ferner $\tau \in I$ die einzige Nullstelle von h', also $h'(\tau) = 0$, und zwar mit $h''(\tau) > 0$. Wir diskutieren*

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xh(t)}\, dt$$

für große x.

Es ist seit langem bekannt, daß die führenden Terme in der Asymptotik von $f(x)$ von den Beiträgen des Integrals in der Umgebung der Endpunkte α, β und der Nullstelle τ herrühren. Dabei liefert die Umgebung von τ den Term höchster Ordnung. Wir wollen ihn berechnen: Dazu substituieren wir

$$u^2 := h(t) - h(\tau)$$

und erhalten

$$f_\varepsilon(x) := \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} g(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xh(t)}\, dt = \int_{-u_1}^{u_2} 2u \frac{g(t)}{h'(t)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(h(\tau)+u^2)} du$$

mit $u_1 := \sqrt{h(\tau-\varepsilon) - h(\tau)}$ und $u_2 := \sqrt{h(\tau+\varepsilon) - h(\tau)}$. Weil nur eine Umgebung von $u = 0$ interessiert, ersetzen wir $g(t)$ durch $g(\tau)$ und $2u/h'(t)$ durch

$$\sqrt{\frac{2}{h''(\tau)}} = \lim_{t \to \tau} \frac{2u}{h'(t)}.$$

Es folgt

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{h''(\tau)}}\, g(\tau)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xh(\tau)} \int_{-u_1}^{u_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xu^2}\, du.$$

Verwenden wir noch (für $x > 0$)

$$\int_{-u_1}^{u_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xu^2}\, du \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xu^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y^2}\, dy = (1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\pi}{2x}},$$

dann erhalten wir schließlich

$$f(x) \sim (1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\pi}{xh''(\tau)}}\, g(\tau)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xh(\tau)} \qquad \text{für } x \to \infty.$$

Diese Asymptotik läßt sich verfeinern, es können auch Nullstellen höherer Ordnung von $h(t)$ zugelassen werden. □

Die Methode der stationären Phase ist inzwischen vielfältig ausgebaut worden. Insbesondere können in der Definition von V auch glatte $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten anstelle S^{n-1} zugelassen werden. Wir verwenden hier folgendes Resultat:

Satz 10.1.3: *Es seien* $v^0 \in \mathring{\mathcal{H}}_0$, $x = |x| x_0$, $\gamma_n = (1/\sqrt{\mathrm{i}})^{n-1}$ *und* $q_0(x,r)$ *durch*

$$V(x,r) = \left(\frac{2\pi}{r|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left\{\gamma_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}r|x|}\, \hat{v}^0(rx_0) + \bar{\gamma}_n \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r|x|}\, \hat{v}^0(-rx_0)\right\} + q_0(x,r)$$

erklärt. Dann gibt es eine Konstante $M_0 = M_0(v^0)$ *so, daß folgendes gilt*

$$\forall\, |x| > 0 \quad \forall\, r \in [a,b] \quad \forall\, x_0 \in S^{n-1} \qquad \big|q_0(x,r)\big| \le M_0\, |x|^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Einen Beweis zu Satz 10.1.3 finden Sie in *Leis [1986], S. 247.*

Wir tragen nun diese Asymptotik von $V(x,r)$ in die Darstellung von $v(t,x)$ ein und erhalten

$$v(t,x) = \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \left\{G^+(|x| - t, x_0) + G^-(|x| + t, x_0)\right\} + q_1(t,x)$$

mit

$$G^+(\rho, x_0) = \frac{\gamma_n}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\rho}\, \hat{v}^0(rx_0)\, r^{\frac{n-1}{2}}\, dr,$$
$$G^-(\rho, x_0) = \frac{\bar{\gamma}_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{-a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\rho}\, \hat{v}^0(rx_0)\, (-r)^{\frac{n-1}{2}}\, dr$$

und

$$q_1(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}rt}\, q_0(x,r)\, r^{n-1}\, dr.$$

Für alle $|x| > 0$, $x_0 \in S^{n-1}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|q_1(x,t)| \le M_1\, |x|^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Dabei ist

$$M_1 := M_0 \,\frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}}\, \frac{b^n - a^n}{n}.$$

Der erste Term in dieser Darstellung von $v(t,x)$ stellt eine auslaufende Welle dar, und wir werden zeigen, daß die beiden anderen in $\mathcal{H}_0$ für $t \to \infty$ gegen Null konvergieren. Bevor wir das tun, wollen wir die Definition von G^+ und G^- auf beliebige $v^0 \in \mathcal{H}_0$ ausdehnen.

Es sei $v^0 \in \mathring{\mathcal{H}}_0$. Dann folgt aus der Parsevalschen Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}} \big|G^+(\rho, x_0)\big|^2 d\rho = \int_a^b \big|\hat{v}^0(\gamma, x_0)\big|^2 r^{n-1}\, dr$$

oder

$$\|G^+\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} = \|\hat{v}^0\| = \|v^0\|.$$

Diese Beziehung können wir benutzen, um die Abbildung

$$(v^0 \to G^+) \;:\; \mathring{\mathcal{H}}_0 \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$$

durch Abschließen auf $\mathcal{H}_0$ fortzusetzen. Eine explizite Darstellung von G^+ erhält man folgendermaßen: Man betrachte

$$\big(\rho \to G^+(\rho, \cdot)\big) \in \mathcal{L}^2\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}^2(S^{n-1})\big)$$

und definiere

$$\hat{G}^+(\rho, x_0) := (F_1 G^+)(\rho, x_0).$$

Dabei soll F_1 die eindimensionale Fouriertransformation sein. Dann ist für $v^0 \in \mathcal{H}_0$

$$\big\|\hat{G}^+\big\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} = \big\|G^+\big\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} = \big\|v^0\big\|$$

und

$$\hat{G}^{+}(\rho, x_0) = \begin{cases} \gamma_n \, \rho^{\frac{n-1}{2}} \, \hat{v}^0(\rho \, x_0) & \text{für } \rho \geq 0, \\ 0 & \text{für } \rho < 0. \end{cases}$$

Analog erhält man

$$\hat{G}^{-}(\rho, x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho > 0, \\ \bar{\gamma}_n \, (-\rho)^{\frac{n-1}{2}} \, \hat{v}^0(\rho \, x_0) & \text{für } \rho \leq 0. \end{cases}$$

Das führt zur

Definition 10.1.4: *Es sei $v^0 \in \mathcal{H}_0$. Dann nennt man die soeben erklärten Abbildungen G^+ bzw. G^-* auslaufende *bzw.* einlaufende Wellenprofile. *Für $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $x_0 := x/|x|$ sind*

$$v^{+}(t, x) := \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \, G^{+}(|x| - t, x_0)$$

bzw.

$$v^{-}(t, x) := \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \, G^{-}(|x| + t, x_0)$$

die entsprechenden asymptotischen Wellenfunktionen.

Wir zeigen nun einige Eigenschaften dieser Wellenfunktionen.

Satz 10.1.5: *Es seien $H \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ und für $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$*

$$w^{+}(t, x) := \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \, H(|x| - t, x_0).$$

Dann gilt:

1. $w^+ \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{H}_0)$,

2. $\|w^+(t, \cdot)\|$ *fällt nicht,*

3. $\lim_{t \to \infty} \|w^+(t, \cdot)\| = \|H\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})}$,

4. $\lim_{t \to -\infty} \|w^+(t, \cdot)\| = 0$.

Ähnliche Aussagen gelten für

$$w^{-}(t, x) := w^{+}(-t, x).$$

Zum Beweis bemerken wir zunächst

$$\left\| w^{+}(t, \cdot) \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S^{n-1}} \left| H(r - t, x_0) \right|^2 d\, x_0 \, d\, r = \int_{-t}^{\infty} \int_{S^{n-1}} \left| H(r, x_0) \right|^2 d\, x_0 \, d\, r.$$

Daraus folgen die zweite, dritte und vierte Aussage. Zum Nachweis der ersten bilden wir

$$\begin{aligned} \left\| w^{+}(t, \cdot) - w^{+}(t_0, \cdot) \right\|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{n-1}} \left| H(r - t, x_0) - H(r - t_0, x_0) \right|^2 d\, x_0 \, d\, r = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{n-1}} \left| \mathrm{e}^{-\mathrm{i} t \rho} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i} t_0 \rho} \right|^2 \left| \hat{H}(\rho, x_0) \right|^2 d\, x_0 \, d\, \rho. \end{aligned}$$

Wegen

$$\left| \mathrm{e}^{-\mathrm{i} t \rho} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i} t_0 \rho} \right| \leq 2, \qquad \lim_{t \to t_0} \left| \mathrm{e}^{-\mathrm{i} t \rho} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i} t_0 \rho} \right| = 0$$

und $\hat{H} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ folgt dann die erste Behauptung aus dem Lebesgueschen Satz über die dominierte Konvergenz.

Lemma 10.1.6: *Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet, t_0, r_0, M Konstanten und und u eine Abbildung mit den Eigenschaften:*

1. $\forall\, t > t_0 \quad u(t,\cdot\,) \in \mathcal{L}^2(G)$,

2. $\forall\, K \Subset \mathbb{R}^n \quad \lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot\,)\|_{\mathcal{L}^2(K\cap G)} = 0$,

3. $\forall\, t > t_0 \quad \forall\, |x| > r_0 \quad |u(t,x)| \le M|x|^{-(n+1)/2}$.

Dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot\,)\|_{\mathcal{L}^2(G)} = 0.$$

Beweis: O.B.d.A. sei $\partial G \subset B(0,r_0)$. Dann folgt die Behauptung aus $(r > r_0,\ t > t_0)$

$$\|u(t,\cdot\,)\|^2_{\mathcal{L}^2(G)} = \|u(t,\cdot\,)\|^2_{\mathcal{L}^2(B(0,r)\cap G)} + \int_{|x|>r} |u(t,x)|^2\, d\,x \le \|u(t,\cdot\,)\|^2_{\mathcal{L}^2(B(0,r)\cap G)} + M^2\, |S^{n-1}|\, \frac{1}{r}.$$

□

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir das Hauptresultat dieses Abschnitts, nämlich

Satz 10.1.7: *Für jedes $v^0 \in \mathcal{H}_0$ gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \|v(t,\cdot\,) - v^+(t,\cdot\,)\| = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} \|v(t,\cdot\,) - v^-(t,\cdot\,)\| = 0$$

sowie

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|v^{\mp}(t,\cdot\,)\| = 0.$$

Den Beweis geben wir nur für die erste Aussage. Wir führen ihn in zwei Schritten:

1. Es sei $v^0 \in \mathring{\mathcal{H}}_0$ und

$$w(t,x) := v(t,x) - v^+(t,x) = \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\, G^-(|x| + t, x_0) + q_1(t,x).$$

Wir wollen zeigen, daß w den Voraussetzungen von Lemma 10.1.6 genügt. Die erste ist nach Satz 10.1.5 klar. Die zweite zeigen wir für v und v^+ einzeln: Es ist

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}} \int_{a<|p|<b} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(xp - t|p|)}\, \hat v^0(p)\, dp =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{i}t\sqrt{2\pi}^{\,n}} \int_{a<|p|<b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|p|} \left(\frac{n-1}{|p|} + \frac{\partial}{\partial|p|}\right) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}\, \hat v^0(p)\right) dp.$$

Deshalb gilt

$$\forall\, x \in K \qquad |v(t,x)| \le \frac{c}{|t|}.$$

Weiterhin ist

$$\|v^+(t,\cdot\,)\|^2_{\mathcal{L}^2(B(r))} = \int_{-t}^{r-t} \int_{S^{n-1}} \left|G^+(s,x_0)\right|^2 dx_0\, ds.$$

Für $t \to \infty$ konvergiert auch dieses Integral gegen Null.

Schließlich müssen wir noch die dritte Voraussetzung nachweisen. Für $q_1(t,x)$ gilt sie. Aus der Definition von G^- und durch partielles Integrieren erhält man

$$\left|G^-(\rho, x_0)\right| \le \frac{c}{\rho},$$

wieder mit $c = c(v^0)$. Deshalb folgt

$$\frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\, \left|\, G^-(|x| + t, x_0)\right| \le \frac{c}{|x|^{\frac{n-1}{2}}\left(|x| + t\right)} \le \frac{c}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}.$$

2. Es sei jetzt $v^0 \in \mathcal{H}_0$. Dann ist
$$v(t,\cdot) = U_0(t)v^0 := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t A_0^{1/2}} v^0$$
mit dem unitären Operator $U_0(t)$. Analog ist
$$v^+(t,\cdot) = U_0^+(t)v^0$$
mit einem linearen Operator $U_0^+(t) \in \mathcal{CL}(\mathcal{H}_0)$. Aus Satz 10.1.5 folgt nämlich
$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \|U_0^+(t)\| \leq 1.$$
Wir wählen nun $h_n \in \mathring{\mathcal{H}}_0$ mit
$$\|h_n - v^0\| \to 0.$$
Dann ist
$$\big\|v(t) - v^+(t)\big\| = \big\|\,\big(U_0(t) - U_0^+(t)\big)\,v^0\big\| \leq \big\|\,\big(U_0(t) - U_0^+(t)\big)\,h_n\big\| + 2\,\big\|h_n - v^0\big\|.$$
Das beweist Satz 10.1.7. □

10.1.3 Lösungen in Außengebieten

Es seien nun $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ein Außengebiet und A wieder wie in §7.1 definiert, also
$$A\,u := -\sum_{i,k} \partial_i\, a_{ik}\, \partial_k\, u$$
mit
$$\mathcal{D}(A) := \Big\{u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \;\Big|\; \partial_i\, a_{ik}\, \partial_k\, u \in \mathcal{H}\Big\}.$$
Dabei ist $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$, und wir setzen wir voraus, daß das Medium außerhalb einer Kugel $B(0, r_a)$ homogen und isotrop ist. In $G_a := \big\{x \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; |x| > r_a\big\} \subset G$ soll also
$$a_{ik} = \delta_{ik}$$
sein.

Wir wissen bereits, daß die Anfangsrandwertaufgabe zur Wellengleichung
$$\partial_t^2 u + A\,u = 0 \tag{5}$$
mit $u(0) = u^0 \in \mathcal{H}$ und $\partial_t u(0) = u^1 \in \mathcal{H}$ im schwachen Sinne eindeutig gelöst werden kann.
$$u(t) := \cos(\sqrt{A}\,t)u^0 + \frac{\sin(\sqrt{A}\,t)}{\sqrt{A}}u^1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$$
ist die Lösung.

Im folgenden wollen wir das asymptotische Verhalten der Lösungen von Außenraumaufgaben mit dem Verhalten im Ganzraumfall vergleichen. Hintergrund ist das

Prinzip vom lokalen Abklingen der Energie: *Es sei u eine schwache Lösung der Gleichung (5) und $K \subset G$ mit $K \Subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Dann gilt:*

1. Es seien $u^0 \in \mathcal{H}$ und $u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2})$. Dann folgt
$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} = 0.$$

2. Es seien $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ und $u^1 \in \mathcal{H}$. Dann folgt
$$\lim_{t\to\infty} \Big\{\big\|\partial_t u(t)\big\|_{\mathcal{L}^2(K)} + \big\|A^{1/2}u(t)\big\|_{\mathcal{L}^2(K)}\Big\} = 0.$$

Für großes t verschwindet die Energie also in jedem Kompaktum, und man kann erwarten, daß die Lösung sich für großes t wie eine Ganzraumlösung verhält.

Beweis: Es ist

$$u(t) = \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\,dP(\lambda)u^0 + \int_0^\infty \sin(\sqrt{\lambda}\,t)\,dP(\lambda)A^{-1/2}u^1$$

und

$$A^{1/2}u(t) = \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\,dP(\lambda)A^{1/2}u^0 + \int_0^\infty \sin(\sqrt{\lambda}\,t)\,dP(\lambda)u^1$$

sowie

$$\partial_t u(t) = -\int_0^\infty \sin(\sqrt{\lambda}\,t)\,dP(\lambda)A^{1/2}u^0 + \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\,dP(\lambda)u^1.$$

Alle Integrale verhalten sich ähnlich. Es genügt deshalb, für $f \in \mathcal{H}$

$$w(t) := \cos(A^{1/2}t)f = \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\,dP(\lambda)f$$

zu diskutieren. Das geschieht in zwei Schritten:

1. Wir zeigen die schwache Konvergenz, also

$$\forall\, v \in \mathcal{H} \qquad \lim_{t\to\infty} \big(w(t), v\big) = 0.$$

Weil das Spektrum von A absolut stetig ist, gilt

$$F(\lambda) := \frac{d}{d\lambda}(P(\lambda)f, v) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+),$$

und es folgt aus dem Riemann-Lebesgueschen Lemma

$$\big(w(t), v\big) = \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\,F(\lambda)\,d\lambda \to 0.$$

Um das zu beweisen, sei zunächst $F \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$. Dann gilt für $r > 0$

$$\begin{aligned}|(w(t), v)| &\le 2\left|\int_0^r \cos(xt)\,F(x^2)\,x\,dx\right| + \left|\int_{r^2}^\infty \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\,F(\lambda)\,d\lambda\right| \le \\ &\le \frac{2}{t}\left|\int_0^r \sin(xt)\left\{F(x^2) + 2x^2F'(x^2)\right\}dx\right| + \frac{2r}{t}\left|F(r^2)\sin(rt)\right| + \int_{r^2}^\infty |F(\lambda)|\,d\lambda,\end{aligned}$$

und daraus folgt $|(w(t), v)| \to 0$ in diesem Falle. Man approximiere dann $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ durch $\mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$-Funktionen.

2. Wir zeigen die starke Konvergenz. Es sei zunächst $f \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$. Dann ist

$$\left\|\cos(\sqrt{A}\,t)f\right\|_1 \le c\left\|\cos(\sqrt{A}\,t)f\right\|_{\sqrt{A}} \le c\left\{\|f\| + \left\|\sqrt{A}\,f\right\|\right\}.$$

Aus dem Rellichschen Auswahlsatz folgt deshalb, daß jede Folge

$$\left(\cos(\sqrt{A}\,t_n)f\right), \quad t_n \to \infty$$

eine in $\mathcal{L}^2(K)$ konvergente Teilfolge enthält. Der Grenzwert ist Null, weil die Folge schwach gegen Null konvergiert. Wir erhalten also in diesem Falle

$$\lim_{t\to\infty} \left\|w(t)\right\|_{\mathcal{L}^2(K)} = 0.$$

Man approximiere dann $f \in \mathcal{H}$ durch $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$-Funktionen. □

Wir wollen nun u mit einer Lösung im Ganzraumfall vergleichen. Um das zu präzisieren, wählen wir wieder die komplexe Notation. Mit $u^0 \in \mathcal{H}$ und $u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2})$ sei

$$h := u^0 + \mathrm{i}\, A^{-1/2} u^1 \in \mathcal{H}$$

und

$$U(t)h := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{A}\,t} h.$$

Analog sei in $\mathcal{H}_0 := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$

$$U_0(t)h_0 := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{A_0}\,t} h_0$$

mit $h_0 \in \mathcal{H}_0$ und $A_0 = -\Delta$ in $\mathbb{R}^n$.

Wir suchen ein h_0 so, daß

$$U(t)h \quad \text{und} \quad U_0(t)h_0$$

im $\mathcal{L}^2$-Sinne gleiches asymptotisches Verhalten haben. Um das zu formulieren, setzen wir zunächst $U(t)h$ in den $\mathbb{R}^n$ trivial fort und wählen dazu

$$J_G \; : \; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_0,$$

wobei

$$\big(J_G u\big)(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in G, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \backslash G \end{cases}$$

ist. Dann folgt

$$\big\| J_G U(t)h - U_0(t)h_0 \big\| = \big\| W(t)h - h_0 \big\|$$

mit

$$W(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{A_0}\,t}\, J_G\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{A}\,t}.$$

Es geht also darum zu zeigen, daß für $t \to \infty$ und für $t \to -\infty$ die $\mathcal{L}^2$-Limites

$$\lim_{t \to \pm\infty} W(t)h$$

existieren. Das soll im nächsten Abschnitt geschehen. Dabei wird wieder wesentlich ausgenutzt, daß das Spektrum von A absolut stetig ist.

Wir werden im nächsten Abschnitt die Existenz der unitären *Wellenoperatoren*

$$\begin{aligned} W^{\pm} \; : \; \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}_0, \\ h &\longmapsto \operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} W(t)h \end{aligned}$$

zeigen. Es seien

$$h_0^{\pm} := W^{\pm} h.$$

Dann gilt also

$$\lim_{t \to \pm\infty} \big\| U(t)h - U_0(t)h_0^{\pm} \big\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Für $t \to \infty$ verhält sich $U(t)h$ daher wie $U_0(t)h_0^+$ und für $t \to -\infty$ wie $U_0(t)h_0^-$. Das wird in der folgenden Abbildung 10.1 veranschaulicht.

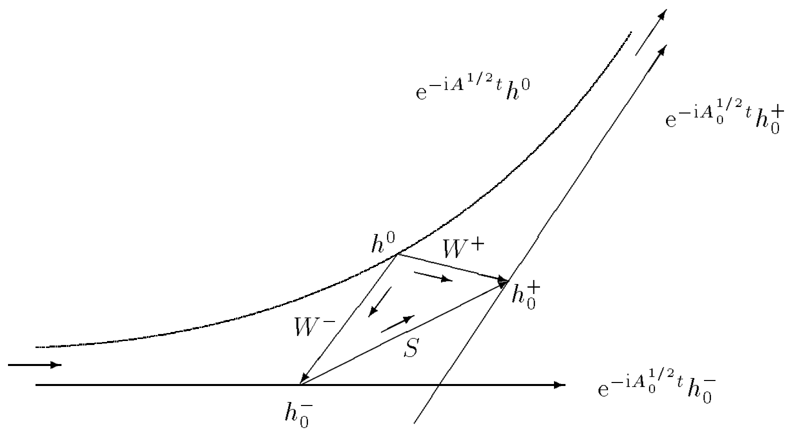

Abbildung 10.1: Wellenoperatoren.

Mit

$$S := W^+(W^-)^*$$

bezeichnet man den *Streuoperator*. Es ist also

$$h_0^+ = W^+ h = S\, h_0^- .$$

Eine einlaufende Ganzraumwelle mit den Daten h_0^- wird durch A gestreut, und man erhält eine auslaufende Welle mit den Daten $h_0^+ = S\, h_0^-$.

Auch die Spektralschar der zugrundeliegenden Operatoren lassen sich entsprechend umrechnen. Es ist

$$P(\lambda) = (W^\pm)^* P_0(\lambda)\, W^\pm$$

und analog

$$A = (W^\pm)^* A_0\, W^\pm .$$

Verwendet man die verallgemeinerte Fouriertransformation aus §8.6.4, dann ist

$$W^\pm = F^* F^\pm$$

und

$$S = F^* F^- (F^+)^* F.$$

10.1.4 Zur Existenz von Wellenoperatoren

Es gibt verschiedene Methoden, die Existenz der Wellenoperatoren nachzuweisen. Erwähnt werden sollen nur die Methode von *Lax-Phillips [1967]*, bei der Halbgruppentheorie benutzt wird, die Methode der Entwicklung nach verallgemeinerten Eigenfunktionen (verzerrten ebenen Wellen) von *Wilcox [1975]* und die Methode von Tosio Kato, *1917, und anderen (vgl. *Kato [1976]*), welche Störungstheorie linearer Operatoren verwendet.

Hier soll die dritte Methode vorgestellt und ein etwas allgemeineres Ergebnis, das in *Leis [1986], S. 116f* bewiesen wird, verwendet werden. Wie im letzten Abschnitt seien $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G)$, $\mathcal{H}_0 := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned} A &: \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \\ A_0 &: \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0 \end{aligned}$$

mit den Spektralscharen P und P_0, sowie

$$\begin{aligned} J &: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_0, \\ J_0 &: \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H} \end{aligned}$$

mit

$$(Jg)(x) := \begin{cases} j(x)\, g(x) & \text{für } x \in G \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \backslash G \end{cases}$$

und

$$(J_0 g)(x) := j(x)\, g(x) \quad \text{für } x \in G.$$

Dabei soll $j \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ sein mit $j\,|\,B(0, r_a) = 0$, $j\,|\,\{x\,|\,|x| > r_a + 1\} = 1$ und $0 \le j \le 1$. Wir wählen also zunächst eine glattere Fortsetzung als im letzten Abschnitt. Anschließend folgt leicht, daß diese Wahl auf das Endresultat keinen Einfluß hat. Es ist

$$J^* = J_0 .$$

Im folgenden soll ein Resultat vorgestellt werden, das für viele klassische Gleichungen der Mathematischen Physik die Frage nach der Existenz der Wellenoperatoren beantwortet. Wir formulieren es deshalb etwas allgemeiner, als es für die Wellengleichung erforderlich ist. Das Resultat gilt jedoch nicht für Gleichungen vom Typ der Schrödingergleichung mit Coulombpotential. Die Problematik solcher Gleichungen wird in §10.1.5 kurz behandelt. Wir verwenden die Projektoren P_{ac} und $P_{0,ac}$ auf die jeweiligen absolut stetigen Teilräume $\mathcal{H}_{ac}$ und $\mathcal{H}_{0,ac}$. Im Falle der Wellengleichung sind beide Operatoren gleich der Identität. Es sei schließlich

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bar{I}_m .$$

Dabei dürfen die Endpunkte der Intervalle I_m Eigenwerte von A_0 oder A sein (bei der Wellengleichung gibt es keine). Dann gilt

Satz 10.1.8: *Es sei* (I_m) *eine Familie disjunkter offener Intervalle mit*

$$\mathbb{R} = \Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m\Big) \cup Z.$$

Dabei soll Z *eine Lebesgue-Nullmenge sein. Es seien* H, I *endliche Intervalle und*

$$M := \Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m\Big) \cap I.$$

Es seien ferner

1. $J_0\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A)$ *und* $J\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_0)$,
2. $\forall\, I \subset \mathbb{R} \quad (JJ_0 - id)P_0(M) \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0)$,
3. $\forall\, I \subset \mathbb{R} \quad (J_0J - id)P(M) \in \mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$,
4. $\forall\, I \subset \mathbb{R} \quad (AJ_0 - J_0A_0)P_0(M) \in \mathcal{K}_1(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$,
5. $\forall\, H, I \subset \mathbb{R} \quad P_0(H)\big(JA - A_0J\big)P(M) \in \mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$.

Dann existieren die Wellenoperatoren

$$W^{\pm}(A_0, A; J, \mathcal{H}_{ac}) := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}A_0t} J\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}At} P_{ac} \quad : \quad \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_0$$

und

$$W_0^{\pm}(A, A_0; J_0, \mathcal{H}_{0,ac}) := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}At} J_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A_0t} P_{0,ac} \quad : \quad \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Diese Operatoren sind partielle Isometrien, und es gilt

$$(W^{\pm})^* W^{\pm} = P_{ac}, \quad (W_0^{\pm})^* W_0^{\pm} = P_{0,ac} \quad \text{und} \quad (W^{\pm})^* = W_0^{\pm}.$$

Es gilt auch ein *Invarianzprinzip*, das zum Beispiel

$$W^{\pm}(A_0, A; J, \mathcal{H}_{ac}) = W^{\pm}(A_0^{1/2}, A^{1/2}; J, \mathcal{H}_{ac})$$

besagt.

Dabei soll $\mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ die Menge der kompakten linearen Abbildungen und $\mathcal{K}_1(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$ die Menge der *nuklearen Abbildungen* sein (vgl. *FA, S. 174)*.

Wir wollen diesen Satz nun auf die Wellengleichung anwenden. Dann ist $P_{ac} = id$, $P_{0,ac} = id$, und wir haben die Voraussetzungen einzeln nachzuweisen.

Die erste ist offenbar erfüllt. Zum Nachweis der zweiten wählen wir eine in $\mathcal{H}_0$ beschränkte Folge (u_n) und

$$v_n := P_0(I)u_n \in \mathcal{D}(A_0).$$

Dann ist

$$\|A_0 v_n\|^2 = \int_I \lambda^2 \, d\|P_0(\lambda)u_n\|^2$$

beschränkt und damit auch

$$\|v_n\|_2 \le c\, \|v_n\|_{A_0}.$$

Aus

$$\operatorname{supp}(J^2 - id) \subset B(0, r_a + 1)$$

und dem Rellichschen Auswahlsatz erhalten wir deshalb die Existenz einer konvergenten Teilfolge von

$$\Big((JJ_0 - id)P_0(I)u_n\Big).$$

Die dritte Voraussetzung folgt analog aus

$$\|v\|_1 \le c\, \|v\|_A.$$

Zum Nachweis der vierten Voraussetzung benutzen wir die Fouriersche Darstellung

$$\big(AJ_0 - J_0A_0\big)P_0(I)u = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{|p|^2\in I}\big\{\big[\Delta j(\cdot) + 2(\nabla j)(\cdot)\nabla\big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\,\cdot}\big\}\,\hat{u}(p)\,dp =: TFu.$$

Dabei ist also

$$Tf = \int_{|p|^2\in I}\tau(\cdot,p)\,f(p)\,dp$$

mit

$$\tau(x,p) = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\big[(\Delta j)(x) + 2\,\mathrm{i}\,p(\nabla j)(x)\big].$$

Wir denken uns nun $\tau(x,p)$ mit einer Funktion $\varphi(p)$ multipliziert, $\varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \mid I = 1$. Dann gibt es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\operatorname{supp}\tau \subset K \times K,$$

und es ist

$$T \;:\; \mathcal{L}^2(K) \longrightarrow \mathring{\mathcal{H}}_k(K)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ beschränkt. Wählen wir $k > n$, dann folgt

$$T \in \mathcal{K}_1\big(\mathcal{L}^2(K), \mathcal{L}^2(K)\big)\,.$$

Man vergleiche *Yosida [1974], S. 279* oder *Leis [1986], S. 22*. Das beweist die vierte Voraussetzung, und zwar für beliebiges I. Damit folgt die fünfte unmittelbar.

Mithin existieren die angegebenen Wellenoperatoren. Es ist ferner

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{A_0}t}J_G\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{A}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{A_0}t}J\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{A}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{A_0}t}(J_G - J)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{A}t},$$

und aus dem Prinzip vom lokalen Abklingen der Energie folgt, daß der Term ganz rechts im starken Sinne für $t \to \pm\infty$ verschwindet. Damit existieren auch die Wellenoperatoren

$$W^\pm = W^\pm(\sqrt{A_0}, \sqrt{A}; J_G, id) = W^\pm(\sqrt{A_0}, \sqrt{A}; J, id) = W^\pm(A_0, A; J, id).$$

Das war zu zeigen. □

10.1.5 Verallgemeinerte Wellenoperatoren

Im letzten Abschnitt haben wir die Existenz der Wellenoperatoren für die klassischen Operatoren aus der Mathematischen Physik gezeigt. Dabei wurden die Lösungen einer Anfangsrandwertaufgabe mit dem zugehörenden Ganzraumfall als Referenzfall verglichen.

Schwieriger wird es bei der Schrödingergleichung. Es seien jetzt in $\mathbb{R}^3$ mit $q > 0$ wieder

$$Au := -\Delta u - \frac{q}{|\cdot|}u$$

der Schrödingeroperator und $A_0 = -\Delta$. Dann sieht man rasch, daß das Coulombpotential eine stärkere Störung von A_0 bewirkt als die bisher betrachteten Randwertaufgaben. Anders ist es, wenn man nur *kurzreichweitige Potentiale* betrachtet. Das Coulombpotential hingegen ist *langreichweitig*; auf die Definitionen soll hier im einzelnen nicht weiter eingegangen werden. Man sollte also die Schrödingergleichung selbst als Referenzfall benutzen und kann dann mit der bereits vorgestellten Methode wieder Störungen davon betrachten.

Von *Dollard [1964]* wurde jedoch gezeigt, daß sich auch A mit A_0 vergleichen läßt, wenn man den Begriff des Wellenoperators verallgemeinert. Das soll im folgenden kurz erläutert werden:

Betrachten wir dazu das einfachere klassische *Kepler-Problem* in $\mathbb{R}^3$

$$x'' + q\,\frac{x}{|x|^3} = 0.$$

Das Winkelmoment

$$l := x \times x'$$

und die Energie

$$E := \frac{1}{2}\,|x'|^2 - \frac{q}{|x|}$$

hängen nicht von der Zeit t ab. Das folgt unmittelbar durch Differenzieren. Deshalb verläuft die Bewegung in der Ebene

$$x^{tr} l = 0,$$

und wir können dort Polarkoordinaten einführen, etwa $l = (0, 0, 1)$ und

$$x(r, \varphi) = r\, x_0(\varphi) \quad \text{mit } |x_0| = 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 1 &= |l|^2 = r^2 \varphi', \\ E &= \frac{1}{2}\left((r')^2 + r^2 (\varphi')^2\right) - \frac{q}{r}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen schreiben wir in der Form

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{1}{r^2}, \\ r' &= \sqrt{2E + \frac{2q}{r} - \frac{1}{r^2}} \end{aligned}$$

und finden das Integral

$$\frac{1}{r} = q\Big\{1 - \sqrt{1 + \frac{2E}{q^2}} \sin(\varphi - \varphi_0)\Big\}.$$

Es beschreibt für $E < 0$ Ellipsen, für $E = 0$ eine Parabel und für $E > 0$ den Zweig einer Hyperbel.

Im folgenden interessieren wir uns nur noch für diesen Hyperbelzweig, vergleichbar mit Lösungen der Schrödingergleichung im stetigen Teilraum. Wir wollen das Verhalten dieser Lösung für $t \to \infty$ diskutieren. Aus $r(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ und

$$r' = \sqrt{2E} + o(1) \qquad \text{für } t \to \infty$$

folgt zunächst

$$r(t) = \sqrt{2E}\, t + o(t).$$

Fügt man das wieder in die Differentialgleichung ein, dann erhält man

$$r(t) = \sqrt{2E}\, t + \frac{q}{2E} \ln(t) + \mathcal{O}(1),$$

sowie

$$\varphi(t) = \varphi_\infty - \frac{1}{2Et} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(t)}{t^2}\right)$$

und

$$x' = r' x_0 + r \varphi' x_0' = \sqrt{2E}\, x_0^\infty + o(1)$$

mit

$$x_0^\infty := x_0(\varphi_\infty).$$

Vergleichen wir dies mit dem entsprechenden freien Orbit, also der Lösung von

$$y'' = 0 \qquad \text{mit } y'(\infty) = x'(\infty).$$

Dann ist

$$y'(t) = \sqrt{2E}\, x_0^\infty$$

und

$$y(t) = \sqrt{2E}\, t\, x_0^\infty + y(0),$$

also

$$|y(t)| = \sqrt{2E}\, t + y(0)^{tr} x_0^\infty + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

im Gegensatz zu

$$|x(t)| = \sqrt{2E}\, t + \frac{q}{2E} \ln(t) + \mathcal{O}(1)$$

für $t \to \infty$. Es gibt also keinen freien Orbit y mit

$$|x(t) - y(t)| \to 0 \quad \text{für } t \to \infty.$$

Das Beispiel suggeriert jedoch,

$$W(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}At}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A_0 t}$$

durch

$$W_D(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}At}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A_0 s(t)}$$

zu ersetzen. Dabei soll

$$s(t) := t + f(A_0)\ln(t)$$

sein mit einer geeigneten Abbildung f. Eine solche Modifikation wurde von Dollard angegeben, und man erhält auf diese Weise die verallgemeinerten Wellenoperatoren. Dollard ersetzt den Term $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A_0 t}$ durch

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(A_0 t + A_1(t))}$$

mit

$$A_1(t) := -\frac{1}{2} q\ \mathrm{sign}(t)\, A_0^{-1/2} \ln(4|t|A_0).$$

Einzelheiten entnehme man der bereits zitierten Originalarbeit von Dollard oder auch *Leis [1986], S. 199.*

10.2 Nichtlineare Anfangsrandwertaufgaben

Lineare Wellengleichungen, wie wir sie bisher behandelt haben, sind meist nur Näherungen für die in der Physik wirklich auftretenden Gleichungen. Man denke zum Beispiel an das Problem der *schwingenden Saite*: Es sei $I = (0, l)$, die Saite möge in den Punkten $x = 0$ und $x = l$ befestigt sein und soll nur in einer Ebene schwingen; $y(t, x)$ sei ihre Auslenkung. Dann gelten die Rand- bzw. Anfangsbedingung

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall\, x \in \partial I \qquad y(t,x) = 0$$

$$\forall\, x \in I \qquad y(0,x) = y^0(x),\ \ \partial_t y(0,x) = y^1(x).$$

Um aber $y(t, x)$ wirklich für alle $t \geq 0$ zu erhalten, muß man mehr über die zugrundeliegende Physik wissen. Die kinetische und die potentielle Energie sind durch

$$T(t) := \frac{1}{2}\int_0^l m(x)\big(\partial_t y(t,x)\big)^2\,dx$$

und

$$U(t) := \int_0^l \mu(x)\Big\{\sqrt{1 + \big(\partial_x y(t,x)\big)^2} - 1\Big\}\,dx$$

gegeben. Dabei ist $m > 0$ die Materialdichte und $\mu > 0$ ein Materialfaktor.

Durch diese Festlegungen, insbesondere durch die Wahl der potentiellen Energie proportional zur Längenänderung, haben wir die Saite definiert. Hätten wir $U(t)$ zum Beispiel proportional zur Krümmung angenommen, dann würden wir den Balken beschreiben und eine Plattengleichung erhalten.

Damit kennen wir die Energie

$$E(t) := T(t) + U(t)$$

des Schwingungsvorgangs und fragen im folgenden nach Lösungen mit endlicher Energie, also $E(t) < \infty$ für alle $t \geq 0$. $E(t)$ kann als Norm in geeignet gewählten Räumen dienen.

Die Bewegungsgleichung für y erhält man dann aus physikalischen Integralprinzipien, die aus den Newtonschen Gesetzen folgen; denken Sie an das *Maupertiussche Prinzip* von der kleinsten Wirkung oder an das *Hamiltonsche Prinzip*, welches besagt, daß man das Funktional

$$J(u) := \int_{t_1}^{t_2} \{T(t) - U(t)\}\,dt$$

stationär machen muß. Das heißt, y ist durch

$$\forall\, \varphi \in \mathring{\mathcal{C}}_\infty\big((t_1,t_2) \times I\big) \qquad \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

charakterisiert. Führt man die Rechnung aus, dann folgt

$$m\,\partial_t^2 y = \frac{\partial}{\partial_x}\,\frac{\mu\,\partial_x y}{\sqrt{1+(\partial_x y)^2}}.$$

Dies ist eine nichtlineare Wellengleichung und zunächst schwer zu behandeln.

Um weiterzukommen hat man schon früh das Problem vereinfacht oder „linearisiert". Das heißt, man betrachtet nur kleine Auslenkungen und ersetzt in U den Term

$$\sqrt{1+(\partial_x y)^2}$$

durch

$$1+\frac{1}{2}\left(\partial_x y\right)^2.$$

Man ersetzt $U(t)$ also durch

$$U_1(t) := \frac{1}{2}\int_0^l \mu(x)\big(\partial_x y(t,x)\big)^2\,dx.$$

Rechnet man mit dieser Energie weiter, dann folgt die lineare Wellengleichung

$$m\,\partial_t^2 y = \frac{\partial}{\partial_x}\left(\mu\,\partial_x y\right).$$

Natürlich muß man diesen Prozeß der Linearisierung rechtfertigen. In §1.2.2 wurde bereits angedeutet, daß in $\mathbb{R}^1$ Lösungen nichtlinearer Gleichungen im allgemeinen Singularitäten (Stoßwellen) entwickeln. In höheren Dimensionen läßt sich jedoch zeigen, daß globale glatte Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen existieren können, jedenfalls bei kleinen Daten.

Im folgenden wollen wir auf diese Frage etwas eingehen. Wir behandeln eine nichtlineare Wellengleichung $\Box y = f(\nabla y,\cdots)$ und schreiben sie wie in §10.1.1 wieder als System, nämlich

$$\partial_t u + Au = F(u,\nabla u) \tag{6}$$

mit $u(0)=u^0$ und

$$A := -\begin{pmatrix} 0 & \nabla^{tr} \\ \nabla & o \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ o \end{pmatrix}.$$

Dabei sei $F = F(u,\nabla u) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^{(n+1)^2},\mathbb{R})$ mit

$$\big|F(u,\nabla u)\big| = \mathcal{O}\big((|u|+|\nabla u|)^{\alpha+1}\big) \quad \text{für } |u|+|\nabla u|\to 0$$

und $\alpha=\alpha(n)\in\mathbb{N}$. Für $n\geq 6$ kann man $\alpha=1$ zulassen, im Falle $n=3$ gilt dies jedoch nur für spezielle f, die einer „Nullbedingung" genügen. Es ist $\alpha(5)=\alpha(4)=\alpha(3)=2$ und $\alpha(2)=3$.

Die weiteren Überlegungen sind teilweise sehr technisch und sollen nur angedeutet werden. Wir folgen dabei der Arbeit *Klainerman & Ponce [1983]* und verweisen wegen weiterer Einzelheiten auch auf das Buch *Racke [1992]*. Man geht dabei folgendermaßen vor:

Als erstes zeigt man die Existenz von Lösungen für kleine t. Entsprechende lokale Existenzsätze sind bereits länger bekannt und können zum Beispiel durch Verwenden des Banachschen Fixpunktsatzes bewiesen werden. Solche Lösungen besitzen eine gewisse „Lebensdauer" $T(u^0)$, die um so größer wird, je „kleiner" die Anfangsdaten u^0 sind. Man verschafft sich dann im zweiten Schritt „Energieabschätzungen" für solche Lösungen. Der dritte Schritt ist entscheidend, und er soll wirklich ausgeführt werden. Im §10.1.1 haben wir bereits das asymptotische Verhalten der Lösungen der linearen Gleichungen studiert und $\mathcal{L}^p$–$\mathcal{L}^q$ Abschätzungen bewiesen. Für große t verschwinden solche Lösungen also in einer geeigneten Norm. Das nutzt man aus und sorgt – durch Wahl kleiner Anfangsdaten – dafür, daß die Lösung der nichtlinearen Gleichung so lange lebt, bis der dispersive lineare Einfluß stark genug ist und sie am Explodieren hindert.

10.2.1 Ein lokaler Existenzsatz

Es ist bekannt, daß die Einbettung

$$\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{BC}(\mathbb{R}^n)$$

für $s>n/2$ stetig ist (vgl. *FA, §6.6.2*). Es gibt also ein κ_s mit

$$\forall\, w\in\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^n) \qquad \big|w(x)\big| \leq \kappa_s\,\|w\|_{\mathcal{L}_s^2} \quad \text{für fast alle } x\in\mathbb{R}^n.$$

Es sei ferner

$$g_1 := \kappa_s \, \|u^0\|_{\mathcal{L}^2_s}.$$

Dann gilt

Satz 10.2.1: *Es seien $u^0 \in \mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{N}$ mit $s > \frac{n}{2} + 1$ und $g_2 > g_1$ fest gewählt. Dann ist die Anfangsrandwertaufgabe (6) lokal eindeutig lösbar. Es gibt ein $T > 0$ und eine Lösung $u \in \mathcal{BC}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ von Gleichung (6) mit*

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n} \big|u(t,x)\big| \le g_2$$

und

$$u \in \mathcal{C}_0\big([0,T], \mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^n)\big) \cap \mathcal{C}_1\big([0,T], \mathcal{L}^2_{s-1}(\mathbb{R}^n)\big).$$

Dabei ist T eine Funktion von $\|u^0\|_{\mathcal{L}^2_s}$ und g_2.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in *Racke [1992], S. 59–76.* Dort wird auch gezeigt, daß eine Konstante $c(g_2)$ existiert mit

$$T \ge \frac{c(g_2)}{\|u^0\|_{\mathcal{L}^2_s}}.$$

Damit gilt für die Lebensdauer

$$T_\infty := \sup\big\{\, T \;\big|\; u(t) \text{ existiert in } [0,T] \,\big\}$$

einer Lösung von Satz 10.2.1

$$T_\infty \ge \frac{c(g_2)}{\|u^0\|_{\mathcal{L}^2_s}}.$$

Ist speziell $u^0 = \varepsilon\varphi$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in \mathcal{L}^2_s$, dann folgt für festes φ und $\varepsilon \to 0$

$$T_\infty(\varepsilon) \ge \frac{c(g_2)}{\varepsilon}.$$

Diese elementare Abschätzung der Lebensdauer kann man verschärfen. In $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \, \ln\big(T_\infty(\varepsilon)\big) > 0.$$

10.2.2 Energieabschätzungen

Im zweiten Schritt beweist man nun „Energieabschätzungen" für die im ersten Schritt gefundene lokale Lösung, nämlich

Satz 10.2.2: *Es sei u die Lösung nach Satz 10.2.1 in $[0,T]$. Dann gilt*

$$\forall\, s \in \mathbb{N}_0 \quad \exists\, c_s \in \mathbb{R}^+ \quad \forall\, t \in [0,T]$$

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}^2_s} \le c_s \, \|u^0\|_{\mathcal{L}^2_s} \exp\Big(c_s \int_0^t \big|Du(\tau)\big|^\alpha \, d\tau\Big).$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man in *Racke [1992], S. 79 und 92.* Er soll am Beispiel

$$u_t + A\,u = F(u, \nabla u) \quad \text{ mit } f(y) = (\partial_t y)(\partial_1\partial_2 y)$$

erläutert werden. Wie in §10.1.1 sei dabei $u = Dy$. Man approximiert zunächst die Anfangswerte u^0 durch glattere Funktionen u^0_j, damit für die Lösungen u_j partielle Integrationen bzgl. des $\mathbb{R}^n$ möglich werden (ohne Randterme im Unendlichen). Dieser Index j wird im folgenden unterdrückt. Dann ist

$$\frac{1}{2}\,\partial_t\,\big\{\|\partial_t y\|^2 + \|\nabla y\|^2\big\} = \big(\partial_t y, f(y)\big),$$

also

$$\partial_t \|u\|^2 \le 2\,\|u\|^2\,\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$

Aus dem Gronwallschen Lemma folgt deshalb

$$\forall\, t \in [0,T] \qquad \|u(t)\|^2 \le \|u^0\|^2 \exp\Big(2 \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{\mathcal{L}^\infty} \, d\tau\Big).$$

Abschätzungen für die höheren Ableitungen erhält man analog durch Differenzieren der Differentialgleichung, etwa mit $\beta \in \mathbb{N}^n$

$$\frac{1}{2}\,\partial_t\big\{\|\partial_t\partial^\beta y\|^2 + \|\nabla\partial^\beta y\|^2\big\} = \big(\partial_t\partial^\beta y, \partial^\beta f(y)\big)$$

oder

$$\partial_t\|\partial^\beta u\|^2 \le 2\,\big|\big(\partial_t\partial^\beta y, \partial^\beta f(y)\big)\big|.$$

Auch dieser Term läßt sich nach einigen Umformungen in der gewünschten Form abschätzen. Wegen der Einzelheiten sei wieder auf das Buch von *Racke [1992], S. 80,* verwiesen.

10.2.3 Ein globaler Existenzsatz

Exemplarisch sei $n \ge 6$, dann ist $\alpha = 1$. Wir wählen ferner

$$p := \frac{2\alpha+2}{2\alpha+1} = \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad q := 4.$$

Schließlich seien $\tau :> \frac{n}{4} + 2$, $\rho :> \tau + N_p$ und $\sigma := 1 + \rho$, sowie mit $\nu = (n-1)/4$

$$M(T) := \sup_{t\in[0,T]} (1+t)^\nu\,\|u(t)\|_{\mathcal{L}^q_\tau}.$$

Dabei ist $u \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$ die in §10.2.1 gefundene lokale Lösung und N_p die in Satz 10.1.1 auftretende Konstante. Als erstes zeigen wir

Satz 10.2.3: *Es seien* $u^0 \in \mathcal{L}^2_\sigma \cap \mathcal{L}^p_\rho$ *und*

$$\delta := \|u^0\|_{\mathcal{L}^2_\sigma} + \|u^0\|_{\mathcal{L}^p_\rho}.$$

Dann gilt

$$\exists\, M_0 > 0 \quad \exists \delta_0 > 0 \quad \forall\,\delta \le \delta_0 \quad \forall\, T > 0 \qquad M(T) \le M_0.$$

Die Konstante M_0 hängt also nicht von T ab.

Zum Beweis dieser Abschätzung gehen wir von der Duhamelschen Darstellung

$$u(t) = \mathrm{e}^{-At}u^0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}F(u,\nabla u)(s)\,ds$$

aus. Um den Integranden abzuschätzen, benutzen wir den Sobolevschen Einbettungssatz

$$\mathcal{L}^r_{m+j} \hookrightarrow \mathcal{BC}_j$$

für $rm > n$, also

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_1} \le c\,\|u\|_{\mathcal{L}^q_\tau}.$$

Aus der Differentialgleichung kennt man auch $\partial_t u$, mithin gilt sogar

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|Du\|_{\mathcal{L}^\infty} \le c\,\|u\|_{\mathcal{L}^q_\tau}.$$

Außerdem benötigt man noch eine Abschätzung für Produkte von Funktionen, nämlich

$$\|F\|_{\mathcal{L}^p_\rho} \le c\,\|u\|_{\mathcal{L}^2_\sigma}\,\|u\|_{\mathcal{L}^q_\tau}.$$

Der Beweis folgt durch partielles Integrieren und geschicktes Manipulieren mit der Hölderschen Ungleichung. Sie finden ihn ebenfalls ihn *Racke [1992], S. 84 und 92.*

Verwenden wir dies, dann folgt

$$\int_0^t \|Du\|_{\mathcal{L}^\infty} \le c\,M(T)\int_0^t \frac{ds}{(1+s)^\nu} \le c\,M(T),$$

und (zusammen mit der Energieabschätzung)

$$\|F\|_{\mathcal{L}^p_\rho} \le c\,\|u\|_{\mathcal{L}^q_\tau}\,\delta\,\exp\left(c\,M(T)\right).$$

Außerdem gilt für die Lösung

$$U(t) := e^{-At} u^0$$

der linearen Gleichung nach Satz 10.1.1

$$\|U(t)\|_{\mathcal{L}^q_\tau} \leq c \, \frac{1}{(1+t)^\nu} \, \|u^0\|_{\mathcal{L}^p_\rho}.$$

Aus der Duhamelschen Darstellung von $u(t)$ erhalten wir deshalb

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}^q_\tau} \leq c \Big\{ \frac{\delta}{(1+t)^\nu} + \int_0^t \frac{1}{(1+t-s)^\nu} \, \|F\|_{\mathcal{L}^p_\rho}(s) \, ds \Big\}$$

oder

$$\begin{aligned}(1+t)^\nu \, \|u(t)\|_{\mathcal{L}^q_\tau} &\leq c\,\delta \Big\{ 1 + \exp\left(c\, M(T)\right) (1+t)^\nu \int_0^t \frac{\|u(s)\|_{\mathcal{L}^q_\tau}}{(1+t-s)^\nu} \, ds \Big\} \\ &\leq c\,\delta \Big\{ 1 + c\, M(T) \exp\left(c\, M(T)\right) \Big\}.\end{aligned}$$

Letzteres folgt aus

$$(1+t)^\nu \int_0^t \frac{ds}{(1+s)^\nu \, (1+t-s)^\nu} \leq c < \infty.$$

Damit haben wir für $M(T)$ folgende Abschätzung bewiesen

$$M(T) \leq c\,\delta \Big\{ 1 + c\, M(T) \, \mathrm{e}^{cM(T)} \Big\}.$$

Dabei ist c die größere der auftretenden Konstanten.

Es sei nun

$$f(x) := c\,\delta \left\{ 1 + c\, x \, \mathrm{e}^{cx} \right\} - x.$$

Wir wählen δ_0 so klein, daß $f(x)$ für alle $\delta \leq \delta_0$ wie in Abbildung 10.2 skizziert verläuft. Es sollen also zwei verschiedene Nullstellen x_0 und x_1 von $f(x)$ existieren.

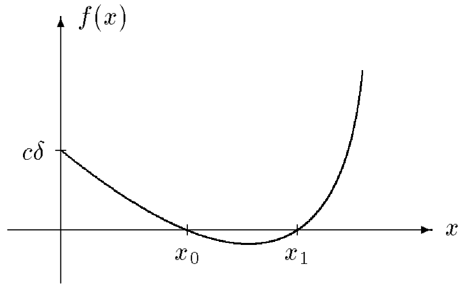

Abbildung 10.2.

Die Abbildung $t \to M(t)$ ist stetig. Das folgt aus $u \in \mathcal{C}_0\big([0,T], \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^n)\big)$ und

$$\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^q_\tau(\mathbb{R}^n).$$

Aus

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_\tau} \leq c\, \|u\|_{\mathcal{L}^2_{m+\tau}}$$

für $m > n/2$ erhält man nämlich

$$\|u\|^q_{\mathcal{L}^q_\tau} \leq \|u\|^2_{\mathcal{L}^\infty_\tau} \, \|u\|^2_{\mathcal{L}^2_\tau} \leq c\, \|u\|^2_{\mathcal{L}^2_{4+\tau}} \, \|u\|^2_{\mathcal{L}^2_\tau} \leq c\, \|u\|^q_{\mathcal{L}^2_\sigma}.$$

Mit $x = M(T)$ ist aufgrund unserer Abschätzung stets

$$f(x) \geq 0.$$

Mithin gilt für alle T entweder

$$0 \leq M(T) \leq x_0$$

oder

$$x_1 \leq M(T) < \infty.$$

Der zweite Fall kann aber wegen

$$M(0) \leq c\,\delta$$

und

$$x_0 > c\,\delta$$

nicht auftreten. Damit ist der Satz mit $M_0 := x_0$ bewiesen. □

Aus Satz 10.2.3 folgt nun eine a priori Abschätzung für unsere Lösung, nämlich

Satz 10.2.4: *Es sei u lokale Lösung unserer Aufgabe mit $\delta \leq \delta_0$. Dann gilt*

$$\exists\, K_\sigma > 0 \quad \forall\, t \in [0,T] \qquad \|u(t)\|_{\mathcal{L}^2_\sigma} \leq K_\sigma\, \|u^0\|_{\mathcal{L}^2_\sigma}.$$

Auch hier hängt die Konstante K_σ also nicht von T ab. Der Beweis folgt aus

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{\mathcal{L}^2_\sigma} &\leq c_\sigma\, \|u^0\|_{\mathcal{L}^2_\sigma}\, \exp\Big(c_\sigma \int_0^t \|Du(\tau)\|_{\mathcal{L}^\infty}\, d\tau\Big)\\ &\leq c_\sigma\, \|u^0\|_{\mathcal{L}^2_\sigma}\, \exp\big(c\, M(T)\big)\end{aligned}$$

mit

$$K_\sigma := c_\sigma\, \mathrm{e}^{cM_0}.$$ □

Nach diesen Vorbereitungen können wir unser Hauptresultat zeigen, nämlich

Satz 10.2.5: *Es gibt ein $\delta_1 > 0$ so, daß Anfangswertaufgabe (6) für alle*

$$\delta := \|u^0\|_{\mathcal{L}^2_\sigma} + \|u^0\|_{\mathcal{L}^p_\rho} \leq \delta_1$$

genau eine Lösung

$$u \in \mathcal{C}\big([0,\infty), \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})\big) \cap \mathcal{C}_1\big([0,\infty), \mathcal{L}^2_{\sigma-1}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})\big)$$

besitzt.

Beweis: Es sei u die lokale Lösung, definiert in $[0,T]$. Dann ist nach Satz 10.2.4

$$\|u(T)\|_{\mathcal{L}^2_\sigma} \leq K_\sigma\, \delta.$$

Wählt man

$$\delta_1 := \delta_0\, \min\big(1, 1/K_\sigma\big),$$

dann läßt sich der lokale Existenzsatz mit den Anfangswerten $u(T)$ wieder anwenden, und man erhält eine Lösung in $[0,2T]$ mit $\|u(2T)\|_{\mathcal{L}^2_\sigma} \leq K_\sigma\, \delta_1 \leq \delta_0$. So geht es weiter. □

Es folgen Abschätzungen der Form

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|Du(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq c\, \|u(t)\|_{\mathcal{L}^q_\tau} \leq c\, \frac{M_0}{(1+t)^\nu}$$

für $t \geq 0$.

10.2.4 Bemerkungen

In $\mathbb{R}^1$ entwickeln Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung immer Singularitäten. Das wurde von Fritz John, 1910–94, ab 1974 gezeigt. Bei großen Daten gilt das im allgemeinen auch in $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Von *John* wurde 1981 die Lebensdauer solcher Lösungen definiert und abgeschätzt. Andererseits wurde bereits [1961] von Konrad Jörgens, 1926–74, in $\mathbb{R}^3$ für spezielle $f = f(y)$ mit kubischem Wachstum und für große Daten die globale Existenz von Lösungen gezeigt. Es gibt auch ein Beispiel von Louis Nirenberg, *1925, zur globalen Existenz glatter Lösungen in $\mathbb{R}^3$ mit quadratischem Wachstum in f und für kleine Daten, nämlich

$$\partial_t^2 y - \Delta y = (\nabla y)^2 - (\partial_t y)^2$$

mit $y(0) = 0$ und $\partial_t y(0) = g$. Transformiert man hier

$$v := \mathrm{e}^y ,$$

dann folgt

$$\partial_t^2 v = \Delta v \quad \text{ mit } v(0) = 1 \text{ und } \partial_t v(0) = g.$$

Diese Gleichung läßt sich mit der Kirchhoffschen Formel explizit lösen, nämlich

$$v(t,x) = 1 + \frac{t}{4\pi} \int_{\omega \in S^2} g(x - t\omega)\, d\omega ,$$

also

$$y(t,x) = \ln\Big(1 + \frac{t}{4\pi} \int_{\omega \in S^2} g(x - t\omega)\, d\omega\Big).$$

Aus dieser expliziten Darstellung der Lösung folgert man unmittelbar, daß sie bei beliebigem g nicht für alle t existiert (zum Beispiel für $g = -1$). Verschwindet g jedoch im Unendlichen, dann können wir abschätzen: Für $t \geq 1$ ist

$$\Big| t \int_{\omega \in S^2} \cdots \Big| = \Big| t \int_{\omega \in S^2} \int_t^\infty \frac{d}{ds} g(x - s\omega)\, ds\, d\omega \Big| \leq \frac{1}{t} \left\|\nabla g\right\|_{\mathcal{L}^1}.$$

Sind $\|\nabla g\|_{\mathcal{L}^1}$ und $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty}$ genügend klein, dann existiert y für alle t.

Für eine große Klasse rechter Seiten wurde die globale Existenz glatter Lösungen bei kleinen Daten von *Klainerman* 1980 und 1982 bewiesen. Dazu verwendet er einmal einen lokalen Existenzsatz, der auf *Schauder*, 1935, und *Kato*, 1975, zurückgeht, und zum anderen zunächst ein recht kompliziertes Iterationsschema mit Nash-Moser Technik. In einer weiteren Arbeit, gemeinsam mit *Ponce*, verwendet er dann 1983 $\mathcal{L}^p - \mathcal{L}^q$ Abschätzungen für die Lösungen der linearen Gleichung und erhält einen eleganten Existenzbeweis, der hier vorgeführt wurde.

Dabei kann man für F in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 6$, quadratisches Wachstum zulassen. Auch für $n = 4, 5$ gilt das; allerdings muß dann der Beweis, insbesondere die $\mathcal{L}^1 - \mathcal{L}^\infty$ Abschätzung, modifiziert werden, indem man $\mathcal{L}^1$-Normen durch $\mathcal{L}^2$-Normen geeigneter Γu ersetzt. Diese Γ sind Differentialoperatoren, die die Wellengleichung invariant lassen (*Klainerman* 1985, *Christodoulou* 1986 und *John* 1987). Auch in $\mathbb{R}^3$ gibt es bei quadratischem Wachstum von F globale glatte Lösungen, wenn die Nichtlinearität eine „Null-Bedingung“ erfüllt (*Klainerman* 1986). Man denke an das Beispiel von Nirenberg. Anfangsrandwertaufgaben in Außengebieten wurden von *Shibata* und *Tsutsumi* (1983 – 86) gelöst. Inzwischen wurden auch inhomogene und anisotrope Medien behandelt und viele andere Gleichungen aus der Mathematischen Physik. Die Zitate kann man dem Artikel von *John [1990]* und dem Buch von *Racke [1992]* entnehmen.

Neben der bereits zitierten Literatur sei auch auf das Buch von *Li Ta-Tsien [1994]* und auf die Übersichtsartikel von *Kato [1985]*, *John [1990]* sowie *Strauss [1989]* besonders hingewiesen.

Literaturverzeichnis

Adams, R. A. [1975]: Sobolev spaces. Academic Press, New York.

Agmon, S. [1965]: Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand, Princeton.

— [1990]: A Representation Theorem for Solutions of the Helmholtz Equation and Resolvent Estimates for the Laplacian. ANALYSIS ET CETERA. P.H. Rabinowitz & E. Zehnder (ed.). Academic Press.

Beer, A. [1856]: Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induction. Poggendorfs Annalen 98, 137–142.

Bemelmans, J., St. Hildebrandt und W. von Wahl [1990]: Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Ein Jahrhundert Mathematik, 1890–1990, Festschrift zum Jubiläum der DMV. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig et al. S. 149–230.

Courant, R. [1920]: Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Math. Z. 7, 1–57.

Courant, R. and D. Hilbert [1962]: Methods of Mathematical Physics II. Interscience Publishers, New York et al.

Courant, R. und D. Hilbert [1993]: Methoden der mathematischen Physik. Springer-Verlag, Berlin et al.

Dieudonné, J. [1981]: History of functional analysis. North-Holland, Amsterdam et al.

Dollard, J. [1964]: Asymptotic convergence and the Coulomb interaction. J. Math. Phys. 5, 729–739.

Fredholm, I. [1903]: Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math. 27, 365–390.

Friedrichs, K. O. [1954]: Symmetric hyperbolic linear differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 7, 345–392.

Giesecke, B. [1964]: Zum Dirichletschen Prinzip für selbstadjungierte Differentialoperatoren. Math. Z. 86, 54–62.

Gilbarg, D. and N.S. Trudinger [1977]: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, New York et al.

Glimm, J. [1965]: Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems and equations. Comm. Pure Appl. Math. 18, 697–715.

Hadamard, M. [1906]: Sur le principe de Dirichlet. Bull Soc. Math. France 34, 135–138.

Hellwig, G. [1960]: Partielle Differentialgleichungen. B.G. Teubner, Stuttgart.

Hilbert, D. [1905]: Über das Dirichletsche Prinzip. J. Reine Angew. Math. 129, 63–67.

— [1912]: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen. B.G. Teubner, Leipzig.

Hopf, E. [1950]: The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math. 3, 201–230.

Hörmander, L. [1983–85]: The Analysis of Partial Differential Operators I – IV. Springer-Verlag, Berlin et al.

Hurwitz, A. und R. Courant [1964]: Funktionentheorie. Springer-Verlag, Berlin et al. (Erste Auflage 1922)

Jantscher, L. [1971]: Distributionen. De Gruyter, Berlin et al.

John, F. [1982]: Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York et al.

— [1990]: Nonlinear Wave Equations, Formation of Singularities. University Lecture Series 2. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Jörgens, K. [1961]: Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen Math. Z. 77, 295–308.

Kac, M. [1966]: Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly 73 (4), 1–23.

Kato, T. [1976]: Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, Berlin et al.

— [1985]: Abstract differential equations and nonlinear mixed problems. Lezioni Fermiane. Accademia Nationale Dei Lincei, Scuola Normale Superiore, Pisa.

Klainerman, S. and G. Ponce [1983]: Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations. Comm. Pure Appl. Math. 36, 133–141.

Korn, A. [1909]: Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen. Bull. int. Cracovie Akad. Classe sci. math. nat. 705–724.

Ladyzhenskaya, O. [1969]: The mathematical theory of viscous incompressible flow. Gordon and Breach, New York et al.

Lax, P.D. [1957]: Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm. Pure Appl. Math. 10, 537–566.

Lax, P. and A. Milgram [1954]: Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential equations. Ann. Math. Studies No. 33, 167–190, Princeton.

Lax, P. D. and R. S. Phillips [1967]: Scattering theory. Academic Press, New York et al.

Lebesgue, H. [1912]: Sur le problème de Dirichlet. C. R. Acad. Sc. Paris 154, 335–337.

— [1913]: Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire. C. R. Séances Soc. Math. France 41.

— [1924]: Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet. C. R. Acad. Sc. Paris 178, 349-354.

— [1937]: Sur la méthode de Carl Neumann. J. Math. Pures Appl. 9 ser. 16, 205–217, 421–423.

Leis, R. [1986]: Initial boundary value problems in mathematical physics. Stuttgart; John Wiley & Sons, Chichester et al.

— [1990]: Zur Entwicklung der angewandten Analysis und mathematischen Physik in den letzten hundert Jahren. Ein Jahrhundert Mathematik, 1890–1990, Festschrift zum Jubiläum der DMV. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig et al. S. 491–535.

— [1997]: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn.

Li Ta-Tsien [1994]: Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems. Wiley, Chichester et al.

Magnus, W., F. Oberhettinger and R. P. Soni [1966]: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Springer-Verlag, New York et al.

Monna, F. [1975]: Dirichlet's principle. A mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis. Oosthoek, Scheltema & Holkema; Utrecht.

Müller, C. [1954]: On the behavior of the solutions of the differential equation $\Delta u = F(x, u)$ in the neighbourhood of a point. Comm. Pure Appl. Math. 7, 505–515.

— [1957]: Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Springer-Verlag, Berlin et al.

Neumann, C. [1877]: Untersuchungen Über das logarithmische und Newtonsche Potential. B.G. Teubner; Leipzig.

— [1887/88]: Über die Methode des arithmetischen Mittels I, II. Leipziger Abh. 13, 707–820 und 14, 565–726.

Nirenberg, L. [1955]: Remarks on strongly elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 8, 649–675.

Oleinik, O. [1957]: Discontinuous solutions of non-linear differential equations. Usp. Mat. Nauk (N.S.) 12, 3–73 und AMS Transl. (2) 26, 95–172, (1963).

Pearson, D. B. [1978]: Singular continuous measures in scattering theory. Comm. Math. Phys. 60, 13–36.

Pecher, H. [1976]: $\mathcal{L}^p$-Abschätzungen und klassische Lösungen für nichtlineare Wellengleichungen I. Math. Z. 150, S. 159–183.

Picard, R. [1984]: An elementary proof for a compact imbedding result in generalized electromagnetic theory. Math. Z. 187, 151–164.

— [1985]: On a structural observation in generalized electromagnetic theory. J. Math. Anal. Appl. 110, 247–264.

Protter, M. [1960]: Unique continuation for elliptic equations. Trans. Amer. Math. Soc. 95, 81–91.

Prym, F. E. [1871]: Zur Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. J. reine angew. Math. 73, 340–364.

Racke R. [1992]: Lectures on Nonlinear Evolution Equations. Vieweg & Sohn, Braunschweig et al.

Reed, M. and B. Simon [1972–78]: Methods of Modern Mathematical Physics I–IV. Academic Press, New York.

Riemann, B. [1854]: Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. In: Bernhard Riemann, Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge. Herausgegeben von H. Weber. B.G. Teubner-Verlag, Leipzig. Zweite Auflage 1892.

Rellich, F. [1943]: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. Jber. Dt. Math.-Verein. 53, 57–65.

Renardy, M. and R. C. Rogers [1993]: An Introduction to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York et al.

Seeley, R. T. [1978]: A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of $\mathbb{R}^3$. Adv. Math. 29, 244–269.

Smoller, J. [1983]: Shock waves and reaction-diffusion equations. Springer-Verlag, New York et al.

Sommerfeld, A. [1912]: Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jber. Dt. Math.-Verein. 21, 309–353.

— [1949]: Vorlesungen über Theoretische Physik. Bd. II. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig.

Strauss, W. [1989]: Nonlinear Wave Equations. CBMS Series 73, Amer. Math. Soc., Provindence, Rhode Island.

Triebel, H. [1972]: Höhere Analysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Weber, Ch. [1980]: A local compactness theorem for Maxwell's equations. Math. Meth. in the Appl. Sci. 2, 12–25.

Weck, N. [1969]: Klassische Lösungen sind auch schwache Lösungen. Archiv d. Math. XX, 628–637.

— [1974]: Maxwell's boundary value problem on Riemannian manifolds with nonsmooth boundaries. J. Math. Anal. Appl. 46, 410–437.

— [1994]: Local compactness for linear elasticity in irregular domains. Math. Meth. in the Appl. Sci. 17, 107–113.

Weierstraß, K. [1870]: Über das sogenannte Dirichlet'sche Princip. Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 14. 7. 1870.

Weyl, H. [1940]: The method of orthogonal projection in potential theory. Duke Math. J. 7, 411–444.

Wiener, N. [1924]: Certain notions in potential theory. J. Math. Phys. 3, 24–51, 305–306.

— [1924]: The Dirichlet problem. J. Math. Phys. 3, 127–146.

Wilcox, C. H. [1975]: Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains. Springer Lect. Notes Math. 442, Berlin et al.

Witsch, K. J. [1993]: A remark on a compactness result in electromagnetic theory. Math. Meth. in the Appl. Sci. 16, 123–129.

Wloka, J. [1982]: Partielle Differentialgleichungen. B.G. Teubner Stuttgart.

Yosida, K. [1974]: Functional Analysis. Springer-Verlag, New York et al.

Zaremba, S. [1911]: Sur le principe de Dirichlet. Acta Math. 34, 293–316.

Bezeichnungen

Namen- und Sachverzeichnis