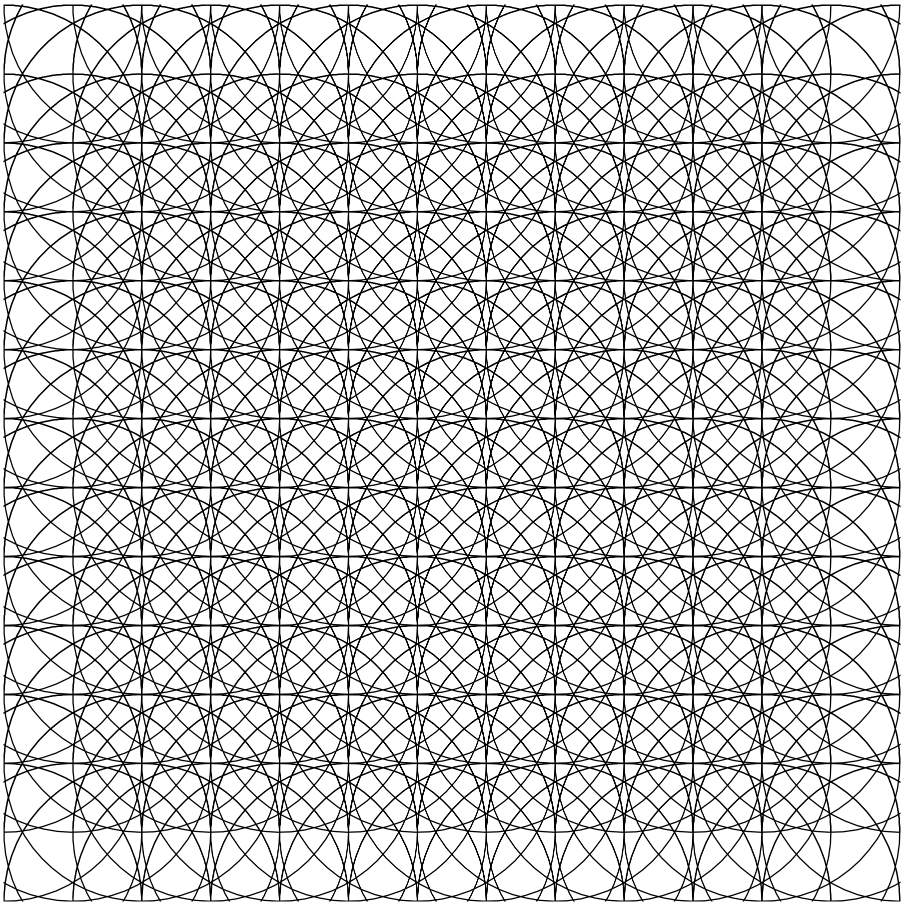
Gewöhnliche Differentialgleichungen

Prof. Dr. D. Hinrichsen

ausgearbeitet von

Martin Cebulla   Tilman Hetsch   Tanja Vocke



Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skript basiert auf der Vorlesung „gewöhnliche Differentialgleichungen“, die Professor D. Hinrichsen im Sommersemester 1995 an der Universität Bremen hielt. Es dient der Einführung in die grundlegenden Fragen und Methoden der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und soll darüber hinaus einige weiterführende Problemstellungen behandeln.
Dabei werden im ersten Kapitel zunächst die notwendigen Grundbegriffe und einige elementare Lösungsmethoden, vor allen Dingen in Bezug auf die leicht zu handhabenden linearen Differentialgleichungen, eingeführt. Daran anschließend stellt das zweite Kapitel Systeme von Differentialgleichungen vor und liefert mit dem Theorem von Picard-Lindelöf einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen beliebiger Differentialgleichungen. Im dritten Kapitel gehen wir auf allgemeine Lösungsmethoden von zeitinvarianten linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung ein, untersuchen die Stabilitätseigenschaften homogener Systeme und geben einen kurzen Einblick in die Regelungstheorie. Auf die Ergebnisse des dritten Kapitels aufbauend, behandelt das vierte Kapitel zeitvariante lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung und führt über die Frage nach der Existenz periodischer Lösungen zur Floquet-Theorie. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit den Voraussetzungen für die stetige, beziehungsweise differenzierbare Abhängigkeit von Differentialgleichungen von gegebenen Parametern. Abschließend bietet das sechste Kapitel einige wesentliche Aspekte der Stabilitätstheorie auf Grundlage des von Ljapunov geprägten Stabilitätsbegriffes.

Wir hoffen, dieses Skript von seiner Konzeption her so angelegt zu haben, daß es die selbstständige Nachbereitung des Stoffes sowie eventuelle Prüfungsvorbereitungen erleichtert. Dieser Grundgedanke soll durch eine ausführliche Beweisführung, zahlreiche Graphiken und einen breit angelegten Index unterstützt werden. Zudem schließen die meisten Paragraphen mit einem ausgearbeiteten Beispiel ab, das die Anwendung der Methoden und Begriffe des vorangegangenen Abschnitts illustriert. Um den Übergang zur englischsprachigen Literatur zu vereinfachen, werden die wichtigsten Fachbegriffe übersetzt und in Form von Fußnoten angegeben. Das Layout des Skriptes entstand unter Benutzung des Textverarbeitungsprogramms LaTeX; die eingebundenen Graphiken lieferte das Programmpaket „MATLAB". Die gesamte verwendete Literatur ist in der Universitätsbibliothek ausleihbar. Die Einzeltitel, ihre Standorte sowie eine Kurzbeschreibung finden sich im Literaturverzeichnis.

Wir danken Herrn Prof. Hinrichsen für seine Geduld, das in uns gesetzte Vertrauen und die großen redaktionellen Freiheiten. Sehr herzlich möchten wir uns auch bei Herrn Dr. Andrew Paice bedanken, der nicht nur Korrektur las, sondern das Projekt auch während der gesamten sechs Monate betreute und dabei stets ein offenes Ohr für unsere Probleme und technischen Schwierigkeiten zeigte. Drei der umfangreichen Beispiele stammen ursprünglich von seinen im Rahmen des Tutoriums ausgeteilten Arbeitsunterlagen, die von uns lediglich in den Text eingepaßt wurden. Schließlich verdanken wir Dirk Brunsen das „Cyclopropan"-Beispiel in der Einleitung und Nils T. Siebel den Widerspruchspfeil und zahllose technische Raffinessen.

Martin Cebulla, Tilman Hetsch und Tanja Vocke

Bremen, September 1996

Einleitung

Vor dem eigentlichen Einstieg in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen [1] , sollen hier einige grundlegende Begriffe anhand von zwei Beispielen erläutert werden. Obwohl die beiden vorgestellten Beispiele aus ganz unterschiedlichen Bereichen der Naturwissenschaften stammen, führen sie interessanterweise zu derselben einfachen Differentialgleichung. Ziel dieses Abschnitts ist es, den Leser, vorgreifend auf die zum Teil recht abstrakte Begriffsbildung in Paragraph 1, mit typischen Problemstellungen der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen vertraut zu machen. Differentialgleichungen sind im weitesten Sinne mathematische Ausdrücke, die eine Beziehung zwischen einer Funktion $x(\cdot)$ und ihren Ableitungen $x^{(1)}(\cdot), \cdots, x^{(n)}(\cdot)$ herstellen. Dabei versteht man unter der Ordnung einer Differentialgleichung die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung. Am einfachsten sind dabei die Differentialgleichungen erster Ordnung zu behandeln, wie zum Beispiel

$$\dot{x}(t) = \sqrt[3]{x^2(t)} + 3\,t.$$

Bezeichnet f eine beliebige stetige Funktion und t wie gewohnt die Zeit, so lautet die allgemeine Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \tag{1}$$

Unter der Lösung einer solchen Differentialgleichung versteht man jede differenzierbare Funktion $\varphi(t)$, die ihrer Bestimmungsgleichung genügt. Die Funktion $x(t)$ steht also im Fall der Lösbarkeit für die Lösung oder gegebenenfalls für eine ganze Klasse von Lösungen.

Man unterscheidet üblicherweise zwischen gewöhnlichen und partiellen [2] Differentialgleichungen. Während gewöhnliche Differentialgleichungen sich dadurch auszeichnen, daß sie nur von einer einzigen Variable abhängen, treten bei partiellen Differentialgleichungen verschiedene unabhängige Variablen und dementsprechend partielle Ableitungen auf. So erfüllt etwa die Funktion

$$u(x, y) = xy$$

[1] eng.: ordinary differential equations, (ode)

[2] partial

die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_x + u_y = x + y$$

Mit Hilfe dieser Theorie lassen sich weiterführende Fragestellungen behandeln; sie ist jedoch Gegenstand eines eigenen Kurses.

Die häufige Verwendung von Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften beruht auf der Möglichkeit, Prozesse oder dynamische Systeme mit Hilfe der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen analysieren zu können. Eine erstaunlich große Klasse von Problemen wird damit einer mathematischen Beschreibung zugänglich, etwa:

- Populationsmodelle (vgl. Wachstum von Bakterienstämmen, Seite 54)
- Ausbreitungsgesetze für Epidemien
- Räuber-Beute-Modelle
- Reaktionsgeschwindigkeiten und Konzentrationsbestimmungen bei chemischen Prozessen
- Berechnung von Erdbebenwellen
- Tragflügelkonstruktionen, Schiffsbau
- sowie eine Vielzahl physikalischer Systeme aus der klassischen Mechanik wie etwa Pendel, schwingende Saiten oder gekoppelte Federpendel (vgl. Seite 144)

Beispiel: Der radioaktive Zerfall
Bekanntlich verhält sich die Geschwindigkeit des Zerfalls einer radioaktiven Substanz proportional zur Menge des vorhandenen Materials. Bezeichne $x(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge des betrachteten Isotops, so ist die Zerfallsgeschwindigkeit $\dot{x}(t)$ durch die Gleichung

$$\dot{x}(t) = -k\,x(t) \tag{2}$$

gegeben. Dabei stellt $k > 0$ einen konstanten Proportionalitätsfaktor dar, der die Zerfallsrate repräsentiert. Diese läßt sich abhängig vom betrachteten Isotop experimentell bestimmen. Gesucht ist nun eine differenzierbare Funktion φ, deren Ableitung der Gleichung (2) genügt. Da die Lösung einer Differentialgleichung stets eine Integration erfordert, enthält die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung im allgemeinen eine zunächst nicht näher bestimmte Konstante $c \in \mathbb{R}$. Um c eindeutig festzulegen, benötigen wir eine zusätzliche Information. Dazu sei noch die Menge x^0 des spaltbaren Materials zu Beginn der Beobachtung bekannt:

$$x(t_0) = x^0. \tag{3}$$

Das Paar, bestehend aus der Differentialgleichung (2) und der sogenannten *Anfangsbedingung* (3), heißt *Anfangswertaufgabe* oder *Anfangswertproblem.* [(3)]

In diesem Fall läßt sich die Lösung des Anfangswertproblems leicht angeben und durch Differenzieren sofort verifizieren. Sie lautet:

$$\varphi(t) = x^0\, e^{-k\,(t-t_0)},$$

denn tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= -k\, x^0\, e^{-k\,(t-t_0)}\\ &= -k\, \varphi(t),\end{aligned}$$

so daß die Funktion $\varphi(t)$ die Differentialgleichung (2) löst. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) &= x^0\, e^{-k\,(t_0-t_0)}\\ &= x^0,\end{aligned}$$

wonach auch die Anfangsbedingung erfüllt wäre. □

Das zweite Beispiel soll demonstrieren, wie man in einigen einfachen Fällen zur Lösung einer Differentialgleichung gelangen kann.

Beispiel: Die Isomerisierung einer organischen Verbindung
Durch Ringspaltung entsteht aus Cyclopropan in der Gasphase Propen bei einer Temperatur oberhalb von 450 $^\circ C$. Dabei wird das Reaktionsprodukt lediglich durch eine strukturelle Umlagerung der Atome des Cyclopropans, die sogenannte Isomerisierung, gebildet. Reaktionen wie diese, an deren geschwindigkeitsbestimmenden Schritt nur ein Molekül beteiligt ist, heißen unimolekular. Es handelt sich hierbei um eine Reaktion erster Ordnung, d.h. die Reaktionsgeschwindigkeit ist direkt proportional zur Menge der vorhandenen Ausgangsstoffe.

Bezeichne $x_c(t)$ die Konzentration des Cyclopropans zur Zeit t und $x_p(t)$ die entsprechende Konzentration des Propens, so erhält man folgendes Geschwindigkeitsgesetz:

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = k\, x_p(t)$$

Analog gilt für den Zerfall des Cyclopropans:

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -k\, x_c(t),$$

(3) initial value problem

mit demselben Proportionalitätsfaktor k, da das Cyclopropan unmittelbar in Propen umgewandelt wird.
Nehmen wir nun in einem Gedankenexperiment an, in einem abgeschlossenen System ist zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eine Ausgangskonzentration $x_c(0) = x_0$ des Cyclopropans vorhanden, ferner sei $x_p(0) = 0$. Für die nun stattfindende Reaktion werden ein Bildungs- und ein Zerfallsgesetz gesucht, welche die Größe der momentanen Konzentration beider Stoffe zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_1 > t_0$ angeben. Da das vorhandene Cyclopropan vollständig in Propen umgewandelt

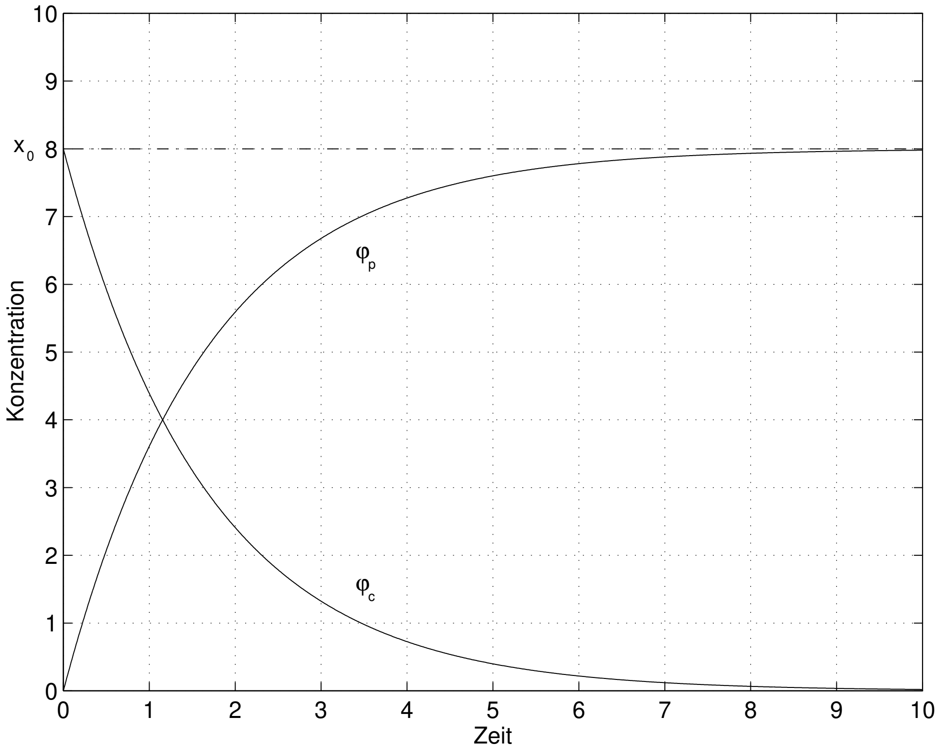


Abbildung 1: *Die Abbildung zeigt die Konzentrationen des Propens und des Cyclopropans in Abhängigkeit von der Zeit.*

wird, ist evident, daß zu jeder Zeit t

$$x_c(t) + x_p(t) = x^0$$

gelten muß. Die Gleichungen für das Bildungs-, beziehungsweise Zerfallsgesetz erhält man durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rrcl}
 & \dot{x}_c(t) & = & -k\,x_c(t) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\dot{x}_c(t)}{x_c(t)} & = & -k \\
\Leftrightarrow & \ln|x_c(t)| & = & \displaystyle\int -k\,dt, \quad \text{wegen} \quad \frac{d}{dt}\ln|x_c(t)| = \frac{\dot{x}_c(t)}{x_c(t)} \\
\Leftrightarrow & \ln|x_c(t)| & = & -k\,t + c \\
\Leftrightarrow & |x_c(t)| & = & e^{-k\,t+c} \\
\Leftrightarrow & x_c(t) & = & e^c\,e^{-k\,t} \quad , \quad \text{oder} \\
 & & = & -e^c\,e^{-k\,t}, \quad \text{da stets} \quad \exp(\cdot) > 0 \quad \text{gilt.}
\end{array}$$

Aufgrund der Aufgabenstellung ist $x_c(t) > 0$, so daß die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung der Differentialgleichung $\varphi(t;c) = e^c\,e^{-k\,t}$ lautet.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ hat man $x_c(0) = e^c$ und daher $e^c = x_0$. Also lautet die Gleichung für das Zerfallsgesetz

$$\varphi_c(t) = x_0\,e^{-k\,t}.$$

Diese Methode der Bestimmung der Lösung heißt *Trennung der Variablen* (vgl. Seite 40). Jetzt läßt sich auch das Bildungsgesetz leicht angeben:

$$\begin{array}{l}
\text{Für alle } t \in [0,\infty[\quad \text{gilt :} \quad x_p(t) = x_0 - x_c(t) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \varphi_p(t) = x_0\,(1 - e^{-k\,t})
\end{array}$$

□

Der einfache Typ der Differentialgleichung und die Tatsache, daß weder Existenz noch Eindeutigkeit der Lösung in Frage gestellt wurden, ermöglichte den geringen Aufwand an Theorie. Bei anspruchsvolleren Problemstellungen ist dieser jedoch bedeutend höher, so daß es sinnvoll ist, bereits im Vorfeld die Frage der Existenz einer Lösung zu klären.

Im Zusammenhang mit der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen tauchen vier Grundprobleme auf, die uns im Folgenden immer wieder beschäftigen werden.

<u>Das Problem der Existenz:</u>
Unter welchen Bedingungen gibt es zu einer gegebenen Differentialgleichung eine oder mehrere Lösungen? Wie groß ist das maximale Existenzintervall $I \subset \mathbb{R}$, auf dem diese Lösungen existieren?

<u>Das Problem der Eindeutigkeit:</u>
Welche Differentialgleichungen sind eindeutig lösbar? Lassen sich hierfür Kriterien entwickeln? Kann man die Eindeutigkeit feststellen, ohne dazu die Gleichung lösen zu müssen?

Das Problem der Berechnug einer Lösung:
Wie berechnet man analytisch die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung oder eines Anfangswertproblems?

Die qualitative Analyse:
Weist die Lösung der Differentialgleichung besondere Eigenschaften wie etwa Periodizität auf? Wie empfindlich reagiert das durch die Differentialgleichung beschriebene System auf Störungen bei den Anfangsbedingungen? Wie verhält es sich, wenn man weitere Parameter zur Beschreibung eines Prozesses einführt und diese ebenfalls gestört werden?

Auf die ersten beiden Probleme wird in voller Allgemeinheit erst im zweiten Kapitel eingegangen. Erste Ergebnisse für den Fall homogener Differentialgleichung höherer Ordnung finden sich bereits in Paragraph 3 des ersten Kapitels. In Paragraph 2 des ersten Kapitels stellen wir zum Problem der Numerik einige häufig benutzte Lösungsverfahren zur analytischen Lösung einer Differentialgleichung vor. Läßt sich die Lösung nicht elementar bestimmen oder ist der Rechenaufwand hierfür zu hoch, so greift man in der Praxis auf Approximationen der Lösung mit Hilfe von Computern zurück. Mit den übrigen Problemstellungen werden wir uns erst ab dem vierten Kapitel beschäftigen.

Kapitel 1

Grundbegriffe und elementare Lösungsmethoden

Der erste Paragraph dieses Kapitels führt den *Fluß* als mathematisches Modell eines zeitinvarianten, deterministischen und endlich-dimensionalen Prozesses ein. Dieser Modellbildung ist eine geometrische Betrachtungsweise zugrunde gelegt, die sich an der Vorgehensweise des russischen Mathematikers V.I. Arnold [1] orientiert. Im weiteren Verlauf des ersten Paragraphens lösen wir uns von der ausschließlichen Betrachtung von zeitinvarianten Prozessen und stellen den *Evolutionsoperator* als Modell für zeitvariante Systeme vor.

Der zweite Paragraph behandelt die wichtigsten Lösungsmethoden von Differentialgleichungen erster Ordnung wie zum Beispiel die *Variation der Konstanten, Trennung der Variablen, exakte Differentialgleichungen* und *Bernoullische Differentialgleichungen.*

Der dritte Paragraph ist schließlich linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung gewidmet. Mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas beweisen wir einen ersten Eindeutigkeitssatz für derartige Differentialgleichungen und gelangen über den Begriff des *Fundamentalsystems* zur allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichungen.

1.1 Zustandsräume, Flüsse und Vektorfelder

Üblicherweise wird die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen rein analytisch eingeführt, allerdings bietet auch eine geometrische Betrachtungsweise einen natürlichen Zugang zur Analyse dynamischer Systeme. Um auf den Zusammenhang zwischen den analytischen Gleichungen und der geometrischen Anschauung näher einzugehen, betrachte man das Beispiel einer zeitinvarianten, skalaren Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1}$$

deren rechte Seite $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Man nennt eine Differentialgleichung *zeitinvariant*, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängig ist. Das Auffinden der Lösung dieser Differentialgleichung kann geometrisch wie folgt gedeutet werden:
Gesucht ist eine einparametrige Kurvenschar, die den Verlauf des durch die Differentialgleichung (1) beschriebenen Prozesses in der Zeit veranschaulicht und die analytisch durch die allgemeine Lösung $\varphi(t; c)$ gegeben ist. Jede Kurve beschreibt das Verhalten des Prozesses, wenn sich dieser zum Zeitpunkt t_0 gerade im Anfangszustand x^0 befindet. Die einzelnen Kurven $\varphi(t) = \varphi(t; c_0)$ sind über die Wahl der Konstanten c_0 eindeutig einer bestimmten Anfangsbedingung zugeordnet. Die Gesamtheit dieser sogenannten *Integralkurven* heißt *Fluß* oder auch *Phasenfluß* der Differentialgleichung und wird mit Φ bezeichnet.
Bekannt ist dabei lediglich die Ableitung f des Flusses nach der Zeit. Diese bestimmt das *Richtungsfeld* der Differentialgleichung: Ordnen wir jedem Punkt $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ eine Gerade mit der Steigung $f(x(t))$ zu, so erhalten wir eine als Richtungsfeld bezeichnete Geradenschar. Das Lösen einer Differentialgleichung ist also gleichbedeutend mit der Rekonstruktion eines zum Richtungsfeld „passenden“Flusses, d.h. mit der Bestimmung einer Kurvenschar, an die das durch die Differentialgleichung gegebene Richtungsfeld in jedem betrachteten Punkt (t, x) tangential anliegt. In Zukunft verwenden wir nachstehende Bezeichnungen:

$t \in \mathbb{R}$	Zeit
X	Zustandsraum
$x \in X$	Zustand
$x(t)$	Zustand zum Zeitpunkt t
$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\, x(t)$	Geschwindigkeit des Prozesses zum Zeitpunkt t

Determinierte, endlichdimensionale, differenzierbare Prozesse

Die Theorie der Differentialgleichungen gestattet eine mathematische Beschreibung beliebiger Entwicklungsprozesse, sofern diese nur drei Eigenschaften aufweisen: Der zu untersuchende Prozeß muß

1. determiniert,
2. endlichdimensional und
3. differenzierbar

sein. Diese Begriffe lassen sich am besten anhand von Beispielen erläutern.

1. Ein Prozeß heißt *determiniert* [1], wenn der Zustand des dynamischen Systems zu einem Zeitpunkt t_0 den gesamten Verlauf des Prozesses in der Vergangenheit und der Zukunft festlegt. Die Menge aller möglichen Zustände eines Prozesses wird *Zustandsraum* [2] oder auch *Phasenraum* genannt.

Diese Forderung kann auch als implizite Definition des Begriffs *Zustand* [3] verstanden werden. In der Praxis stellt sich nämlich die Frage, welche Informationen man über das System kennen muß, um beliebige Zeitpunkte rekonstruieren, beziehungsweise vorhersagen zu können.

Beispiel:
In der klassischen Mechanik betrachtet man die Bewegung von Systemen, deren Entwicklung durch die Kenntnis von Ort und Geschwindigkeit aller beteiligten Massepunkte eindeutig festgelegt wird. Bei einem mathematischen Pendel ohne Reibung besteht der Zustand folglich aus Auslenkung und Winkelgeschwindigkeit. Prozesse wie die Wärmeausbreitung sind dagegen nur halb determiniert. Hier legt der Zustand zur Zeit t_0 nur die zukünftige Entwicklung fest, nicht aber die Vergangenheit. Kennt man beispielsweise die Temperatur und Wärmekapazität, so ist es ein leichtes, die Mischtemperatur zu bestimmen. Umgekehrt ist es jedoch unmöglich, aus der Mischtemperatur die ursprünglichen Temperaturen zu rekonstruieren. Die Teilchenbewegung in quantenmechanischen Prozessen lassen sich dagegen überhaupt nicht durch ein deterministisches Modell beschreiben. □

2. Ein Prozeß heißt *endlich-dimensional* [4], wenn sein Zustand durch endlich viele reelle oder komplexe Koordinaten beschrieben werden kann.

Beispiel:
So wird etwa der Zustand eines Systems von n Massepunkten im Raum durch $6\,n$ Koordinaten (3 Orts- und 3 Geschwindigkeitskoordinaten pro Massepunkt) vollständig beschrieben. Nicht endlich-dimensional sind dagegen alle *fließenden Prozesse*, wie die Wärmeausbreitung in einem Medium oder das Schwingen einer Saite. Der Zustand des Prozesses ist hierbei durch die Kenntnis der Auslenkung

[3] state

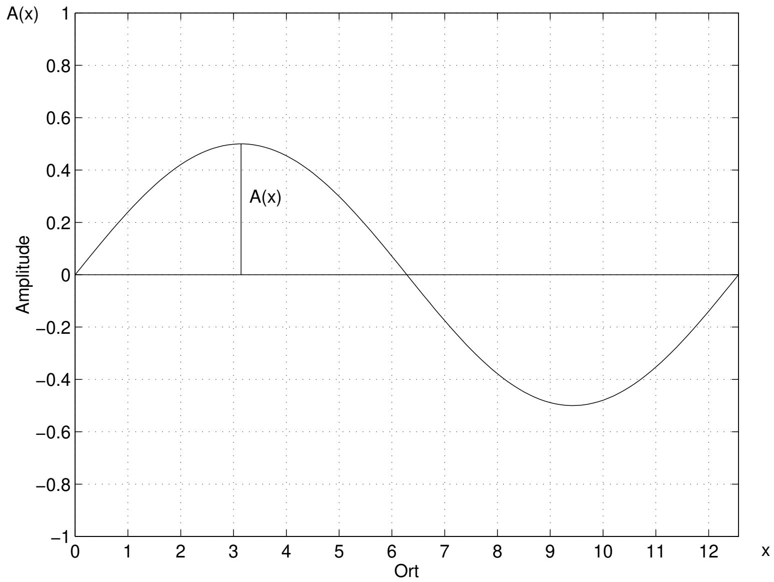


Abbildung 1: *Die Abbildung zeigt eine schwingende Saite. Dieser Prozeß ist unendlich-dimensional.*

der Saite in jedem Punkt x des betrachteten Schwingungsintervalls gegeben. Da jedes Intervall unendlich viele Punkte enthält, kann der Gesamtzustand nicht wie im vorherigen Beispiel durch diskrete Werte, sondern nur durch eine Funktion $A(\cdot)$ oder anders betrachtet, durch einen unendlich-dimensionalen Vektor, beschrieben werden. □

3. Ein Prozeß heißt *differenzierbar*, wenn sein Zustandsraum eine differenzierbare Mannigfaltigkeit darstellt und der Systemzustand in Abhängigkeit von der Zeit differenzierbar ist.

Für unsere Zwecke genügt es, als Zustandsraum eine offene Teilmenge des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ zu wählen.

Bemerkung
Ob ein beobachteter Prozeß diese drei Bedingungen erfüllt und welche Form die ihn beschreibende Differentialgleichung haben muß, läßt sich nur experimentell und damit lediglich bis zu einem gewissen Genauigkeitsgrad ermitteln. Oft sind zahlreiche Zusatzannahmen und Vereinfachungen nötig, um das Problem überhaupt einer Analyse zugänglich zu machen. Wir werden allerdings

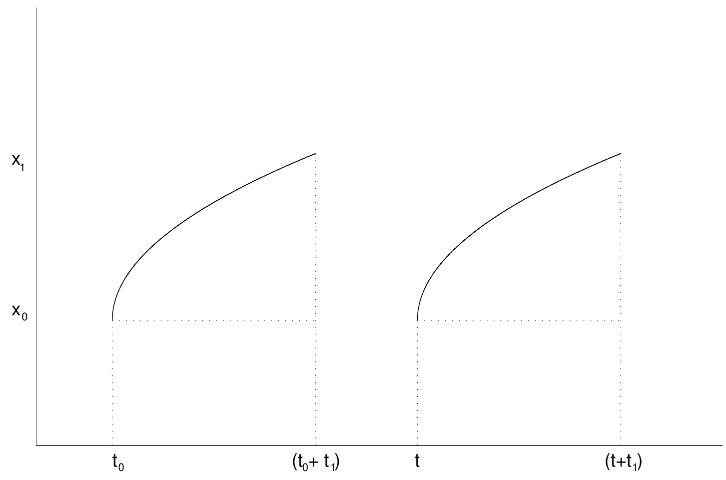


Abbildung 2: *Die Abbildung verdeutlicht die Zeitinvarianz eines Systems*

diesen Umstand zukünftig nicht jedes Mal betonen, sondern die realen Prozesse in den Beispielen so behandeln, als stimmten sie mit unseren idealisierten mathematischen Modellen überein. Außer in Fällen, in denen extra darauf hingewiesen wurde, sind freie Parameter in den Graphiken stets so gewählt worden, daß sich optisch ein möglichst guter Gesamteindruck ergibt.

Um diesen Paragraphen übersichtlicher zu gestalten, treffen wir nur für den Anfang eine vereinfachende Zusatzannahme.

4. Ein Prozeß heißt *zeitinvariant*, wenn er lediglich von seinem Zustand, nicht aber explizit von der Zeit abhängt. Die allgemeine Form einer zeitinvarianten Differentialgleichung [5] erster Ordnung lautet daher:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \tag{2}$$

Liegt ein zeitinvariantes [6] System vor, so heißt dies, daß die Dynamik des Systems invariant gegenüber Zeitverschiebung ist. Konkret bedeutet dies, daß

[6] Zeitinvariante Systeme werden auch häufig *autonom* genannt

ein System auf gleiche Anfangszustände stets in gleicher Weise reagiert; unabhängig davon, wann diese Anfangszustände angenommen werden. Angenommen ein zeitinvariantes System befindet sich zum Zeitpunkt t_0 in x^0 und es nähme nach Verstreichen von t_1 Zeiteinheiten den Zustand x^1 an. Wann immer es sich wiederum im Zustand x^0 befindet, wird es nach t_1 Zeiteinheiten in den Zustand x^1 gelangen (vgl. Abbildung 2). Nimmt also ein zeitinvariantes System zweimal denselben Zustand ein, so wird damit eine Periode eingeleitet.

Dazu stelle man sich ein System von Einbahnstraßen vor, welches einen Autofahrer nach cirka 10 Minuten Fahrt stets an derselben Stelle entläßt, gleichgültig, zu welcher Tageszeit er hineinfährt. Dieser Umstand gestattet es uns, als Anfangszeit den Nullpunkt zu fixieren. Denn egal zu welchem Zeitpunkt der Zustand x^0 angenommen wird, nach t_1 Zeiteinheiten gelangt man immer in den Zustand x^1, so daß vereinfachend $t_0 = 0$ gewählt werden kann.

Flüsse und Gleichgewichtszustände

Das mathematische Modell eines determinierten, endlich-dimensionalen und zeitkontinuierlichen Prozesses ist der Fluß oder auch Phasenfluß [7] :

Definition 1.1.1 (Fluss)
Ein Fluß Φ auf einer Menge X ist eine Familie $\Phi = (\Phi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ von Abbildungen $\Phi(t) : X \longrightarrow X,\ x \longmapsto \Phi(t)\,x$, mit folgenden Eigenschaften:

(F1) $\Phi(0) = \mathrm{id}_X$,

(F2) $\Phi(t+s) = \Phi(t) \circ \Phi(s)$ *für alle $t, s \in \mathbb{R}$.*

□

Dabei bezeichnet „$\circ$“ das Kompositionszeichen, auf das in Zukunft aus Notationsgründen verzichtet wird.

Man beachte hierbei, daß ein Fluß $\Phi(\cdot)(\cdot)$ eine Funktion von zwei Argumenten ist. Jede Wahl eines Zeitpunktes $t \in \mathbb{R}$ liefert eine Abbildung $\Phi(t)(\cdot) : X \longrightarrow X$, die zu ihrer Auswertung eines Zustands $x \in X$ bedarf. Man interpretiert dabei $\Phi(t)(x)$ als den Zustand, in den das durch den Fluß modellierte dynamische System nach Verstreichen von t Zeiteinheiten überführt wird, wenn es sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand x befunden hat. Üblicherweise schreibt man zur Vereinfachung der Notation $\Phi(t)\,x$ statt $\Phi(t)(x)$. Aus den Eigenschaften des Flusses folgt direkt:

$$\Phi(-t)\,\Phi(t) \overset{(F2)}{=} \Phi(0) \overset{(F1)}{=} \mathrm{id}_X,$$

---

[7] engl.: phase flow

so daß die Abbildung $\Phi(t) : X \longrightarrow X$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Bijektion auf X darstellt. Die Familie $(\Phi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ hat die folgenden algebraischen Eigenschaften: Gemäß obiger Rechnung bildet sie eine kommutative Gruppe von Bijektionen (aufgrund von $(F2)$) $\Phi(t)$ mit $\Phi(0)$ als neutrales und $\Phi(-t)$ als inverses Element. Sei $\mathcal{B}(x)$ die Gruppe aller Bijektionen auf X, so ist $(\Phi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine einparametrige Untergruppe von Transformationen auf X. Zusätzlich liegt wegen $\Phi(t+s) = \Phi(t)\,\Phi(s)$ ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe $(\mathbb{R},+)$ in die Gruppe $(\Phi(t),\circ)$ von Bijektionen auf X vor.

Zur Anwendung des Flußmodells auf die Theorie der Differentialgleichung muß der Fluß noch die Zusatzeigenschaft aufweisen, differenzierbar zu sein:

Definition 1.1.2 (Differenzierbarkeit eines Flusses)
Sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ein Fluß $\Phi = (\Phi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ heißt differenzierbar auf X, wenn gilt:

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathbb{R}\times X & \longrightarrow & X, \\ & (t,x) & \longmapsto & \Phi(t)\,x \end{array}$$

ist stetig differenzierbar nach t. □

Bemerkung
Sei Φ ein differenzierbarer Fluß auf X. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi(t)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der ebenfalls stetig differenzierbaren Umkehrabbildung $\Phi(-t)$. Der Fluß Φ stellt damit eine einparametrige Gruppe von Diffeomorphismen auf X dar.

Es kann vorkommen, daß ein Fluß Φ nicht auf der gesamten Zeitachse, sondern nur auf einem Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist. Für diesen Fall kann man strenggenommen nicht von einem Fluß sprechen und definiert daher den Begriff des *lokalen Flusses* :

Definition 1.1.3 (Lokaler Fluss)
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und für jedes $x \in X$ sei I_x ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ um 0, so daß $U = \{(t,x) : x \in X, t \in I_x\} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ offen ist. Sei $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig partiell differenzierbare Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\varphi(0)\,x = x$ *für alle* $x \in X$,

(ii) $\varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x))$ *für alle* t,s,x *mit* $(t+s,x) \in U, (s,x) \in U$.

Dann heißt φ ein lokaler Fluß auf X. □

Es gibt Systeme, die aus einer bestimmten Anfangslage heraus ihren Zustand nicht weiter verändern. In einem solchen stabilen Zustand befindet sich zum Beispiel das System „Schale-Kugel“, wenn die Kugel an den tiefsten Punkt der Schale gelegt wird.

Definition 1.1.4 (GLEICHGEWICHTSZUSTAND)
Ein Zustand $x \in X$ heißt Gleichgewichtszustand (auch Gleichgewichtspunkt oder -lage) des Flusses Φ, wenn gilt:

$$\Phi(t)\, x = x \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

□

Ein Zustand x stellt also genau dann einen Gleichgewichtszustand [8] von Φ dar, wenn x Fixpunkt für alle Abbildungen $\Phi(t)$ ist.

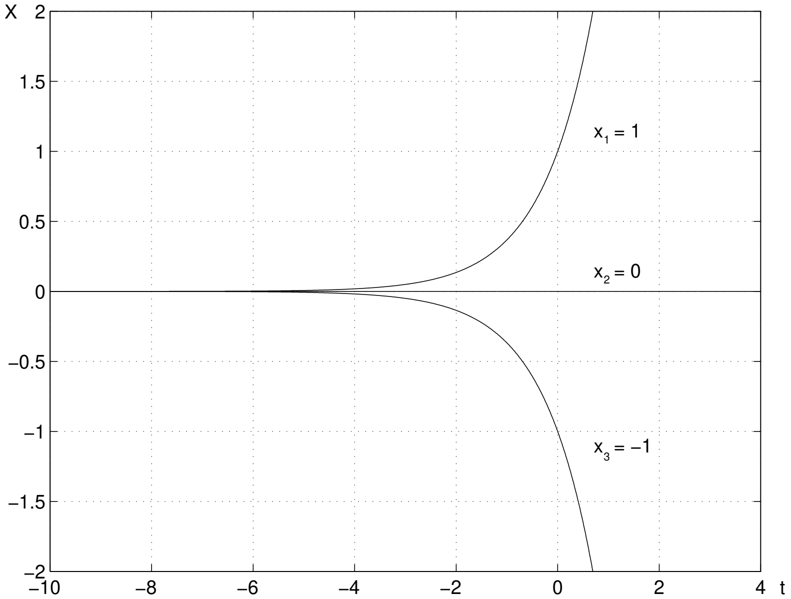


Abbildung 3: *Verlauf des betrachteten Flusses $\Phi(t)\, x = e^t\, x$ für drei ausgewählte Anfangszustände. Der Zustand $x_2 = 0$ stellt dabei die einzige Gleichgewichtslage des Flusses dar.*

Beispiel:
Sei $X = \mathbb{R}$ der eindimensionale Zustandsraum eines Prozesses und der Fluß $\Phi(t)\, x = e^t\, x$ der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = x(t)$ und $t, x \in \mathbb{R}$ gegeben (vgl. Abbildung 3). Diese Abbildung ist ein Fluß auf X, denn es gilt:

[8] engl.: equilibrium point

(F1) : $\Phi(0)\,x = e^0\,x = x$ für alle $x \in X$

(F2) :

$$\begin{aligned} \Phi(t+s)\,x &= e^{t+s}\,x \\ &= e^t\,e^s\,x \\ &= e^t\,\Phi(s)\,x \\ &= \Phi(t)\,(\Phi(s)\,x) \\ &= (\Phi(t)\circ\Phi(s))\,x \\ &= \Phi(t)\circ\Phi(s)\,x \quad \text{für alle } x \in X \end{aligned}$$

Da $e^t\,x$ stetig differenzierbar nach t ist, erfüllt $\Phi(t)$ die Definition eines differenzierbaren Flusses. Der einzige Gleichgewichtspunkt dieses Flusses ist $x = 0$.
□

Geschwindigkeitsvektorfeld und Lösung einer Differentialgleichung

Um später den Zusammenhang zwischen der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ und ihrer Lösung geometrisch deuten zu können, benötigen wir den Begriff des *Geschwindigkeitsvektorfeldes.*

Definition 1.1.5 (Vektorfeld)
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld[9] *f auf X ist eine Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*
□

Darunter versteht man das Feld von Vektoren, das entsteht, wenn in jedem Fußpunkt $x \in X$ der zugehörige Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ abgetragen wird.

Der Fluß $\Phi(t)$ gibt das Gesamtbild aller Entwicklungsmöglichkeiten des durch $\Phi(t)$ beschriebenen Prozesses wieder. Sein Geschwindigkeitsvektorfeld beschreibt dagegen das momentane Entwicklungsgesetz des Prozesses.

Definition 1.1.6 (Geschwindigkeitsvektorfeld)
Ist Φ ein differenzierbarer Fluß auf einer offenen Menge $X \subset \mathbb{R}^n$, so heißt die Abbildung $v(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$v(x) = \frac{d}{dt}\,\Phi(t)\,x\,\Big|_{t=0},$$

für alle $x \in X$ das Geschwindigkeitsvektorfeld[10] *des Flusses Φ.* □

[9] vector field
[10] velocity vector field

Bemerkung
Da wir momentan zeitinvariante Systeme betrachten, können wir die Ableitung $\frac{d}{dt}\,\Phi(t)\,x$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t bilden. Der Wert der Ableitung in einem bestimmten Zustand x ist zu allen Zeitpunkten derselbe. In der Definition 1.1.6 wurde lediglich zur Vereinfachung $t = 0$ gesetzt.

Zur Veranschaulichung des Geschwindigkeitsvektorfeldes stelle man sich ein Rohr vor, durch das eine Flüssigkeit fließt. Trägt man nun an jeder Stelle des Rohres einen Vektor ab, der die Geschwindigkeit der Strömung an diesem Punkt repräsentiert, so erhält man das Geschwindigkeitsvektorfeld der Strömung. Die Länge der Vektoren ist dabei proportional zur Geschwindigkeit der Strömung an der betrachteten Stelle. Falls das Geschwindigkeitsvektorfeld zeitlich konstant ist, spricht man von einem stationären Strömungsfeld.

Die oben eingeführten Begriffe ermöglichen es uns nun, einen Zusammenhang zwischen einer Differentialgleichung und ihrer Lösung herzustellen. Für gewöhnlich steht man vor der Aufgabe, zu einer gegebenen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ einen differenzierbaren Fluß Φ zu finden, dessen Geschwindigkeitsvektorfeld gerade mit dem durch die Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ gegebenen Vektorfeld übereinstimmt, d.h.

$\Phi(t)$ ist allgemeine Lösung von $\dot{x}(t) = f(x(t))$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \text{Das Geschwindigkeitsvektorfeld von } \Phi(t) \text{ ist } f\\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in X \text{ gilt: } f(x) = \frac{d}{dt}\,\Phi(t)\,x
\end{aligned}$$

Wählt man ein bestimmtes $x^0 \in X$, so erhält man aus dem Fluß mit $\varphi(t_0, x^0) = \Phi(t)\,x^0 = x$ eine spezielle Lösung $\varphi(t)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \forall\, x^0 \in X \text{ gilt: } f(\varphi(t, x^0)) \quad &= \quad \frac{d}{d\tau}\,\Phi(\tau)\,\Phi(t)\,x^0\Big|_{\tau=0}\\
&\overset{(F2)}{=} \quad \frac{d}{d\tau}\,\Phi(\tau + t)\,x^0\Big|_{\tau=0}\\
&= \quad \frac{d}{d\tau}\,\varphi(\tau + t, x^0)\Big|_{\tau=0}\\
&= \quad \dot{\varphi}(t, x^0).
\end{aligned}$$

Um zu einer gegebenen Differentialgleichung den zugehörigen Fluß Φ mit Geschwindigkeitsvektorfeld f zu rekonstruieren, müssen demzufolge drei Bedingungen erfüllt sein:

(i) Die Lösung ist eine Funktionenschar $\Phi = \{\varphi(t, x^0) : x^0 \in X, t \in \mathbb{R}\}$. Dabei spiegelt $\varphi(t, x^0)$ die zeitliche Entwicklung des Systems wieder, wenn dieses sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand x^0 befindet. Ist aus dem Zusammenhang klar, auf welchen Anfangszustand x^0 wir uns beziehen oder ist dieser nicht relevant, da wir eine allgemeine Eigenschaft der speziellen Lösung $\varphi(t)$ untersuchen, schreibt man meist nur $\varphi(t)$ statt $\varphi(t, x^0)$.

(ii) Die Ableitung von φ nach der Zeit muß mit dem vorgegebenen Vektorfeld f übereinstimmen, d.h. $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$ muß für alle $t \in I$ erfüllt sein.

(iii) Zum Zeitpunkt $t = 0$ muß wegen $\varphi(t) = \Phi(t)\, x^0$ gerade $\varphi(0) = x^0$ gelten.

Dies führt zu den folgenden Definitionen:

Definition 1.1.7 (Lösung einer Differentialgleichung)
Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt eine differenzierbare Funktion $\varphi :]a,b[\longrightarrow X$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x(t)) \tag{3}$$

auf dem Lösungsintervall $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)) \qquad \text{für alle } t \in]a,b[.$$

□

Definition 1.1.8 (Anfangswertproblem)
Ein Anfangswertproblem besteht aus der Verbindung einer Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ und einer Anfangsbedingung $x(t_0) = x^0$. Man sagt, eine Funktion φ genügt einem gegebenen Anfangswertproblem, wenn φ Lösung der Differentialgleichung mit $\varphi(t_0) = x^0$ ist. □

Bemerkung
Wegen der Zeitinvarianz der betrachteten Differentialgleichungen ist mit $\varphi(\cdot) :]\,a,b\,[\longrightarrow X$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auch die um α verschobene Funktion

$$\varphi(\cdot + \alpha) :]\,a-\alpha, b-\alpha\,[\longrightarrow X$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Daher läßt sich ein beliebiges Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = f(x(t))$ mit $x(t_0) = x^0$ durch Verschiebung in ein äquivalentes Anfangswertproblem $\dot{x}(t-t_0) = f(x(t-t_0))$ und $x(0) = x^0$ transformieren.

Das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times X \subset \mathbb{R}^{n+1}$, bestehend aus Zeitachse und Zustandsraum, heißt *erweiterter Phasenraum* (11). Wir definieren die folgenden Begriffe

(11) engl.: extended phase space

gleich für den allgemeinen, zeitvarianten Fall. Ist φ Lösung der Differentialgleichung auf dem Lösungsintervall I, so bezeichnet man den Graph von $\varphi(t, x^0)$, also die Menge

$$\{(t, \varphi(t, x^0)) : t \in I\} \subset \mathbb{R} \times X$$

als *Integralkurve* [12] des Flusses $\Phi(t)$ durch x^0. Dabei wird die Funktion $\varphi(t, x^0)$ *Trajektorie* [13] des Flusses genannt.

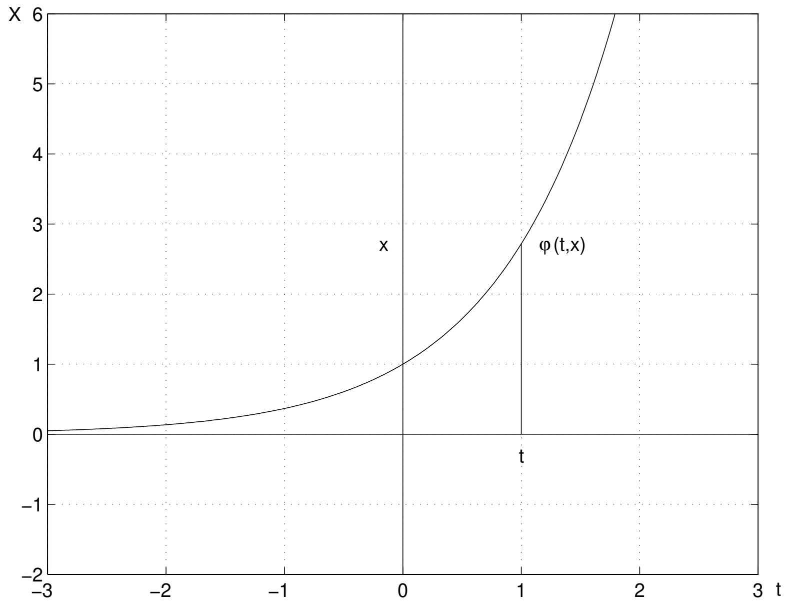


Abbildung 4: *Integralkurve zur Trajektorien der Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = x(t)$ *durch den Anfangszustand* $x^0 = 1$.

Da die Lösung jeder Differentialgleichung eine Integration erfordert, wird die Trajektorie in der Literatur gelegentlich auch das *Integral* der Differentialgleichung genannt. So erklärt sich auch der Begriff der Integralkurve als Bild der Lösungsfunktion. Das Bild von φ im Zustandsraum

$$\{\varphi(t, x^0) : t \in I\} \subset X$$

wird als *Orbit* [14] des Flusses bezeichnet.

Gilt $X \subset \mathbb{R}$, ist X also ein eindimensionaler Zustandsraum, so stellt der Orbit (auch Bahn oder Bahnkurve) lediglich ein Intervall auf der Ordinate dar (vgl. Abbildung 4), der Orbit besteht aus der Menge $\{(0, x) : x \geq 0\}$). Um einen Überblick über den Verlauf der Lösungen zu erhalten, betrachtet man dann

[12] engl.: integral curve
[13] engl.: trajectory
[14] engl.: orbit

am einfachsten den erweiterten Phasenraum. Interessante Orbits entstehen erst bei zwei- oder dreidimensionalen Zustandsräumen. Die gleichzeitige Abbildung

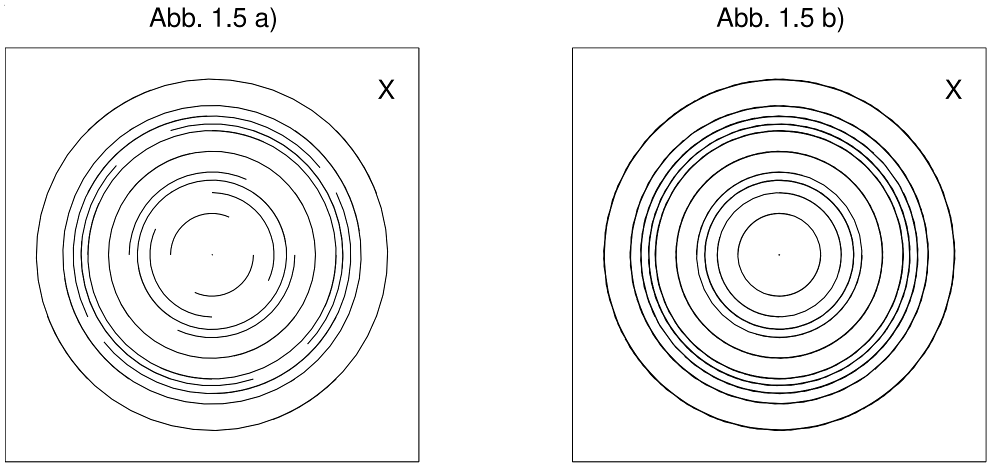


Abbildung 5: *Orbit des zweidimensionalen Prozesses $\ddot{x}(t) = x(t)$ zu einem Gitter von Anfangswerten im Zustandsraum; zunächst für den Zeitraum $t \in [0, 2]$ und dann für $t \in [0, 5]$. Erkennbar stellt der Mittelpunkt eine Gleichgewichtslage dar.*

Definition 1.1.9 (Trajektorie, Integralkurve und Orbit)
Für ein festes $x \in X$ heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow X, \\ \varphi(\cdot, x) : t &\longmapsto \varphi(t, x) := \Phi(t)\, x, \end{aligned}$$

Trajektorie des Flusses Φ durch den Anfangszustand x.
Der Graph von $\varphi(\cdot, x)$ heißt die Integralkurve des Flusses Φ durch x im erweiterten Phasenraum $\mathbb{R} \times X$.
Das Bild von $\varphi(\cdot, x)$

$$\{\, \varphi(t, x) : t \in \mathbb{R} \}$$

heißt Orbit (Bahn, Bahnkurve) des Flusses Φ im Zustandsraum X. □

Ordnen wir jedem Punkt (t, x) des erweiterten Phasenraums eine Gerade mit Steigung $f(t, x)$ durch diesen Punkt zu, so wird dadurch eine Geradenschar definiert. Wir interessieren uns allerdings nicht für die Geraden als solche, sondern nur für die durch sie bestimmte Richtung und sprechen daher von dem *Richtungsfeld* [15] der Differentialgleichung. Geometrisch betrachtet besteht die

[15] direction field

Aufgabe der Integration einer Differentialgleichung darin, alle Kurven aufzufinden, die zu dem zugehörigen Richtungsfeld passen, d.h. die in jedem Punkt eine Tangente haben, deren Steigung mit dem Richtungsfeld übereinstimmt. Um das Richtungsfeld aussagekräftiger zu gestalten, ersetzen wir die Richtungsgeraden durch Pfeile, deren Länge der Geschwindigkeit des Prozesses an ihrem Fußpunkt proportional ist. Für die Flußrichtung wird dabei vereinbarungsgemäß die Orientierung der Zeitachse gewählt.

Abb. 1.6

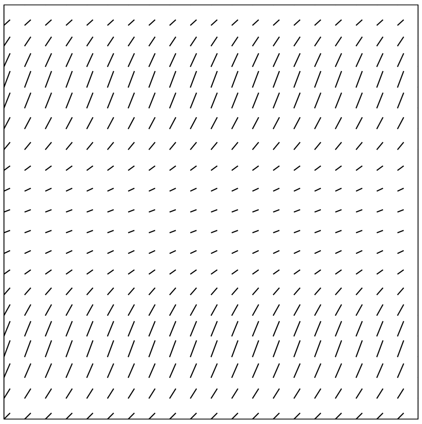


Abb. 1.7

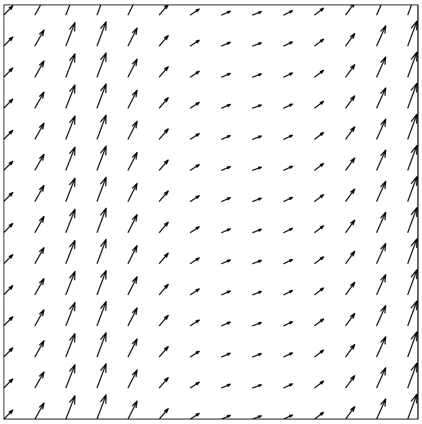


Abbildung 6: *Richtungsfeld der Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = e^{sin(x(t))}$.

Zeitvariante und zeitinvariante Systeme

Die bisherige Begriffsbildung stand unter dem Vorbehalt der Betrachtung zeitinvarianter Systeme. Von dieser Einschränkung wollen wir uns nun lösen. Analytisch gesehen sind zeitvariante Differentialgleichungen [16] dadurch gekennzeichnet, daß das Geschwindigkeitsvektorfeld $f(t, x(t))$ explizit von der Zeit abhängt. Konkret bedeutet dies, daß der betrachtete Prozeß insgesamt eine zeitliche Entwicklung durchmacht, so daß der Anfangszeitpunkt nicht mehr willkürlich gewählt werden kann. So findet etwa Pflanzenwachstum nicht unabhängig von der Jahreszeit statt. Beispielsweise ist die nur implizit von t abhängige Differentialgleichung $\dot{x}(t) = 2\,x(t) + 1$ zeitinvariant, die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = x(t) + t$ dagegen zeitvariant (vgl. Abbildung 7. Geometrisch gesehen lassen sich im erweiterten Phasenraum zwei Unterscheidungsmerkmale angeben:

(i) Bei zeitinvarianten Differentialgleichungen kann die Zustandsachse beliebig verschoben werden. Wählt man nun den Bildausschnitt gerade so,

[16] timevarying ODE

daß die verschobene Achse wieder in der Mitte liegt, so erhält man ein deckungsgleiches Bild.

(ii) Bei zeitinvarianten Differentialgleichungen besitzen alle Pfeile des Richtungsfeldes auf Parallelen zur Zeitachse dieselbe Steigung.

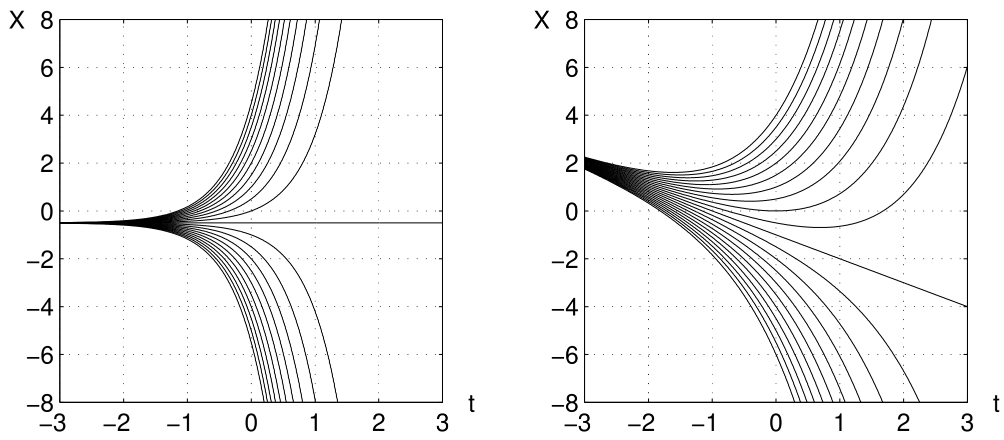


Abbildung 7: *Auf der linken Seite der Graph der zeitinvarianten Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = 2\,x(t) + 1$ *und auf der rechten Seite der der zeitvarianten Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = x(t) + t$. *Letztere ist explizit von* t *abhängig, so daß die Merkmale (i) und (ii) nicht erfüllt sind.*

Das Kriterium (i) scheint auf den ersten Blick nicht zuzutreffen. Dies liegt jedoch daran, daß lediglich einige spezielle Trajektorien gezeichnet wurden. Besser ist (i) etwa aus Abbildung 1.10 auf Seite 42 ersichtlich. Bei zeitvarianten Differentialgleichungen gelten diese Kriterien dagegen nicht.
Bislang hatten wir stillschweigend die Null als Anfangszeitpunkt t_0 gewählt. Dies ist im allgemeinen nicht länger möglich, so daß der betrachtete Anfangszeitpunkt t_0 stets als Bezugspunkt in Form eines Parameters mit angegeben werden muß. Die so entstehende Abbildung wird als Evolutionsoperator bezeichnet, der dem Fluß im zeitvarianten Fall entspricht. Er beschreibt die Evolution, d.h. die zeitliche Entwicklung eines zeitvarianten Systems.

Definition 1.1.10 (Evolutionsoperator)
Ein Evolutionsoperator ist eine Familie $(\Phi(t,t_0))_{t,t_0\in\mathbb{R}}$ *von Abbildungen* $\Phi(t,t_0) : X \longrightarrow X, x \longmapsto \Phi(t,t_0)\,x$ *für die für alle* $s,t,t_0 \in \mathbb{R}$ *die folgenden Eigenschaften gelten:*

(E1) $\Phi(t,t) = \mathrm{id}_X$

(E2) $\Phi(t,t_0) = \Phi(t,s) \circ \Phi(s,t_0)$.

□

Folgerichtig interpretiert man $\Phi(t, t_0)\, x^0$ als den Zustand, den das betrachtete System zum Zeitpunkt t annimmt, wenn es sich zum Zeitpunkt t_0 im Zustand x^0 befunden hat. Analytisch betrachtet ist die Zeitinvarianz eines Systems gleichbedeutend mit der Gleichung $\varphi(t_1 + \tau; t_1, x^0) = \varphi(t_2 + \tau; t_2, x^0)$ für beliebige $t \in \mathbb{R}$.
Aus den beiden Eigenschaften (E1) und (E2) folgt unmittelbar, daß die inverse Abbildung zu $\Phi(t, t_0)$ gerade $\Phi(t_0, t)$ ist, denn es gilt:

$$\Phi(t, t_0)\, \Phi(t_0, t) = \Phi(t, t) = \mathrm{id}_X \quad \Rightarrow \quad \Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t)$$

Entsprechend verkompliziert sich auch die übrige Begriffsbildung; so lautet die neue Form der zum Evolutionsoperator gehörigen Trajektorie

$$\varphi(t; t_0, x^0) := \Phi(t, t_0)\, x^0.$$

Analog gilt für das Geschwindigkeitsvektorfeld

$$f(t, x) = \frac{d}{d\tau} \left(\Phi(\tau, t_0)\, x\right)\Big|_{\tau = t}.$$

Eine weiterreichende Deutung des Evolutionsoperators erhalten wir in Kapitel 4. Die in diesem Paragraphen eingeführten Grundbegriffe sollen anhand des Galilleischen Fallgesetzes nochmals erläutert werden.

Beispiel: Der freie Fall
Beim freien Fall eines Massepunktes aus nicht allzu großer Höhe über der Erdoberfläche kann die Beschleunigung des Massepunktes als konstant angenommen werden. Zu jedem Zeitpunkt t hat die Masse eine gewisse Höhe x_1 und eine bestimmte Geschwindigkeit x_2. Offensichtlich sind dies die einzig nötigen Informationen, um den Verlauf des freien Falls eines Körpers zu simulieren und zum Beispiel den Zeitpunkt des Aufpralls auf die Erde vorhersagen zu können. Der betrachtete Prozeß ist also deterministisch und zweidimensional und zu jedem Zeitpunkt t liefert der Vektor $\binom{x_1(t)}{x_2(t)}$ eine Beschreibung des momentanen Systemzustandes. Aus physikalischen Gesichtspunkten (es gibt in diesem Fall keine negative Höhe) erscheint die folgende Wahl des Zustandsraums sinnvoll:

$$X = \{ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} : x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Die Differentialgleichung, die den freien Fall modelliert, soll die Form $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ haben. Somit ergibt sich der nachfolgende Ansatz:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t)) \\ f_2(t, x_2(t)) \end{pmatrix}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man die Komponentenfunktionen f_1 und f_2 bestimmen kann. Aus der Physik ist bekannt, daß die erste Ableitung des Weges (in diesem Fall die Höhe) die Geschwindigkeit ist und die Ableitung der Geschwindigkeit die Beschleunigung ergibt. Also folgt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) &= \dot{x}_2(t) = -g \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet die Konstante g die Erdbeschleunigung. Die gesuchte Differentialgleichung lautet demzufolge:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -g \end{pmatrix}$$

Das Vektorfeld f ist nicht explizit von der Zeit abhängig, so daß wir es hier mit einer zeitinvarianten Differentialgleichung zu tun haben. Man beachte, daß wir lediglich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, nämlich $\ddot{x}_1(t) = -g$ auf ein System von zwei Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt haben (vgl. dazu auch Paragraph 1 im zweiten Kapitel). Die Methode zur Lösung dieser einfachen Differentialgleichung höherer Ordnung lernen wir erst später kennen. Der Fluß dieser Differentialgleichung lautet jedenfalls:

$$\begin{aligned} \Phi(t) : X &\longrightarrow X, \\ x &\longmapsto \Phi(t)\,x = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x - g \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob die Abbildung $\Phi(t)$ tatsächlich einen Fluß darstellt, müssen wir die Gültigkeit der Flußaxiome nachweisen. Für alle $x \in X$ gilt:

(F1) $\Phi(0)\,x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x - g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x$

(F2)

$$\begin{aligned} \Phi(t)\,\Phi(s)\,x &= \Phi(t) \left(\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x - g \begin{pmatrix} s^2/2 \\ s \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x - g \begin{pmatrix} s^2/2 \\ s \end{pmatrix} \right) - g \begin{pmatrix} t^2/2 \\ s \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (s+t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x - g \begin{pmatrix} s^2/2 + t\,s + t^2/2 \\ s+t \end{pmatrix} \\ &= \Phi(t+s)\,x \end{aligned}$$

Die Abbildung 8 stellt ein Phasenportrait aus mehreren Orbits dar. Es existieren keine Gleichgewichtszustände, d.h. punktförmige Orbits, obwohl man intuitiv bei $\binom{0}{0}$ einen solchen Gleichgewichtszustand erwartet. Die Annahme einer

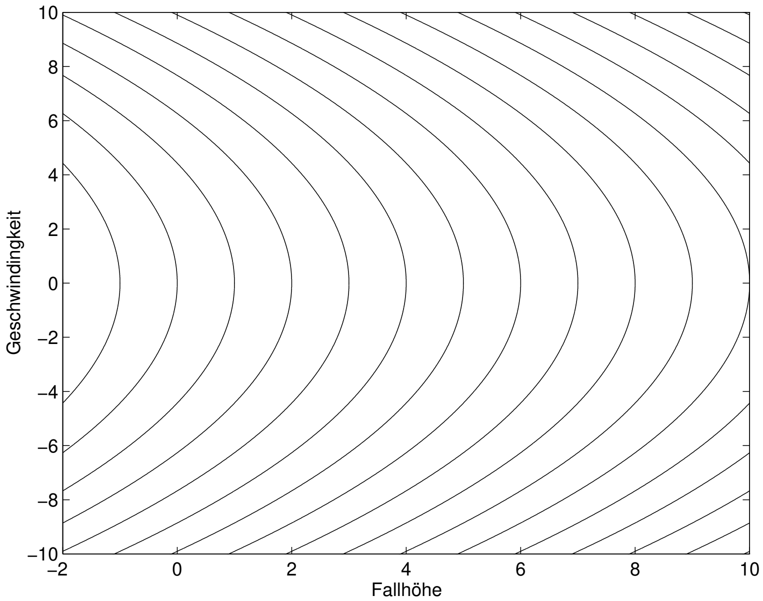


Abbildung 8: *Phasenportrait zum freien Fall*

Grenze wie der Erdoberfläche fand einfach keinen Eingang in unsere Modellbildung. Das Problem ergibt sich aufgrund unserer willkürlichen Einschränkung des Zustandsraums. Rein theoretisch ist der Fall des Objekts nicht notwendig durch den Nullpunkt beschränkt, da dieser zum Beispiel auch auf 400m über dem Meeresspiegel angesetzt werden könnte. □

1.2 Elementare Lösungsmethoden

In diesem Paragraphen sollen Lösungsmöglichkeiten für einige Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung vorgestellt werden. Bei den zugrundeliegenden Schemata beschränken wir uns auf Differentialgleichungen, deren Lösungen in elementarer Weise durch Ermittlung von Stammfunktionen und Auflösung von Gleichungen gefunden werden können. Die ausschließliche Behandlung von Differentialgleichungen erster Ordnung bedeutet hierbei keine Einschränkung, da wir in Kapitel 2 sehen werden, daß sich jede Differentialgleichung höherer Ordnung stets in ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführen läßt. In diesem Paragraphen betrachten wir sofort zeitvariante Differentialgleichungen, alldieweil sich die Lösungsverfahren der zeitinvarianten Differentialgleichungen unmittelbar als Spezialfälle ergeben. Die am einfachsten zu handhabenden Differentialgleichungen sind die linearen, welche die folgende Form besitzen

$$\dot{x}(t) = a(t)\, x(t) + b(t),$$

wobei $a(\cdot), b(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Definitionsintervall I der Differentialgleichung sind. Ist $b(t) \equiv 0$, so heißt die Differentialgleichung homogen, sonst inhomogen. Falls $a(t) \equiv a$ und $b(t) \equiv b$ gilt, liegt der Spezialfall eines zeitinvarianten Systems vor. Sind $a(\cdot)$ oder $b(\cdot)$ explizit von der Zeit abhängig, so spricht man von einer zeitvarianten Differentialgleichung. Dabei beziehen sich die Bezeichnungen linear und homogen in diesem Zusammenhang stets auf $x(t)$. So ist zum Beispiel die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = a(t)$ konstant in $x(\cdot)$.

Volterrasche Integralgleichung

Im weiteren Verlauf wird zunächst das Schema für die allgemeine Lösung eines speziellen Typs von Differentialgleichungen angegeben. Anschließend gehen wir auf das zugehörige Anfangswertproblem ein. Dabei lassen sich die eigentliche Differentialgleichung und die Anfangsbedingung mittels Integration zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen:

Proposition 1.2.1
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, auf dem eine stetig differenzierbare Lösung φ des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x^0 \tag{4}$$

existiert, so löst φ auch die Volterrasche Integralgleichung

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{5}$$

Ist umgekehrt φ eine stetige Lösung in I von (5) mit $t_0 \in I$, so ist φ stetig differenzierbar und φ löst das Anfangswertproblem (4). □

Beweis
($\Rightarrow$): Sei φ eine Lösung von (4) auf I. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(\tau)\, d\tau &= \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) \\ &= \varphi(t) - x^0 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$): Sei umgekehrt φ Lösung von (5) auf I mit $t_0 \in I$. $\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$ ist als Integral einer stetigen Funktion differenzierbar bezüglich der oberen Grenze. Differentiation nach t liefert:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{d}{dt}\left(x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau\right) \\ &= f(t, \varphi(t)) \end{aligned}$$

■

Konstante Differentialgleichungen

Jede konstante Differentialgleichung $\dot{x}(t) = a(t)$ läßt sich einfach durch Integration nach t lösen:

$$\dot{x}(t) = a(t) \;\Leftrightarrow\; x(t) = \int a(\tau)\, d\tau + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ die Integrationskonstante ist.

Ist zusätzlich die Anfangsbedingung $x(t_0) = x^0$ gegeben, so erhält man durch Anwendung der Proposition 1.2.1 direkt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\varphi(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau$$

Da das Integral vom Zustand x unabhängig ist, ist klar, daß sich aus einer speziellen Lösung der Fluß vollständig rekonstruieren läßt, indem man diese durch Wahl der Konstanten x^0 parallel verschiebt.

Homogene Differentialgleichungen

Zur Lösung einer homogenen [17] Differentialgleichung $\dot{x}(t) = a(t)\, x(t)$ benutzt man einen Spezialfall des Verfahren der *Trennung der Variablen*, das später

[17] homogeneous ODE

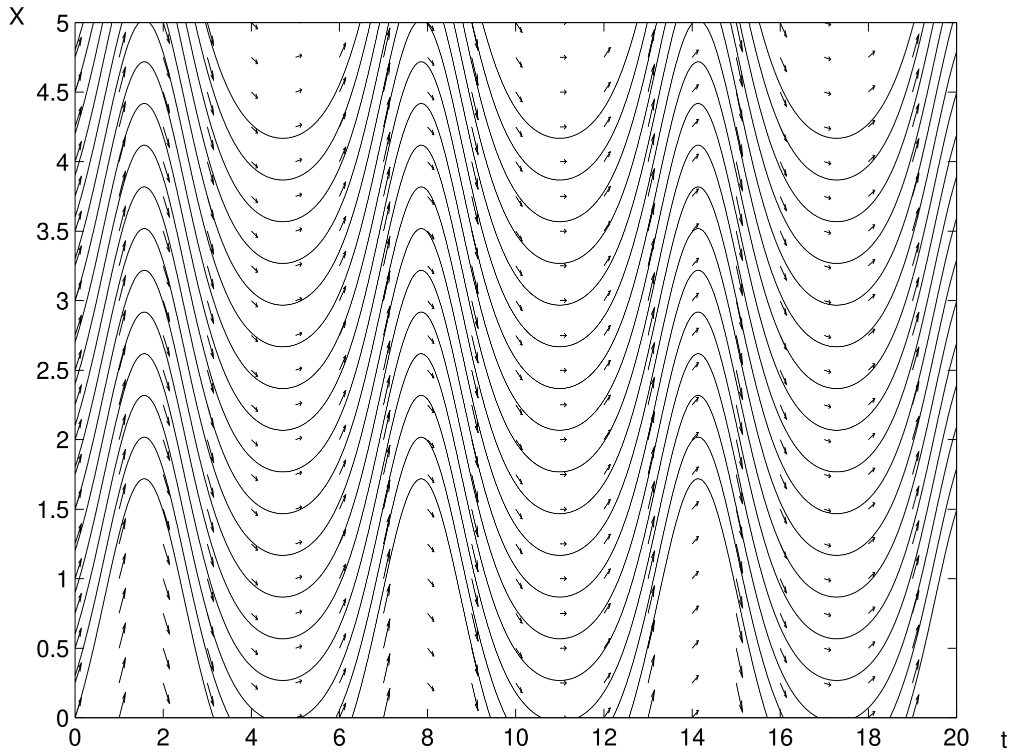


Abbildung 9: *Beispiel einer konstanten Differentialgleichung:* $\dot{x}(t) = e^{sin(t)}$

noch behandelt wird. Wir stellen dabei die Differentialgleichung so um, daß erneut Proposition 1.2.1 angewandt werden kann. Hierfür wird die folgende Beziehung benutzt:

$$\frac{d}{dt} \ln |x(t)| = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}.$$

Man setzt voraus, daß $x(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Außerdem wird anfangs festgelegt, ob $x < 0$ oder $x > 0$ gelten soll, da man ansonsten - wie schon im Beispiel der Einleitung auf Seite 13 gezeigt - zwei Lösungen bekommen würde. Wir setzen ab sofort o.B.d.A. $x > 0$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = a(t)\, x(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a(t) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \ln |x(t)| = a(t) \\ &\Leftrightarrow \quad ln|x(t)| = \int a(t)\, dt + c \\ &\Leftrightarrow \quad x(t) = e^c\, e^{\int a(t)\, dt} \end{aligned} \tag{6}$$

Ist zusätzlich zur Differentialgleichung $\dot{x}(t) = a(t)\, x(t)$ auch die Anfangsbedingung $x(t_0) = x^0$ gegeben, so kann man dieses Anfangswertproblem mit Hilfe der Umformung (6) und Logarithmieren der Anfangsbedingung in das folgende äquivalente Anfangswertproblem überführen:

$$\frac{d}{dt} \ln|x(t)| = a(t), \quad \ln(x(t_0)) = \ln(x^0)$$

Durch Anwendung von Proposition 1.2.1 erhält man für $\ln|x(t)|$ folgende Lösung

$$\ln|x(t)| = \ln(x^0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau.$$

Durch Auflösen nach $x(t)$ ergibt sich dann die endgültige Lösung des Anfangswertproblems.

$$\varphi(t) = x^0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}$$

Bemerkung
Die Annahme $x(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist für $x^0 \neq 0$ stets gerechtfertigt, wie man an der Form der Lösung erkennt. Für den Fall $x^0 = 0$ löst $\varphi(t) \equiv 0$ das Anfangswertproblem trivialerweise. Bei einem gegebenem Anfangswertproblem muß nicht notwendigerweise auf die Proposition 1.2.1 zurückgegriffen werden, man sollte vielmehr direkt nach dem obigen Schema verfahren.

Beispiel:
Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -\sin(t)\, x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = \frac{3}{2}$. Dann ergibt sich die allgemeine Lösung aus den vorherigen Überlegungen:

$$\begin{array}{rccl} & \frac{d}{dt} \ln|x(t)| & = & -\sin(t) \\ \Leftrightarrow & |x(t)| & = & e^{\int_0^t -\sin(\tau)\, d\tau} \\ \Leftrightarrow & |x(t)| & = & e^{-\cos(t)+\cos(0)+c} \\ \Leftrightarrow & x(t) & = & e^c\, e^{-\cos(t)+1} \end{array}$$

Aufgrund der gegebenen Anfangsbedingung ergibt sich zudem:

$$x(0) = e^c = \frac{3}{2}$$

Damit folgt dann die Lösung des Anfangswertproblems

$$\varphi(t) = \frac{3}{2}\, e^{1-\cos(t)}$$

□

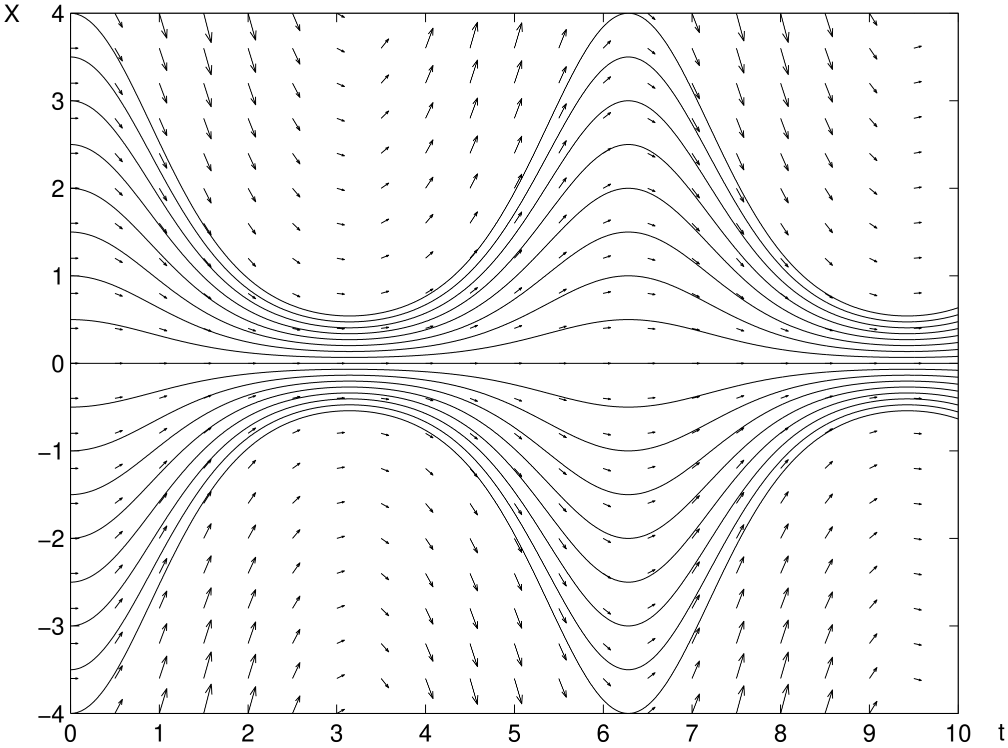


Abbildung 10: *Beispiel einer homogenen Differentialgleichung:* $\dot{x}(t) = -sin(t)x(t)$

Inhomogene Differentialgleichungen

Um eine inhomogene [18] Differentialgleichung $\dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$ zu lösen, benutzt man beispielsweise die Methode der *Variation der Konstanten* [19] . [20] Bei dieser wird die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $\varphi_h(t)$ benutzt. Man stellt die gesuchte Lösung $\varphi(t)$ als Produkt der homogenen Lösung und einer noch unbekannten Funktion $c(t)$ dar.

Sei also $\dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$ gegeben und $\varphi_h(t)$ Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = a(t)\,x(t)$. Gemäß obiger Überlegung und unter Benutzung von

(i) $\dot{\varphi}_h(t) = a(t)\,\varphi_h(t)$

(ii) $\varphi(t) = \varphi_h(t)\,c(t)$

[18] inhomogeneous
[19] variation of constants
[20] nach Joseph Louis Lagrange (1736-1813); engl.: variation of constants

folgt:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \varphi(t) & = & \varphi_h(t)\, c(t) \\
\Leftrightarrow & \dot{\varphi}(t) & = & \frac{d}{dt}\,(\varphi_h(t)\, c(t)) = a(t)\,\varphi(t) + b(t) \\
\Leftrightarrow & \dot{\varphi}_h(t)\, c(t) + \varphi_h(t)\, \dot{c}(t) & = & a(t)\,\varphi(t) + b(t) \\
\overset{(i)}{\Leftrightarrow} & a(t)\,\varphi_h(t)\, c(t) + \varphi_h(t)\, \dot{c}(t) & = & a(t)\,\varphi(t) + b(t) \\
\overset{(ii)}{\Leftrightarrow} & a(t)\,\varphi_h(t)\, c(t) + \varphi_h(t)\, \dot{c}(t) & = & a(t)\,\varphi_h(t)\, c(t) + b(t) \\
\Leftrightarrow & (\dagger) \qquad \dot{c}(t) & = & \frac{b(t)}{\varphi_h(t)} \\
\Leftrightarrow & c(t) & = & \int \frac{b(t)}{\varphi_h(t)}\, dt + k
\end{array}
$$

Man erhält somit die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit

$$\varphi(t) = \varphi_h(t)\,\left(\int \frac{b(t)}{\varphi_h(t)}\, dt + k\right),$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ die Integrationskonstante ist.

Ist zusätzlich die Anfangsbedingung $x(t_0) = x^0$ gegeben, so kann erneut Proposition 1.2.1 auf (†) angewandt werden:

$$\dot{c}(t) = \frac{b(t)}{\varphi_h(t)}, \quad c(t_0) = \frac{x^0}{\varphi_h(t_0)} \quad \Leftrightarrow \quad c(t) = \frac{x^0}{\varphi_h(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{\varphi_h(\tau)}\, d\tau + k$$

Insgesamt ergibt dies unter Berücksichtigung von

$$\varphi_h(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$$

die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi(t) & = & \varphi_h(t)\, \frac{x^0}{\varphi_h(t_0)} + \varphi_h(t)\, \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{\varphi_h(\tau)}\, d\tau \\
 & = & x^0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}\, e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds}\, b(\tau)\, d\tau \\
 & = & x^0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} a(s)\, ds}\, b(\tau)\, d\tau
\end{array}
$$

Beispiel:

Wir wollen die Variation der Konstanten benutzen, um die folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$\dot{x}(t) = x(t) + t$$

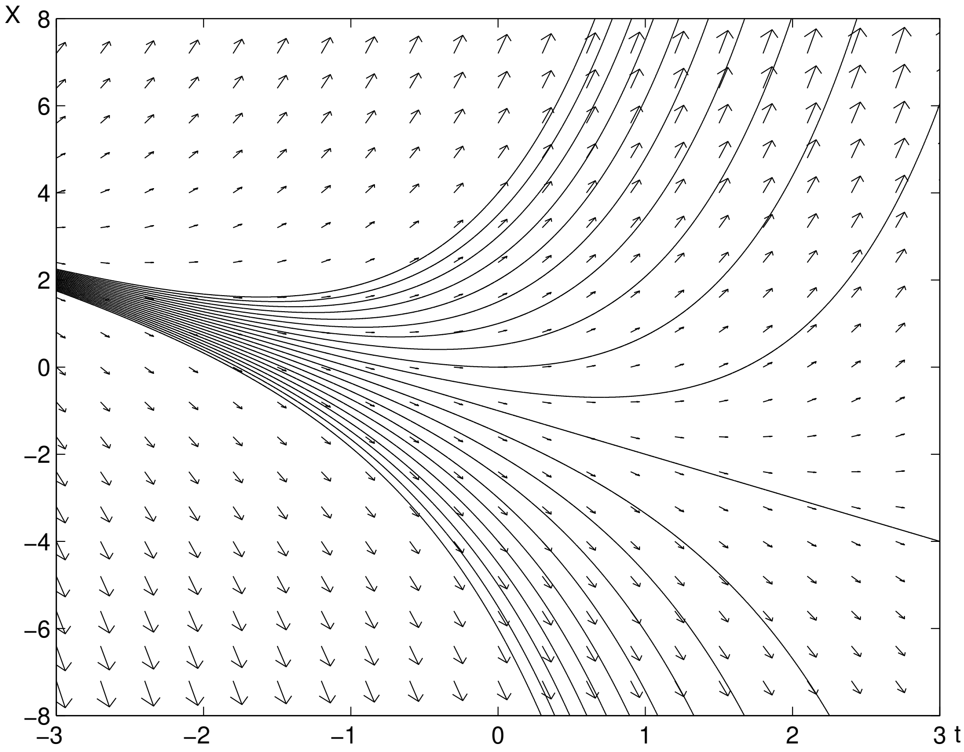


Abbildung 11: *Die inhomogene Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = x(t) + t$

Die Anfangsbedingung sei mit $x(0) = 1$ gegeben. Gemäß obigen Überlegungen berechnen wir die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $\dot{x}(t) = x(t)$ mit $a(t) \equiv 1$. Die Lösung einer solchen Differentialgleichung ist uns bereits bekannt:

$$\varphi_h(t) = x^0 \, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau} = e^t$$

Nach den obigen äquivalenten Umformungen und dem Ansatz $\varphi(t) = c(t)\, \varphi_h(t)$ gilt:

$$c(t) = \int_0^t t\, e^{-t}\, dt + k$$

Partielle Integration liefert:

$$c(t) = -e^{-t}\,(t+1) + k$$

Daraus folgt die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (-e^{-t}\,(t+1) + k)\, e^t \\ &= 2\, e^t - t - 1 \end{aligned}$$

□

Trennung der Variablen

Die Methode der Trennung der Variablen [21] ist immer dann anwendbar, wenn sich in der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ die Funktion f so in ein Produkt zerlegen läßt, daß der eine Faktor nur von t und der andere nur von $x(t)$ abhängt [22]. Wir betrachten daher Differentialgleichungen der folgenden Form:

$$\dot{x}(t) = g(t)\, h(x), \tag{7}$$

wobei $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind. Sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (7) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{d}{dt} H(x(t)) &= \frac{1}{h(x(t))}\, \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} G(t) \\ \Leftrightarrow \quad H(x(t)) &= G(t) + c \end{aligned}$$

Dabei ist $c \in \mathbb{R}$ eine Integrationskonstante. Betrachtet man nun die Differentialgleichung mit einer bestimmten Anfangsbedingung $x(t_0) = x^0$, so ist der folgende Fall möglich: Gilt $h(x^0) = 0$, so kann man die Lösung der Differentialgleichung mit $\varphi(t) \equiv x^0$ sofort angeben. Ansonsten gilt allgemein:

Satz 1.2.2
Sei $\dot{x}(t) = g(t)\, h(x)$ mit $x(t_0) = x^0$ gegeben, wobei $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf den offenen Intervallen $J, X \subset \mathbb{R}$. Sei weiterhin G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Dann gilt:

(i) Ist $h(x^0) = 0$, so löst $\varphi(t) \equiv x^0$ das Anfangswertproblem auf $I = \mathbb{R}$.

(ii) Ist $h(x^0) \neq 0$, so ist eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi(\cdot)$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems, wenn φ die Gleichung

$$H(x(t)) = G(t) + c_0$$

auf dem Lösungsintervall $I \subset J$ erfüllt, wobei c_0 durch das Anfangswertproblem bestimmt ist.

$\square$

---

[21] separation of variable

[22] Im folgenden wird abkürzend auch oft nur x statt $x(t)$ geschrieben.

Beweis

(i) : Für $h(x^0) = 0$ und $\varphi(t) \equiv x^0$ gilt:
$\dot{\varphi}(t) = 0 = g(t)\, h(x^0) = g(t)\, h(\varphi(t)), \quad \forall\, t \in I$ und $\varphi(t_0) = x^0$.

(ii) : Ist $h(x^0) \neq 0$, so ist φ Lösung von (7)

$$\begin{array}{rrcl} \Leftrightarrow & \dfrac{dH}{dt}(x) & = & \dfrac{dG}{dt}(t) \\ \Leftrightarrow & H(x) & = & G(t) + c_0 \end{array}$$

mit $c_0 = G(t_0) - H(x^0)$.

∎

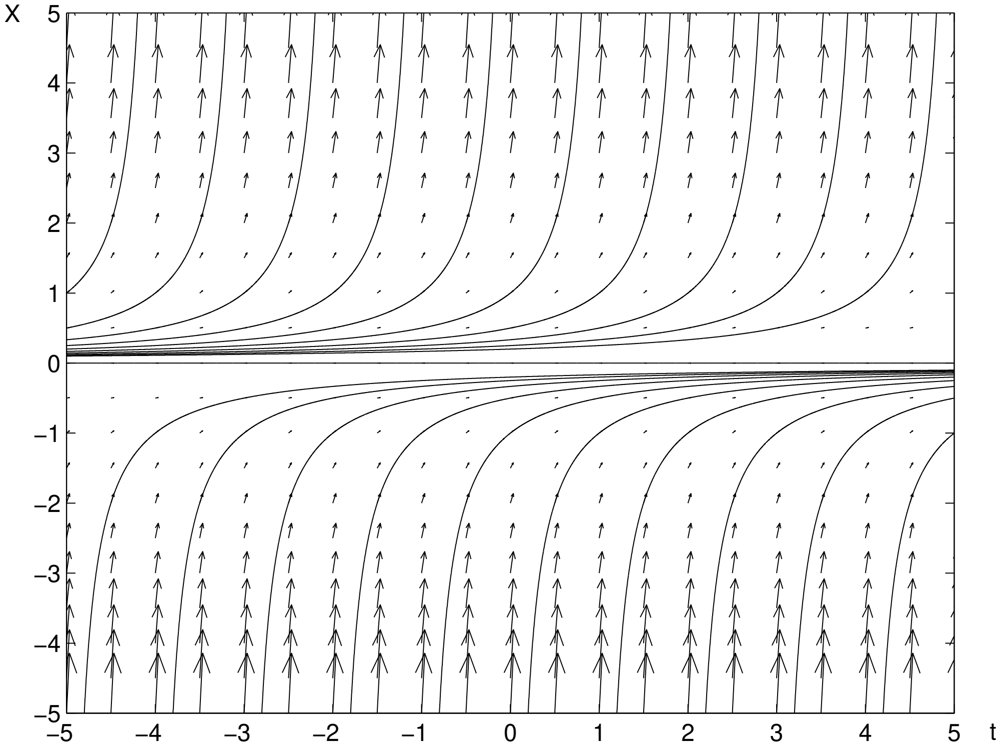


Abbildung 12: *Beispiel einer Differentialgleichung mit getrennten Variabeln:* $\dot{x}(t) = x^2(t)$

Beispiel:
Das Wachstum einer sich proportional zur Anzahl der vorhandenen Paare vermehrenden Population kann vereinfacht durch die Differentialgleichung $\dot{x}(t) =$

$kx^2(t)$ beschrieben werden. Dabei stellt k den zugehörigen Proportionalitätsfaktor dar. Betrachten wir der Einfachheithalber $k = 1$, also die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = x^2(t)$. Setzt man $g(t) \equiv 1$ und $h(x) = x^2$ mit $J = \mathbb{R}$ und $X = \mathbb{R}$, so liegt eine Differentialgleichung des Typs (7) vor. Für den Anfangswert $x^0 = 0$ erhält man die Lösung $\varphi(t) \equiv 0$ nach Satz 1.2.2 (i) auf $I = \mathbb{R}$. Falls $x^0 \neq 0$, ist $G(t) = t$ eine Stammfunktion von g und $H(x) = -\frac{1}{x}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Nach Satz 1.2.2 (ii) folgt:

$$-\frac{1}{\varphi(t)} = t + c_0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t) = -\frac{1}{t + c_0}$$

auf $I = \mathbb{R} \setminus \{-c_0\}$ und $c_0 = \frac{1}{x^0} - t_0\, x^0$. Man beachte hierbei, daß das System in endlicher Zeit für $t \uparrow -c_0$ „explodiert".

□

Bemerkung
Bei konkreten Problemen benutzt man gerne das folgende suggestive, allerdings wegen der Multiplikation infinitesimal kleiner Größen mathematisch nur heuristisch zu rechtfertigende Lösungsschema. Man schreibt $\dot{x}(t) = g(t)\, h(x)$ als $\frac{dx}{dt} = g(t)\, h(x)$ und formt dann wie folgt um:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(x)}\, dx &= g(t)\, dt \\ \int \frac{1}{h(x)}\, dx &= \int g(t)\, dt + c \end{aligned}$$

Exakte Differentialgleichungen

Bis jetzt haben wir nur Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichung kennengelernt. Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen eine Lösungsmethode für allgemeine Differentialgleichungen der Form $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ angeben werden kann. Dazu betrachtet man

$$M(t, x(t)) + N(t, x(t))\, \dot{x}(t) = 0, \tag{8}$$

wobei $M(\cdot)$ und $N(\cdot)$ reelle Funktionen auf einem offenen Rechteck $U = I \times K$ mit $I \subset \mathbb{R}$ und $K \subset X$ sind. Jede Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ läßt sich in dieser Form schreiben; setze dazu gegebenenfalls $M(t, x(t)) = -f(t, x(t))$ und $N(t, x(t)) \equiv 1$.

Im allgemeinen sind wir in der Lage, alle Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen, welche die Gestalt

$$\frac{d}{dt} F(t, x(t)) = 0 \tag{9}$$

besitzen. Denn eine Integration nach t liefert mit

$$(10) \qquad F(t, x(t)) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

eine implizite Bestimmungsgleichung der Lösung $\varphi(t)$. Man beachte, daß in der Darstellung (10) im Gegensatz zu (9) keine Ableitung $\dot{x}(t)$ vorkommt. Ist die Gleichung (10) nach $x(t)$ auflösbar, so hat man damit eine explizite Darstellung der Lösung der Differentialgleichung (9) gewonnen. Es geht im folgenden also darum, Kriterien zu entwickeln, ob eine beliebige, gegebene Differentialgleichung (8) in die Form (9) gebracht werden kann. Mit Hilfe der Kettenregel für partielle Ableitungen läßt sich Gleichung (9) wie folgt entwickeln:

$$\frac{d}{dt} F(t, x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t))\, \dot{x}(t)$$

Die gewünschte Form wird also erreicht, falls die folgende Definition erfüllt ist.

Definition 1.2.3 (Exakte Differentialgleichung)
Seien $M(t, x(t))$ und $N(t, x(t))$ stetig differenzierbar auf einem offenen Rechteck $U = I \times K$. Eine Differentialgleichung $M(t, x(t)) + N(t, x(t))\, \dot{x}(t) = 0$ heißt exakt [23] *auf U, falls es eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß*

$$(11) \qquad \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) = M(t, x(t)), \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) = N(t, x(t))$$

für alle $(t, x(t)) \in U$ gilt. □

Falls also Gleichung (8) exakt ist, gibt es eine Stammfunktion F, so daß

$$\frac{d}{dt} F(t, x(t)) = M(t, x(t)) + N(t, x(t))\, \dot{x}(t)$$

gilt. Damit erklärt sich auch die Bezeichnung „exakte Differentialgleichung", denn die linke Seite der Differentialgleichung (8) stellt das totale Differential von F dar. Es gilt nun:

Satz 1.2.4
Sei $M(t, x(t)) + N(t, x(t))\, \dot{x}(t) = 0$ exakt auf einem offenen Rechteck $U = I \times K$ und $]\,\alpha, \beta\,[\subset I$. Eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi :]\,\alpha, \beta\,[\longrightarrow X$ ist genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$(12) \qquad F(t, \varphi(t)) = c \qquad \text{für alle } t \in]\,\alpha, \beta\,[\,, c \in \mathbb{R},$$

gilt. □

[23] exact ODE

Beweis
($\Rightarrow$): Sei $\varphi(t) :]\,\alpha, \beta\,[\longrightarrow X$ wie oben gegeben. Dann folgt für die Funktion F:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(t, \varphi(t)) &= M(t, \varphi(t)) + N(t, \varphi(t))\, \varphi(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $\varphi(t)$ eine Lösung ist. Also existiert eine Konstante c mit (12).
($\Leftarrow$): Sei φ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion mit (12). Dann gilt:

$$c = F(t, \varphi(t)) \;\Rightarrow\; 0 = \frac{dF}{dt}(t, \varphi(t)) = M(t, \varphi(t)) + N(t, \varphi(t))\, \dot{\varphi}(t).$$

Also ist $\varphi(t)$ eine Lösung von (8). ∎

Satz 1.2.5
Sei $M(t, x(t)) + N(t, x(t))\, \dot{x}(t) = 0$, wobei $M, N : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen auf dem offenen Rechteck $U = I \times K$ sind. Es existiert genau dann eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) = M(t, x(t))$ und $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) = N(t, x(t))$, wenn

$$\frac{\partial M}{\partial x}(t, x(t)) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, x(t)) \tag{13}$$

für alle $(t, x(t)) \in U$ gilt. □

Beweis
($\Rightarrow$): Sei eine $\mathcal{C}^1$-Funktion mit (11) gegeben. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = M(t, x) \quad \Leftrightarrow \quad F(t, x) &= \int M(t, x)\, dt + h(x) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int M(t, x)\, dt + h(x) \right) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) &= \int \frac{\partial M}{\partial x}(t, x)\, dt + h'(x) \\ \Leftrightarrow \quad h'(x) &= N(t, x) - \int \frac{\partial M}{\partial x}(t, x)\, dt \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= \frac{\partial N}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial M}{\partial x}(t, x) \end{aligned}$$

Dabei ist $h(x)$ eine beliebige, differenzierbare Funktion in x, also ist die Hilfsfunktion $h(x)$ in t konstant.

($\Leftarrow$): Ausgehend von (13) erhält man durch Integration nach t:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial N}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial M}{\partial x}(t,x) = \frac{d}{dt}\left(N(t,x) - \int \frac{\partial M}{\partial x}\,dt\right) \\
\Leftrightarrow \quad g(x) &= N(t,x) - \int \frac{\partial M}{\partial x}(t,x)\,dt \\
\Leftrightarrow \quad G(x) &= \int \left(N(t,x) - \int \frac{\partial M}{\partial x}(t,x)\,dt\right)\,dx
\end{aligned}$$

Da $g(x)$ konstant in t ist, gilt für $F := \int M(t,x)\,dt + \int \left(N(t,x) - \int \frac{\partial M}{\partial x}\,dt\right)\,dx$ also $M(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)$ und $N(t,x) = \frac{\partial N}{\partial x}(t,x)$. ■

Der erste Teil dieses Beweises liefert gerade ein Schema zur Berechnung einer Stammfunktion F bei gegebener exakter Differentialgleichung (8). Die Gleichung $M(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)$ bestimmt F bereits bis auf eine Funktion $h(x)$ mit $F(t,x) = \int M(t,x)\,dt + h(x)$. Durch Differentiation nach x und Vergleich mit $N(t,x)$ läßt sich $h(x)$ leicht ermitteln. Unter Umständen ist es einfacher, $N(t,x)$ nach x zu integrieren, um aus $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = N(t,x)$ den Ausdruck $F(t,x) = \int N(t,x)\,dx + g(t)$ zu erhalten. Man bestimmt dann $g(t)$ und damit F völlig analog durch Integration von $g'(t) = M(t,x) - \int \frac{\partial N}{\partial t}(t,x)\,dx$ nach t.

Beispiel:
Gegeben sei die Differentialgleichung $t + x(t)\,\dot{x}(t) = 0$. Wegen

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t,x(t)) = 0 = \frac{\partial M}{\partial x}(t,x(t))$$

ist die Gleichung nach Satz (1.2.5) exakt, es existiert also eine Stammfunktion F mit (10).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = M(t,x) \Leftrightarrow \quad F(t,x) &= \frac{t^2}{2} + h(x) \\
\Leftrightarrow \quad \tfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) &= h'(x) = x,
\end{aligned}$$

wegen $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = N(t,x)$. Damit ist die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung gemäß Satz 1.2.4 zumindest implizit bestimmt. Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen $x(t)$ mit $\frac{t^2+x^2(t)}{2} = c$ für alle $t \in I$ und c konstant. In unserem Fall läßt sich F explizit nach $x(t)$ auflösen:

$$x(t) = \pm\sqrt{2\,c - t^2}.$$

Aufgrund der Wurzel muß die Einschränkung $2\,c \geq t^2$ beachtet werden, so daß wir auf dem eingeschränkten Lösungsintervall $I = [-\sqrt{2\,c}, \sqrt{2\,c}]$ folgende Lösungen erhalten:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2\,c - t^2}, \quad \varphi_2(t) = -\sqrt{2\,c - t^2}$$

□

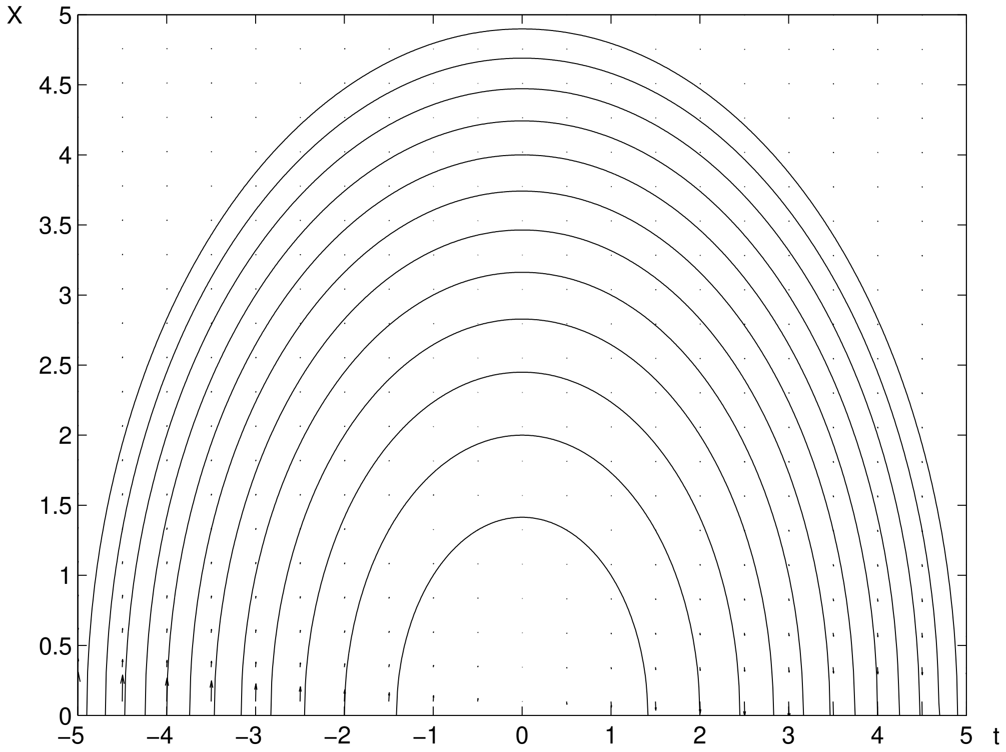


Abbildung 13: *Die exakte Differentialgleichung* $t + x(t)\,\dot{x}(t) = 0$

Ist im Zusammenhang mit exakten Differentialgleichungen ein Anfangswertproblem gegeben, so ermittelt man zunächst die allgemeine Form der Lösung wie oben und bestimmt dann durch Einsetzen der Anfangsbedingung die Konstante c.

Beispiel:
Betrachte

(14)
$$(4\,t^3\,e^{t+x} + t^4\,e^{t+x} + 2\,t) + (t^4\,e^{t+x} + 2\,x)\,\dot{x}(t) = 0, \quad x(0) = 1.$$

Die Bestimmung der Stammfunktion zur Lösung der exakten Differentialgleichung (14) erfolgt durch Integration von $N(t,x)$ nach x:

$$\begin{aligned} F(t,x) &= t^4\,e^{t+x} + x^2 + g(t) \\ M(t,x) &= t^4\,e^{t+x} + 4\,t^3\,e^{t+x} + g'(t) \\ &= 4\,t^3\,e^{t+x} + t^4\,e^{t+x} + 2\,t \end{aligned}$$

Also gilt $g'(t) = 2\,t$ und damit ist $g(t) = t^2$. Die Stammfunktion von (14) lautet daher:

$$F(t,x) = t^4\,e^{t+x} + x^2 + t^2.$$

Gesucht sind alle stetig differenzierbaren Funktionen $x(t)$ mit $F(t, x(t)) = c$ für alle $t \in I$. Aufgrund von $x(0) = 1$ ergibt sich c durch $F(0, 1) = 1$. Damit ist φ durch den Ausdruck $t^4\, e^{t+\varphi(t)} + \varphi^2(t) + t^2 = 1$ auf $t \in \mathbb{R}$ bestimmt. Man beachte, daß die Lösung des Anfangswertproblems leider nur implizit angegeben werden kann. □

Der integrierende Faktor

Liegt eine Differentialgleichung der Form

$$M(t, x(t)) + N(t, x(t))\, \dot{x}(t) = 0$$

vor, so kann man im allgemeinen nicht davon ausgehen, daß sie exakt ist. Gelegentlich gelingt es bei nicht exakten Differentialgleichungen eine stetig differenzierbare Funktion $\mu : U \longrightarrow \mathbb{R}^*$ so zu bestimmen, daß

$$\mu(t, x(t))\, M(t, x(t)) + \mu(t, x(t))\, N(t, x(t))\, \dot{x}(t) = 0 \tag{15}$$

exakt ist. Zur Lösung der Differentialgleichung (8) können wir jetzt das eben erläuterte Lösungsverfahren auf die Gleichung (15) anwenden, denn (8) ist äquivalent zu (15). Funktionen wie $\mu(t)$, die eine Differentialgleichung in eine exakte Differentialgleichung überführen, heißen *integrierender Faktor* oder auch *integrierender Multiplikator* [24] . Sie sind durch die folgende Proposition gekennzeichnet:

Proposition 1.2.6
Betrachte $M(t, x(t)) + N(t, x(t))\, \dot{x}(t) = 0$, wobei $M, N : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen auf $U = I \times K$ sind. Dann ist eine stetig differenzierbare Funktion $\mu : U \longrightarrow \mathbb{R}^*$ ein integrierender Faktor für (8) auf U genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \mu(t, x(t)) \left(\frac{\partial M}{\partial x}(t, x(t)) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, x(t)) \right) \\ = \;& N(t, x(t))\, \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x(t)) - M(t, x(t))\, \frac{\partial \mu}{\partial x}(t, x(t)) \end{aligned}$$

auf U gilt. □

Beweis
Sei μ ein integrierender Faktor von (8). Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\mu(t, x)\, M(t, x) + \mu(t, x)\, N(t, x)\, \dot{x}(t) = 0$$

[24] nach Leonard Euler (1707-1783)

exakt ist.
Genau dann existiert eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) &= \mu(t,x)\,M(t,x), \\ \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) &= \mu(t,x)\,N(t,x). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden äquivalenten Umformungen, die zu der Behauptung führen.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[\,M(t,x)\,\mu(t,x)\,]}{\partial x} &= \frac{\partial[\,N(t,x)\,\mu(t,x)\,]}{\partial t}, \quad t,x\in\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & \mu(t,x)\,\frac{\partial M}{\partial x}(t,x) + M(t,x)\,\frac{\partial \mu}{\partial x}(t,x) &= \mu(t,x)\,\frac{\partial N}{\partial t}(t,x) + N(t,x)\,\frac{\partial \mu}{\partial t}(t,x) \\ \Leftrightarrow \quad & \mu(t,x)\left[\frac{\partial M}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,x)\right] &= N(t,x)\,\frac{\partial \mu}{\partial t}(t,x) - M(t,x)\,\frac{\partial \mu}{\partial x}(t,x) \end{aligned}$$

■

Das nun folgende Korollar bietet die Möglichkeit, in einigen Fällen einen integrierenden Faktor direkt zu bestimmen.

Korollar 1.2.7
Seien $M, N : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen auf U. Dann gilt:

(i) Ist die Funktion

$$p(t) = p(t,x(t)) = \frac{1}{N(t,x(t))}\left[\frac{\partial M}{\partial x}(t,x(t)) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,x(t))\right]$$

auf U definiert und unabhängig von x, so ist

$$\mu(t) = e^{P(t)} \quad \textit{mit} \quad \frac{dP}{dt}(t) = p(t)$$

ein integrierender Faktor für $M(t,x(t)) + N(t,x(t))\,\dot{x}(t) = 0$.

(ii) Ist die Funktion

$$q(x) = q(t,x(t)) = \frac{1}{M(t,x(t))}\left[\frac{\partial N}{\partial t}(t,x(t)) - \frac{\partial M}{\partial x}(t,x(t))\right]$$

auf U definiert, stetig und unabhängig von t, so ist

$$\mu(x(t)) = e^{Q(x(t))} \quad \textit{mit} \quad \frac{dQ}{dx}(x(t)) = q(x(t))$$

ein integrierender Faktor für $M(t,x(t)) + N(t,x(t))\,\dot{x}(t) = 0$.

□

Beweis
(i): Nach Proposition 1.2.6 gilt für alle $t, x \in \mathbb{R}$:
$e^{P(t)}$ ist integrierender Faktor zu (8)

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad e^{P(t)} \left[\frac{\partial M}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,x)\right] &= N(t,x)\,\frac{\partial e^{P(t)}}{\partial t}(t,x) - M(t,x)\,\frac{\partial e^{P(t)}}{\partial x}(t,x) \\
\Leftrightarrow \quad e^{P(t)} \left[\frac{\partial M}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,x)\right] &= N(t,x)\,p(t)\,e^{P(t)} \\
\Leftrightarrow \quad e^{P(t)} \left[\frac{\partial M}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,x)\right] &= \frac{N(t,x)\,e^{P(t)}}{N(t,x)} \left[\frac{\partial M}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,x)\right]
\end{aligned}$$

(ii): Der Beweis für den integrierenden Faktor $q(x)$ verläuft analog. ■

Beispiel:
Wir wollen für die nicht exakte Differentialgleichung

$$2\,x^3 + 2 + 3\,t\,x^2\,\dot{x}(t) = 0 \tag{16}$$

unter Verwendung von Korollar 1.2.7 (i) einen integrierenden Faktor bestimmen. Mit $M(t,x) = 2\,x^3 + 2$ und $N(t,x) = 3\,t\,x^2$ erhalten wir

$$p(t) = \frac{1}{3\,t\,x^2}\,[6\,x^2 - 3x^2] = \frac{1}{t}.$$

Da $p(t) = \frac{1}{t}$ eine stetige und von x unabhängige Funktion ist, ergibt sich mit $P(t) = \ln(t)$ ein integrierender Faktor

$$\mu(t) = e^{P(t)} = t.$$

Nun überprüfen wir noch, ob die mit $\mu(t)$ multiplizierte Differentialgleichung (16) tatsächlich exakt ist:

$$\begin{aligned}
(16) \quad \Leftrightarrow \quad & 2\,x^3\,t + 2\,t + (3\,t^2\,x^2)\,\dot{x}(t) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial(2\,x^3\,t + 2\,t)}{\partial x} = 6\,x^2\,t = \frac{\partial(3\,t^2\,x^2)}{\partial t}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung
Die Bedeutung der Theorie der exakten Differentialgleichungen für die Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung beruht darauf, daß man keine einschränkenden Voraussetzungen an die Form der zu betrachtenden Gleichung stellen muß. In den meisten Fällen wird natürlich $M(t,x(t)) + N(t,x(t))\,\dot{x}(t) = 0$ nicht exakt sein, so daß die Anwendung des obigen Verfahrens die Konstruktion

eines integrierenden Faktors erfordert. Es gibt jedoch keine allgemeine Methode, um zu einer gegebenen Differentialgleichung einen solchen Faktor explizit zu bestimmen. Hierin liegt der Grund für die Unlösbarkeit einer beträchtlichen Anzahl von Differentialgleichungen. Außerdem erweist sich das Auffinden eines integrierenden Faktors bei konkreten Problemen oft als schwerfällig. Deshalb unterscheidet man spezielle Typen von Differentialgleichung, bei denen man aufgrund ihrer äußeren Form ein befriedigendes Lösungsverfahren angeben kann. In der Tat laufen viele elementare Lösungsmethoden auf die Konstruktion eines integrierenden Faktors hinaus. So etwa bei der Ermittlung der Funktion $c(t)$ bei der Variation der Konstanten. Eine weitere Methode wollen wir nun vorstellen:

Die Methode des integrierenden Faktors

Eine weitere Methode eine gegebene Differentialgleichung erster Ordnung zu lösen, besteht darin, diese so umzustellen, daß die eine Seite nur von t, die andere dagegen ausschließlich von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ abhängt. Gelingt es nun, diese Seite als totales Differential einer Stammfunktion zu schreiben, also die Differentialgleichung in die Form

$$\frac{d}{dt}\, g(x(t)) = b(t)$$

zu bringen, haben wir eine konstante Differentialgleichung in g gewonnen, die wir durch Integration nach t mit Hilfe von Proposition 1.2.1 und wenn möglich, durch Auflösen nach x leicht lösen können.

Ist dies nicht der Fall, so müssen wir unsere Fragestellung erweitern: Ist es möglich, eine differenzierbare Funktion $\mu(t)$ so zu bestimmen, daß auf die mit $\mu(\cdot)$ multiplizierte Differentialgleichung obige Technik angewandt werden kann?

Betrachten wir dazu das Beispiel der inhomogenen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) - a(t)\, x(t) = b(t).$$

Gesucht wird eine differenzierbare Funktion $\mu(t)$, so daß sich die linke Seite der Differentialgleichung

$$\mu(t)\, \dot{x}(t) - a(t)\, \mu(t)\, x(t) = \mu(t)\, b(t) \tag{17}$$

und

$$\mu(t)\, \dot{x}(t) + x(t)\, \dot{\mu}(t) = \frac{d}{dt}\, (\mu(t)\, x(t)) \tag{18}$$

als totales Differential des Ausdrucks $\mu(t)\, x(t)$ schreiben läßt. Durch Vergleich der Gleichungen (17) und (18) ist klar, daß dies genau dann der Fall ist, wenn $\mu(\cdot)$ die homogene Differentialgleichung

$$\dot{\mu}(t) = -a(t)\, \mu(t)$$

löst. Aus dem Abschnitt über homogene Differentialgleichungen wissen wir, wie der integrierende Faktor μ zu bestimmen ist. Es gilt:

$$\mu(t) = x^0\, e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\, d\tau}$$

Diese Technik nennt man „Methode des integrierenden Faktors“, denn die Differentialgleichung (17) ist wegen

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial \mu}{\partial t}(t) = -a(t)\,\mu(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-a(t)\,\mu(t)\,x(t) - \mu(t)\,b(t)\right) = \frac{\partial M}{\partial x}(t,x)$$

exakt.

Konsequent gedacht liefert der Ansatz für das Beispiel wiederum die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung erster Ordnung: Sei $t_0 \in I$, so gilt

$$\mu(t)\,x(t) = c + \int_{t_0}^t \mu(\tau)\,b(\tau)\,d\tau$$

mit $c \in \mathbb{R}$, also

$$\varphi(t) = \frac{c}{x^0}\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + \frac{1}{x^0}\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds}\, b(\tau)\,d\tau.$$

Wegen der Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = x^0$ gilt zusätzlich

$$\varphi(t_0) = \frac{c}{x^0} = x^0,$$

so daß $c = (x^0)^2$ gelten muß und damit insgesamt gilt:

$$\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\, x^0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds}\, b(\tau)\,d\tau$$

Bernoullische Differentialgleichungen

Ein Typ von nichtlinearen Differentialgleichungen, der häufig auftritt und den man mit einer einfachen Substitution in eine lineare Differentialgleichung transformieren kann, ist die sogenannte *Bernoullische Differentialgleichung* [25]. Darunter versteht man alle Gleichungen der Form:

$$\dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\,x^p(t) \tag{19}$$

[25] Nach Jakob Bernoulli (1654-1705), der sich 1695 und 1697 im Wettstreit mit Leibniz und seinem Bruder Johann Bernoulli mit ihr befaßt hat. Den Brüdern, die sich herzlich haßten, ging es in ihren zahlreichen Auseinandersetzungen darum, wer von beiden der bedeutendere Mathematiker sei. In Folge dessen präsentierten sie einander die Lösungen schwierigster Probleme, ohne dem anderen den Lösungsweg zu verraten oder stellten sich öffentlich Aufgaben, von denen sie hofften, daß der andere sie niemals lösen können würde. Die Mathematik verdankt dieser brüderlichen Rivalität einiges.

mit $p \in \mathbb{Q}$. Die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ wurden bereits bei den linearen Differentialgleichungen behandelt. Für den Spezialfall $x^0 = 0$ als Anfangswert liefert die Nullfunktion eine Lösung des aus (19) und der Bedingung $x(t_0) = x^0$ bestehenden Anfangswertproblems.

Sei also nun $x^0 \neq 0$. Unter der Annahme $x(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ können wir die Differentialgleichung (19) durch $x^p(t)$ dividieren. Folgendes ist zumindest für $x^0 > 0$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
(19) \quad \Leftrightarrow \qquad \frac{\dot{x}(t)}{x^p(t)} &= a(t)\, x^{1-p}(t) + b(t) \\
\Leftrightarrow \quad (1-p)\,\frac{\dot{x}(t)}{x^p(t)} &= [(1-p)\, a(t)]\, x^{1-p}(t) + [(1-p)\, b(t)]
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution $z(t) := x^{1-p}(t)$ erhalten wir dann wegen $\dot{z}(t) = (1-p)\, x^{-p}(t)\, \dot{x}(t)$ das äquivalente Anfangswertproblem

$$\dot{z}(t) = [(1-p)\, a(t)]\, z(t) + [(1-p)\, b(t)]$$

mit der Anfangsbedingung $z(t_0) = (x^0)^{1-p}$, dessen Lösung wir durch Anwendung der Formel für inhomogene lineare Differentialgleichung sofort angeben können.

$$z(t) = e^{(1-p)\int_{t_0}^t a(\tau)\, d\tau}\, (x^0)^{1-p} + (1-p) \int_{t_0}^t e^{(1-p)\int_{t_0}^t a(s)\, ds}\, b(\tau)\, d\tau$$

Durch Resubstitution erhält man schließlich die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems:

$$\varphi(t) = \left(e^{(1-p)\int_{t_0}^t a(\tau)\, d\tau} (x^0)^{1-p} + (1-p) \int_{t_0}^t e^{(1-p)\int_{t_0}^t a(s)\, ds} b(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{1-p}}$$

Wie anhand der Form der Funktion $\varphi(t)$ zu erkennen ist, hängt die Lösbarkeit der Bernoullischen Differentialgleichungen entscheidend vom Anfangswert x^0 ab: Ist $x^0 > 0$, so ist die obige Rechnung korrekt. Für den Fall $x^0 < 0$ ist $x(t) \neq 0$ nur für gerade Exponenten $(1-p)$ gewährleistet.

Beispiel:
Gesucht wird die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = t\sqrt{x(t)} + \frac{4\, x(t)}{t}, \quad t \neq 0.$$

In Normalform lautet die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{4}{t}\, x(t) + t\, x^{\frac{1}{2}}(t) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\dot{x}(t)}{2\, x^{\frac{1}{2}}(t)} &= \frac{2}{t}\, x^{-\frac{1}{2}}(t) + \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

Nun substituiert man $z(t) = x^{\frac{1}{2}}$, so daß gilt:

$$\dot{z}(t) = \frac{2}{t}\, z(t) + \frac{t}{2}$$

Diese Differentialgleichung löst man nun zum Beispiel mit Variation der Konstanten.

$$z(t) = t^2 \, \left[\frac{1}{2}\, \ln(t) + c\right], \quad c \in \mathbb{R}$$

Die Resubstitution $x(t) = z^2(t)$ liefert auf dem eingeschränkten Lösungsintervall $I =]\,0, \infty\,[$ die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = t^4 \, \left[\frac{1}{2}\, \ln(t) + c\right]^2$$

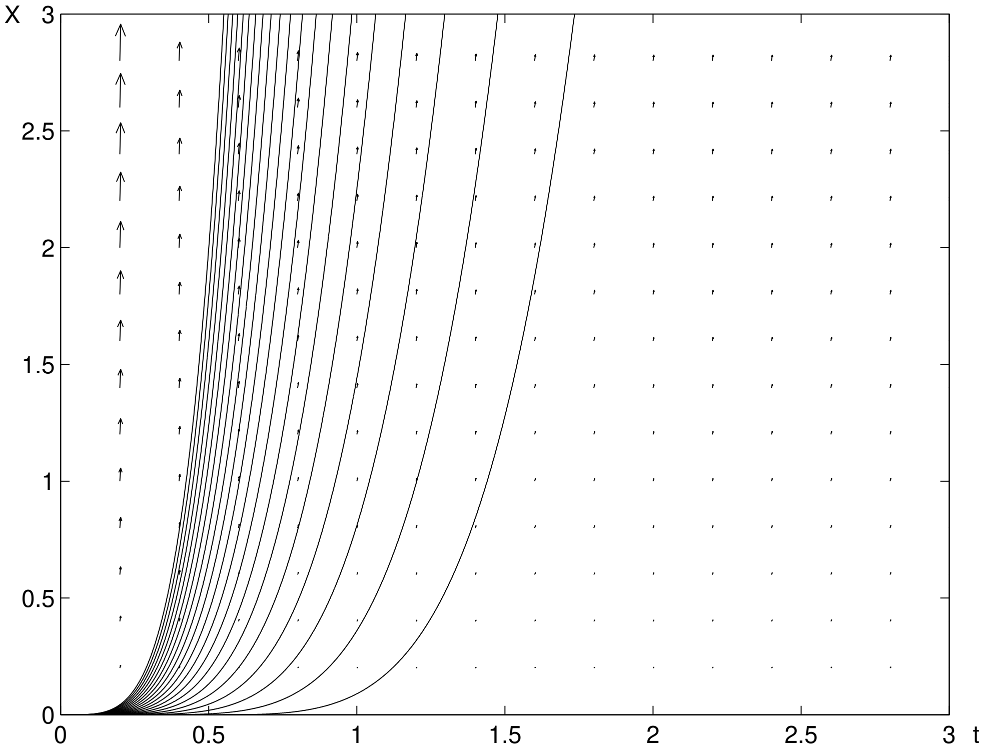


Abbildung 14: *Bernoullische Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = t\, x(t)^{1/2} + \frac{4\,x(t)}{t}$

□

Zum Abschluß dieses Paragraphen stellen wir noch ein Beispiel aus der Biologie vor:

Beispiel: POPULATIONSWACHSTUM DER PROTOZOA PARAMECIUM CAUDATUM

Das Wachstum einer Population mit begrenztem, aber nachwachsendem Nahrungsangebot wird durch das von dem belgischen Mathematiker Verhulst [26] im Jahre 1837 gefundenen logistischen Wachstumsgesetz beschrieben:

$$(\dagger) \quad \dot{x}(t) = a\,x(t) - b\,x(t)^2$$

wobei $a, b > 0$ die gegebenen Vitalkoeffizienten der Population mit im allgemeinen $a >> b$ sind. Der Parameter a stellt dabei die Vermehrungsrate dar, während b die Nährstoffknappheit repräsentiert. Vermehrt sich eine Population gemäß dem logistischen Wachstumsgesetz, so lassen sich zwei typische Phasen unterscheiden:

(i) Eine Phase des ungehemmten Wachstums. Die Anfangspopulation findet für eine relativ kleine Anzahl $x(t)$ von Individuen ein Überangebot an Nahrung vor. Da $a >> b$ ist, fällt der störende Term $b\,x(t)^2$ kaum ins Gewicht, so daß ein annäherungsweise exponentielles Wachstum stattfindet: $\dot{x}(t) \approx a\,x(t)$.

(ii) Eine Phase der Anpassung an das vorhandene Nahrungsangebot. Die Population hat eine Größe erreicht, welche die Grenzen des Nahrungsangebotes spürbar werden läßt. Die Gesamtpopulation wächst immer langsamer und nähert sich schließlich einem stationären Wert a/b an, der einem Gleichgewicht zwischen Nahrungsangebot und -nachfrage entspricht.

Man wähle $X =]0, \infty[$ als Zustandraum.

(a) Man bestimme analytisch die Lösung $\varphi(t, x^0)$ von (†) mit der Anfangsbedingung $\varphi(0, x^0) = x^0$, wobei $x^0 > 0$ gegeben ist.

(b) Man bestimme den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x^0)$ für beliebige Anfangszustände x^0.

(c) Angenommen, eine bestimmte Population von Pantoffeltierchen (protozoa paramecium caudatum) vermehrt sich in einem Teströhrchen nach dem logistischen Wachstumsgesetz. Zu Beginn befinden sich 5 Individuen im Röhrchen. Die Wachstumsrate am ersten Tag sei 230,9 %. Am Ende des 4. Tages erreiche die Population einen stationären Wert von 375 Individuen. Bestimme die Parameterwerte a und b und zeichne die Wachstumskurve mit Hilfe des Rechners.

[26] Pierre-François Verhulst (1804-1849)

Diese Problemstellungen sollen nun gelöst werden:
(a) Das Wachstumsgesetz $\dot{x}(t) = a\,x(t) - b\,x(t)^2$ kann man als Differentialgleichung mit getrennten Variablen vom Typ

$$\dot{x}(t) = g(t)\,h(x(t))$$

ansehen, wobei $g(t) = 1$ und $h(x) = a\,x - b\,x^2$. Daher wenden wir das Verfahren der Trennung der Variablen an:
Dazu benötigen wir die Stammfunktionen

$$\begin{aligned} G(t) &= \int g(\tau)\,d\tau &&= t \\ H(x) &= \int \frac{1}{h(x)}\,dx &&= \int \frac{1}{a\,x - b\,x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Hierbei kann man $H(x)$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung errechnen:

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{a - b\,x} = \frac{1}{a\,x - b\,x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad A\,(a - b\,x) + B\,x = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (A\,a - 1) + (B - A\,b)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad B = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int \left(\frac{1}{a\,x} + \frac{b}{a\,(a - b\,x)} \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \left(\int \frac{dx}{x} + \int \frac{b\;dx}{a - b\,x} \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\ln(x) - \ln(a - bx) \right) \\ &= \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a - b\,x}, \qquad\qquad x \neq \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Damit liegt also die implizite Lösung vor. Eine Lösung $x(t)$ muß nun der Gleichung

$$H(x(t)) = G(t) + c$$

genügen. Auflösen nach $x(t)$ liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \ln \frac{x(t)}{a - b\,x(t)} &= t + c \\ x(t) &= e^{a\,t + a\,c}(a - b\,x(t)) \\ x(t) &= \frac{a}{b + \gamma e^{-a\,t}}, \end{aligned}$$

wobei $\gamma := e^{a\,c} > 0$.

Sei $\varphi(t, x^0)$ die Lösung mit $x(0) = x^0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{a}{b+\gamma} \\ \gamma &= \frac{a}{x^0} - b. \end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte Lösung unseres Problems

$$\varphi(t, x^0) = \frac{a\,x^0}{b\,x^0 + (a - b\,x^0)e^{-a\,t}}. \tag{20}$$

Eine Substitution in (†) zeigt, daß $\varphi(t, x^0)$ eine Lösung von (†) für alle $x^0 > 0$ ist. Für alle $x^0 \in X$ ist also $\varphi(t, x^0)$ die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(0) = x^0$.

Einige Integralkurven für spezielle Anfangswerte:

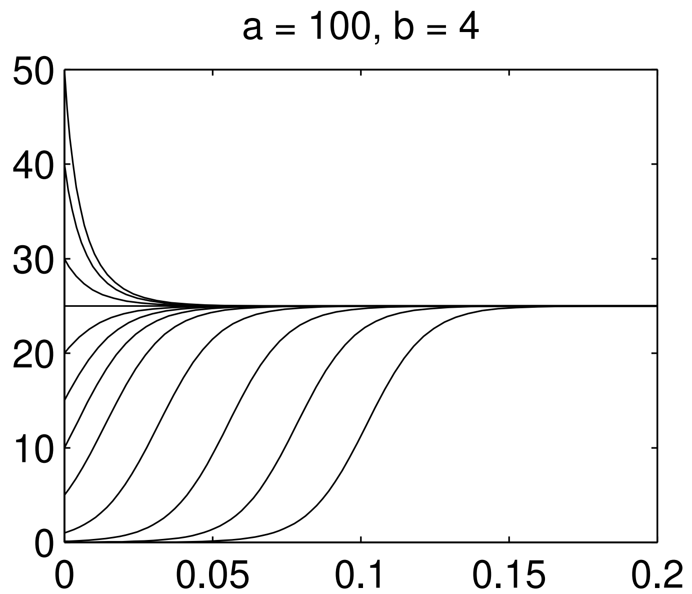


Abbildung 15: *Anfangswerte: 0.001, 0.01, 0.1, 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50*

(b) Bestimme den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x^0)$ von (20)

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x^0) = \lim_{t\to\infty} \frac{ax^0}{bx^0 + (a - bx^0)e^{-at}} = \frac{a}{b}$$

Wie bemerkt, ist Gleichung (20) die Lösung für alle $x^0 \in X$. Also

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x^0) = \frac{a}{b}$$

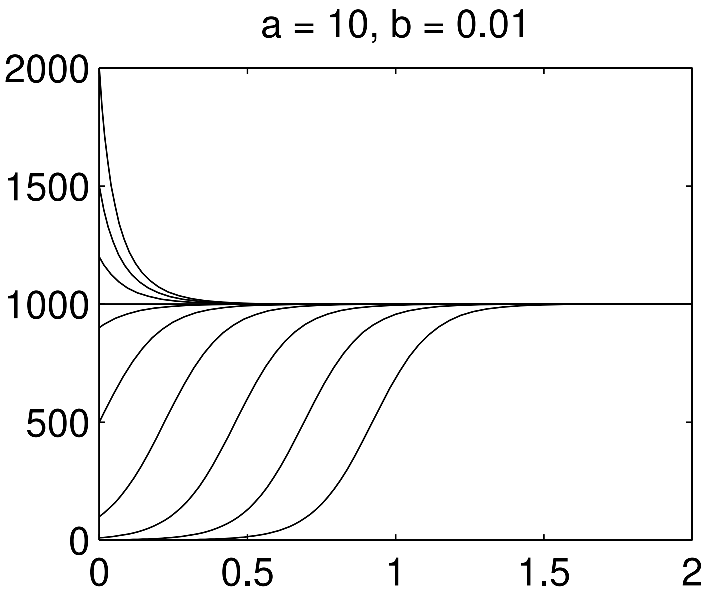


Abbildung 16: *Anfangswerte: 0.1, 1, 10, 100, 500, 900, 1000, 1200, 1500, 2000*

für alle $x^0 \in X$.

(c) Ein solches Experiment fand tatsächlich statt. Die betrachtete Art von Pantoffeltierchen bildet ein beliebtes Studienobjekt in der Biologie, da sie mit einer Größe von bis zu 0,3mm gut zu beobachten und leicht zu kultivieren sind. Der Mathematiker und Biologe G.F. Gause setzte je 5 dieser Tierchen in eine kleine, mit 0,5cm^3 Nährflüssigkeit gefüllte Teströhre und bestimmte 6 Tage lang täglich ihre Anzahl in den einzelnen Röhrchen.

Zu Beginn des Versuchs befinden sich also 5 Individuen in den Röhren. Setze daher $x(0) = 5$. Die Wachstumsrate am ersten Tag sei 230,9 %. Da $a >> b$ gilt, kann man für kleine Anzahlen von Individuen $x(t)$ den Summanden $-b\,x(t)^2$ vernachlässigen, so daß näherungsweise $\dot{x}(t) = a\,x(t)$ gilt. Daraus läßt sich mit Hilfe der Wachstumsrate $\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ am ersten Tag a approximativ bestimmen:

$$\frac{\dot{x}(0)}{x(0)} = 2,309 \qquad \Rightarrow a = 2.309$$

Am Ende des 4. Tages erreiche die Population einen stationären Wert von 375 Individuen. Also ist $\frac{a}{b} = 375$

$$\Rightarrow \qquad b = \frac{a}{375} = \frac{2,309}{375} = 0,006242$$

Die Wachstumskurve sieht wie folgt aus:

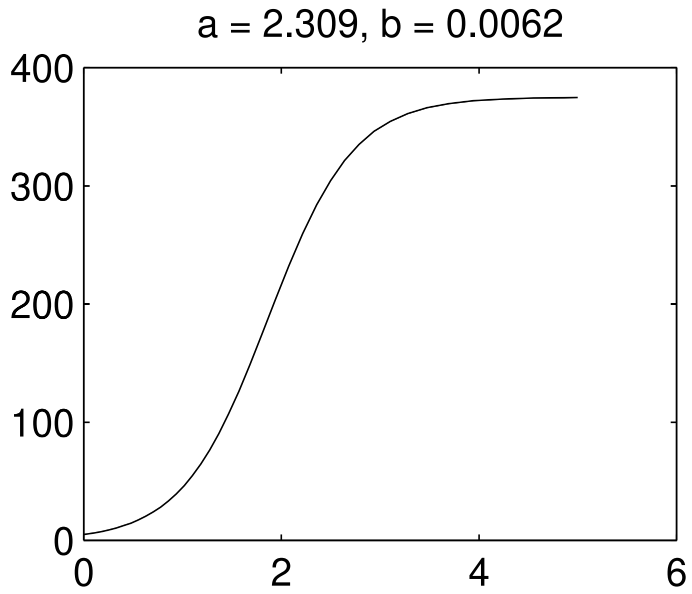


Abbildung 17: *Populationswachstum der Protozoa paramecium caudatum*

Dieses Beispiel läßt sich übrigens auch als Bernoullische Differentialgleichung behandeln. □

1.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Bislang haben wir lediglich Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet. Der Übergang zu Differentialgleichungen höherer Ordnung [27] , also solcher, in deren Bestimmungsgleichung Ableitungen höherer Ordnung auftreten, fällt jedoch nicht schwer, wenn man sich zunächst auf lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung beschränkt. Zum Lösen von Differentialgleichungen diesen Typs existiert eine einfache, abgeschlossenen Theorie, die auf wenigen, gut zu handhabenden Sätzen und Definitionen beruht. Zunächst beweisen wir mit Hilfe des *Gronwallschen Lemmas* einen Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Wir betrachten im allgemeinen zeitvariante Differentialgleichungen, solange nicht ausdrücklich anderes festgelegt wird.

In voller Allgemeinheit beschäftigen wir uns mit Differentialgleichungen höherer Ordnung erst im Kapitel 2. In Zukunft werden ausdrücklich auch komplexwertige Lösungen zugelassen. Deshalb führen wir als neue Bezeichnung den *Körper* $\mathbb{K}$ ein, der bei unseren Betrachtungen wahlweise sowohl für die reellen als auch die komplexen Zahlen stehen kann.

Gronwallsches Lemma und Eindeutigkeitssatz

Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung ist gegeben durch

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)), \tag{21}$$

wobei f eine Abbildung $f : U \longrightarrow \mathbb{K}$ ist, die auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{K}^{n+1}$ operiert. Unter einer Lösung der Differentialgleichung versteht man jede Funktion, welche die folgende Eigenschaften erfüllt:

Definition 1.3.1 (Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung)
Eine n-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt Lösung von

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)),$$

auf dem offenen Lösungsintervall $I \subset \mathbb{R}$, falls gilt:

(i) $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in U$ *für alle* $t \in I$,

(ii) $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t))$ *für alle* $t \in I$.

□

Dabei stellt die Forderung (i) sicher, daß f und damit auch $y^{(n)}(t)$ wohldefiniert sind.

---

[27] higher order differential equitation

Definition 1.3.2 (Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung)
Seien $a_0(\cdot), \cdots, a_{n-1}(\cdot), b(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann heißt

$$y^{(n)}(t) + a_{(n-1)}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\, y(t) = b(t) \tag{22}$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit den Koeffizienten $a_i(\cdot)$ und dem absoluten Glied $b(\cdot)$. Sie heißt homogen, wenn $b(t) \equiv 0$ ist, sonst inhomogen. Sie heißt zeitinvariant, wenn $a_i(t) \equiv a_i$ ist für $i = 0, \cdots, n-1$ und $b(t) \equiv b$ gilt, sonst zeitvariant. □

Bemerkung
Man beachte hierbei, daß $y(t)$ keineswegs den Zustand des Systems darstellt. Der Zustand $x(t)$ eines durch eine Differentialgleichung n-ter Ordnung repräsentierten Prozesses ist durch einen Zustandsvektor

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir haben diese Form eines Zustandes bereits im Zusammenhang mit dem Galilleischen Fallgesetz am Ende des ersten Paragraphen kennengelernt, wo der Systemzustand durch den Vektor $x(t) = \binom{x_1(t)}{x_2(t)}$ mit $x_1(t)$ als Höhe und $x_2(t)$ als Geschwindigkeit gegeben war. Die Bedeutung des folgenden Lemmas beruht auf den vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten des 1918 von Gronwall formulierten Hilfssatzes. Für eine beliebige stetige Funktion liefert es unter schwächsten Voraussetzungen eine globale Abschätzung für die Funktionswerte auf einem vorgegebenen Intervall.

Lemma 1.3.3 (Gronwallsches Lemma)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $c \in \mathbb{R}_0^+$, $k(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ eine integrierbare Funktion und $t_0 \in I$. Gilt für eine gegebene stetige Funktion $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$v(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} k(s)\, v(s)\, ds, \quad t \in I, \tag{23}$$

so folgt:

$$v(t) \leq c\, e^{\left|\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right|}, \quad t \in I.$$

□

Beweis
Für beliebige $t \in I, \quad t \geq t_0$ gilt nach Voraussetzung:

$$k(t)\,v(t) \leq k(t)\,\left(c + \int_{t_0}^{t} k(s)\,v(s)\,ds\right)$$

Setze $Q(t) = c + \int_{t_0}^{t} k(s)\,v(s)\,ds$. Da $k(\cdot)$ nur als integrierbar und nicht als stetig vorausgesetzt wird, gilt fast überall:

$$\dot{Q}(t) - k(t)\,Q(t) \leq 0$$

Aus der Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $e^{-\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds}$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(Q(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds}\right) &= \dot{Q}(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds} + Q(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds}\,(-k(t)) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Integration über $[\,t_0, t\,]$ liefert

$$Q(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds} - Q(t_0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad Q(t) = c\,e^{\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds}.$$

Nach der Voraussetzung (23) ist also $v(t) \leq Q(t)$, so daß $v(t) \leq c\,e^{\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds}$ folgt. Damit ist die Behauptung für $t \geq t_0$ gezeigt. Für den Fall $t \leq t_0$ betrachtet man einfach das Integral in den Grenzen von t bis t_0. ■

Im folgenden Satz leisten wir die nötige Vorarbeit für unsere weiteren Überlegungen. Der gewünschte Eindeutigkeitssatz ergibt sich dann mühelos.

Satz 1.3.4
Sei $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ Lösung von

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\,y(t) = 0 \tag{24}$$

auf $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und ferner

$$\|\varphi(t)\| := [\,|\varphi(t)|^2 + |\dot{\varphi}(t)|^2 + \cdots + |\varphi^{(n-1)}(t)|^2\,]^{1/2}$$

für alle $t \in I$. Dann gilt:

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\|\,e^{\left|\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds\right|}, \quad t \in I, \tag{25}$$

wobei

$$k(s) := (n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i(s)|$$

ist. □

Man beachte, daß dieser Satz für alle $t \in I$ eine Abschätzung des Ausdrucks $\|\varphi(t)\|$ durch die Konstante $\|\varphi(t_0)\|$ ermöglicht. Die Beträge innerhalb des Terms $\|\varphi(t)\|$ sind nur für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ notwendig.

Beweis

Bezeichne o.B.d.A. $\mathbb{K}$ die reellen Zahlen (sonst ist der Beweis separat auf $\mathsf{Re}(\varphi)$ und $Im(\varphi)$ anzuwenden). Setze:

$$(\dagger) \quad v(s) := \|\varphi(s)\|^{\,2} =: \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi^{(i)}(s))^2, \quad s \in I$$

Da $\varphi \in \mathcal{C}^n$ eine Lösung von (24) darstellt, ist jede Komponente von v und damit v differenzierbar.

$$\begin{aligned}
\dot{v}(s) &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^{(i)}(s)\, \varphi^{(i+1)}(s) \\
&= 2 \sum_{i=0}^{n-2} \varphi^{(i)}(s)\, \varphi^{(i+1)}(s) + 2\, \varphi^{(n-1)}(s)\, \varphi^{(n)}(s) \\
&\overset{(24)}{=} 2 \sum_{i=0}^{n-2} \varphi^{(i)}(s)\, \varphi^{(i+1)}(s) + 2\, \varphi^{(n-1)}(s) \left(- \sum_{i=0}^{n-1} a_i(s)\, \varphi^{(i)}(s) \right)
\end{aligned}$$

Wegen $|\varphi^{(i)}(s)| \leq \sqrt{\varphi^2(s) + \cdots + (\varphi^{(i)}(s))^2 + \cdots (\varphi^{(n-1)}(s))^2}$ läßt sich $\varphi^{(i)}$ $i = 1, \cdots, n$ jeweils durch $\|\varphi(s)\|$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
|\dot{v}(s)| &\leq \left| 2\,(n-1)\, \|\varphi(s)\|^2 - 2\, \|\varphi(s)\| \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i(s)\, \|\varphi(s)\| \right) \right| \\
&\leq 2\,(n-1)\, \|\varphi(s)\|^2 + 2\, \|\varphi(s)\|^2 \sum_{i=0}^{n-1} |a_i(s)| \\
&= 2\, \|\varphi(s)\|^2 \left(n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i(s)| \right) \\
&=: 2\, k(s)\, \|\varphi(s)\|^2 \\
&\overset{(\dagger)}{=} 2\, k(s)\, v(s)
\end{aligned}$$

Für $t \geq t_0$ liefert Integration über $[t_0, t]$:

$$v(t) - v(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} |\dot{v}(s)|\, ds \leq 2 \int_{t_0}^{t} k(s)\, v(s)\, ds$$

Für $t \leq t_0$ liefert Integration über das gleiche Intervall:

$$v(t_0) - v(t) \geq - \int_{t}^{t_0} |\dot{v}(s)|\, ds \geq -2 \int_{t}^{t_0} k(s)\, v(s)\, ds$$

Also gilt für beliebige $t \in I$

$$v(t) \leq v(t_0) + 2 \left| \int_{t_0}^{t} k(s)\, v(s)\, ds \right|.$$

Nach Gronwall gilt:

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(t_0)\, e^{2 \left| \int_{t_0}^{t} k(s)\, ds \right|} \\ &= \|\varphi(t_0)\|^2 \left(e^{\left| \int_{t_0}^{t} k(s)\, ds \right|} \right)^2, \end{aligned}$$

so daß daraus die Behauptung folgt:

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\|\, e^{\left| \int_{t_0}^{t} k(s)\, ds \right|}$$

■

Satz 1.3.5 (EINDEUTIGKEITSSATZ)
Seien $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\, y(t) = b(t)$$

auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und gelte für ein $t_0 \in I$:

(26) $$\varphi^{(i)}(t_0) = \psi^{(i)}(t_0) \quad \text{für alle} \quad i = 0, \cdots, n-1,$$

d.h. die ersten (n-1) Ableitungen stimmen zum Zeitpunkt t_0 überein. Dann folgt:

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

□

Beweis
Betrachte die Funktion $\chi(t) := \varphi(t) - \psi(t)$. Dann genügt $\chi(t)$ der Differentialgleichung (24) und wegen $\|\chi(t_0)\| =: \|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\| = 0$ folgt $\chi \equiv 0$ aus dem Satz (1.3.4). ■

Der Differentialoperator

Für die folgenden theoretischen Überlegungen ist es erforderlich, Funktionen in die linearen Differentialgleichungen (22) und (24) einzusetzen. Dieser Vorgang kann mit Hilfe des *Differentialoperators* [28] L gedeutet werden. Man betrachte den Differentialoperator

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{C}(I,\mathbb{K}), \\ \varphi &\longmapsto \varphi^{(n)} + a_{n-1}(\cdot)\,\varphi^{(n-1)} + \cdots + a_0(\cdot)\,\varphi, \end{aligned}$$

der eine n-mal stetig differenzierbare Funktion φ auf die stetige Funktion $L(\varphi) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ abbildet. Offensichtlich ist φ gerade dann Lösung der homogenen Differentialgleichung (24), wenn $L(\varphi(t)) = 0$ für alle $t \in I$ gilt. Man beachte, daß es sich bei $L(\cdot)$ um einen Operator handelt, d.h. um eine Funktion, deren Argument wiederum Funktionen sind. Insbesondere ist $L(\cdot)$ ein linearer Operator, denn es gilt aufgrund der Linearität der Ableitung:

$$L(\alpha\,\varphi + \beta\,\psi) = \alpha\,L(\varphi) + \beta\,L(\psi)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Läßt sich für jede stetige Funktion $b(t)$ eine passende Funktion y finden, so daß $L(y) = b(t)$ gilt, dann ist der Differentialoperator surjektiv. Ist y durch $b(t)$ stets eindeutig bestimmt, so ist $L(\cdot)$ injektiv. Da wir mit dem Bereich $\mathbb{K}$ ausdrücklich auch komplexwertige Lösungen $\varphi(t)$ zulassen, ist noch daraufhinzuweisen, daß der Übergang zum Realteil $\mathsf{Re}(\varphi(t))$, beziehungsweise zum Imaginärteil $Im(\varphi(t))$ mit der Differentiation vertauschbar ist, d.h. es gilt $L(\mathsf{Re}(\varphi(t))) = \mathsf{Re}(L(\varphi(t))$ und analoges für den Imaginärteil. In mathematisch korrekter Schreibweise sollte eigentlich $(L\,\varphi)(t)$ statt $L(\varphi(t))$ geschrieben werden, allerdings ist die zweite Form übersichtlicher und wird daher in Zukunft von uns benutzt.

Proposition 1.3.6
Der Differentialoperator besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) Sind alle Koeffizienten $a_i(\cdot)$ reelle Funktionen und φ eine komplexwertige Lösung von $L(y) = 0$, so sind auch $\mathsf{Re}(\varphi)$ und $Im(\varphi)$ Lösungen von $L(y) = 0$ und umgekehrt.

(ii) Sind φ und ψ Lösungen von $L(y) = b(t)$, so löst $(\varphi - \psi)$ die Gleichung $L(y) = 0$.

(iii) Löst φ die homogene Gleichung und ist $L(\psi) = b(t)$, so gilt $L(\psi + \varphi) = b(t)$.

(iv) Sind φ und ψ Lösungen der Gleichung $L(y) = 0$, so gilt auch $L(\varphi + \psi) = 0$.

□

[28] differential operator

Dabei besagt die letzte Aussage der Proposition, daß der Kern des Differentialoperators, also die Gesamtheit aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung (24), einen Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen bildet. An dieser Stelle beweisen wir nur die erste Aussage, denn die verbleibenden Beweise verlaufen analog.
Beweis von (i): Sei $\varphi(t) = u(t) + i\,v(t)$, so gilt nach der Summenregel zur Differentiation komplexwertiger Funktionen über reellen Intervallen:

$$\varphi^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) + i\,v^{(k)}(t), \quad \text{für alle } t \in I.$$

Also ist aufgrund der Linearität φ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung (24), wenn ihr Real- und Imaginärteil es sind:

$$L(\varphi) = L(u) + i\,L(v) = 0 \Leftrightarrow L(u) = 0 \wedge L(v) = 0$$

Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Die folgenden drei Sätze sind dem Begriff eines *Fundamentalsystems* einer Differentialgleichung n-ter Ordnung gewidmet, d.h. einer Familie aus n unabhängigen Lösungen. Hierzu muß zunächst geklärt werden, was man unter einer linear unabhängigen Familie von Funktionen versteht.

Definition 1.3.7 (Lineare Abhängigkeit von Funktionen)
Eine Familie $(f_i)_{i=1,\cdots,k}$ von Funktionen $f_i : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ heißt linear abhängig, wenn Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{K}$ existieren mit $\sum \alpha_i\, f_i(t) = 0$ für alle $t \in I$ und $\alpha_i \neq 0$ für mindestens einen Index i. Andernfalls heißt sie linear unabhängig.
$\square$

Bemerkung
Da der Begriff der linearen Unabhängigkeit nur für Vektoren erklärt ist, erfordert seine Anwendung die Wahl eines geeigneten Vektorraumes, zum Beispiel die Menge aller Abbildungen von I in den $\mathbb{R}^n$ $Abb(I, \mathbb{R}^n)$.

Korollar 1.3.8
Seien $\varphi_1(\cdot), \cdots, \varphi_k(\cdot)$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung (24) auf einem offenen Lösungsintervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\varphi_1(\cdot), \cdots, \varphi_k(\cdot)$ sind linear abhängig in $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, d.h. die Familie $(\varphi_i)_{i=1,\cdots,k}$ ist linear abhängig.

(ii) Die folgenden Vektoren sind linear abhängig für ein $t_0 \in I$:

$$v^j = \begin{pmatrix} \varphi_j(t_0) \\ \dot{\varphi}_j(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_j^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, j = 1, \cdots, k,$$

□

Die interessantere Schlußrichtung ist die von (ii) nach (i). Es reicht, die lineare Abhängigkeit der Vektoren v^j in einem Zeitpunkt $t_0 \in I$ nachzuweisen, um die Abhängigkeit der ganzen Familie $(\varphi_i)_{i=1,\cdots,k}$ für alle $t \in I$ zu gewinnen.

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\sum \alpha_i \varphi_i(t) = 0 \quad \forall\, t \in I$ mit $\alpha_i \neq 0$ für mindestens ein $i = 1, \cdots, k$. Dann erhält man durch Differentiation:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i^{(j)}(t) = 0 \quad \forall t \in I, j = 1, \cdots, n.$$

Setze nun speziell $t := t_0$, so folgt:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \begin{pmatrix} \varphi_i(t_0) \\ \dot{\varphi}_i(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i = 0$ mit $\alpha_i \neq 0$ für mindestens ein $i = 1, \cdots, k$. Setze $\varphi(t) := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i(t)$ auf I. Die Funktion φ ist als Linearkombination von Lösungen von (24) selbst eine Lösung. Ferner gilt nach Voraussetzung für die j-te Komponente von v^i:

$$\varphi^{(j)}(t_0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i^{(j)}(t_0) = 0 \quad \text{für } j = 1, \cdots, n-1$$

Damit sind die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes 1.3.5 erfüllt: Jede homogene Differentialgleichung wird durch die Nullfunktion gelöst. Zum Zeitpunkt t_0 stimmen sie überein, also gilt $\varphi \equiv 0$. ■

Definition 1.3.9 (FUNDAMENTALSYSTEM)
Eine linear unabhängige Familie $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ von n Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung (24) n-ter Ordnung heißt ein Fundamentalsystem von Lösungen von (24). □

Ein Fundamentalsystem bildet die Basis des Raumes $\mathcal{L}$ aller Lösungen einer homogenen Differentialgleichung. Alle aus der linearen Algebra bekannten Grundeigenschaften einer Basis lassen sich analog auf das Fundamentalsystem übertragen und ebenso beweisen. Wir benötigen ein solches Fundamentalsystem zur Bestimmung der allgemeinen Lösung einer homogenen Differentialgleichung vom Typ (24), denn wie es sich bei der Herleitung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes (1.3.13) herausstellen wird, läßt sich jede Lösung als Linearkombination der „Basislösungen" des Fundamentalsystems darstellen. Doch zunächst soll ein Kriterium vorgestellt werden, mit dessen Hilfe sich überprüfen läßt, ob es sich bei einer gegebenen Familie von Lösungen um ein Fundamentalsystem handelt.

Korollar 1.3.10
Sei $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ eine Familie von Lösungen von
(24) $\quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\, y(t) = 0$
auf dem offenen Lösungsintervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ ist genau dann ein Fundamentalsystem von (24), wenn die Wronski-Determinante

$$\det W(t_0) := \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \dot{\varphi}_1(t_0) & \cdots & \dot{\varphi}_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}$$

für ein $t_0 \in I$ nicht verschwindet, d.h. $\det W(t_0) \neq 0$.

(ii) Ist $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem, so existiert zu jeder Anfangsbedingung

$$x^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

genau eine Lösung φ der homogenen Differentialgleichung (24) mit

$$\varphi^{(j-1)}(t_0) = y_{j-1}$$

für alle $j = 1, \cdots, n$.

□

Beweis
(i) Die lineare Abhängigkeit der Vektoren

$$v^j(\cdot) = \begin{pmatrix} \varphi_j(\cdot) \\ \vdots \\ \varphi_j^{(n-1)}(\cdot) \end{pmatrix}$$

in einem Punkt $t_0 \in I$ ist nach Korollar 1.3.8 gleichbedeutend mit der linearen Abhängigkeit der Familie $(\varphi_j)_{j=1,\cdots,n}$ auf dem ganzen Intervall I. Da die Determinante einer Matrix genau dann verschwindet, wenn ihre Spalten linear abhängig sind, folgt: Die Wronski-Determinante verschwindet entweder auf dem gesamten Intervall oder nirgends. Die Behauptung folgt nun direkt aus Korollar 1.3.8 für $k = n$.
(ii) Da die einzelnen Funktionen $\varphi_i \in (\varphi_i)_{i=1,\cdots,n}$ Lösungen der Differentialgleichung (24) sind, ist nach Proposition 1.3.6 (iv) auch jede Linearkombination $\varphi = \sum \alpha_i \, \varphi_i$ eine Lösung der Differentialgleichung. Jede Lösung von (24) besitzt also eine Darstellung $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \varphi_i(t)$, so daß

$$(\dagger) \quad \varphi^{(j-1)}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \varphi_i^{(j-1)}(t_0) = y_{j-1}$$

für alle $j = 1, \cdots, n$ gilt. Ist die Lösung φ gegeben, so errechnet sich y_{j-1} jeweils sofort durch Einsetzen. Ist umgekehrt die Anfangsbedingung

$$x^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

bekannt, so hat das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \dot{\varphi}_1(t_0) & \cdots & \dot{\varphi}_n(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

aufgrund der linearen Unabhängigkeit eine eindeutig bestimmte Lösung. Das Korollar 1.3.10 beinhaltet also eine notwendig und hinreichende Bedingung dafür, ob ein gegebenes System von Lösungen ein Fundamentalsystem bildet. ■

Das charakteristische Polynom

Die Frage nach der Existenz eines Fundamentalsystems wird im Folgenden lediglich für den zeitinvarianten Fall behandelt. Allgemeine Ergebnisse erhält man in Kapitel 2. Man betrachte die zeitinvariante, homogene Form der Differentialgleichung (22)

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0\, y(t) = 0. \tag{27}$$

Im zeitinvarianten Fall hat der von uns definierte Differentialoperator die folgende Form:

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0\, y$$

mit konstanten Funktionen $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, \cdots, n-1$. Wie uns aus dem Abschnitt über den Differentialoperator bekannt ist, bildet der Kern des Operators den Raum aller Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung. Zur Angabe einer allgemeinen Lösung ist die Kenntnis einer Basis dieses Raumes, also eines Fundamentalsystems, erforderlich. Dabei spielt das zur Differentialgleichung (27) gehörige *charakteristische Polynom* [29] eine wesentliche Rolle:

$$p(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_0\, s^0.$$

Das Auffinden eines Fundamentalsystems läßt sich auf die Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms zurückführen:
Wann ist $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ Lösung der homogenen Differentialgleichung (27) ? Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$L(\varphi(t)) = (\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_0)\, e^{\lambda t} = p(\lambda)\, e^{\lambda t} = 0$$

gilt, also wenn λ *Wurzel* des charakteristischen Polynoms ist. Sind $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ n verschiedene Wurzeln des charakteristischen Polynoms einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung, so bilden bereits die Funktionen $\{e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\}$wegen $\sum \alpha_i\, e^{\lambda\, i\, t} = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \cdots, n$ ein Fundamentalsystem der Lösungen. Treten einzelne Wurzeln λ_i mit einer höheren Vielfachheit $m_i > 1$ auf, so erhält man lediglich $k < n$ unabhängige Lösungen $\{e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_k t}\}$. Die Suche nach den restlichen Lösungen wird durch folgendes Lemma vereinfacht:

Lemma 1.3.11
Sei $L(\cdot)$ der Differentialoperator, $p(\cdot)$ das zugehörige charakteristische Polynom und $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ eine n-mal differenzierbare Funktion auf $I \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$L(g(t)\, e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{p^{(j)}(\lambda)}{j!}\, g^{(j)}(t)$$

□

[29] characteristic polynomial

Für den Beweis beachte man, daß λ_i genau dann m_i-fache Wurzel eines Polynoms $p(\cdot)$ ist, wenn p die folgende Form hat: $p(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}\, r(x)$ mit Rest $r(x)$. Daraus folgt sofort, daß $p^{(k)}(\lambda_i) = 0$ für alle $k < m_i$ und $p^{(k)}(\lambda_i) \neq 0$ für $k = m_i$.

Beweis

$$L(g(t)\, e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{d\,t^k}\,(g(t)\, e^{\lambda t}),$$

wobei $a_n = 1$ ist. Nach der Produktregel für die Differentiation gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{d\,t^k}\left[g(t)\, e^{\lambda t}\right] &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(j)}(t)\, \lambda^{k-j}\, e^{\lambda t} \\
\Rightarrow L(g(t)\, e^{\lambda t}) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(j)}(t)\, \lambda^{k-j}\, e^{\lambda t} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} g^{(j)}(t)\, \lambda^{k-j}\, e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

■

Bemerkung
Im allgemeinen gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_{kj} &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{kj} \\
\Rightarrow L(g(t)\, e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} g^{(j)}(t)\, \lambda^{k-j}\, e^{\lambda t} \\
&= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(t)}{j!} \sum_{k=j}^{n} k\,(k-1)\cdots(k-j+1)\, a_k\, \lambda^{k-j} \\
&= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(t)}{j!}\, p^{(j)}(\lambda)
\end{aligned}$$

Wie man anhand von Abbildung (18) sieht, gilt tatsächlich die oben benutzte Aussage:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_{kj} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{kj}.$$

Denn die linke Seite der Gleichung entspricht einfach einer waagerechten, die rechte Seite einer horizontalen Summation derselben Punkte.

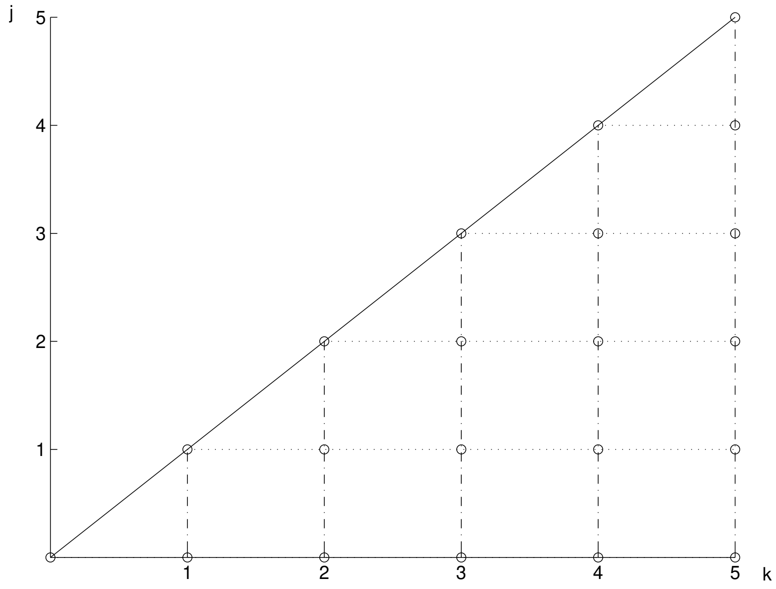


Abbildung 18: *Die Abbildung zeigt, daß dieselben Punkte aufsummiert werden.*

Fundamentalsysteme von Differentialgleichungen

Satz 1.3.12
Seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ die verschiedenen reellen Wurzeln des charakteristischen Polynoms einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit den Vielfachheiten $m_1, \cdots, m_r$ und sei $m_1 + \cdots + m_r = n$. Dann bilden die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$(\dagger)\left\{\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & t\, e^{\lambda_1 t}, & \cdots & t^{m_1-1}\, e^{\lambda_1 t} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ e^{\lambda_r t}, & t\, e^{\lambda_r t}, & \cdots & t^{m_r-1}\, e^{\lambda_r t} \end{array}\right.$$

ein reelles Fundamentalsystem. □

Beweis
Mit Hilfe des Lemmas 1.3.11 weisen wir nach, daß es sich bei (†) um Lösungen handelt. Sei λ_i m_i-fache Wurzel des charakteristischen Polynoms, dann gilt mit

$g(t) = t^k$ für alle $k < m$:

$$\begin{aligned} L(t^k\, e^{\lambda_i\, t}) &= e^{\lambda_i\, t} \sum_{j=0}^{m} \frac{p^{(j)}(\lambda_i)}{j!}\, g^{(j)}(t) \\ &= e^{\lambda_i\, t} \sum_{j=0}^{k} \frac{p^{(j)}(\lambda_i)}{j!}\, g^{(j)}(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Noch zu zeigen ist ihre lineare Unabhängigkeit. Dies wird mittels Widerspruch gezeigt:
Angenommen, es existierte unter den Voraussetzungen von Satz 1.3.12 eine nicht-triviale Linearkombination der Null:

$$(\dagger\,\dagger) \quad \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}\, t^j\, e^{\lambda_i\, t} = 0,$$

wobei i den Zeilen- und j den Spaltenindex von ($\dagger$) bezeichnet. Setze

$$p_i(t) := \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}\, t^j,$$

als die Koeffizienten von $e^{\lambda_i\, t}$. Durch Streichen aller Summanden in $\sum_{i=1}^{r} p_i(t)\, e^{\lambda_i\, t}$ mit $p_i(t) \equiv 0$ und anschließender Umnumerierung erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{s} p_i(t)\, e^{\lambda_i\, t}$$

mit $p_i \neq 0 \quad \forall\, i = 1, \cdots s, s \leq r$ und $\deg(p_i(t)) \leq m_i - 1$. Man kann o.B.d.A. annehmen, daß wir unter allen nicht-trivialen Darstellungen ($\dagger\,\dagger$) der Null, sofern überhaupt mehrere existieren, die kürzeste, d.h. die mit den meisten $\sum c_{ij}\, t^j = 0$ gewählt haben. Da diese Darstellung unverkürzbar ist, ist s die minimale Anzahl der Zeilen von ($\dagger$), die zur Darstellung der Null benötigt wird. Durch Multiplikation von $\sum_{i=1}^{s} p_i(t)\, e^{\lambda_i\, t} = 0$ mit $e^{-\lambda_s\, t}$ ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{s-1} p_i(t)\, e^{(\lambda_i - \lambda_s)\, t} + p_s(t) = 0$$

Bei m_s-maligem Differenzieren nach t fällt der letzte Summand $p_s(t)$ wegen $\deg(p_s(t)) \leq m_s - 1$ weg und wir erhalten eine Darstellung der Null mit nur $(s-1)$ Summanden:

$$\sum_{i=1}^{s-1} q_i(t)\, e^{(\lambda_i - \lambda_s)\, t} = 0$$

mit $\deg(q_i) = \deg(p_i)$ nach Produktformel. $\lightning$

Für den Fall $s = 1$ bleibt lediglich ein Ausdruck der Form $\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}\, t^j\, e^{\lambda_i\, t}$ mit $c_{ij} \neq 0$ nach Voraussetzung. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der verschiedenen Potenzen von t kann diese Summe niemals Null werden. $\lightning$ $\blacksquare$

Bemerkung
Für den Fall des Auftretens komplexer Wurzeln $\lambda_i \in \mathbb{C}$ des charakteristischen Polynoms erhält man ein komplexes Fundamentalsystem der Form (†). Denn wir hatten weder bei dem Beweis noch in Lemma 1.3.11 vorausgesetzt, daß die $t^k e^{\lambda_i t} \in Ker(L)$ sind, beziehungsweise die Wurzeln λ_i reell sein müssen. Da jedes Polynom n-ten Grades n Nullstellen über $\mathbb{C}$ besitzt, ergibt sich die lineare Unabhängigkeit von $\{e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\}$ im Falle von n verschiedenen Wurzeln sofort aus $\sum \alpha_i e^{\lambda_i t} = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \, \forall i$.

In der Sprechweise der Physik sagt man, jede Lösung der Differentialgleichung $L(y) = 0$ ist eine Überlagerung von verallgemeinerten Eigenschwingungen.

Mit Hilfe der obigen Sätze läßt sich ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von Anfangswertproblemen mit linearen homogenen Differentialgleichungen formulieren:

Satz 1.3.13 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)
Seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ die verschiedenen reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0\, y(t) = 0$$

und mit der Vielfachheit $m_i, i = 1, \cdots, n$. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung

$$x^0 = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_i \in \mathbb{K}$ für alle $i = 0, \cdots, n-1$ genau eine Lösung $\varphi(t) = \varphi(t; t_0, y_0, \cdots, y_{n-1})$ der Form

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij}\, t^j\, e^{\lambda_i t}.$$

□

Beweis
Die Eindeutigkeit haben wir bereits in Korollar 1.3.10 gezeigt und die Existenz und genaue Form der Lösung folgt direkt aus Satz 1.3.12. ■

Bemerkung
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & Ker(L) \subset \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n), \\ \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} & \longmapsto & \varphi(\cdot\,; t_0, y_0, \cdots, y_{n-1}) \end{array}$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Denn die Abbildung ist bijektiv, da sie

(i) injektiv ist aufgrund des Eindeutigkeitssatzes; zwei verschiedene Lösungen können nicht denselben Anfangswert besitzen und

(ii) surjektiv ist, denn jede Lösung $\varphi(\cdot)$ erfüllt mit $(\varphi^{(i)}(t_0))_{i=0,\cdots,n-1}$ eine Anfangsbedingung.

Und sie ist linear, da ihre Umkehrabbildung

$$\varphi(\cdot; t_0, y_0, \cdots, y_{n-1}) \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$$

aufgrund der Linearität der Differentiation linear ist. Da der $\mathbb{K}^n$ n-dimensional ist, kann man hieran noch einmal sehen, daß eine lineare homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung genau n linear unabhängige Lösungen besitzen muß.

Spezialfälle komplexer Fundamentalsysteme

Wie wir in der Bemerkung zu Satz 1.3.12 gesehen haben, ist im Falle komplexer Nullstellen des charakteristischen Polynoms im allgemeinen ein komplexes Fundamentalsystem der Form (†) gegeben. Sind jedoch sämtliche Koeffizienten a_i reell, so besteht die Möglichkeit, dieses Fundamentalsystem in ein reelles zu transformieren:

Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Wurzel des charakteristischen Polynoms, so ist auch die dazu konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ eine Wurzel, denn

$$p(\overline{\lambda}) = (\overline{\lambda})^n + \overline{a}_{n-1}\,(\overline{\lambda})^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = \overline{p(\lambda)} = 0,$$

da ja die Koeffizienten $a_0, \cdots, a_{n-1}$ als reell vorausgesetzt sind. Da also komplexe Nullstellen immer paarweise auftreten, sind auch die Vielfachheiten von λ und $\overline{\lambda}$ gleich, d.h. alle reellen und komplexen Wurzeln lassen sich wie folgt anordnen: $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \cdots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}, \lambda_{2k+1}, \cdots, \lambda_r$, wobei $\lambda_j = \alpha_j + i\,\beta_j, \beta \neq 0$ für alle $j = 1, \cdots, k$ und $\lambda_{2k+1}, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$. Sei m_j für alle $j = 1, \cdots, r$ die entsprechende Vielfachheit der auftretenden Nullstellen, dann ist $2\,(m_1 + \cdots + m_k) + m_{2k+1} + \cdots + m_r = n$ und das zugehörige komplexe Fundamentalsystem hat die Form

$$\left\{ \begin{array}{llll} e^{\lambda_1 t}, & t\,e^{\lambda_1 t}, & \cdots, & t^{m_1-1}\,e^{\lambda_1 t} \\ e^{\overline{\lambda_1} t}, & t\,e^{\overline{\lambda_1} t}, & \cdots, & t^{m_1-1}\,e^{\overline{\lambda_1} t} \\ \vdots & \vdots & \cdots, & \vdots \\ e^{\lambda_r t}, & t\,e^{\lambda_r t}, & \cdots, & t^{m_r-1}\,e^{\lambda_r t} \end{array} \right.$$

Durch Anwendung der Eulerschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned} t^j\, e^{\lambda_k t} &= t^j\, e^{(\alpha_k + i\,\beta_k)\,t} = t^j\, e^{\alpha_k t}\,(\cos(\beta_k\, t) + i\,\sin(\beta_k\, t)) \\ t^j\, e^{\overline{\lambda_k}\, t} &= t^j\, e^{(\alpha_k - i\,\beta_k)\,t} = t^j\, e^{\alpha_k t}\,(\cos(\beta_k\, t) - i\,\sin(\beta_k\, t)) \end{aligned}$$

Da wir schon gesehen haben, daß $\mathsf{Re}(\varphi)$ und $Im(\varphi)$ ebenfalls Lösungen einer Differentialgleichung sind, falls φ Lösung ist, ergibt sich:

Satz 1.3.14
Betrachte die lineare homogene Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0\, y(t) = 0$$

mit $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Dann bilden die Funktionen

$$\left\{ \begin{array}{cccc} e^{\alpha_1 t}\,\cos(\beta_1\, t), & t\, e^{\alpha_1 t}\,\cos(\beta_1\, t), & \cdots, & t^{m_1-1}\, e^{\alpha_1 t}\,\cos(\beta_1\, t) \\ e^{\alpha_1 t}\,\sin(\beta_1\, t), & t\, e^{\alpha_1 t}\,\sin(\beta_1\, t), & \cdots, & t^{m_1-1}\, e^{\alpha_1 t}\,\sin(\beta_1\, t) \\ \vdots & \vdots & \cdots, & \vdots \\ e^{\lambda_r t}, & t\, e^{\lambda_r t}, & \cdots, & t^{m_r-1}\, e^{\lambda_r t} \end{array} \right.$$

ein reelles Fundamentalsystem und jede reelle Lösung der Differentialgleichung läßt sich als reelle Linearkombination des Fundamentalsystems schreiben. Jede Lösung mit reellen Anfangsbedingungen ist auf ihrem Definitionsintervall reell.
□

Beispiel:
$y^{(4)}(t) + y(t) = 0$, also $p(s) = s^4 + 1$. Die Wurzeln von $p(s)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1-i) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1+i) \\ \lambda_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1-i) \end{aligned}$$

mit den Vielfachheiten $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$. Dann lautet das zugehörige reelle Fundamentalsystem nach Satz 1.3.14:

$$\left\{ \begin{array}{cc} e^{t/\sqrt{2}}\,\cos(t/\sqrt{2}) & e^{t/\sqrt{2}}\,\sin(t/\sqrt{2}) \\ e^{-t/\sqrt{2}}\,\cos(t/\sqrt{2}) & e^{-t/\sqrt{2}}\,\sin(t/\sqrt{2}) \end{array} \right.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned}\varphi(t) = e^{t/\sqrt{2}}\,[c_1 \cos(t/\sqrt{2}) + c_2 \sin(t/\sqrt{2})] \\ +e^{-t/\sqrt{2}}\,[c_3 \cos(t/\sqrt{2}) + c_4 \sin(t/\sqrt{2})]\end{aligned}$$

□

Bisher sind wir nicht auf inhomogene Differentialgleichungen eingegangen. Die allgemeine Lösung einer linearen inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich jedoch nach Proposition 1.3.6.(iii) aus der Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Wir behandeln hier jedoch nur einen Spezialfall, der zum Beispiel bei den *erzwungenen harmonischen Schwingungen* auftritt und verweisen den Leser ansonsten auf die Aufgabe 1.

Satz 1.3.15
Sei $h \in \mathbb{C}[t]$ ein komplexes Polynom und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine m-fache Wurzel des charakteristischen Polynoms

$$p(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Dann gibt es genau eine Lösung der Form $t^m\, q(t)\, e^{\lambda t}$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0\, y(t) = h(t)\, e^{\lambda t},$$

wobei $q \in \mathbb{C}[t]$ und $\deg(q) = \deg(h)$. □

Beweis
Es gilt

$$L(g(t)\, e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} p^{(j)}(\lambda)\, \frac{1}{j!}\, g^{(j)}(t)$$

Betrachte die Abbildung $F : q(t) \longmapsto e^{-\lambda t}\, L(t^m\, q(t) e^{\lambda t})$ mit einem beliebigen Polynom $q(t) \in \mathbb{C}[t]$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\deg(e^{-\lambda t}\, L(t^m\, q(t)\, e^{\lambda t})) &= \deg(\sum_{j=0}^{n} \frac{p^{(j)}(t)}{j!}\, t^m\, q^{(j)}(t)) \\ &= \deg(\sum_{j=m}^{n} \frac{p^{(j)}(t)}{j!}\, t^m\, q^{(j)}(t))\end{aligned}$$

Im weiteren sei $\mathbb{C}_d[t] = \{f \in \mathbb{C}[t] : \deg(f) \leq d\}$ und $d = \deg(h)$. Die Menge $\mathbb{C}_d[t]$ bildet einen Vektorraum der Dimension $d{+}1$. Da $F : q(t) \longmapsto e^{-\lambda t}\, L(t^m\, q(t) e^{\lambda t})$

eine lineare graderhaltende Abbildung $\mathbb{C}_d[t] \longrightarrow \mathbb{C}_d[t]$ ist, bildet F einen Vektorraumisomorphismus. Es existiert also zu jedem $h \in \mathbb{C}_d[t]$ genau ein $q \in \mathbb{C}_d[t]$ mit

$$f(q(t)) = e^{-\lambda t} L(t^m q(t) e^{\lambda t}) = h(t)$$

$\blacksquare$

Bemerkung
Um zu einem gegebenen Polynom $h(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_d t^d$ das zugehörige Polynom $q(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_d t^d$ zu finden, muß man das Gleichungssystem lösen, das durch Koeffizientenvergleich aus

$$\sum_{k=0}^{d} \beta_k L(t^{m+k} e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{d} (\alpha_k t^k) e^{\lambda t}$$

entsteht.

Beispiel: Die erzwungene Schwingung eines linearen Oszillators
Man betrachte die folgende Differentialgleichung, welche die *erzwungene Schwingung* eines Oszillators beschreibt

$$(*) \qquad m\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = F_0 \cos(\omega\,t),$$

wobei $m, k > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $c \geq 0$ seien. Die Konstante k legt die Stärke der Rückstellkraft, c die der Reibung fest.

a) Sei $c > 0$. Finde eine spezielle Lösung von $(*)$ und bestimme „die allgemeine Lösung", d.h.die Menge aller Lösungen von $(*)$. Wie verhalten sich diese Lösungen, wenn $t \to \infty$ geht?

b) Sei $c = 0$ (keine Reibung). Behandle dieselben Aufgaben wie in a) und unterscheide dabei die Fälle
(i) $\omega^2 \neq k/m$ (ii) $\omega^2 = k/m$ (Resonanz).
Weshalb spricht man im Fall (ii) von Resonanz–Katastrophe?

c) Zeichne mit Hilfe des Rechners verschiedene Integralkurven, die das Lösungsverhalten von $(*)$ für verschiedene charakteristische Parameterwerte m, c, k, ω illustrieren.

a): Gesucht ist zunächst eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$(*) \qquad \ddot{y} + \frac{c}{m}\,\dot{y} + \frac{k}{m}\,y = \frac{F_0}{m}\,\cos(\omega\,t).$$

Dazu betrachte man folgende Vorüberlegung:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Lösungsintervall und $L(\cdot)$ der Differentialoperator. Dann gilt für die Lösungen $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$:
$L(\mathsf{Re}(\varphi)) = \mathsf{Re}(L(\varphi))$; *die beiden Operatoren $L(\cdot)$ und $\mathsf{Re}(\cdot)$ sind also vertauschbar.*

Beweis
Für $\mathbb{C}-$wertige Funktionen auf reellen Intervallen gilt

$$\varphi'(t) = [\mathsf{Re}(\varphi(t))]' + i[Im(\varphi(t))]'.$$

Insbesondere haben wir

$$\mathsf{Re}(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\,\varphi(t)) = \mathsf{Re}(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\,\mathsf{Re}(\varphi(t)) + \frac{\partial^k}{\partial t^k}\,Im(\varphi(t))) = \frac{\partial^k}{\partial t^k}\,(\mathsf{Re}(\varphi(t)))$$

und daher

$$\begin{aligned} L(\mathsf{Re}(\varphi(t))) &= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\,\mathsf{Re}(\varphi(t)) + a_{n-1}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\,\mathsf{Re}(\varphi(t)) + \cdots + a_0\,\mathsf{Re}(\varphi(t)) \\ &= \mathsf{Re}(\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,\varphi(t)) + a_{n-1}\,\mathsf{Re}(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\,\varphi(t)) + \cdots + a_0\,\mathsf{Re}\varphi(t) \\ &= \mathsf{Re}(L(\varphi(t))). \end{aligned}$$

■

Diese Vorüberlegung ermöglicht es, über den Umweg des Komplexen den Satz 1.3.15 anzuwenden. Statt direkt eine reelle Funktion φ zu finden, welche die Differentialgleichung $(*)$ löst, kann man genausogut eine komplexe Lösung ψ der inhomogenen Differentialgleichung

$$(\dagger) \quad \ddot{y} + \frac{c}{m}\,\dot{y} + \frac{k}{m}\,y = \frac{F_0}{m}\,e^{i\,\omega\,t}$$

angeben. Denn der Realteil jeder Lösung von $(\dagger)$ ist nach Vorüberlegung eine Lösung von $(*)$:

$$\begin{aligned} L(\mathsf{Re}(\psi(t)) &= \mathsf{Re}(L(\psi(t)) \\ &= \mathsf{Re}(\frac{F_0}{m}\,e^{i\,\omega\,t}) \\ &= \frac{F_0}{m}\,\cos(\omega\,t) \end{aligned}$$

<u>Die partikuläre Lösung:</u>
Gesucht wird gemäß obiger Vorüberlegung eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $(\dagger)$. Der Vorteil bei der Anwendung von Satz 1.3.15

besteht darin, daß dieser Satz nicht nur die Existenz einer Lösung von (†) garantiert, sondern darüberhinaus Angaben über die spezielle Form dieser Lösung macht. In den Bezeichnungen von Satz 1.3.15 ist $q(t) := F_0/m$ ein konstantes, komplexes Polynom und $\lambda := \omega\, i$. Bezeichnen wir λ wegen $p(\omega\, i) = (\omega\, i)^2 + \frac{c}{m}(\omega\, i) + \frac{k}{m} \neq 0$ formell als „Wurzel der Vielfachheit $m = 0$“, so hat die gesuchte Lösung nach Satz 1.3.15 die Form $\psi(t) = a\, e^{i\,\omega\, t}$ mit skalarem $a \in \mathbb{C}$. Es gilt $\dot{\psi}(t) = a\, i\, \omega\, e^{i\,\omega\, t}$ und $\ddot{\psi}(t) = -a\, \omega^2\, e^{i\,\omega\, t}$. Da ψ eine Lösung ist, ergibt Einsetzen in (†):

$$\begin{aligned} -a\,\omega^2\, e^{i\,\omega\, t} + \frac{c}{m}\, a\, i\, \omega\, e^{i\,\omega\, t} + \frac{k}{m}\, a\, e^{i\,\omega\, t} &= \frac{F_0}{m}\, e^{i\,\omega\, t} \\ \Leftrightarrow \quad a\,(-\omega^2 + \frac{c}{m}\, i\omega + \frac{k}{m}) &= \frac{F_0}{m} \\ \Leftrightarrow \quad a = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + c\,\omega\, i} & \end{aligned}$$

<u>Aufspaltung von a in Real- und Imaginärteil:</u>

$$a = \frac{F_0\,(k - \omega^2\, m)}{(k - \omega^2\, m)^2 + c^2\,\omega^2} - i\, \frac{F_0\, c\, \omega}{(k - \omega^2\, m)^2 + c^2\,\omega^2}$$

Setze $b := k - \omega^2\, m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \left(\frac{F_0\, b}{b^2 + c^2\,\omega^2} - i\, \frac{F_0\, c\, \omega}{b^2 + c^2\,\omega^2} \right) (\cos(\omega\, t)) + i\, \sin(\omega\, t)) \\ &= \left(\frac{F_0\, b}{b^2 + c^2\,\omega^2}\, \cos(\omega\, t) + \frac{F_0\, c\, \omega}{b^2 + c^2\,\omega^2}\, \sin(\omega\, t) \right) \\ &\quad + i \left(\frac{F_0\, b}{b^2 + c^2\,\omega^2}\, \sin(\omega\, t) - \frac{F_0\, c\, \omega}{b^2 + c^2\,\omega^2}\, \cos(\omega\, t) \right) \end{aligned}$$

Gemäß Vorüberlegung ist $\varphi(t) = \mathsf{Re}(\psi(t))$ eine partikuläre Lösung von $(*)$. Also folgt:

$$\varphi(t) = \frac{F_0}{(k - \omega^2\, m)^2 + c^2\,\omega^2} \Big((k - \omega^2\, m)\, \cos(\omega\, t) + c\, \omega\, \sin(\omega\, t) \Big)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich gerade aus der Summe der partikulären Lösung mit einer beliebigen Linearkombination eines Fundamentalsystems der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Dazu betrachten wir den gedämpften Oszillator

$$(\ddagger) \quad m\, \ddot{y}(t) + c\, \dot{y}(t) + k\, y(t) = 0.$$

Dieser besitzt das charakteristische Polynom

$$p(s) = s^2 + \frac{c}{m}\, s + \frac{k}{m}$$

mit den Wurzeln
$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2\,m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4\,m\,k}{4\,m^2}}.$$
Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

(i) $\underline{c^2 - 4\,m\,k > 0}$:
In diesem Fall sind die Nullstellen
$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\,k\,m}}{2\,m}$$
reell. Also bildet $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ ein Fundamentalsystem von (‡). Die Lösung von $(*)$ lautet dann
$$\psi_1(t) := \alpha\, e^{\lambda_1 t} + \beta\, e^{\lambda_2 t} + \varphi(t)$$
für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\underline{c^2 - 4\,m\,k = 0}$:
In diesem Fall besitzt p die doppelte Nullstelle $\lambda = -c/(2\,m)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Lösung von $(*)$ lautet dann
$$\psi_2(t) := \alpha\, e^{\lambda t} + \beta\, t\, e \lambda\, t + \varphi(t)$$
für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) $\underline{c^2 - 4\,m\,k < 0}$:
Hier besitzt das charakteristische Polynom das konjugiert komplexe Nullstellenpaar
$$\lambda_1 = \frac{-c + i\sqrt{4\,k\,m - c^2}}{2\,m}$$
beziehungsweise
$$\lambda_2 = \frac{-c - i\sqrt{4\,k\,m - c^2}}{2\,m}.$$
In diesem Fall bildet $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ ein komplexes Fundamentalsystem und
$$\{e^{-\frac{c}{2\,m} t} \cos(w\,t), e^{-\frac{c}{2\,m} t} \sin(w\,t)\}$$
mit $\mathsf{Re}(\lambda_1) = \frac{-c}{2\,m}$ und $w := Im(\lambda_1) = \frac{\sqrt{4\,k\,m - c^2}}{2\,m}$ ein reelles Fundamentalsystem von (‡). Die Lösung von $(*)$ lautet dann
$$\psi_3(t) := \alpha\, e^{-\frac{c}{2\,m} t} \cos(w\,t) + \beta\, t\, e^{-\frac{c}{2\,m} t} \sin(w\,t) + \varphi(t).$$

<u>Das Verhalten der allgemeinen Lösung für $t \to \infty$:</u>
Offensichtlich gilt für alle drei Fälle
$$\lim_{t\to\infty} \psi_i(t) = 0 + \lim_{t\to\infty} \varphi(t).$$

Das Verhalten der allgemeinen Lösung entspricht also dem Verhalten der speziellen Lösung $\varphi(t)$. Deren Amplitude ist aber zeitunabhängig. Das Supremum $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\psi(t)\|$ bleibt also beschränkt, der Fall einer vorhandenen Reibung ($c > 0$) führt nicht zur Resonanzkatastrophe.

b): Angenommen, die Schwingung fände ohne Reibung statt, d.h. $c = 0$. Die Differentialgleichung $(*)$ geht dann über in die Differentialgleichung

$$(**) \qquad m\,\ddot{y}(t) + k\,y(t) = F_0\,\cos(\omega\,t).$$

Dabei lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

(i) $\underline{\omega^2 \neq \frac{k}{m}:}$

Nach a) ist dann

$$\varphi(t) = \frac{F_0\,\cos(\omega\,t)}{k - \omega^2\,m}$$

eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $(**)$. Das zugehörige charakteristische Polynom $p(s) = s^2 + \frac{k}{m}$ besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$, da nach Voraussetzung $k,\ m > 0$ gilt. Dies führt zu der allgemeinen Lösung

$$\psi(t) = \alpha\,\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) + \beta\,\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) + \varphi(t)$$

Für $t \to \infty$ schwingt ψ also als Überlagerung einer Sinus- und einer Cosinusschwingungen periodisch. Die Funktion $\psi(t)$ bleibt auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt. Es findet keine Resonanz statt.

(ii) $\underline{\omega^2 = \frac{k}{m}\text{: Resonanzfall:}}$

Das charakteristische Polynom der komplexifizierten Differentialgleichung

$$(***) \qquad \ddot{y}(t) + \frac{k}{m}\,y(t) = \frac{F_0}{m}\,e^{i\,\omega\,t}$$

ist gerade $p(s) = s^2 + \frac{k}{m}$ mit den Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\,\omega.$$

Also existiert gemäß Satz 1.3.15 eine partikuläre Lösung der Form

$$\psi(t) = a\,t\,e^{i\,\omega\,t}$$

mit $a \in \mathbb{C}$ konstant. Zur Bestimmung von a setze man $\ddot{\psi}$ in $(***)$ ein. Aus

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= a\,e^{i\,\omega\,t} + a\,\omega\,i\,e^{i\,\omega\,t}\\ \ddot{\psi}(t) &= 2\,a\,\omega\,i\,e^{i\,\omega\,t} - a\,\omega^2\,t\,e^{i\,\omega\,t}\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned}a\,(2\,\omega\,i\,e^{i\,\omega\,t} - \omega^2\,t\,e^{i\,\omega\,t} + \omega^2\,t\,e^{i\,\omega\,t}) &= \frac{F_0}{m}\,e^{i\,\omega\,t}\\ \Leftrightarrow \quad a &= \frac{F_0}{2\,m\,\omega\,i}\\ \Leftrightarrow \quad a &= \frac{-F_0\,i}{2\,m\,\omega}\end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi(t) = \mathsf{Re}(a\,t\,[\cos(\omega\,t) + i\,\sin(\omega\,t)]) = \frac{F_0}{2\,m\,\omega}\,t\,\sin(\omega\,t)$$

eine partikuläre Lösung von $(**)$.
Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung betrachtet man die zu $(**)$ gehörende homogene Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \omega^2\,y(t) = 0$$

mit dem charakteristischen Polynom $p(s) = s^2 + \omega^2$. Daher bilden die Funktionen

$$\{\cos(\omega^2\,t), \sin(\omega^2\,t)\}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung und man erhält für jede Wahl von $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ durch

$$\psi(t) = \alpha\,\cos(\omega^2\,t) + \beta\,\sin(\omega^2\,t) + \varphi(t)$$

eine Lösung von $(**)$. Augenscheinlich gilt, daß sich, da ψ bei $t \to \infty$ nicht beschränkt ist, die Schwingungen gegenseitig verstärken und man spricht von einer Resonanzkatastrophe.

c): Die folgenden Graphiken (vgl. Abbildung 19) zeigen verschiedene Integralkurven für charakteristische Parameterwerte m, c, k, ω der in den Punkten $a)$ und $b)$ besprochenen Fälle. Man beachte, daß die Kreuzungspunkte der Trajektorien keine Verletzung des Eindeutigkeitssatzes darstellen, da der Zustand des hier beschriebenen Systems zweidimensional ist und aus der Auslenkung $x(t)$ und der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ besteht. Die Abbildungen zeigen lediglich eine Projektion der ersten Zustandskomponente auf die Zeitachse im Intervall $t = 0 \ldots 20$. An den Kreuzungspunkten ist jedoch die Steigung der einzelnen Kurven verschieden, so daß sich das System

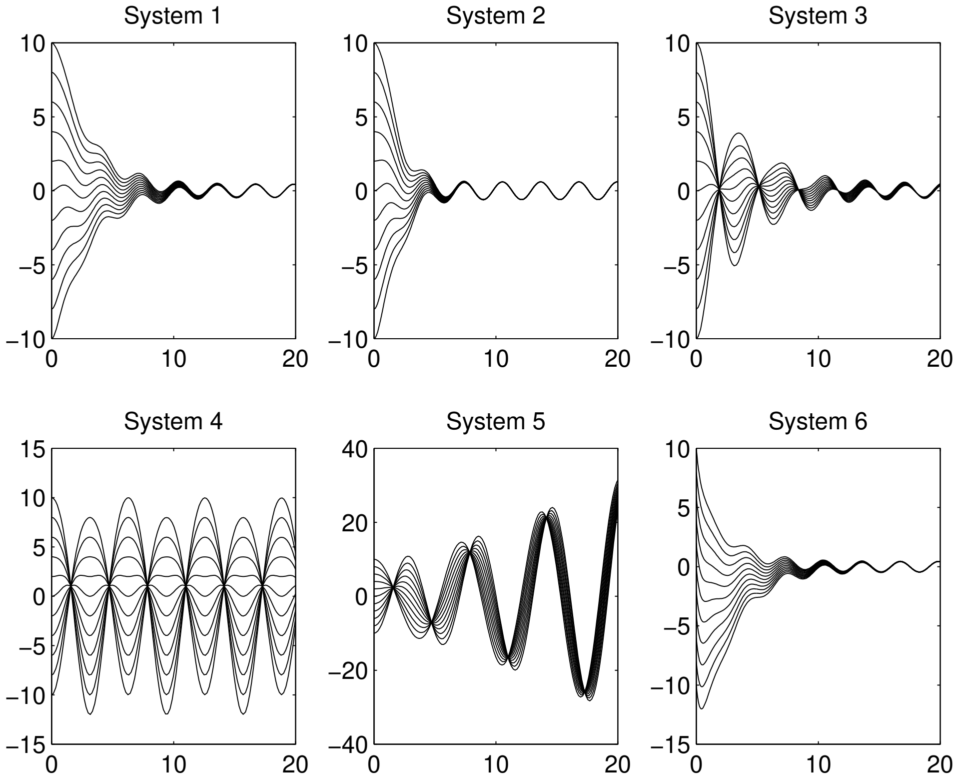


Abbildung 19: *Die Auslenkung verschiedener Modelle eines linearen Oszillators gegen die Zeit aufgetragen.*

jeweils in einem anderen Zustand befindet. Die ersten drei Systeme sind Beispiele für das in *a*) besprochene Modell unter Berücksichtigung der Reibung. System vier und fünf entsprechen dem Fall *b*); letzteres zeigt eine Resonanzkatastrophe. Das sechste Bild entspricht dem ersten, im Gegensatz zu allen anderen wurde hier statt der Ruhelage die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = -12$ gewählt. Das System pendelt sich ungeachtet der Störung schnell wieder aus. Die Werte im einzelnen:

System 1:	c=3	m=1	k=1	w=2
System 2:	c=2	m=1	k=1	w=2
System 3:	c=1	m=2	k=2	w=2
System 4:	c=0	m=1	k=1	w=2
System 5:	c=0	m=1	k=1	w=1
System 6:	c=3	m=1	k=1	w=2

Die Amplitude $F = 3$ ist allen Bildern gemeinsam.

□

Aufgaben

1) Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \sqrt[3]{x(t)^2}.$$

Man zeige: Diese Differentialgleichung besitzt auf jedem Intervall $[0, a]$, $a > 0$ unendlich viele Lösungen mit $x(0) = 0$. (Hinweis: Betrachte $x(t) = t^3/27$.)

2) Sei $X \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ stetig und $f_1(x) < f_2(x)$ für alle $x \in X$. Seien $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$ Lösungen der Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) \text{ bzw. } \dot{x}(t) = f_2(x(t))$$

auf dem Intervall $a < t < b$, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

(a) Man zeige: Gilt $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ für ein $t_0 \in]a, b[$, so folgt $x_1(t) \leq x_2(t)$ für $t \in [t_0, b[$.

(b) Kann man dieselbe Ungleichung beweisen, wenn nur $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in X$ vorausgesetzt wird?

3) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 2$ für $x > 0$. Man zeige, daß die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ auf keinem Intervall $]a, b[$ mit $a < 0 < b$ eine Lösung mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ besitzt.

4) Man betrachte die folgenden Differentialgleichungen

$$(a) \quad \dot{x}(t) = -x(t) \qquad (b) \quad \dot{x}(t) = x^2(t) \qquad (c) \quad \dot{x}(t) = x(t) - x(t)^3.$$

Zeichne für jede dieser Differentialgleichungen das Richtungsfeld, bestimme die Gleichgewichtspunkte und zeichne einige Integralkurven mit Hilfe des Computers.

5) Betrachte das Galilei'sche Fallgesetz

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -y \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

mit dem Zustandsraum $X = [0, \infty[\times\mathbb{R}$ $(x_1 = \text{Höhe}, x_2 = \dot{x}_1)$.

(a) Zeichne das zugehörige Vektorfeld auf X (per Hand oder Computer).

(b) Bestimme analytisch die Lösung von (1) mit $x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ und deren maximales Existenzintervall.

(c) Zeichne mit Hilfe eines Rechners ein Phasenportrait von (1) (d.h. einige Bahnkurven von (1) in X).

6) Betrachte die linearisierte und die nichtlineare Pendelgleichung (mit $\ell = g$):

$$(2) \qquad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) \end{bmatrix} \qquad \text{bzw.} \quad (3) \qquad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\sin x_1(t) \end{bmatrix}.$$

(a) Zeichne die zugehörigen Vektorfelder mit Hilfe eines Rechners (Zustandsraum $X = \mathbb{R}^2$).

(b) Bestimme die Gleichgewichtspunkte von (2) und (3) und zeichne die Phasenportraits beider Systeme.

(c) Interpretiere die verschiedenartigen Orbits von (3) und diskutiere den Unterschied zu den Phasenportraits von (2) und (3).

7) (Eine Betrachtung zum Fischereistreit Kanada–Spanien)
Betrachte das folgende Fischerei–Modell

$$\dot{x}(t) = kx(t)(c - x(t)) - u$$

wobei $u > 0$ eine konstante Fischfangrate und $x(t)$ eine Fischpopulation bezeichne.
Bestimme die maximale Fischfangrate, die – bei geeigneten Anfangswerten – untergrenzt realisierbar ist. Wie groß muß die Anfangspopulation mindestens sein, um diese maximale Befristung auf Dauer durchführen zu können.
(Hinweis: Untersuche was passiert, wenn $u > \frac{1}{4}kc^2$.)

8) Betrachte die Differentialgleichung.
$(*)$ $$\dot{x}(t) = h(x(t)),$$
wobei $h :]a, b[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sei ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) und $h(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ gilt. Für gegebenes $x^0 \in]a, b[$ definiere

$$H(x) = \int_{x^0}^{x} \frac{d\xi}{h(\xi)}, \quad x \in]a, b[.$$

Man zeige:

(a) $I = H(]a,b[)$ ist ein Intervall, und es existiert eine differenzierbare Bijektion $\varphi_0 : I \to]a,b[$ mit $H(\varphi_0(t)) = t$ für alle $t \in I$.

(b) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi(t) = \varphi_0(t-c), \quad t \in]a+c, b+c[$$

eine Lösung von $(*)$ auf $]a+c, b+c[$ und umgekehrt ist jede Lösung von $(*)$ die Einschränkung einer solchen Funktion (mit passendem $c \in \mathbb{R}$).

Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t)^2 - 1}{2}$$

(Hinweis: Man wende die vorher gezeigten Ergebnisse auf diese Differentialgleichung an, wobei für $]a,b[$ die 3 Intervalle $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,\infty[$ zu betrachten sind.)
Zeichne mit Hilfe des Rechners ein Bild der verschiedenen Integralkurven des Systems.

9) Überprüfe die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit. Finde für jede exakte Differentialgleichung. die implizite Gleichung $F(t,x) = \text{const}$, der ihre Lösungen genügen müssen. Bestimme nach Möglichkeit eine Lösung der exakten Differentialgleichung.

(a) $\dot{x}(t) = -\frac{t}{x(t)}$

(b) $tx(t)^2 + x(t) - -t\dot{x}(t) = 0$

(c) $\sin t \sin x(t) - \dot{x}(t) \cos t \cos x(t) + \tan t = 0$

(d) $x(t)^2 + 1 + (2tx(t) + 2)\dot{x}(t) = 0$

(e) $x(t)\dot{x}(t) - t + x(t)^2 = 0$

4) Man bestimme einen integrierenden Faktor für jede der folgenden Differentialgleichung und löse sie:

(i) $2x^3 + 2 + 3tx^2\dot{x} = 0$

(ii) $tx^2 + x - t\dot{x} = 0.$

10) Man finde alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung und diskutiere ihr Verhalten für $t \to \infty$.

(a) $\ddot{y} - 4y = 0$

(b) $\ddot{y} + 16y = 0$

(c) $\ddot{y} = 0$

(d) $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 0$

11) Betrachte die folgenden Differentialgleichung, die einen gedämpften Oszillator beschreibt:

$$m\,\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = 0$$

$(m,\, c,\, k > 0)$.

(a) Bestimme alle Lösungen in den folgenden drei Fällen:

(i) $c^2 - 4\,k\,m > 0$

(ii) $c^2 - 4\,k\,m = 0$

(iii) $c^2 - 4\,k\,m < 0$

(b) Zeige, daß in allen drei Fällen die Lösungen für $t \to \infty$ gegen Null streben.

(c) Bestimme (in jedem der Fälle (i) – (iii)) die Lösung $\varphi(\cdot)$ mit $\varphi(0) = 1$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$.

(d) Zeige, daß im Fall (iii) alle Lösungen sich in der Form $\varphi(t) = A\,e^{\alpha\,t}$ $\cos(\beta\,t - \vartheta)$ schreiben lassen. Bestimme α und β.

12) (a) $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genüge dem Randwertproblem

$$\ddot{y} + n^2\,y = 0, \quad y(0) = y(2\,\pi), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(2\,\pi)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$. Zeige

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt = 0, \text{ falls } m \neq n$$

(Hinweis: $(n^2 - m^2)\varphi_n\varphi_m = \varphi_n\ddot{\varphi}_m - \varphi_m\ddot{\varphi}_n = \frac{d}{dt}[\varphi_n\dot{\varphi}_m - \varphi_m\dot{\varphi}_n]$.)

(b) Man benutze (a), um zu zeigen, daß

$$\int_0^{2\,\pi} \cos(n\,t)\cos(m\,t)dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nt)\sin(mt)dt = 0$$

$$\int_0^{2\,\pi} \sin(n\,t)\sin(m\,t)dt = 0 \qquad (n \neq m).$$

13) Betrachte die inhomogene Differentialgleichung

$$(*) \qquad \ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b(t)$$

mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Man zeige:

(a) Sei $\psi : I \to \mathbb{C}$ eine partikuläre Lösung von $(*)$ und (φ_1, φ_2) ein Fundamentalsystem von Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Dann hat $(*)$ die allgemeine Lösung

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \psi, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

(b) Um eine partikuläre Lösung von $(*)$ zu finden, setzt man nach dem Verfahren der Variation der Konstanten $\psi(t) = u_1(t)\varphi_1(t)+u_2(t)\varphi_2(t)$, $t \in I$, wobei $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ zu bestimmende Funktionen sind. Man zeige: $\psi(\cdot)$ ist eine Lösung von $(*)$ genau dann wenn

$$\dot{u}_1(t)\varphi_1(t) + \dot{u}_2(t)\varphi_2(t) = 0, \quad \dot{u}_1(t)\dot{\varphi}_1(t) + \dot{u}_2(t)\dot{\varphi}_2(t) = b(t).$$

(c) Seien λ_1, λ_2 zwei verschiedene Wurzeln des charakteristischen Polynoms $p(s) = s^2 + a_1 s + a_0$ von $(*)$. Dann ist

$$\psi(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{t_0}^{t} (e^{\lambda_1 (t-s)} - e^{\lambda_2 (t-s)})\, b(s)\, ds$$

eine Lösung von $(*)$.

14) Betrachte die folgende Differentialgleichung. welche die „erzwungenen Schwingungen“eines Oszillators beschreibt

$$(*) \qquad m\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = F_0 \cos\omega\, t$$

wobei $m, k > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ sei.

(a) Sei $c > 0$. Finde eine spezielle Lösung von $(*)$ und bestimme die Menge aller Lösungen von $(*)$ („die allgemeine Lösung“). Wie verhalten sich diese Lösungen, wenn $t \to \infty$?

(b) Sei $c = 0$ (keine Reibung). Behandle dieselben Aufgaben wie in a) und unterscheide dabei die Fälle
(i) $\omega^2 \neq k/m$ (ii) $\omega^2 = k/m$ (Resonanz)
Weshalb spricht man im Fall (ii) von Resonanz–Katastrophe?

(c) Zeichne mit Hilfe des Rechners verschiedene Integralkurven, welche das Lösungsverhalten von $(*)$ für verschiedene charakteristische Parameterwerte (m, c, k, ω) illustrieren. Benutze dann die in Aufgabe 11 gegebene Fallunterscheidung.

Kapitel 2

Grundlegende Sätze

Bisher konnten wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer Differentialgleichung lediglich für den Fall beweisen, daß eine lineare Differentialgleichung vorliegt. Mit Hilfe der grundlegenden Sätze dieses Kapitels lassen sich jedoch allgemein Aufschlüsse über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung gewinnen, ohne Einschränkungen an die äußere Form der Gleichung zu stellen oder die Lösungsfunktion bereits kennen zu müssen. Die Mühe, solche Sätze zu beweisen und der hohe theoretische Aufwand lohnt sich selbst dann noch, wenn wir analytisch nicht in der Lage sind, eine Lösung explizit anzugeben. Sind wir sicher, daß eine solche Lösung existiert, können wir auf numerische Approximationsalgorithmen (vgl. Braun [2]) zurückgreifen. Dies reicht für die meisten praktischen Anwendungen aus, da es in diesen Fällen nicht erforderlich ist, die Lösungsfunktion genauer als bis auf einige Dezimalstellen zu kennen.

Das wichtigste Ergebnis dieses Kapitels stellt der *Existenz- und Eindeutigkeitssatz* von Picard-Lindelöf (1) dar. Unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig bezüglich t und *Lipschitz-stetig* bezüglich x ist, sichert uns dieses Theorem konstruktiv die Existenz der Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ und $x(t_0) = x^0$ für jedes Paar $(t_0, x^0) \in I \times X$ und garantiert darüberhinaus die Eindeutigkeit der Lösung auf einer Umgebung des Punktes (t_0, x^0). Aus denselben Voraussetzungen folgt unmittelbar, daß es ein *maximales Existenzintervall* $]t^-, t^+[$ der Lösung in I gibt, außerhalb dessen die Lösung nicht weiter fortgesetzt werden kann. Da dieses Intervall möglicherweise sehr klein ist, suchen wir am Ende des Kapitels nach einer geeigneten Zusatzvoraussetzung, die uns die Existenz der Lösung nicht nur lokal, sondern auch *global* auf ganz I sichert.

Die Frage nach der Existenz einer Lösung wurde erstmals von Cauchy (2) in den Jahren 1820 bis 1830 aufgeworfen. Unter der Voraussetzung, daß die Funktion

(1) Ernst Lindelöf (1870-1946), Charles Emile Picard (1856-1941)
(2) Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)

$f(t, x(t))$ stetig ist und eine stetige partielle Ableitung $\frac{df}{dx}$ besitzt, war es ihm möglich, die Existenz einer Lösung zu zeigen. Später gelang es Peano [3] den folgenden Existenzsatz zu beweisen, der insofern eine wesentliche Verschärfung gegenüber dem Satz von Cauchy darstellt, als daß er lediglich die Stetigkeit von $f(t, x(t))$ voraussetzt. Wie schon die geometrische Anschauung einer Differentialgleichung erster Ordnung durch das Richtungsvektorfeld nahelegt, gilt:

Ist $f(t, x(t))$ eine stetige Funktion beider Veränderlichen, so verläuft durch jeden Punkt (t_0, x^0) ihres Stetigkeitsgebietes G eine Integralkurve.

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen einheitlichen Voraussetzungen man sowohl auf Existenz als auch auf Eindeutigkeit der Lösung schließen darf. Entscheidend dafür erwies sich die von Lipschitz 1876 angegebene Lipschitz-Bedingung, mit deren Hilfe der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf formuliert werden konnte.

2.1 Systeme von Differentialgleichungen

In diesem Paragraphen soll die Transformation einer Differentialgleichung n-ter Ordnung in ein System von n Differentialgleichung erster Ordnung behandelt werden. Diese Form ermöglicht uns in den späteren Kapiteln mit Hilfe der Matrizenrechnung einen bequemen und eleganten Umgang mit Differentialgleichungen höherer Ordnung. Außerdem gestattet uns diese Transformation, Differentialgleichungen höherer Ordnung in den Existenz- und Eindeutigkeitssätzen des zweiten und dritten Paragraphen außer acht zu lassen und sie von vorneherein auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung auszudehnen.

Die von uns bisher betrachteten Differentialgleichungen erster Ordnung hatten die Form $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ eine $\mathbb{K}$-wertige Funktion war. Läßt man auch vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ zu, so führt dies natürlicherweise zu einem System von n Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_1}(t) & = & f_1(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x_n}(t) & = & f_n(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \end{array} \right.$$

Dabei sind die $f_i : U \longrightarrow \mathbb{K}$ skalare Komponentenfunktionen von f auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$. In Vektorschreibweise lautet (1) wie gewohnt

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

wobei der Zustand x jedoch durch einen Vektor

$$x(\cdot) = \begin{pmatrix} x_1(\cdot) \\ \vdots \\ x_n(\cdot) \end{pmatrix}$$

[3] Giuseppe Peano (1858 - 1932)

gegeben ist und $f(t, x(t)) \in \mathbb{K}^n$. Bei den von uns künftig analysierten Differentialgleichungen handelt es sich ausschließlich um Systeme dieser Form. Die Betrachtung von Systemen erster Ordnung stellt dabei keine Einschränkung dar, da sich jede Differentialgleichung höherer Ordnung und damit auch jedes System von Differentialgleichunge höherer Ordnung auf ein entsprechendes System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen läßt:

Lemma 2.1.1
Jede Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)) \tag{2}$$

mit $g : U \longrightarrow \mathbb{K}$ *auf einer offenen Teilmenge* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *ist äquivalent zu einem Differentialgleichungssystem der Form*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & f_1(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_n(t) & = & f_n(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \end{array} \right.$$

wobei

$$f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ g(t, x(t)) \end{pmatrix}$$

für $(t, x(t)) \in U$. *Genauer gilt:*
Ist $\psi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *eine Lösung von (2) auf dem Lösungsintervall* $I \subset \mathbb{R}$, *so ist*

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Vektorgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ *oder -ausgeschrieben- von dem System*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_3(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) & = & x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) & = & g(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \end{array} \right. \tag{3}$$

Ist umgekehrt φ *eine Lösung von (3), so löst* $\psi(t) := \varphi_1(t)$ *die Differentialgleichung (2). Jede Anfangsbedingung*

$$\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

entspricht einem Satz von Anfangswerten
$\psi(t_0) = z_1, \cdots, \psi^{(n-1)}(t_0) = z_n$. □

Beweis
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei ψ eine Lösung der Differentialgleichung (2); setze

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Daher gilt:

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\psi}(t) \\ \vdots \\ \psi^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

mit $\dot{\varphi}_{n-1}(t) = \psi^{(n)}(t) \overset{(2)}{=} g(t; y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)})$, also gilt (3).
(3) $\Rightarrow$ (2): Sei umgekehrt φ eine Lösung des Systems (3), so zeigt man durch Induktion:
Die erste Komponente φ_1 ist $(n-1)$-mal differenzierbar mit

$$\varphi_1^{(k)} = \varphi_{k+1}$$

für $k = 0, \cdots, n-1$. Setzt man $\psi(t) := \varphi_1(t)$, so gilt $\psi^{(k)}(t) = \varphi_{k+1}(t)$ und damit insbesondere

$$\psi^{(n)}(t) = \dot{\psi}^{(n-1)}(t) = \dot{\varphi_n} = g(t, \psi(t), \dot{\psi}(t), \cdots, \psi^{(n-1)}(t))$$

■

Besonders häufig wendet man obige Transformation auf den Spezialfall linearer zeitinvarianter Systeme n-ter Ordnung an. Dies führt zu der folgenden Matrixschreibweise des zugehörigen Differentialgleichungssystems, die als *Matrixdifferentialgleichung* [4] bezeichnet wird:

Dafür gehen wir von der allgemeinen Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{(n-1)}\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0\, y(t) = b$$

aus. Wählt man als Zustand einen Vektor der Form

$$x(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y^{(1)}(\cdot) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(\cdot) \end{pmatrix},$$

[4] matrix differential equation

so läßt sich (3) wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y^{(1)}(\cdot) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(\cdot) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y^{(1)}(\cdot) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(\cdot) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} \\
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel: DER FREIE FALL
Erinnern wir uns noch einmal an das Abschlußbeispiel von Paragraph 1 im ersten Kapitel. Die dort untersuchte Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = -g$$

führt nun zur Matrixdifferentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

□

2.2 Eindeutigkeit und Fehlerfortpflanzung

Entscheidend für die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen dieses Kapitels ist der Begriff der *Lipschitz-Beschränktheit* des Geschwindigkeitsvektorfeldes f. Diesen in der Literatur oft auch als Lipschitz-Bedingung bezeichneten Begriff prägte der deutsche Mathematiker Rudolf Lipschitz [(5)] 1876 im Zusammenhang mit seinen Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen. Weitere Arbeitsgebiete von ihm waren Funktionentheorie, Reihenlehre, Algebra und Hydrodynamik. Man beachte, daß diese Definition mit der Dehnungsbeschränktheit von f bezüglich x übereinstimmt. Insbesondere ist jede bezüglich x Lipschitz-beschränkte Funktion auch stetig in x. Für den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf reicht sogar die lokale Lipschitz-Beschränktheit von f, die sogenannte *Lipschitz-Stetigkeit*, aus. Der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit ist zwischen dem der Stetigkeit und dem der stetigen Differenzierbarkeit einer Funktion einzuordnen. Der Grund für seine Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen liegt darin, daß die Eigenschaft der Lipschitz-Stetigkeit bei einigen Operationen, wie zum Beispiel bei der Betragsbildung (vgl. Aufgabe 1) erhalten bleibt, bei denen die stetige Differenzierbarkeit im allgemeinen verloren geht.

Zunächst beweisen wir einige einfache Kriterien, mit deren Hilfe eine gegebene Funktion f auf Lipschitz-Beschränktheit oder -Stetigkeit überprüft werden kann. Anschließend zeigen wir die Gültigkeit des Satzes über die Fehlerfortpflanzung, der eine Abschätzung des Fehlers ermöglicht, der entsteht, wenn ein gegebenes Anfangswertproblem statt mit dem „wahren" Anfangszustand x^0 mit einem leicht veränderten Anfangswert $\widetilde{x}^0$ gelöst wird (zum Beispiel infolge von Meßfehlern). Aus diesem Satz ergibt sich dann mühelos die gewünschte Eindeutigkeitsaussage. Die eigentliche Schwierigkeit liegt in dem Beweis der Existenz einer Lösung unter denselben Voraussetzungen; diesem Problem ist der dritte Paragraph gewidmet.

In diesem Paragraphen benötigen wir einige Bezeichnungen aus der Topologie: Im Folgenden sei der $\mathbb{K}^n$ mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$ versehen. Eine Menge M heißt konvex [(6)], wenn mit je zwei Punkten in M auch deren Verbindungslinie ganz in M liegt. Zukünftig bezeichnen wir mit $K(x,r)$ die offene Kugel um x mit Radius r, mit $\overline{K}(x,r)$ die entsprechende abgeschlossene Kugel und mit $\mathring{U}$ das Innere einer Menge U. Ein Gebiet ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(5) Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 - 1903)
(6) convex set

Lipschitz-stetige und -beschränkte Funktionen

Definition 2.2.1 (LIPSCHITZ-BESCHRÄNKTHEIT)
Bezeichne $\|\cdot\|$ *eine beliebige Norm des* $\mathbb{K}^n$. *Eine Funktion* $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *mit* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *heißt Lipschitz-beschränkt*[7] *bezüglich* x *auf* U *mit Lipschitz-Konstante*[8] $L \geq 0$, *wenn*

$$\|f(t, x^1) - f(t, x^2)\| \leq L\, \|x^1 - x^2\|$$

für alle $(t, x^1), (t, x^2) \in U$ *gilt.*
Die Funktion f *heißt Lipschitz-stetig*[9] *auf* U, *wenn zu jedem Punkt* $(t_0, x^0) \in U$ *eine Umgebung* $N \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *existiert, so daß* $f : U \cap N \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *Lipschitz beschränkt ist.* □

Dies besagt geometrisch, daß $f(t, x(t))$ bezüglich jeder Komponente x_i von x beschränkte Differenzenquotienten hat. Man beachte, daß die Lipschitz-Beschränktheit, bzw. -Stetigkeit immer bezüglich des Zustands $x \in \mathbb{K}^n$ gefordert wird, nicht jedoch von der Zeit t. Da diese beiden Eigenschaften anhand der Definition nur umständlich nachzuweisen, bzw. zu widerlegen sind, stellen wir in den nächsten drei Sätzen einfache Kriterien für die Lipschitz-Stetigkeit und -Beschränktheit auf.

Lemma 2.2.2
Sei $f : C \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *mit* $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *beschränkt und Lipschitz-stetig auf dem Kompaktum* C. *Dann ist* f *auf* C *Lipschitz-beschränkt.* □

Beweis
Zu zeigen ist, daß sich zu jedem Punkt $(t_0, x^0) \in C$ eine offene Umgebung N_0 mit lokaler Lipschitzkonstante bestimmen läßt. Aufgrund der Kompaktheit wird C bereits endlich vielen dieser Umgebungen überdeckt. Das Maximum ihrer Lipschitz-Konstanten ist dann die gesuchte globale Lipschitz-Konstante L für f.

Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt, daß zu jedem $(t_0, x^0) \in C$ eine o.B.d.A. „zylinderförmige“ Umgebung

$$N_0 =]\, t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0\, [\times K(x^0, \varepsilon_0)$$

in C mit der lokalen Lipschitz-Konstante L_0 existiert. Setze

$$\widetilde{N}_0 :=]\, t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0\, [\times K(x^0, \frac{\varepsilon_0}{2})$$

(7) Lipschitz-bounded
(8) Lipschitz-constant
(9) Lipschitz-continous

Sei $x_1 \in \widetilde{N}_0$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:
<u>1.Fall:</u> $x^2 \in N_0$. In diesem Fall ist

$$\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\| \leq L_0 \, \|x^1 - x^2\|$$

<u>2.Fall:</u> $x^2 \in C \setminus N_0$. Dann ist der Abstand $\|x^1 - x^2\| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Aufgrund der Beschränktheit von f auf C existiert ein von x^1 und x^2 unabhängiges $\alpha > 0$ mit

$$\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\| \leq \|f(t,x^1)\| + \|f(t,x^2)\| \leq 2\,\alpha$$

Also folgt:

$$\frac{\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\|}{\|x^1 - x^2\|} \leq \frac{2\,\alpha}{\varepsilon_0/2}$$

Setze daher $L := \max(L_0, \frac{4\,\alpha}{\varepsilon_0})$.

■

Bislang ist noch unklar, wie man konkret eine Lipschitz-Konstante zu einer gegebenen Funktion f bestimmen kann:

Eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ heißt Lipschitz-beschränkt bezüglich der Zustandskomponenten $x_1, \ldots, x_k$, $k \leq n$, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit

$$\|f(t, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(t, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\| \leq L\,\|x - \widetilde{x}\|,$$

für alle (t,x), $(t,\widetilde{x}) \in U$.

Lemma 2.2.3
Sei die Menge $Q := \{x \in \mathbb{K}^n : |x_i - x_i^0| \leq \alpha_i, i = 1, \ldots, n\}$ *ein Quader und* $f : \mathbb{R} \times Q \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *eine auf* $\mathbb{R} \times Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *definierte Funktion. Dann gilt:*

(i) *f ist genau dann auf der Menge $\mathbb{R} \times Q$ Lipschitz-beschränkt, wenn f Lipschitz-beschränkt bezüglich jeder einzelnen Komponente x_i, $i = 1, \ldots, n$ des Zustandsraumes ist.*

(ii) *Sei f auf $\mathbb{R} \times Q$ stetig und besitze stetige partielle Ableitungen mit*

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,(t,x) \right| \leq \gamma_j$$

für alle $(t,x) \in I \times \mathring{Q}$, mit $i, j = 1, \cdots, n$. Dann ist f Lipschitz-beschränkt bezüglich x auf der Menge U mit der Lipschitz-Konstanten $n\,\gamma$, wobei $\gamma := \max_{j=1,\ldots,n} \gamma_j$ ist.

□

Beweis

(i): $(\Rightarrow)$: trivial
$(\Leftarrow)$: Seien $x, \widetilde{x} \in Q$. Sei f bezüglich x_i Lipschitz-beschränkt durch die Lipschitz-Konstante L_i. Die Differenz $f(t,x) - f(t,\widetilde{x})$ kann man wie folgt in eine Summe entwickeln:

$$\begin{aligned}
&f(t,x) - f(t,\widetilde{x}) \\
&= f(t,x) - f(t,\widetilde{x}_1, x_2, \ldots, x_n) + f(t, \widetilde{x}_1, x_2, \ldots, x_n) \cdots - f(t,\widetilde{x}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(t, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) - f(t, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{i-1}, \widetilde{x}_i, x_{i+1} \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden lassen sich dann für alle $i = 1, \ldots, n$ durch

$$\|f(t, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) - f(t, \widetilde{x}, \ldots, \widetilde{x}_{i-1}, \widetilde{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\| \le L_i\, |x_i - \widetilde{x}_i|$$

abschätzen. Also folgt:

$$\|f(t,x) - f(t,\widetilde{x})\| \le (\sum_{i=1}^{n} L_i)\, \|x - \widetilde{x}\|.$$

(ii): Für jede Bildkomponente f_j läßt sich folgende Konstruktion durchführen: Als Funktion nur von x_i aufgefaßt ist f_j auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_i^0 - \alpha_i, x_i^0 + \alpha_i]$ stetig und im Inneren differenzierbar. Aus dem Mittelwertsatz folgt die Existenz einer Zwischenstelle ξ mit:

$$\begin{aligned}
&\|f_j(t, x_1, , \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f_j(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \widetilde{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\| \\
&= \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, |x_i - \widetilde{x}_i| \\
&\le \gamma_j\, |x_i - \widetilde{x}_i|.
\end{aligned}$$

Also erhält man die Lipschitz-Konstante zu f_j nach (i) durch:

$$\begin{aligned}
\|f_j(x) - f_j(\widetilde{x})\| &\le (\sum_{i=1}^{n} \gamma_j)\, \|x - \widetilde{x}\| \\
&\le n\, \gamma_j\, \|x - \widetilde{x}\|
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\left\| \begin{matrix} f_1(x) - f_1(\widetilde{x}) \\ \vdots \\ f_j(x) - f_j(\widetilde{x}) \\ \vdots \\ f_n(x) - f_n(\widetilde{x}) \end{matrix} \right\| \le \left\| \begin{matrix} n\,\gamma \\ \vdots \\ n\,\gamma \\ \vdots \\ n\,\gamma \end{matrix} \right\| \|x - \widetilde{x}\|.$$

Aufgrund der Äquivalenz aller Normen in endlichdimensionalen Vektorräumen können wir speziell die Maximumsnorm wählen, so daß

$$\|f(x) - f(\widetilde{x})\| \quad \leq \quad n\,\gamma\,\|x - \widetilde{x}\|.$$

gilt.

■

Bemerkung
Bei der Wahl der euklidischen Norm im Beweis zum Lemma 2.2.3 erhielte man bei gleicher Vorgehensweise nur die Aussage

$$\|f(x) - f(\widetilde{x})\| \quad \leq \quad n\,\sqrt{n}\,\gamma\,\|x - \widetilde{x}\|.$$

Durch umfangreichere Beweise läßt sich aber zeigen, daß sich auch in diesem Fall $n\,\gamma$ als Lipschitz-Konstante sogar auf einer beliebigen (nicht notwendigerweise quaderförmigen) konvexen Umgebung wählen läßt.

Aus dem Lemma 2.2.3 folgt unmittelbar das nächste Korollar:

Korollar 2.2.4
Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig differenzierbar nach x. Dann ist f Lipschitz-stetig. □

Beweis
Da U offen ist, existiert definitionsgemäß in jedem Punkt $(t_0, x^0) \in U$ eine offene Umgebung, die ganz in U liegt. Jede offene Umgebung enthält eine abgeschlossene, so daß gilt:

$$\forall\,(t_0, x^0) \in U \quad \exists\, C = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{K}(x^0, \varepsilon) \subset U$$

Die partiellen Ableitungen sind als stetige Funktionen auf dem Kompaktum C beschränkt nach dem Satz von Weierstraß. Anwendung von Lemma 2.2.3 auf den Abschluß von C an. ■

Beispiel:
Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Betrachte $f(t, x) = t\,x^2$ auf $U = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq 1 \wedge |x| \leq 1\}$. Aufgrund von Lemma 2.2.3 ist f wegen

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\,(t, x)\right| = |2\,t\,x| \leq 2$$

   zumindest auf $\overset{\circ}{U}$ Lipschitz-beschränkt mit Lipschitz-Konstante 2.

2. Auf $G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : [-1, 1] \times \mathbb{R}\}$ ist dieselbe Funktion f dagegen nicht Lipschitz-beschränkt. Beweisen läßt sich dies durch Widerspruch:
Angenommen, es gäbe $L_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\|t\,(x^1)^2 - t\,(x^2)^2\| \leq L_0\,\|x^1 - x^2\|$$

für alle $(t, x^1), (t, x^2) \in G$. Da im $\mathbb{R}^1$ alle Normen mit dem Betrag übereinstimmen, folgt:

$$|t|\,|x^1 - x^2|\,|x^1 + x^2| \leq L_0\,|x^1 - x^2| \;\Rightarrow\; |t|\,|x^1 + x^2| \leq L_0 \quad \forall\, x^1, x^2 \in \mathbb{R}$$

Das ist der gewünschte Widerspruch zur Annahme, f sei auf G mit Lipschitz-Konstante L_0 Lipschitz-beschränkt. $\lightning$

3. Betrachte $g(t, x) = \sqrt{|x|}$ auf $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Funktion ist nicht Lipschitz-beschränkt, da sie im Nullpunkt nicht einmal Lipschitz-stetig ist. Beweis durch Widerspruch:
Angenommn, es existiert eine Umgebung U_0 um den Nullpunkt, innerhalb deren g durch die lokale Lipschitz-Konstante L_0 beschränkt ist. Setze zur Vereinfachung $x^2 = 0$, dann gilt für alle $x^1 \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{|x^1|} \leq L_0\,|x^1|$$

Jede noch so kleine Umgebung um die Null enthält jedoch einen Zustand x^0 mit $|x^0| \leq \frac{1}{L_0^2}$, so daß folgt:

$$\begin{aligned} |x^0| \;\leq\; \frac{1}{L_0^2} \;\Leftrightarrow\; L_0^2\,|x^0|^2 \;&\leq\; |x^0| \\ \Leftrightarrow\; L_0\,|x^0| \;&\leq\; \sqrt{|x^0|} \end{aligned}$$

Damit kann die Funktion g nicht Lipschitz-beschränkt sein. $\lightning$ Betrachten wir dagegen g auf dem Gebiet $G = \mathbb{R} \times]\,0, \infty\,[$, so ist g dort wegen Korollar 2.2.4 Lipschitz-stetig, nicht aber Lipschitz-beschränkt. Denn die Funktion ist nur auf jeder kompakten Teilmenge $C \subset G$ Lipschitz-beschränkt.

□

Fehlerfortpflanzung und Eindeutigkeitssatz

Falls eine Funktion Lipschitz-beschränkt ist, können wir eine Aussage über die Fehlerfortpflanzung machen.

Satz 2.2.5 (Satz über die Fehlerfortpflanzung)
Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ ein offenes Gebiet auf dem $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und Lipschitz-beschränkt ist mit Lipschitz-Konstante L. Seien weiterhin $(t_0, x^1), (t_0, x^2) \in U$ und φ_1, beziehungsweise φ_2 Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x^1$$

beziehungsweise

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x^2$$

auf einem Intervall I. Dann gilt

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|x^1 - x^2\| \, e^{L\,|t-t_0|}.$$

□

Beweis
Aufgrund von Proposition 1.2.1 aus Kapitel 1 gilt $\varphi(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))\, ds$ für eine Lösung φ eines Anfangswertproblems. Mit Hilfe der Lipschitz-Beschränktheit und der Additivität des Integrals folgt:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| &= \|x^1 - x^2 + \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))]\| \, ds \\ &\leq \|x^1 - x^2\| + \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\| \, ds \\ &\leq \|x^1 - x^2\| + \int_{t_0}^t L \, \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| \, ds, \end{aligned}$$

wobei $L \in \mathbb{R}$ die zugehörige Lipschitz-Konstante ist. Zur Anwendung des Gronwallschen Lemmas setze:

$$\begin{aligned} v(t) &:= \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|, \\ k(t) &\equiv L, \\ c &:= \|x^1 - x^2\|. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt dann die Behauptung.

■

Satz 2.2.6 (Eindeutigkeitssatz)
Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und Lipschitz-stetig, so besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x^0$$

für jedes $(t_0, x^0) \in U$ auf einem offenen Intervall I höchstens eine Lösung. □

Beweis
Angenommen φ_1 und φ_2 seien zwei Lösungen des Anfangswertproblems auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$, d.h. insbesondere $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$. Ist $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ auf I, so ist nichts zu zeigen.
Es existiere also o.B.d.A. ein Zeitpunkt $t > t_0$ in I mit $\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)$. Sei

$$t_1 = \max\{s \in I : \forall\, \tau \in [t_0, s]\, \text{gilt}\;\; \varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)\}$$

Es gilt also $\varphi_1(t_1) = x^1 = \varphi_2(t_1)$. Wähle nun eine Umgebung N von (t_1, x^1), auf der f Lipschitz-beschränkt ist bezüglich x; dann sind φ_1, φ_2 auf ganz N Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_1) = x^1.$$

Nach Satz 2.2.5 gilt dann

$$0 \leq \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|x^1 - x^1\|\, e^{L\,|t-t_0|} = 0,$$

so daß $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ auf ganz N. Dann kann aber t_1 nicht das Maximum der oben betrachteten Menge sein. $\lightning$ ■

Bei Umwandlung einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung entstehen die folgenden Komponentenfunktionen:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j(t) + b_i(t)$$

für $i = 1, \cdots, n$, wobei die $a_{ij}(\cdot), b_i(\cdot) : I \longrightarrow K$ stetige Funktionen sind. Dieses System aus linearen Differentialgleichung erster Ordnung läßt sich wie folgt in Matrizenschreibweise darstellen:

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + b(t)$$

mit $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\cdots,n}$ und $b(t) = (b_i(t))_{i=1,\cdots,n}$. Wir wiederholen den Satz über Fehlerfortpflanzung für den Spezialfall eines beschränkten, linearen Systems:

Korollar 2.2.7
Seien $|a_{ij}(t)| \leq c$ für alle $i, j = 1, \cdots, n, \quad t \in I$. Sind dann φ, $\widetilde{\varphi}$ Lösungen von

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + b(t)$$

auf einem Intervall $]\,a, b\,[\subset I$ mit $\varphi(t_0) = x^0$, $\widetilde{\varphi}(t_0) = \widetilde{x}^0$, so gilt

$$\|\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)\| \leq \|x^0 - \widetilde{x}^0\|\, e^{n\,c\,|t-t_0|}$$

für alle $t \in]\,a, b\,[$. □

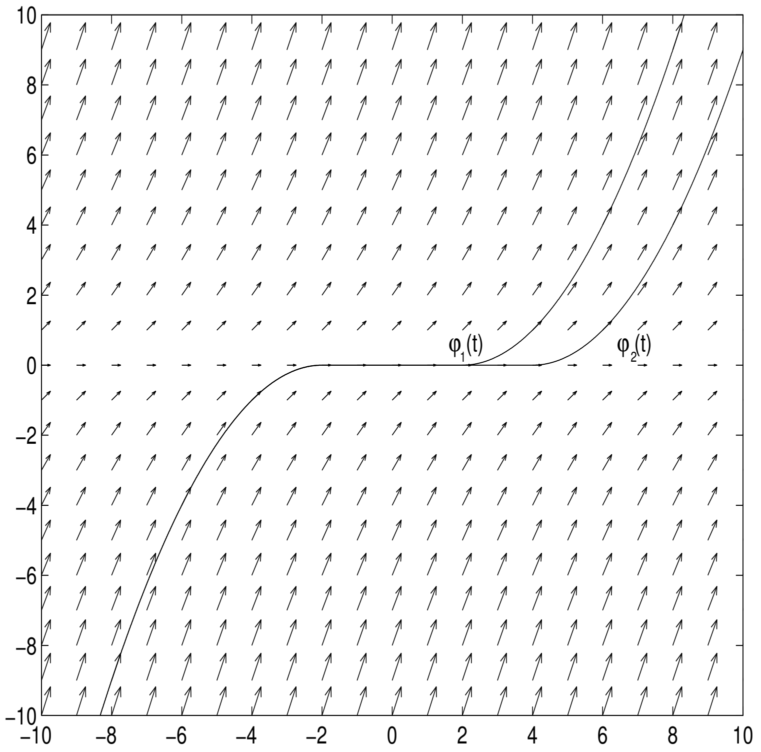


Abbildung 1: *Beispiel für die Nicht-Eindeutigkeit der Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = (|x(t)|)^{\frac{1}{2}}$*. Die Trajektorien* φ_1 *und* φ_2 *erfüllen jeweils die Anfangsbedingung* $x(0) = 0$*.*

Beweis
f ist nach Lemma 2.2.3 Lipschitz-beschränkt mit Lipschitz-Konstante $n\,c$, denn für

$$f_i(t,x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j + b_i(t)$$

gilt:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(t,x) \right| = |a_{ij}(t)| \leq c.$$

Wende Satz 2.2.5 an, damit folgt dann die Behauptung. ∎

Beispiel: Nichteindeutigkeit [10] einer Differentialgleichung
Man betrachte die zeitinvariante Differentialgleichung

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$$

[10] non-unique

auf $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wie wir bereits im Beispiel 3 auf Seite 99 nachgewiesen haben, ist das Geschwindigkeitsvektorfeld dieser Differentialgleichung nicht Lipschitz-stetig, so daß der Eindeutigkeitssatz 2.2.6 nicht anwendbar ist. Aufgrund der Symmetrie des Richtungsfeldes reicht es aus, $(*)$ für positive Lösungen $x(\cdot) > 0$ zu betrachten, denn mit $\varphi(t)$ ist auch $\psi(t) = -\varphi(-t)$ wegen

$$\dot{\psi}(t) = -\dot{\varphi}(-t)\,(-1) = \sqrt{|\varphi(-t)|} = \sqrt{|-\varphi(-t)|} = \sqrt{|\psi(t)|}$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

Sei also $x(t) > 0$. Wir behandeln $(*)$ als einfache Bernoullische Differentialgleichung (genausogut könnte man die Methode der Trennung der Variablen anwenden). Definiere $z(t) := x(t)^{1/2}$, so daß $\dot{z}(t) = \frac{1}{2}\,x(t)\,\dot{x}(t)$ gilt. Diese Transformation überführt $(*)$ in die konstante Differentialgleichung $\dot{z}(t) = \frac{c}{2}$ mit der allgemeinen Lösung $z(t) = \frac{1}{2}\,t + \widetilde{c}$. Setzt man der Einfachheithalber $\widetilde{c} := \frac{c}{2}$, so ist $\varphi(t) = \frac{(t+c)^2}{4}$ für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(*)$ zum Anfangswert $x(0) = \frac{c^2}{4}$ auf dem maximalen Existenzintervall $I =]-c, \infty[$. Für $t < -c$ ist $\dot{\varphi}(t) < 0$, aber $\sqrt{|\varphi(t)|} > 0$, so daß $\varphi(\cdot)$ außerhalb von I keine Lösung von $(*)$ darstellt. Mithilfe des positiven Zweiges $\varphi(\cdot)$, des negativen Zweiges $\psi(\cdot)$ und der Nullfunktion als Verbindungsstück lassen sich beliebig viele Lösungen von $(*)$ konstruieren, die nicht nur in einem Punkt, sondern sogar über ganze Intervalle identisch verlaufen und dennoch verzweigen können. So lösen etwa für alle $c > 0$:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} & \text{für} \quad t > 0 \\ -\dfrac{(t-c)^2}{4} & \text{für} \quad t < -c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beide das Anfangswertproblem mit $(t_0, x^0) = (2, 1)$.

Man beachte, daß φ_1 an den „Nahtstellen“ differenzierbar ist und der Differentialgleichung $(*)$ genügt. □

2.3 Der Existenzsatz von Picard-Lindelöf

In diesem Paragraphen beweisen wir außer einigen Aussagen über *maximale Existenzintervalle* von Lösungen im Wesentlichen den *Satz von Picard-Lindelöf.* Die Eindeutigkeitsaussage ist bereits durch den Eindeutigkeitssatz 2.2.6 im vorherigen Paragraphen gegeben, so daß nur noch der Beweis für die Existenz einer Lösung auf einer geeigneten Umgebung erbracht werden muß. Wir benötigen ein Theorem, daß uns die Existenz der Lösungsfunktion $\varphi(t)$ des gegebenen Anfangswertproblems unter bestimmten Voraussetzungen sichert, ohne daß wir dazu die Funktion selbst angeben müssen. Suchen wir in der Differential- und Integralrechnung nach einer analogen Situation, so stellen wir fest, daß wir in der Grenzwerttheorie vor genau demselben Problem stehen. Dort ist es oft möglich, für eine Funktionenfolge $(\varphi_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ die Existenz einer Grenzfunktion $\varphi(t)$ zu beweisen, ohne sie explizit angeben zu müssen. Der Existenz-Beweis ist konstruktiv und beruht auf dem Verfahren der sukzessiven Approximationen der Lösungsfunktion $\varphi(t)$ durch eine geeignete Funktionenfolge $(\varphi_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$, den sogenannten *Picard-Iterierten.*

Dabei gehen wir von folgenden Voraussetzungen aus: Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x^0, \tag{4}$$

wobei $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und Lipschitz-stetig auf der offenen Menge $U = I \times K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ ist. Bezeichne $\mathcal{C}(I, K)$ den vollständigen metrischen Raum aller stetigen Funktionen $\phi : I \longrightarrow K$. Und sei der $\mathbb{K}^n$ mit der Maximumsnorm $\|x\| = \max\{|x_i| : i = 1, \cdots, n\}$ versehen.

Der Satz von Picard-Lindelöf

Vor dem eigentlichen Beweis wollen wir vorab kurz die Idee des Verfahrens der sukzessiven Approximationen skizzieren:

Nach Proposition 1.2.1 aus Kapitel 1 ist $\varphi(t)$ gerade dann eine Lösung des Anfangswertproblems (4), wenn $\varphi(t)$ die *Volterrasche Integralgleichung*

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

löst. Sei für beliebige stetige Funktionen $\phi \in \mathcal{C}(I, K)$ eine Operatorabbildung $T : \mathcal{C}(I, K) \longrightarrow \mathcal{C}(I, K)$ erklärt durch

$$(T\,\phi)(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds.$$

Es ist einleuchtend, daß $\varphi \in \mathcal{C}(I, K)$ genau dann eine Lösung des obigen Anfangswertproblems darstellt, wenn $\varphi = T\,\varphi$ gilt, d.h. ein Fixpunkt der Abbildung T ist. Die Picard-Iteration konstruiert den folgenden Approximationsprozeß des Anfangswertproblems:

$$\varphi_0 = x^0, \quad \varphi_1 = T\,\varphi_0, \quad \varphi_2 = T^2\,\varphi_0, \quad \cdots$$

Die Funktionen $\varphi_i(\cdot)$ sollten gegen einen Fixpunkt des Operators T konvergieren. Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir zunächst gewährleisten, daß mit $\varphi_k \in \mathcal{C}(I, K)$ auch $\varphi_{k+1} = T\,\varphi_k \in \mathcal{C}(I, K)$ gilt. Wie wir in Teil (i) des Beweises sehen werden, ist dies zumindest für die Wahl von $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ und $K = \overline{K}(x^0, \beta)$ der Fall, wenn $\alpha\,\mu \le \beta$ mit $\mu = \max\{\|f(t,x)\| : (t,x) \in U\}$ ist.

Zur Erinnerung die Definition der gleichmäßigen Konvergenz:

Definition 2.3.1 (GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ)
Es sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Folge von Abbildungen der Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$. Dann heißt $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent [11] *gegen die Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, wenn gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0$$

□

Bemerkung
Man beachte, daß $\mathcal{C}(I, K)$ versehen mit der Supremumsnorm einen vollständigen, normierten Raum darstellt.

Satz 2.3.2 (SATZ VON PICARD-LINDELÖF)
Sei f auf der Menge $I \times K \subset U$ mit $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, und $K = \overline{K}(x^0, \beta)$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich x und es gelte $\alpha\,\mu \le \beta$, wobei

$$\mu = \max_{(t,x)\in I\times K} \|f(t,x)\|.$$

Dann gibt es genau eine stetige Funktion $\varphi : I \longrightarrow K$, die auf dem Inneren von I differenzierbar ist mit

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$$

für alle $t \in I$, $\varphi(t_0) = x^0$. □

Beweis
Der Beweis gliedert sich in insgesamt drei Abschnitte:

(i) Unter den Voraussetzungen des Satzes zeigen wir durch vollständige Induktion, daß sämtliche Glieder der Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus dem Funktionenraum $\mathcal{C}(I, K)$ stammen.

(ii) Wir beweisen die Existenz einer Grenzfunktion $\varphi(t) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t)$. Da der betrachtete Funktionenraum vollständig ist, reicht dazu der Nachweis, daß die Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

[11] uniform convergence

(iii) Wir zeigen, daß die so definierte Grenzfunktion $\varphi(t)$ tatsächlich unsere Differentialgleichung löst, da sie Fixpunkt der von uns betrachteten Operatorabbildung $T(\cdot)$ ist.

(i): Wir definieren zunächst eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch:

$$\varphi(t_0) = x^0, \quad \varphi_{k+1}(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))\,ds \tag{5}$$

für alle $k \in \mathbb{N}, t \in I$.
Dadurch ist eine Funktionenfolge in $\mathcal{C}(I,K)$ gegeben. Es wird nun gezeigt, daß ihre Glieder alle aus dem Funktionenraum stammen:

Beweis durch Induktion:
Induktionsannahme : $\varphi_k(\cdot) \in \mathcal{C}(I,K)$
Induktionsanfang : $\varphi_0(t) = x^0 \Longrightarrow \varphi_0(t) \in \mathcal{C}(I,K)$
Induktionsschritt : $\forall \quad t \in I$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+1}(t) - x^0\| &= \|x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))\,ds - x^0\| \\ &\le \int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi_k(s))\|\,ds. \end{aligned}$$

Da wir nach Induktionsannahme sicher wissen, daß der Zustand $\varphi_k(s) \in K$ ist, liegt das Tupel $(s,\varphi_k(s))$ in $I \times K$ und daher ist $f(s,\varphi_k(s))$ nach (4) durch μ beschränkt.

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+1}(t) - x^0\| &\overset{I.A.}{\le} \int_{t_0}^{t} \mu\,ds \\ &= \mu\,|t - t_0| \\ &\le \mu\,\alpha \le \beta \end{aligned}$$

Also ist der Abstand des Zustandes $\varphi_{k+1}(t)$ für alle $t \in I$ zum Mittelpunkt x^0 von K kleiner gleich β, so daß $\varphi_{k+1}(t)$ anschließend Werte in K besitzt. Außerdem ist $\varphi_{k+1}(t)$ stetig als Kompositum stetiger Funktionen.

Bemerkung
Die Operatorabbildung $T(\cdot)$ führt daher nicht aus $\mathcal{C}(I \times K)$ heraus.

(ii): Da $I \times K$ kompakt ist, gibt es nach Lemma 2.2.2 eine Lipschitz-Konstante L, so daß gilt:

$$\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\| \le L\,\|x^1 - x^2\| \tag{6}$$

für alle $(t,x^1),(t,x^2) \in I \times K$.
Wir zeigen durch vollständige Induktion zunächst die Gültigkeit der folgenden, für den weiteren Beweis benötigten, Abschätzung:

Induktionsannahme : (†) $\|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| \leq \mu\, L^k\, \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$ für alle $t \in I$.

Induktionsanfang : $\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| = \|x^0 + \int_{t_0}^t f(s,x^0)\, ds - x^0\| \leq \mu\, |t-t_0|$

Induktionsschritt :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{k+2}(t) - \varphi_{k+1}(t)\| &= \|\int_{t_0}^t f(s,\varphi_{k+1}(s)) - f(s,\varphi_k(s))\, ds\| \\
&\overset{(6)}{\leq} \left|\int_{t_0}^t L\, \|\varphi_{k+1}(s) - \varphi_k(s)\|\, ds\right| \\
&\overset{I.A.}{\leq} \frac{\mu\, L^{k+1}}{(k+1)!} \left|\int_{t_0}^t |s-t_0|^{k+1}\, ds\right| \\
&= \frac{\mu\, L^{k+1}}{(k+1)!}\, \frac{|t-t_0|^{k+2}}{(k+2)}
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle $t \in I$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{N+m}(t) - \varphi_N(t)\| &= \|(\varphi_{N+m}(t) - \varphi_{N+(m-1)}(t)) + (\varphi_{N+(m-1)}(t) \\
&\quad -\varphi_{N+(m-2)}(t)) + \cdots + (\varphi_{N+1}(t) - \varphi_N(t))\| \\
&\leq \sum_{k=N}^{N+m} \|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| \\
&\overset{(\dagger)}{\leq} \sum_{k=N}^{N+m} \mu\, L^k\, \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \\
&\leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu\, L^k\, \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow{k\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Die Glieder von $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bilden also tatsächlich eine Cauchy-Folge. Aufgrund der Vollständigkeit des $\mathcal{C}(I,K)$ existiert der Grenzwert $\varphi(t) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t)$ für alle $t \in I$.

(iii): Durch Grenzwertbildung folgt:

$$\begin{aligned}
& \|\varphi_{N+m}(t) - \varphi_N(t)\| \leq \sum_{k=N}^{N+m} \mu\, L^k\, \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \\
\overset{m\to\infty}{\Rightarrow}\quad & \|\varphi(t) - \varphi_N(t)\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu\, L^k\, \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \\
\Rightarrow\quad & \lim_{N\to\infty} \|\varphi(t) - \varphi_N(t)\| = 0
\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen φ, so daß φ als Grenzfunktion stetiger Funktionen stetig ist mit $\varphi \in \mathcal{C}(I,K)$.

Bei gleichmäßiger Konvergenz sind Limes- und Integralbildung vertauschbar, so daß mit (5) gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \lim_{k\to\infty} \varphi_{k+1}(t) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_k(s))\, ds \right) \\
&= x^0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} f(s, \varphi_k(s))\, ds \\
&= x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt wird durch die gleichmäßige Konvergenz von $f(s, \varphi_k(s))$ gegen $f(s, \varphi(s))$ von (†) aus Teil (ii) und der Lipschitz-Stetigkeit von f gerechtfertigt.

■

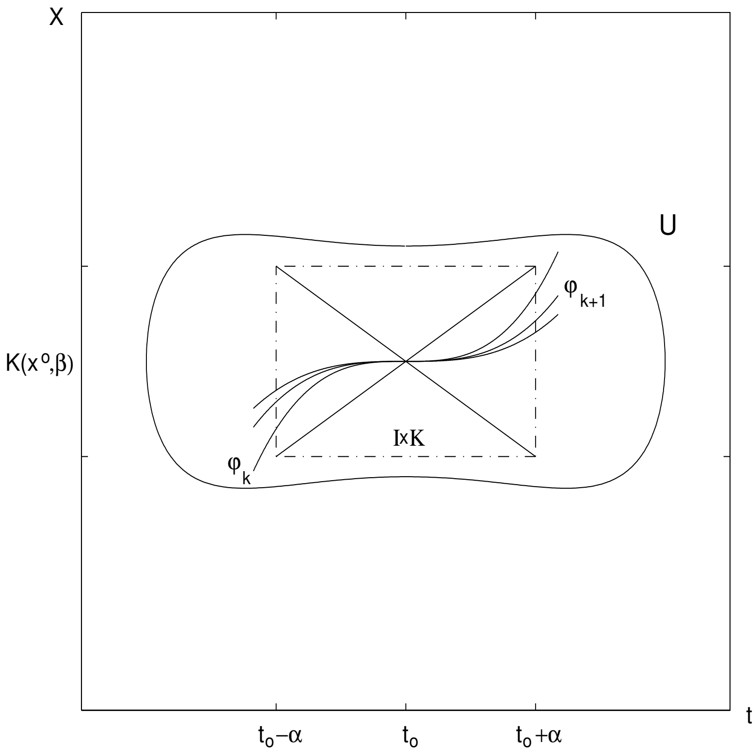


Abbildung 2: *Die Approximationen können den Doppelkegel $I \times K(x^0, \beta)$ nie verlassen.*

Bemerkung
Aus dem in Teil (i) des Beweises vorkommenden Ausdrucks $\|\varphi_{k+1}(t) - x^0\| \leq \mu\,|t - t_0|$ für alle $t \in I$ läßt sich folgern, daß der Graph einer Picard-Iterierten im Fall eines eindimensionalen Zustandsraums zwischen den Geraden $g_1(t) = \mu\,(t-t_0)+x^0$ und $g_2(t) = -\mu\,(t-t_0)+x^0$ liegt, solange wir uns auf dem Intervall I befinden: Sämtliche Iterierten verlaufen durch den Punkt (t_0, x^0), der im Fall eines mehrdimensionalen Zustandsraums den Mittelpunkt eines Doppelkegels mit der Steigung μ darstellt. Die Approximationslösungen können diesen Kegel im betrachteten Bereich $I \times K$ niemals verlassen (vgl. Abbildung 2). Ebenso wird die Grenzfunktion φ durch den Kegel begrenzt, da gilt

$$\mu := \max_{(t,x)\in I\times K} \|f(t,x)\| = \max_{(t,x)\in I\times K} \|\frac{d}{dt}\,\varphi(t)\|$$

Der Satz 2.3.2 garantiert die Existenz der Lösungen nur auf einem hinreichend kleinen Intervall $I = [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ mit $\alpha\,\mu \leq \beta$. Ist α konkret zu bestimmen, so kann man etwa wie folgt vorgehen: Man wähle bei festem β einen beliebigen, in $I\times K$ enthaltenen Quader der Form $Q = \{(t,x) : |t-t_0| \leq \widetilde{\alpha} \wedge \|x-x_0\| \leq \beta\}$ und bestimme eine Schranke $\widetilde{\mu} = \max_{(t,x)\in Q} \|f(t,x)\|$ und setze $\alpha := \min(\widetilde{\alpha}, \frac{\beta}{\widetilde{\mu}})$.

Maximale Existenzintervalle und globale Lösung

Aus den bisherigen Ergebnissen folgt unmittelbar die Existenz eines maximalen Existenzintervalls der Lösung:

Korollar 2.3.3
Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig bezüglich t und Lipschitz-stetig bezüglich x auf der offenen Menge $U \subset I\times\mathbb{K}^n$. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $(t_0, x^0) \in U$ genau ein Intervall $I =]\,t^-, t^+\,[$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $-\infty \leq t^- < t_0 < t^+ \leq \infty$

(ii) Das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ mit $x(t_0) = x^0$ besitzt genau eine Lösung auf $I =]\,t^-, t^+\,[$.

(iii) Ist $\psi(\cdot)$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf einem offenen Intervall J, so gilt $J \subset]\,t^-, t^+\,[$ und $\psi(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in J$.

□

Beweis
Sei $\mathcal{J}$ die Menge aller Intervalle J, auf denen überhaupt eine lokale Lösung φ_J

des Anfangswertproblems (4) existiert. Für beliebige Intervalle $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$ gilt nach dem Eindeutigkeitssatz

$$\varphi_{J_1}(t) = \varphi_{J_2}(t) \tag{7}$$

für alle $t \in J_1 \cap J_2$. Setze $I := \bigcup_{J \subset \mathcal{J}} J$. I ist zusammenhängend, da sämtliche Intervalle J den Punkt t_0 enthalten müssen und I ist außerdem offen als Vereinigung von offenen Mengen. Man definiert $\varphi(t) := \varphi_J(t)$ für $t \in I$, falls $t \in J$. Diese Funktion ist wohldefiniert, da der Wert von φ an den Schnittstellen nach (7) nicht von dem ausgewählten Intervall J abhängig ist. Es folgt:

(i) Nach Theorem 2.3.2 existiert φ zumindest auf einer Umgebung um (t_0, x^0), so daß $t^- < t_0 < t^+$ gilt; diese Umgebung kann jedoch auch beliebig groß, also auch unendlich, werden.

(ii) Die oben konstruierte Funktion $\varphi(t)$ löst das Anfangswertproblem auf ganz I; ihr Geschwindigkeitsvektorfeld f erfüllt die Eindeutigkeitsaussage von Satz 2.2.6.

(iii) Folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung auf dem gemeinsamen Definitionsbereich.

$\blacksquare$

In den beiden folgenden Sätzen sollen die Eigenschaften von dem maximalen Existenzintervall untersucht werden.

Satz 2.3.4
Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich x auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ und besitze das maximale Existenzintervall $I =]\,t^-, t^+\,[$ bezüglich des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x^0$ eine endliche obere Grenze $t^+ < \infty$. Ist dann

$$x^* := \lim_{k \to \infty} \varphi(t_k)$$

mit $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow t^+$ ein t^+-Grenzpunkt, so liegt der Punkt (t^+, x^*) auf dem Rand von U. Die analoge Aussage gilt für die untere Grenze t^-. $\square$

Beweis
Da φ eine Lösung des Anfangswertproblems (4) ist und f nur auf U definiert ist, liegen die Punkte $(t_k, \varphi(t_k))$ für $k \in \mathbb{N}$ in U. Da alle Folgenglieder in U liegen, muß für den Grenzwert $(t, x^*) \in \overline{U}$ gelten. Wir haben lediglich zu zeigen, daß $(t^+, x^*) \notin U = \overset{\circ}{U}$ gilt, daraus folgt dann $(t^+, x^*) \in \partial U$.
Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, (t^+, x^*) liege in U. Seien $\delta, \beta > 0$ so gewählt, daß gilt

$$J \times K = [t^+ - \delta, t^+ + \delta] \times \overline{K}(x^*, \beta) \subset U.$$

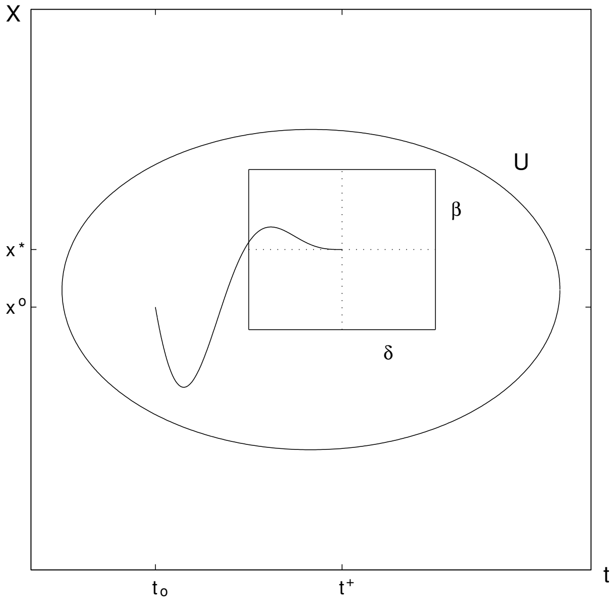


Abbildung 3: *Bild zum Widerspruchsbeweis in Satz 2.3.4: Die Lösung kann nicht einfach im Inneren von U verschwinden.*

Wir zeigen mit Hilfe des Theorems 2.3.2, daß sich unter diesen Voraussetzungen die Lösung über t^+ hinaus fortsetzen läßt, $]\,t^-, t^+\,[$ also nicht das geforderte maximale Existenzintervall sein kann.
Setze

$$\mu := \max_{(t,x)\in J\times K} \|f(t,x)\|$$

und wähle $\alpha > 0$ so, daß $\mu\,\alpha < \beta$ gilt. Wähle ferner $\widetilde{t} < t^+$, so daß

$$t^+ - \delta < \widetilde{t} - \alpha < \widetilde{t} < t^+ < \widetilde{t} + \alpha < t^+ + \delta.$$

Nach Theorem 2.3.2 existiert eine Lösung ψ des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ mit $x(\widetilde{t}) = \widetilde{x}$, wobei $\widetilde{x} = \varphi(\widetilde{t})$. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist $\psi = \varphi$ auf $t \in I \cap \,]\,\widetilde{t} - \alpha, \widetilde{t} + \alpha\,[$, d.h. auf $]\,\widetilde{t} - \alpha, t^+\,[$. Setze nun

$$\widetilde{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{für} \quad t \in]\,t^-, t^+[\\ \psi(t) & \text{für} \quad t \in [t^+, \widetilde{t} + \alpha\,[\end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{\varphi}$ eine Lösung von (4) auf dem Intervall $]\,t^-, \widetilde{t}+\alpha[$. Damit wäre $]t^-, t^+[$ nicht das maximale Existenzintervall. ↯ Damit muß $(t^+, x^*) \in \partial U$ gelten. ∎

Korollar 2.3.5
Sei $f : J \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich x auf einem offenen

Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Ist $I =]\,t^-, t^+\,[$ das maximale Existenzintervall der Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x^0$ mit $t^+ < \infty$ und gilt $t^+ < \sup J$, so folgt

$$\lim_{t \to t^+} \|\varphi(t)\| = \infty.$$

Entsprechendes gilt für die untere Intervallgrenze t^-. □

Beweis
Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ ist $(t^+, x) \notin \partial U$, da t^+ nach Voraussetzung nicht die obere Grenze von J sein kann. Nach Satz 2.3.4 gibt es also keine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in I mit $t_k \uparrow t^+$ und $\lim_{k \to \infty} \varphi(t_k)$ existiert. Es existiert also zumindest kein endlicher Grenzwert, es muß allerdings ausgeschlossen werden, daß φ bei Annäherung an t^+ beschränkt bleibt, wie das zum Beispiel bei periodischen Lösungen der Fall wäre. Es gilt

$$\lim_{t \uparrow t^+} \|\varphi(t)\| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, r > 0 \;\exists\, \delta > 0 : \|\varphi(t)\| > r \quad \forall\, t \in [t^+ - \delta, t^+\,[$$

Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, $\exists\, r > 0\, \forall\, \delta > 0 : \|\varphi(t)\| \leq r$ für alle $t \in [t^+ - \delta, t^+\,[$. Also existiert eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in I mit $t_k \uparrow t^+$, so daß $\|\varphi(t_k)\| \leq r$ für alle k. Nach Bolzano-Weierstraß besitzt $\varphi(t_k)$ eine konvergente Teilfolge. Ist x^* der Limes dieser konvergenten Teilfolge, so gilt nach Satz 2.3.4 $(t^+, x^*) \in \partial U$. $\lightning$ ■

Die beiden letzten Sätze beinhalten geometrisch gesprochen die folgende Aussage:
Untersucht wird das Verhalten der Lösungsfunktion $\varphi(t)$ unter den Voraussetzungen des Theorems bei Annäherung an die obere Grenze t^+, beziehungsweise an die untere Grenze t^- des maximalen Existenzintervalls I. Ist $I =]\,t^-, \infty\,[$, so kann $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$ gelten wie in Abbildung 4 a) oder gegen einen festen Wert c konvergieren, vgl. Abbildung 4 b). Welche Gründe kann es nun für das Auftreten eines maximalen Existenzintervalls $I =]\,t^-, t^+\,[$ mit endlicher, oberer Grenze geben? Entweder explodiert das System bei Annäherung an die obere Grenze wie in Abbildung 4 d) oder die Lösungsfunktion wird an den Rand von U des Geschwindigkeitsvektorfeldes f stoßen (vgl. Abbildung 4 c)). Läßt sich der Definitionsbereich von f noch erweitern, so ist φ dort auch fortsetzbar. Aus dem Beweis von Satz 2.3.4 folgt außerdem, daß eine Lösung nicht im Inneren von U mit einem endlichen Grenzpunkt (t^+, x) „versacken“ kann. Nach dem Theorem ließe sich immer noch eine Umgebung finden, auf der f fortsetzbar wäre.

Unsere Überlegungen garantieren für den Fall der Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit von f die lokale Existenz der Lösung φ auf dem maximalen Existenzintervall I. Es stellt sich nun die Frage, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an die Funktion $f : J \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ die Lösung auf ganz J existiert. Wir

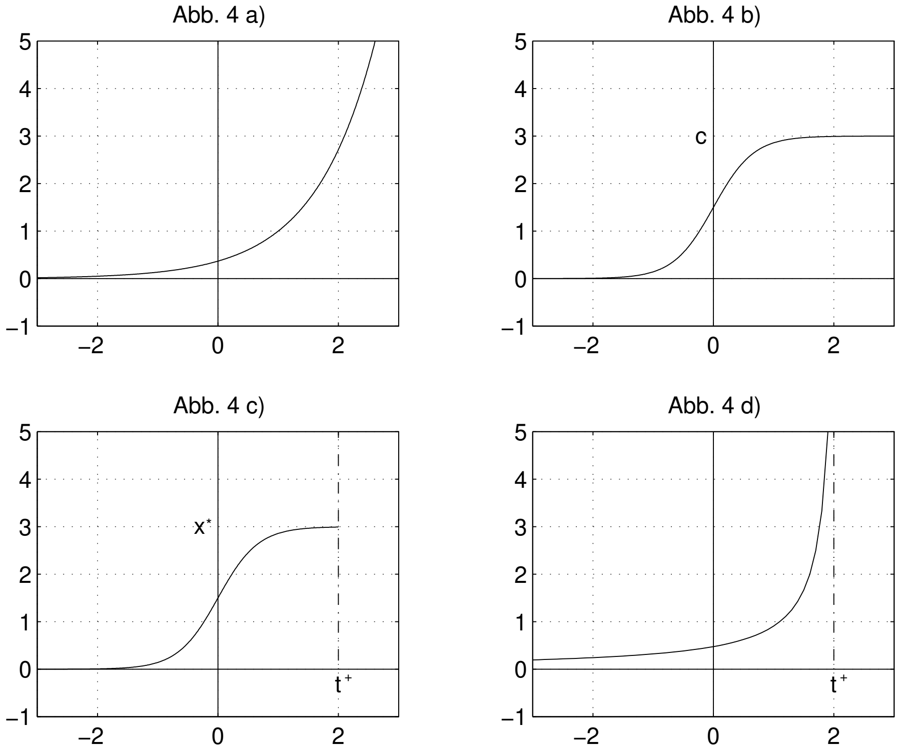


Abbildung 4: *Die vier Möglichkeiten des Verlaufs einer Trajektorie bezüglich der oberen Grenze: Unendliches Existenzintervall mit a) unbeschränktem Verlauf der Lösung, beziehungsweise b) Konvergenz gegen einen festen Wert c oder ein durch eine endliche obere Grenze t^+ beschränktes Existenzintervall mit c) endlichem Grenzpunkt (t^+, x^*) auf dem Rand von U, bzw. d) unbeschränktem Wachstum der Lösung bei Annäherung von t^+.*

werden sehen, daß die globale Existenz der Lösung eines Anfangswertproblems gewährleistet ist, wenn f linear beschränkt ist.

Definition 2.3.6 (Lineare Beschränktheit)
Eine Funktion $f : J \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ heißt linear beschränkt[12] *auf dem Intervall J bezüglich x, wenn stetige Funktionen $a(\cdot), b(\cdot) : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ existieren mit:*

$$\|f(t, x(t))\| \leq a(t)\,\|x(t)\| + b(t)$$

für alle $t \in I, x \in \mathbb{K}^n$. □

Beispiel:
$f(t, x) = x^2$ ist nicht linear beschränkt □

[12] linearly bounded

Korollar 2.3.7
Sei $f : J \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich x auf einem beliebigen Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Ist $f(t, x(t))$ auf J linear beschränkt, so besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \ \mathit{mit}\ x(t_0) = x^0$$

für alle $t_0 \in J, x^0 \in \mathbb{K}^n$ eine eindeutige Lösung auf ganz J. □

Beweis
Beweis durch Widerspruch:
Sei $]\,t^-, t^+\,[$ das maximale Existenzintervall der Lösung des Anfangswertproblems und
$(t_0, x^0) \in J \times \mathbb{K}^n$. Angenommn, $t^+ < \sup J$. Dann folgt nach Korollar 2.3.5 $\lim_{t \to t^+} \|\varphi(t)\| = \infty$. Dies widerspricht der linearen Beschränktheit, denn wegen $\varphi(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))\, ds$ gilt für alle $t \in [t_0, t^+\,[$:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\| &\leq \|x^0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s))\|\, ds \\ &\leq \|x^0\| + \int_{t_0}^t (a(s)\, \|\varphi(s)\| + b(s))\, ds \\ &= \|x^0\| + \int_{t_0}^t b(s)\, ds + \int_{t_0}^t a(s)\, \|\varphi(s)\|\, ds. \end{aligned}$$

Setze $\gamma := \|x^0\| + \int_{t_0}^t b(s)\, ds$, dann folgt nach Gronwall:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\| &\leq \gamma\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\, ds} \\ &\leq \gamma\, e^{\int_{t_0}^{t^+} a(s)\, ds}. \end{aligned}$$

$a(\cdot)$ ist eine stetige Funktion auf ganz J und $t^+ \in J$, also ist das Integral $\int_{t_0}^{t^+} a(s)\, ds$ eine reelle Zahl. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 2.2.6. ■

Beispiel:
Man betrachte die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = t^2\, x\, \sin(x) + \cos(x)$. Die Funktion $f(t, x) = t^2\, x\, \sin(x) + \cos(x)$ ist für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig, Lipschitz-stetig und linear beschränkt durch:

$$|f(t, x)| \leq t^2\, |x| + 1, \quad a(t) = t^2, b(t) \equiv 1$$

Nach Korollar 2.3.7 besitzt jedes Anfangswertproblem eine global existierende Lösung auf $\mathbb{R}$. □

Im Folgenden spezialisieren wir die Aussage aus Korollar 2.3.7 für den Fall von linearen Systemen:

Korollar 2.3.8
Man betrachte das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + b(t), \;\; \textit{mit } x(t_0) = x^0,$$

wobei $J \subset \mathbb{R}$ *ein beliebiges offenes Intervall und* $A(\cdot) : J \longrightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ *und* $b(\cdot) : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *stetige Funktionen auf* J*. Dann besitzt das obige Anfangswertproblem für jedes* $(t_0, x^0) \in J \times \mathbb{K}^n$ *eine eindeutig bestimmte Lösung auf ganz* J*.* □

Beweis
$f(t,x) := A(t)\, x + b(t)$ ist auf $J \times \mathbb{K}^n$ stetig, Lipschitz-stetig und linear beschränkt durch

$$\|f(t,x)\| \leq \|A(t)\|\, \|x\| + \|b(t)\|.$$

Damit folgt die Behauptung aus Korollar 2.3.7. ■

Beispiel: Picard-Iteration einer Differentialgleichung
Man betrachte das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = 3\, x(t) + 1, \quad \text{mit } x(0) = 2.$$

a) Man berechne die ersten vier Approximationen $\varphi_k(t)$.

b) Man zeige, daß die sukzessiven Approximationen $\varphi_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren.

c) Man bestimme die Lösung $\varphi(t)$ des Anfangswertproblems $(*)$ und zeige:

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(t) = \varphi(t)$$

a): Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= x^0 = 2 \\ \varphi_{k+1}(t) &= x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_k(s))\, ds \\ &= 2 + \int_0^t 3\, \varphi_k(s) + 1\, ds \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die ersten vier Approximationen

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 2 \\ \varphi_1 &= 7\,t + 2 \\ \varphi_2 &= \frac{21}{2}\, t^2 + 7\,t + 2 \\ \varphi_3 &= \frac{21}{2}\, t^3 + \frac{21}{2}\, t^2 + 7\,t + 2 \\ \varphi_4 &= \frac{63}{8}\, t^4 + \frac{21}{2}\, t^3 + \frac{21}{2}\, t^2 + 7\,t + 2 \end{aligned}$$

b): Die sukzessiven Approximationen $\varphi_k(t)$ existieren für alle $t \in \mathbb{R}$, da es sich um Polynome handelt.
Beweis durch Induktion:
I.A.: $\varphi_0(t) \equiv 2$ ist konstantes Polynom.
I.V.: Für $k \geq 0$ gilt:

$$\varphi_k(t) = \frac{7\,3^{k-1}}{k!}\, t^k + \varphi_{k-1}(t),$$

wobei $\varphi_{k-1}(t)$ ein Polynom ist.
I.S.:

$$\begin{aligned}
\varphi_{k+1}(t) &\overset{I.V.}{=} 2 + \int_0^t 3\left(\frac{7\,3^{k-1}}{k!}\, s^k + \varphi_{k-1}(s)\right) + 1\, ds \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{7\,3^k}{(k+1)\,k!}\, t^{k+1} + \frac{7\,3^{k-1}}{(k-1)!\,k}\, t^k + 3\int_0^t \varphi_{k-2}(s)\, ds + \cdots + 2 \\
&= \frac{7\,3^k}{(k+1)!}\, t^{k+1} + \varphi_k(t)
\end{aligned}$$

ist ein Polynom, denn $\varphi_{k-2}(t)$ ist ein Polynom, also auch dessen Integral.

c): Die Methode der Variation der liefert:

$$\dot{x} = 3\,x + 1, \quad x(0) = 2$$

Die homogene Lösung lautet $\varphi_h = e^{3\,t}$. Der bekannte Ansatz $\varphi(t) = \varphi_h(t)\, c(t)$ liefert dann $\dot{c}(t) = 1/e^{3\,t}$ und damit $c(t) = -1/3\, e^{-3\,t}$. Die gesuchte Lösung ist also

$$\varphi(t) = e^{3\,t}\,(\frac{-e^{-3\,t}}{3} + k) = k\, e^{3\,t} - \frac{1}{3}.$$

Das Anfangswertproblem liefert die Konstante $k = 7/3$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7\,3^{k-1}}{k!}\, t^k + 2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{3}\,\frac{3^k}{k!}\, t^k + \frac{7}{3}\right) - \frac{1}{3} \\
&= \frac{7}{3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3\,t)^k}{k!} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\, e^{3\,t} - \frac{1}{3} \\
&= \varphi(t)
\end{aligned}$$

□

Aufgaben

(1) Man zeige:
Sind die Funktionen f, g Lipschitz-beschränkt, so gilt dies auch für die folgenden Funktionen: $f+g$, $f-g$, cf $(c \in \mathbb{R})$, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$.

1) Eine Methode um zeitvariante lineare Differentialgleichung zu lösen besteht darin, anzunehmen, daß sich eine Lösung $\varphi(\cdot)$ in eine Potenzreihe um $t = 0$ entwickeln läßt:
   (†) $\qquad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$
   und dann die unbekannten Koeffizienten a_k durch Koeffizientenvergleich zu bestimmen. Man wende dieses Verfahren an, um zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung
   $(*)$ $\qquad \ddot{y}(t) - 2\,t\,\dot{y}(t) - 2\,y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$
   zu bestimmen. Nach Ermittlung der Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ ist nachzuweisen, daß (†) tatsächlich eine Lösung von $(*)$ liefert.

2) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $\mathbb{K}^n$ mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ versehen. Dann wird die zugehörige Operatornorm von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiert durch:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_{\mathbb{K}^n};\, x \in \mathbb{K}^n,\, \|x\|_{\mathbb{K}^n} \le 1\}.$$

   Man zeige:

   (a) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^{n\times n}$ aller $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Für $A,\, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$.

   (b) Ist $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, so folgt $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, wobei $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert der symmetrischen Matrix $A^T A$ ist.
   (Diese Operatornorm wird mit $\|A\|_2$ bezeichnet.)

   (c) Betrachte auf $\mathbb{K}^n$ die Norm

$$\|x\|_{\mathbb{K}^n} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

   Zeige, daß die zugehörige Operatornorm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben ist durch

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad A \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

3) Man zeige, daß jede der folgenden Funktionen bezüglich x auf der angegebenen Menge Lipschitz-beschränkt ist und bestimme eine passende Lipschitz–Konstante

   (a) $f(t,x) = t, x^2$ auf $U = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\, |t| \le 1, |x| \le 1\}$

(b) $f(t,x) = t^2 \cos^2 x + x \sin^2 t$ auf $U = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2; |t| \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$ +

(c) $f(t,x) = t^3 e^{-tx^2}$ auf $U = [0,a] \times \mathbb{R}$ $(a > 0)$.

Man zeige, daß die folgende Funktion auf der angegebenen Menge nicht Lipschitz-beschränkt bezüglich x ist:

(d) $f(t,x) = t\,x^2$ auf $U = [-1,1] \times \mathbb{R}$

Man zeige, daß die folgende Funktion auf der angegebenen Menge nicht Lipschitz-stetig bezüglich x ist:

(e) $f(t,x) = x^{2/3}$ auf $U =]-1,1[\times]-1,1[$

4) Betrachte das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 3\,x(t) + 1, \quad x(0) = 2$$

(a) Zeige, daß die sukzessiven Approximationen $\varphi_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren.

(b) Berechne die ersten vier Approximationen.

(c) Bestimme die Lösung $\varphi(t)$ des Anfangswertproblems mit Hilfe der Methoden aus Kapitel 1 und beweise, daß $\varphi_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gegen $\varphi(t)$ konvergiert wenn $k \to \infty$.

5) Betrachte das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = x(t)^2, \qquad x(0) = 1.$$

(a) Zeige, daß die sukzessiven Approximationen $\varphi_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren.

(b) Berechne die ersten vier Approximationen.

(c) Für welche t konvergieren die $\varphi_k(t)$ gegen die Lösung $\varphi(t)$ von $(*)$?

(d) Zeichne mit Hilfe des Rechners die ersten 10 Approximationen $\varphi_k(\cdot)$ auf dem Intervall $[-5,2]$.

Kapitel 3

Zeitinvariante lineare Differentialgleichungssysteme

Nach einer einleitenden Vorbetrachtung wenden wir uns im zweiten Paragraphen unter Zuhilfenahme der aus der linearen Algebra bekannten Jordan-Normalform und Eigenwerttheorie der Lösung zeitinvarianter, linearer Differentialgleichungen zu. Es zeigt sich, daß hierfür im Gegensatz zur Situation bei zeitvarianten Differentialgleichungen (vgl. Kapitel 4) eine gut ausgebaute Theorie zur Lösung konkreter Probleme bereitsteht.
Um als neuen Aspekt die Lösungen einer Differentialgleichung auch qualitativ untersuchen zu können, gehen wir im Vorgriff auf die Ergebnisse des sechsten Kapitels bereits im dritten Paragraphen auf *Stabilitätseigenschaften homogener Systeme* ein. Diese werden dann im sechsten Kapitel in voller Allgemeinheit für beliebige Differentialgleichungen und in mathematisch strengerer Form behandelt. Mit Hilfe der Resultate dieses Paragraphens ist es dann möglich, den Zusammenhang zwischen der analytischen Gleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ einerseits und der vom Computer berechneten Näherungslösung andererseits besser zu verstehen.
Als Anwendung der Ergebnisse dieses Kapitels behandeln wir abschließend einige grundlegende Sätze aus der *Regelungstheorie*, die sich als Teil der Systemtheorie mit der Kontrolle und Steuerung dynamischer Systeme beschäftigt.

3.1 Vorbetrachtung und Rechenregeln

Wie aus Paragraph 2 des zweiten Kapitels bereits bekannt ist, läßt sich ein System von n linearen homogenen und zeitinvarianten Differentialgleichungen stets in die Form

(1)
$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \quad A \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

überführen. Dabei sei A eine gegebenenfalls komplexwertige $n \times n$-Matrix. Für den skalaren Fall $n = 1$ lautet die Lösung eines Anfangswertproblems der Differentialgleichung (1) bekanntlich $\varphi(t) = x^0\, e^{a\,t}$, wobei man aufgrund der Reihenentwicklung der Exponentialreihe $e^{a\,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\, t^k$ erhält.
Dieser Ansatz soll im folgenden für beliebige $n \geq 1$ verallgemeinert werden. Der Körper $\mathbb{K}$ stelle dazu wie üblich wahlweise die komplexen oder reellen Zahlen dar und der Vektorraum $\mathbb{K}^n$ sei mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$ versehen. In dem folgenden Paragraphen wollen wir den Leser mit den Begriffen der Operatornorm $\|\cdot\|_M$, mit der Matrixexponentialreihe $e^{A\,t}$ und den damit verbundenen Rechenregeln vertraut machen. Da die Ergebnisse des Paragraphen sehr technisch sind, ist es möglich, die Beweise zunächst zu überspringen und später bei Bedarf nachzuschauen. Eine Übersicht aller Rechenregeln findet man auf Seite 128. Da der Umgang mit Normen oft als selbstverständlich vorausgesetzt wird, behandeln wir den folgenden Abschnitt sehr ausführlich.

Normen im $\mathbf{K}^{n\times n}$

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ induziert auf natürliche Weise eine stetige lineare Abbildung

$$\begin{aligned} A : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto A\,x \end{aligned}$$

In Zukunft identifizieren wir die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit dem zugehörigen gleichnamigen linearen Abbildung A. Bezeichne $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ in diesem Abschnitt eine beliebige auf dem $\mathbb{K}^n$ betrachtete Norm. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine auf ihrem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{K}^n$ beschränkte Abbildung, so erklärt man üblicherweise eine Norm für f durch $\|f\| = \sup_{x\in D} \|f(x)\|_{\mathbb{K}^n}$. Dies ist in unserem Fall nicht möglich, da der Operator A auf seinem Definitionsbereich nicht beschränkt ist. Jede homogene Abbildung f ist aber wegen $f(x) = \|x\|_{\mathbb{K}^n} f(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}})$ durch ihre Werte auf der Einheitssphäre S^n bereits vollständig festgelegt. Da die Einschränkung des Operators A auf die kompakte Einheitssphäre S^n stetig ist, also der Operator selbst beschränkt ist, kann man analog zur Supremumsnorm für Abbildungen folgende Operatornorm einführen.

Definition 3.1.1 (Operatornorm)
Für einen Operator A heißt

$$\|A\|_M := \sup\{\|A\,x\|_{\mathbb{K}^n} : x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_{\mathbb{K}^n} = 1\}$$

die von $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ im $\mathbb{K}^n$ induzierte Norm eines Operators [1] . □

[1] operator norm

Diese Abbildung ist sogar eine sogenannte Matrixnorm [2], da zusätzlich zu den Axiomen einer Norm die Ungleichung $\|A\,B\|_M \leq \|A\|_M\,\|B\|_M$ erfüllt ist. Denn es gilt:

(i) $\|\cdot\|_M$ ist positiv definit

Da $\|\cdot\|_M$ das Supremum über die nichtnegativen reellen Zahlen $\|A\,x\|_{\mathbb{K}^n}$ ist, gilt zumindest $\|A\|_M \geq 0$ stets:

$$\begin{array}{lcll} \|A\|_M = 0 & \Leftrightarrow & \|A\,x\|_{\mathbb{K}^n} = 0 & ,\ \forall\, x \in S^n \\ & \Leftrightarrow & A\,x = 0 & ,\ \forall x \in S^n,\ \text{da } \|\cdot\|_{\mathbb{K}^n} \text{ Norm.} \\ & \Leftrightarrow & A = 0 & \end{array}$$

(ii) $\|\cdot\|_M$ ist homogen

$$\begin{array}{rcl} \|\lambda\,A\|_M & = & \sup\{|\lambda|\,\|A\,x\|_{\mathbb{K}^n} : \|x\|_{\mathbb{K}^n} = 1\} \\ & = & |\lambda|\,\|A\|_M \quad ,\ \text{da } \|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}\,\text{Norm,} \end{array}$$

denn die Supremumsbildung ist von der Konstanten $|\lambda|$ unabhängig.

(iii) Dreiecksungleichung

$$\begin{array}{rcl} \|A + B\|_M & = & \sup\{\|A\,x + B\,x\|_{\mathbb{K}^n} : \|x\|_{\mathbb{K}^n} = 1\} \\ & \leq & \sup\{\|A\,x\|_{\mathbb{K}^n} + \|B\,x\|_{\mathbb{K}^n} : \|x\|_{\mathbb{K}^n} = 1\} \\ & \leq & \sup\{\|a\,x\|_{\mathbb{K}^n} : \|x\|_{\mathbb{K}^n} = 1\} + \sup\{\|B\,x\|_{\mathbb{K}^n} : \|x\|_{\mathbb{K}^n} = 1\} \\ & = & \|A\|_M + \|B\|_M \end{array}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da die beiden Suprema auf der linken Seite unabhängig voneinander gewählt werden können, wie das folgende Beispiel demonstriert.

Beispiel:
Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n} = \|\cdot\|_2$ mit $x = \binom{x_1}{x_2}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} \|A + B\|_M & = & \sup\{\|A\,x + B\,x\|_2 : \|x\|_2 = 1\} \\ & = & \sup\{\|A\,x\|_2 + \|B\,x\|_2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \\ & = & \sup\{|x_1| + |x_2| : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \\ & = & \sqrt{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \|A\|_M + \|B\|_M & = & \sup\{|x_1| : x_1^2 + x_2^2 = 1\} + \sup\{|y_1| : y_1^2 + y_2^2 = 1\} \\ & = & 2 \end{array}$$

□

[2] matrix norm

(iv) Es gilt die Abschätzung $\|A\,B\|_M \leq \|A\|_M\,\|B\|_M$, denn es folgt:

a) Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $\|A\,x\|_{\mathbb{K}^n} \leq \|A\|_M\,\|x\|_{\mathbb{K}^n}$, da:

$$\begin{aligned}\forall\, x \neq 0 : \|A\,x\|_{\mathbb{K}^n} &= \|x\|_{\mathbb{K}^n} \left\| A\,\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \right\|_{\mathbb{K}^n} \\ &\leq \|x\|_{\mathbb{K}^n} \sup\{\|A\,u\|_{\mathbb{K}^n} : u \in S^n\} \\ &= \|x\|_{\mathbb{K}^n}\,\|A\|_M\end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt dies trivialerweise.

b)

$$\begin{aligned}\|A\,B\|_M &= \sup\{\|A\,(B\,x)\|_{\mathbb{K}^n} : x \in S^n\} \\ &\overset{a)}{\leq} \sup\{\|A\|_{\mathbb{K}^n}\,\|B\,x\|_{\mathbb{K}^n} : x \in S^n\} \\ &= \|A\|_M\,\|B\|_M\end{aligned}$$

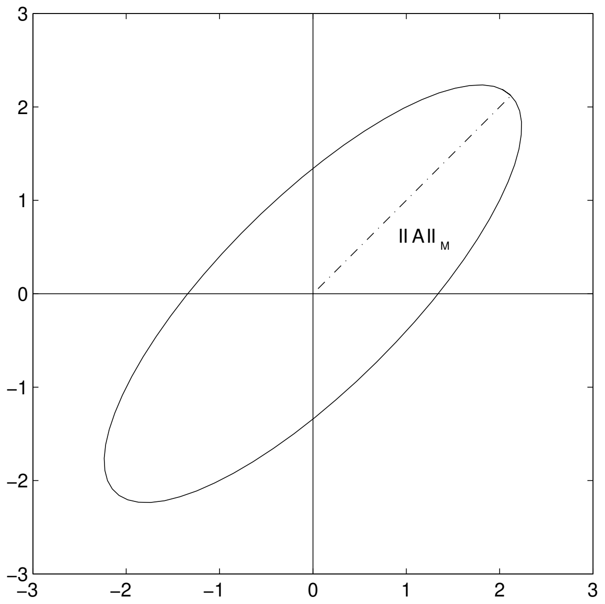


Abbildung 1: Transformation der Einheitssphäre durch Multiplikation mit einer Matrix A.

Zur Veranschaulichung der Operatornorm stelle man sich folgendes Bild vor: Man transformiert die n-dimensionale Einheitssphäre S^n durch Multiplikation mit A in einen Ellipsoid (diese Transformation bewirkt lediglich eine Drehstreckung) und nimmt als Wert $\|A\|_M$ die größte Entfernung eines Punktes auf dem Ellipsoiden zum Ursprung an (entlang der längsten Hauptachse).

Viele Lehrbücher führen die Matrixnorm auch wie folgt ein:
$\|A\|_M := \sup\{\|A\,x\|_{\mathbb{K}^n} : x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_{\mathbb{K}^n} \leq 1\}$. Dies führt jedoch zu demselben Resultat, da das Maximum natürlich auf der Oberfläche der Einheitskugel angenommen wird. Eine weitere äquivalente Möglichkeit, die Operatornorm zu definieren, ist $\|A\|_M := \sup_{x\neq 0}\{\|A\,\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}}\|_{\mathbb{K}^n}, x \in \mathbb{K}^n\}$.

Jede vom $\mathbb{K}^n$ bekannte Norm induziert ihre eigene Operatornorm. So führt die folgende Wahl spezieller Normen im $\mathbb{K}^n$ zu:

1-Norm	$\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n} = \|\cdot\|_1$	$\longrightarrow$	$\|A\|_M = \max_{k=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^n \|a_{jk}\|$
Euklidische Norm	$\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n} = \|\cdot\|_2$	$\longrightarrow$	$\|A\|_M = \left(\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|^2\right)^{1/2}$
Maximumnorm	$\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n} = \|\cdot\|_\infty$	$\longrightarrow$	$\|A\|_M = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{k=1}^n \|a_{jk}\|$

Wir werden im Verlauf dieses Kapitels jedoch nur die zweite, die sogenannte *Frobenius-Norm*, verwenden.

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

Idendifizieren wir den Raum der $n \times n$-Matrizen einfach mit dem $\mathbb{R}^{n\times n}$, so fällt die Frobeniusnorm mit der gewönlichen euklidischen Norm ̈ber dem $\mathbb{R}^{n\times n}$ zusammen, weswegen die Normeigenschaften nicht eigens nachgewiesen werden müssen. Auch die Frobenius-Norm ist eine Matrixnorm.

Im zweiten Paragraphen benötigen wir den aus der Analysis bekannten folgenden Satz:

Satz 3.1.2
Je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind äquivalent, d.h. für zwei Normen $\|\cdot\|_x$ und $\|\cdot\|_y$ existieren reelle Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\alpha\,\|\cdot\|_x \leq \|\cdot\|_y \leq \beta\,\|\cdot\|_x.$$

□

Beweis
Sei V der betrachtete Vektorraum. Aufgrund der Endlichdimensionalität läßt sich mit Hilfe einer Basis von V stets ein Isomorphismus $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ konstruieren. Seien $\|\cdot\|_x, \|\cdot\|_y$ zwei beliebige Normen auf V. Dann erhält man durch $\|x\|_{\tilde{x}} := \|F(x)\|_x$ und $\|x\|_{\tilde{y}} := \|F(x)\|_y$ zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$. Sind diese äquivalent, so existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\alpha\,\|F(x)\|_x \leq \|F(x)\|_y \leq \beta\,\|F(x)\|_x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da sich jedes $v \in V$ als Bild $v = F(x)$ eines eindeutig bestimmten $x \in \mathbb{R}^n$ darstellen läßt, folgt damit die Behauptung, wenn sich zeigen läßt, daß je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Hierzu reicht offensichtlich der Nachweis der Äquivalenz einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$ des $\mathbb{R}^n$ zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Sei e^i der i-te Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^n$, so folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ wegen $\|x_i\| \leq \sqrt{\sum x_i^2}$:

$$\|x\| = \|\sum x_i\, e^i\| \leq \sum \|x_i\|\, \|e^i\| \leq (\sum \|e^i\|)\, \|x\|_2 = \beta\, \|x\|_2$$

Hieraus erhält man sofort die Stetigkeit der Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, denn aufgrund der Dreiecksungleichung gilt

$$|\, \|x\| - \|y\|\, | \leq \|x - y\| \leq \beta\, \|x - y\|_2.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ist also $\delta < \varepsilon/\beta$ zu wählen, damit gilt :

$$\|x - x^0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\, \|x\| - \|y\|\, \| < \varepsilon.$$

Da die Einheitssphäre S^n kompakt ist, nimmt die Funktion $\|\cdot\|$ ihr Minimum bezüglich S^n in einem Punkt $\tilde{z} \in S^n$ an. Da $x_n \neq 0$, gilt aber $\|z\| \geq \|\tilde{z}\| := \alpha > 0$ für $z \in S^n$. Damit ist aber auch die erste Hälfte der Ungleichung bewiesen, denn jeder Vektor $x \neq 0$ läßt sich in der Form $x = \|x\|_2\, z$ schreiben. Es folgt $\|x\| = \|x\|_2\, z \geq \alpha\, \|x\|_2$. ■

Bemerkung
Bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen gibt es Normen, die nicht äquivalent sind.

Insbesondere gilt zum Beispiel

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t)\|_M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|A(t)\|_F = 0.$$

In Zukunft bezeichnen wir der Einfachheit halber die Matrixnorm mit $\|\cdot\|$ statt mit $\|\cdot\|_M$.

Die Matrixexponentialreihe

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige komplexe Matrix. Wir werden uns im Folgenden ausgiebig mit der sogenannten Matrixexponentialreihe

$$e^{A\,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, A^k\, t^k$$

beschäftigen.
Man betrachtet dazu den vollständigen normierten Raum $(\mathbb{C}^{n\times n}, \|\cdot\|)$ und zeigt, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, A^k$ für alle komplexen Matrizen konvergiert. Dazu benötigen wir den folgenden Hilfsatz aus der Analysis:

Satz 3.1.3
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V. Ist die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ normkonvergent, d.h. konvergiert noch die reelle Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|$, so konvergiert auch $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ in V. □

Beweis
Zu zeigen ist: Mit $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ ist $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Da V vollständig ist, konvergiert die Folge der Partialsummen und damit auch die unendliche Reihe $\sum \|a_k\|$. Nach Definition gilt: (S_k) ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall\, m, n \geq n_0 : \operatorname{dist}(S_n, S_m) < \varepsilon$. Setze $\operatorname{dist}(x, y) := \|x - y\|$. Sei nun $\varepsilon_0 > 0$ gegeben. Da $\sum \|a_k\|$ konvergiert, gibt es nach dem Cauchykriterium für Reihen einen Index $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq N_0$ gilt:

$$\sum_{k=n}^{n+m} \|a_k\| < \varepsilon_0$$

Es folgt:

$$\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+m} \|a_k\| < \varepsilon_0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{dist}(S_m, S_n) < \varepsilon$$

■

Damit erhalten wir die Konvergenz der Matrixexponentialreihe aus unseren bisherigen Ergebnissen. Sei $\alpha := \|A\| \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|\frac{1}{k!}\, A^k\| &\overset{(iv)}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \|A\|^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} =: e^{\alpha} \end{aligned}$$

Dies impliziert laut Hilfssatz die Konvergenz von e^A.

Den Grenzwert, der wiederum eine komplexwertige $n\times n$-Matrix ist, wird analog zur komplexen Exponentialfunktion mit $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, A^k$ bezeichnet, beispielsweise:

$$e^{[0]_{n\times n}} = \frac{I_n}{0!} + [0]_{n\times n} + \cdots = I_n$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ und beliebige quadratische Matrizen A existiert also auch die Potenzreihe

$$e^{A\,t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, A^k, \tag{2}$$

denn für jedes einzelne $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{A\,t_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_0^k}{k!}\,A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_0\,a_{jk})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{A}^k}{k!} = e^{\widetilde{A}}$$

mit $\widetilde{A} = A\,t_0$. Daher besitzt diese Potenzreihe in t mit Matrixkoeffizienten einen unendlichen Konvergenzradius. Wie für Potenzreihen mit reellen oder komplexen Koeffizienten zeigt man, daß eine Potenzreihe mit vektor- oder matrixwertigen Koeffizienten auf ihrem Definitionsgebiet differenzierbar ist und innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden kann.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,e^{A\,t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}\,t^{k-1}\,A^k \\
&= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k)!}\,t^k\,A^k \\
&= A\,e^{A\,t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ferner weist die Matrixexponentialreihe folgende Eigenschaften auf:

Lemma 3.1.4
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $P \in Gl_n(\mathbb{C})$. Dann gilt für alle $t, s \in \mathbb{R}$.

(i) $e^{A\,t}\,e^{A\,s} = e^{A\,(t+s)}$

(ii) $(e^{A\,t})^{-1} = e^{-A\,t}$

(iii) $P^{-1}\,e^{A\,t}\,P = e^{(P^{-1}\,A\,P)\,t}$

(iv) $(e^{A\,t})^T = e^{A^T\,t}$

Hierbei impliziert (ii) insbesondere, daß jede beliebige Matrix der Form $e^{A\,t}$ invertierbar ist. □

Beweis

(i):

$$\begin{aligned}
e^{A\,t}\,e^{A\,s} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,A^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{s^l}{l!}\,A^l\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k+l=m} \frac{t^k}{k!}\,A^k\,\frac{s^l}{l!}\,A^l \qquad \text{Cauchyproduktsatz} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} A^m\,\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\,t^k\,s^{m-k} \qquad , l = m-k \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t+s)^m}{m!}\,A^m \qquad \text{binomischer Lehrsatz} \\
&= e^{A(t+s)}
\end{aligned}$$

(ii): Nach (i) gilt : $e^{A\,t}\,e^{A\,(-t)} = e^{A\cdot 0} = I_n$. Also ist $e^{A\,t}$ invertierbar, denn es gilt $e^{A\,t}\,e^{-A\,t} = I_n = e^{-A\,t}\,e^{A\,t}$.

(iii):

$$\begin{aligned}
e^{(P^{-1}\,A\,P)\,t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}\,A\,P)^k\,t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P^{-1}\,A\,(P\,P^{-1})\,\cdots\,(P\,P^{-1})\,A\,P\,\frac{t^k}{k!} \\
&= P^{-1}\,e^{A\,t}\,P
\end{aligned}$$

(iv):

$$\begin{aligned}
e^{A^T\,t} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k\,\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)^T\,\frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (A^k\,\frac{t^k}{k!})^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\,\frac{t^k}{k!}\right)^T \\
&= (e^{A\,t})^T
\end{aligned}$$

■

Bemerkung
Aus (i) und (ii) folgt, daß durch die Abbildung $t \longmapsto e^{A\,t}$ ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in die multiplikative Gruppe $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ gegeben ist.

Zusammenfassend noch einmal alle Ergebnisse dieses Paragraphen auf einen Blick:

1) Für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und beliebige Normen $\|\cdot\|$ im $\mathbb{K}^n$ definiert man die zugehörige Operatornorm durch

$$\|A\| = \sup\{\|A\,x\| : x \in \mathbb{K}^n, \|x\| = 1\}.$$

Außerdem stellt $\|A\|$ auch eine Matrixnorm dar, da sie die Ungleichung $\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$ erfüllt.

2) Wählt man in 1) speziell die euklidische Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ über $\mathbb{C}^n$, so erhält man die sogenannte Frobenius-Norm

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}.$$

3) Für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ konvergiert die sogenannte Matrixexponentialreihe

$$e^{A\,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,A^k.$$

Sie ist gliedweise differenzierbar mit $\frac{d}{dt}\,e^{A\,t} = A\,e^{A\,t}$.

4) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ und $t, s \in \mathbb{R}$. Dann gelten für die Matrixexponentialreihe folgende Rechenregeln:

- $e^{A\,t}\,e^{A\,s} = e^{A\,(t+s)}$
- $(e^{A\,t})^{-1} = e^{-A\,t}$
- $P^{-1}\,e^{A\,t}\,P = e^{(P^{-1}\,A\,P)\,t}$
- $(e^{A\,t})^T = e^{A^T\,t}$

3.2 Zeitinvariante lineare Differentialgleichungen

In diesem Paragraphen stehen zunächst zeitinvariante lineare homogene Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \tag{3}$$

mit der Systemmatrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ im Mittelpunkt unserer Betrachtungen. Anders als im dritten Paragraphen des ersten Kapitels sehen wir (3) jedoch nicht als System von n Differentialgleichung erster Ordnung, sondern als Matrixdifferentialgleichung erster Ordnung mit Lösung $\varphi(t) = e^{A\,t}\,x^0$ an. Dabei lernen wir zwei Wege kennen, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) zu bestimmen:
Einerseits gelangt man mit Hilfe der *verallgemeinerten Eigenvektoren* der Matrix A über die sogenannten *verallgemeinerten Eigenschwingungen* zu einem *Fundamentalsystem* von Lösungen. Jede Trajektorie läßt sich dann als Linearkombination dieser verallgemeinerten Eigenschwingungen ausdrücken. Andererseits kann man die Matrix $e^{A\,t}$ über die Kenntnis der Jordan-Normalform von A direkt bestimmen. Dieser Weg führt zu dem Begriff der *Fundamentalmatrix* $\Phi(t)$ eines Systems. Beide Methoden hängen eng miteinander zusammen, denn die Spalten einer Fundamentalmatrix bilden stets ein Fundamentalsystem.
Abschließend wollen wir uns den inhomogenen, zeitinvarianten Differentialgleichungen höherer Ordnung zuwenden. Als Resultat erhalten wir die *Variation der Konstanten* als allgemeine Lösungsmethode für den mehrdimensionalen Fall. Ausgehend von der Lösung $\Phi(t)$ der zugehörigen Matrixdifferentialgleichung kann man sich an der Vorgehensweise bei der Herleitung der entsprechenden Formel für den skalaren Fall orientieren. Es existieren noch weitere geläufige Lösungsansätze wie etwa mit Hilfe der *Laplace-Transformation* oder über die Methode der *Greenschen Funktionen.* Auf diese können wir hier allerdings nicht näher eingehen und müssen auf die entsprechende Fachliteratur verweisen.

Eigenschwingungen und verallgemeinerte Eigenschwingungen

Ziel dieses Abschnitts ist es zunächst, alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung (3) $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zu bestimmen. Aufgrund der Eigenschaften (i) und (ii) aus Lemma 3.1.4 ist durch $\Phi(t) = e^{A\,t}$ gerade der zur Differentialgleichung (3) gehörende Fluß definiert, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 3.2.1
Für alle $x^0 \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\varphi(t) = \varphi(t, x^0) = e^{A\,t}\,x^0$$

die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ *mit* $x(t_0) = x^0$ *auf ganz* $\mathbb{R}$.
□

Beweis
Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ergeben sich unmittelbar aus Korollar 2.3.7. Nach Paragraph 1 ist $\varphi(\cdot)$ nach t differenzierbar und es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\,e^{A\,t}\,x^0 = A\,e^{A\,t}\,x^0 = A\,\varphi(t).$$

Ferner gilt: $\varphi(0) = e^{A\,0}\,x^0 = x^0$. ■

Als kleine Anwendung beweisen wir folgendes Additionstheorem:

Lemma 3.2.2
Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *vertauschbar, d.h.* $A\,B = B\,A$, *so folgt:*

$$e^{A\,t}\,e^{B\,t} = e^{(A+B)\,t}$$

□

Beweis
Es gilt

$$(*) \quad e^{A\,t}\,B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,A^k\,B = B\,e^{A\,t},$$

da $A^k\,B = B\,A^k\,\forall\,k \in \mathbb{N}$. Für jeden Anfangswert $x^0 \in \mathbb{C}^n$ ist $\varphi(t) = e^{(A+B)\,t}\,x^0$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = (A+B)\,x(t)$ mit $x(0) = x^0$. Andererseits gilt die Produktregel auch für matrixwertige Funktionen, so daß

$$\frac{d}{dt}\,(e^{A\,t}\,e^{B\,t}) = (A\,e^{A\,t}\,e^{B\,t} + B\,e^{A\,t}\,e^{B\,t})\,x^0 \overset{(*)}{=} (A+B)\,e^{A\,t}\,e^{B\,t}.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems gilt

$$e^{(A+B)\,t} = e^{A\,t}\,e^{B\,t}.$$

■

Beachte: Im allgemeinen gilt $e^{(A+B)\,t} = e^{A\,t}\,e^{B\,t}$ nicht. Wähle zum Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also gilt $A\,B \neq B\,A$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
e^A\,e^B &= \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}[0]_{2\times 2}\right)\\
&= \begin{bmatrix}e & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}e & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\\
e^{A+B} &= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e & 0\\e-1 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Abgesehen von trivialen Fällen läßt sich $e^{A\,t}$ nur sehr umständlich per Definition bestimmen. Es stellt sich also die Frage, wie sich die in Lemma 3.2.1 postulierten Lösungen $e^{A\,t}\,x^0$ konkret angeben lassen. Analog zu den bisherigen Ergebnissen in Kapitel 1, Paragraph 3, können wir uns die Linearität des Lösungsraumes $\mathcal{L}_0$ der homogenen Differentialgleichung (3) zu Nutze machen.

Lemma 3.2.3
Bezeichne $\varphi(\cdot\,;t_0,x^0)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$, die zum Zeitpunkt t_0 den Zustand x^0 annimmt. Zu einer beliebigen Familie von Vektoren $\{x^1,\cdots,x^k\} \subset \mathbb{K}^n$ und beliebigem $t_0 \in \mathbb{R}$ seien die Funktionen $\varphi_i(\cdot) \in \mathcal{L}_0$ für alle $i = 1\ldots k$ definiert durch $\varphi_i(\cdot) := \varphi(\cdot\,;t_0,x^i)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\{x^1,\cdots,x^k\}$ ist eine Basis des $\mathbb{K}^n$.

b) $\{\varphi_1(\cdot),\cdots,\varphi_n(\cdot)\}$ ist eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_0$.

□

Beweis
Man betrachte den Vektorraum-Isomorphismus

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{K}^m) &\longrightarrow \mathbb{K}^m,\\
\varphi(\cdot) &\longmapsto \varphi(t_0).
\end{aligned}$$

Die Abbildung ist linear und ihr Kern besteht wegen des Eindeutigkeitssatzes nur aus der Nullfunktion (Injektivität). Außerdem gibt es zu jedem $x^0 \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung mit $\varphi(t_0) = x^0$, nämlich $\varphi(\cdot\,;t_0,x^0)$ (Surjektivität). Des weiteren bilden Isomorphismen Basen auf Basen ab. ■

Unser Problem beschränkt sich daher auf die Aufgabe, zu einer gegebenen Matrix A eine geeignete Basis $\{x^1, \cdots, x^n\}$ des $\mathbb{K}^n$ zu finden, deren zugeordnete Lösungsfunktion $\varphi_k(\cdot\,; t_0, x^k) = e^{A\,t}\, x^k$ sich besonders leicht berechnen lassen. Denn die Lösung $e^{A\,t}\, x^0$ eines beliebigen Anfangswertproblems der Differentialgleichung (3) läßt sich dann mit Hilfe von $x^0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, x^i$ bequem durch $e^{A\,t}\, x^0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i (e^A\, x^i)$ ausdrücken. Sei dazu $\lambda \in \sigma(A)$ ein Eigenwert [(3)] von A und v ein zugehöriger Eigenvektor [(4)], d.h. $A\,v = \lambda\, v$ mit $v \neq 0$. Startet man in einem beliebigen Anfangswert x^0 speziell in v, erhält man wegen $A^k\, v = \lambda\, A^{k-1}\, v = \cdots = \lambda^k\, v$:

$$e^{A\,t}\, v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, \lambda^k\, v = e^{\lambda\,t}\, v$$

Definition 3.2.4 (Eigenschwingung)
Diejenigen Lösungen der Differentialgleichung (3), deren Anfangswerte aus einem Eigenraum von A stammen, heißen (komplexe) Eigenschwingungen [(5)] des Systems $\dot{x}(t) = A\,x(t)$. □

Beachte: Ist v ein Eigenvektor zu A, so gilt $e^{A\,t}\, v = (e^{\lambda\,t})\, v \subset \mathbb{C}\, v$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so daß die Trajektorie einer Eigenschwingung im Fall eines reellen Eigenwertes entlang einer Geraden verläuft.

Sei nun z ein verallgemeinerter Eigenvektor von A zum Eigenwert λ von der Ordnung $m \geq 1$, d.h.

$$\begin{aligned} (A - \lambda\, I)^k\, z \neq 0 \quad &\text{für } k < m, \text{ aber} \\ (A - \lambda\, I)^k\, z = 0 \quad &\text{für } k \geq m. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} e^{(A-\lambda\,I)\,t}\, z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, (A - \lambda\, I)^k\, z \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}\, (A - \lambda\, I)^k\, z \\ &= z + (A - \lambda\, I)\, z + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\, (A - \lambda\, I)^{m-1}\, z \end{aligned}$$

(3) eigenvalue
(4) eigenvector
(5) eigenmodes

Damit erhält man mit Lemma 3.2.2

$$\begin{aligned} e^{A\,t}\,z &= e^{\lambda\,I_n\,t}\,e^{(A-\lambda\,I_n)\,t}\,z \\ &= e^{\lambda\,t}\,I_n\,\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\,(A-\lambda\,I_n)^k\,z \\ &= e^{\lambda\,t}\,\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\,(A-\lambda\,I_n)^k\,z \qquad (4) \end{aligned}$$

Definition 3.2.5 (Verallgemeinerte Eigenschwingung)
Diejenigen Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$, deren Anfangswerte aus einem verallgemeinerten Eigenraum von A stammen, heißen verallgemeinerte (komplexe) Eigenschwingungen[6] *des Systems.* □

Beachte: Ist z ein verallgemeinerter Eigenvektor von A, so verbleibt die Trajektorie $\varphi(t) = e^{A\,t}\,z$ nach (4) in dem von den Vektoren $\{z, (A-\lambda\,I)\,z, \cdots, (A-\lambda\,I)^{m-1}\,z\}$ aufgespannten linearen Unterraum, d.h. der linearen Hülle $\operatorname{span}\{z, A\,z, \cdots, A^{m-1}\,z\}$.

Damit sind wir in der Lage, alle Lösungen der Differentialgleichung (3) anzugeben.

Satz 3.2.6
Jede Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ läßt sich als Linearkombination verallgemeinerter Eigenschwingungen darstellen. □

Beweis
Sei $\varphi(\cdot)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = A\,x$ mit $x(t_0) = x^0$. Es existiert eine Basis $\{z^1, \cdots, z^n\}$ des $\mathbb{C}^n$, bestehend aus verallgemeinerten Eigenvektoren von A (zum Beispiel die Jordanbasis). Sei $x^0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i\,z^i$, dann ist $\varphi(t) = e^{A\,t}\,x^0 = e^{A\,t}\sum_{i=1}^n \alpha_i\,z^i = \sum_{i=1}^n \alpha_i\,e^{A\,t}\,z^i$ eine Linearkombination der verallgemeinerten Eigenschwingungen $\varphi_i(t) = e^{A\,t}\,z^i$. ■

Bemerkung
Falls die Systemmatrix A ausschließlich reelle Einträge besitzt, ist es möglich, alle komplexen Eigenschwingungen zum Eigenwert-Paar $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ durch reelle Eigenschwingungen zu ersetzen. Denn sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\lambda = \alpha + i\,\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ und z ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt:

$$A\,\overline{z} = \overline{A\,z} = \overline{\lambda\,z} = \overline{\lambda}\,\overline{z},$$

[6] generalised eigenmodes

d.h. $\overline{z}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. Damit folgt wegen

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \mathsf{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

bei Start im Realteil von z:

$$\begin{aligned} e^{At}\,\mathsf{Re}(z) &= \frac{1}{2}(e^{At}\,z + e^{At}\,\overline{z}) = \frac{1}{2}(e^{\lambda t}\,z + e^{\overline{\lambda} t}\,\overline{z}) = \mathsf{Re}(e^{\lambda t}\,z) \\ &= e^{\alpha t}[\mathsf{Re}(z)\,\cos(\omega t) - \mathsf{Im}(z)\,\sin(\omega t)] \end{aligned}$$

Analog erhält man bei Wahl von $\mathsf{Im}(z)$ als Anfangswert

$$e^{At}\,\mathsf{Im}(z) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda t}\,z + e^{\overline{\lambda} t}\,\overline{z}) = \mathsf{Im}(e^{\lambda t}\,z) = e^{\alpha t}\,[\mathsf{Re}(z)\,sin(\omega t) + \mathsf{Im}(z)\,cos(\omega t)]$$

Beispiel:
Gesucht ist die Lösung des folgenden Systems aus zwei Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \lambda\,x_1(t) + x_2(t) \quad \text{mit} \quad x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda\,x_2(t) \qquad\qquad\;\; \text{mit} \quad x_2(0) = 1 \end{aligned}$$

durch Überlagerung von verallgemeinerten Eigenschwingungen. Man forme dazu das Differentialgleichungssystem wie gewohnt in Matrixschreibweise um:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} x(t) \quad \text{und} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ besitzt den Eigenwert λ. Da A bereits in Jordan-Normalform vorliegt und lediglich aus einem λ-Block zweiter Ordnung besteht, wissen wir bereits, daß der Eigenraum eindimensional ist. Ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist $z^1 = \binom{1}{0}$. Ein verallgemeinerter Eigenvektor zweiter Stufe ergibt sich mit dem Ansatz der nilzyklischen Eigenräume aus $(\lambda\,I_n - A)\,z^2 = z^1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich $z^2 = \binom{0}{-1}$. Damit erhält man die im Eigenraum $\mathbb{R}\,z^1$ startende Eigenschwingung

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}\,z^1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die in einem verallgemeinerten Eigenvektor zweiter Stufe startende verallgemeinerte Eigenschwingung

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{1} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k z^2 = e^{\lambda t} (z^2 - t\, z^1) = \begin{pmatrix} -t\, e^{\lambda t} \\ -e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Jede Lösung von $\dot{x} = A\, x$ läßt sich gemäß Satz 3.2.6 als Linearkombination $\varphi(t) = \alpha\, \varphi_1(t) + \beta\, \varphi_2(t)$ schreiben. Um das Anfangswertproblem $\varphi(0) = \binom{1}{1}$ zu lösen, müssen die Koeffizienten α, β bestimmt werden. Es gilt $\varphi_1(0) = \binom{1}{0}$,$\varphi_2(0) = \binom{0}{-1}$ und $\varphi_1(0) - \varphi_2(0) = \binom{1}{1} = \varphi(0)$, so daß $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \binom{e^{\lambda t} + t\, e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}}$ Lösung des Anfangswertproblems ist. □

Berechnung von $\mathbf{e^{A\,t}}$

Mit Hilfe der Jordan-Normalform von A ist es möglich, $e^{A\,t}$ direkt anzugeben. Da jede Matrix A ähnlich zu ihrer Jordan-Normalform $J \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist, reicht es, $e^{J\,t}$ zu betrachten. Denn zu A existiert eine reguläre Matrix P mit $A = P^{-1}\, J\, P$, so daß aufgrund der Rechenregeln aus Paragraph 1 $e^{A\,t} = e^{P^{-1}\, J\, P} = P\, e^{J\,t}\, P^{-1}$ gilt. Sei dazu

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda\, I_m + N_m$$

mit

$$N_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

der zum Eigenwert λ_i gehörende λ-Block m-ter Ordnung.

(i) <u>Berechnung von $e^{\lambda\, I_m\, t}$:</u>

$$e^{\lambda\, I_m\, t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, I_m\, t)^k}{k!} = I_m\, e^{\lambda t} = \mathrm{diag}(e^{\lambda t} \cdots, e^{\lambda t})$$

(ii) <u>Berechnung von $e^{N_m\, t}$:</u>
N_m ist nilpotent mit Nilpotenzordnung m. d.h. $(N_m)^m = 0$. Es folgt:

$$e^{N_m\, t} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} N_m^k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) Berechnung von $e^{J_i\,t}$:

$$e^{J_i\,t} = e^{\lambda\, I_m\,t}\, e^{N_m\,t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda\,t} & \frac{t}{1!}\, e^{\lambda\,t} & \frac{t^2}{2!}\, e^{\lambda\,t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\, e^{\lambda\,t} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda\,t} \end{bmatrix}$$

(iv) Berechnung von $e^{J\,t}$:
Wegen $e^{\mathrm{diag}(A_1,A_2)} = \mathrm{diag}(e^{A_1}, e^{A_2})$ für beliebige Blockmatrizen $A_1 \in \mathbb{K}^{m_1\times m_1}$, $A_2 \in \mathbb{K}^{m_2\times m_2}$ und wegen $J^k = \mathrm{diag}(J_1^k, \cdots, J_r^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt:

$$e^{J\,t} = \mathrm{diag}(e^{J_1\,t}, \cdots, e^{J_r\,t})$$

Beispiel:
Wir wollen beide Methoden am folgenden Beispiel vorstellen. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) \qquad \text{und} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Form von A ist $\chi_A = (s-2)^3$. Daher erzeugt der Eigenwert 2 einen verallgemeinerten Eigenraum der Dimension 3.
a) Bestimmung der Lösung mithilfe der Jordan-Normalform:

(i) Bestimmung der Dimension des Eigenraumes und der zugehörigen Eigenvektoren. Dieser ist durch den Kern von $(A - 2\,I_3)$ gegeben.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Also ist der Eigenraum eindimensional mit dem Eigenvektor

$$z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmung der verallgemeinerten Eigenvektoren zweiter Stufe: Für die Bestimmung einer Jordanbasis reicht die allgemeine Kennzeichnung $(A - 2\,I_3)^2\, z^2 = 0$ eines verallgemeinerten Eigenvektoren zweiter Stufe nicht aus, vielmehr müssen die verallgemeinerten Eigenvektoren *eines* Eigenwertes eine Kette der Form $(A - 2\,I_3)\,z^2 = z^1$ bilden. Wegen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ergibt sich $z^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Bestimmung der verallgemeinerten Eigenvektoren dritter Stufe: Analog zu (ii) erhält man mit $(A - 2\,I_3)\,z^3 = z^2$ den verallgemeinerten Eigenvektor $z^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Durch die verallgemeinerten Eigenvektoren ist eine Jordanbasis von A gegeben. Sie lautet:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Da nun die Dimension der verallgemeinerten Eigenräume bekannt ist, läßt sich die Jordan-Normalform von A sofort angeben.

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dabei gilt $A = P^{-1}\,J\,P$, wobei in den Spalten der Basiswechselmatrix P gerade die Basisvektoren der Jordanbasis stehen, also z^1, z^2, z^3. Es gilt:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned} e^{A\,t} &= e^{(P^{-1}\,J\,P)\,t} = P^{-1}\,e^{J\,t}\,P \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\,t} & t\,e^{2\,t} & \frac{t^2}{2!}\,e^{2\,t} \\ 0 & e^{2\,t} & t\,e^{2\,t} \\ 0 & 0 & e^{2\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2\,t} \begin{bmatrix} 1 & t & 3\,t - \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da die Spalten von $e^{A\,t}$ eine Basis des $\mathcal{L}_0$ bilden, lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$\varphi(t) = e^{2\,t}\left(\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}3\,t-\dfrac{t^2}{2}\\-t\\1\end{pmatrix}\right)$$

(v) Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich nun mit der Anfangsbedingung

$$\varphi(0) = \left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\alpha_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha_3\end{pmatrix}\right)$$

Also:

$$\varphi(t) = e^{2\,t}\begin{pmatrix}1+5\,t-\dfrac{t^2}{2}\\2-t\\1\end{pmatrix}$$

b) Bestimmung der Lösung über die verallgemeinerten Eigenschwingungen:

Natürlich ist es auch möglich, die Lösung wie bisher durch Überlagerung verallgemeinerter Eigenschwingungen herzuleiten. Die Nilpotenzordnung des Endomorphismus $(A - 2\,I_3)$ ist 3, denn es gilt:

$$(A-2\,I_3)^2 = \begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

und $(A - 2\,I_3)^3 = [0]_{3\times 3}$. Da die Dimension des verallgemeinerten Eigenraums mindestens so groß ist wie die Nilpotenzordnung ist, muß der verallgemeinerte Eigenraum bereits der $\mathbb{R}^3$ sein. Also sind der Eigenraum und die verallgemeinerten Eigenräume zweiter und dritter Stufe jeweils eindimensional.

(i) Bestimmung eines Eigenvektors z^1:

$$\operatorname{Ker}\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad z^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

(ii) Bestimmung eines verallgemeinerten Eigenvektors zweiter Stufe z^2:

$$\operatorname{Ker}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad z^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(iii) Bestimmung eines verallgemeinerten Eigenvektors dritter Stufe z^3:

$$\mathrm{Ker}[0]_{3\times 3} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Man beachte, daß wir zwar eine Basis aus verallgemeinerten Eigenvektoren des $\mathbb{R}^3$ gefunden haben, diese jedoch keine Jordanbasis zu A ist.

(iv) Bestimmung der verallgemeinerten Eigenschwingung:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= e^{2\,t}\, z^1 = \begin{pmatrix}e^{2\,t}\\0\\0\end{pmatrix}\\
\varphi_2(t) &= e^{2\,t}\sum_{k=0}^{1}\frac{t^k}{k!}\,(A - 2\,I_3)^k\, z^2 = \begin{pmatrix}t\,e^{2\,t}\\e^{2\,t}\\0\end{pmatrix}\\
\varphi_3(t) &= e^{2\,t}\sum_{k=0}^{2}\frac{t^k}{k!}\,(A - 2\,I_3)^k\, z^3 = \begin{pmatrix}e^{2\,t}\,(3\,t - 1/2\,t^2)\\-t\,e^{2\,t}\\e^{2\,t}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(v) Lösung des Anfangswertproblems:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + 2\,\varphi_2(t) + \varphi_3(t) = e^{2\,t}\begin{pmatrix}1 + 5\,t - 1/2\,t^2\\2 - t\\1\end{pmatrix}$$

□

Fundamentalsysteme und Fundamentalmatrizen

Nach Satz 3.2.6 wissen wir, daß zur Differentialgleichung (3) eine Basis des Funktionenraums $\mathcal{L}_0$ existiert. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 3.2.7 (Fundamentalsystem und -matrix)
Bilden die Funktionen $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_0$ der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$, so nennt man $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ ein Fundamentalsystem [7] von Lösungen von $\dot{x}(t) = A\,x(t)$. Eine aus einem Fundamentalsystem gebildete Matrix $\Phi(t) = [\varphi_1 \cdots \varphi_n]$ heißt Fundamentalmatrix [8] zu (3). □

[7] fundamental system
[8] fundamental matrix

Bemerkung
$\Psi(t) = e^{A\,t}$ ist eine Fundamentalmatrix zu (3), denn ihre Spalten $\varphi_i(t) = e^{A\,t}e^i$ mit e^i als i-tem Standardbasisvektor bilden wegen $\varphi_i(0) = e^i$ gemäß Lemma 3.2.3 ein Fundamentalsystem von Lösungen. Ein beliebiges Fundamentalsystem zur Differentialgleichung (3) erhält man auf zwei Arten: Durch Berechnung von $e^{A\,t}$ oder durch Berechnung einer Basis $z^1, \cdots, z^n$ aus verallgemeinerten Eigenvektoren von A. Im zweiten Fall bilden die zugehörigen verallgemeinerten Eigenschwingungen ein Fundamentalsystem.

Alle Fundamentalmatrizen weisen die folgende Eigenschaft auf:

Lemma 3.2.8

(i) *Eine Matrixfunktion* $t \longmapsto \Phi(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ist Fundamentalmatrix der Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ *genau dann, wenn*

$$\dot{\Phi}(t) = A\,\Phi(t) \quad \textit{und} \quad \det(\Phi(0)) \neq 0$$

gilt.

(ii) *Seien* $\Phi(t),\ \Psi(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *Fundamentalmatrizen zu (3). Dann gibt es genau eine reguläre konstante Matrix* $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mit*

$$\Psi(t) = \Phi(t)\,C$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) *Ist* $\Phi(t)$ *eine Fundamentalmatrix zu* $\dot{x}(t) = A\,x(t)$, *so gilt*

$$e^{A\,t} = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0).$$

□

Beweis

(i): $(\Rightarrow)$: Sei $\Phi(t)$ Fundamentalmatrix. Dann

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \dot{\varphi}_i(t) = A\,\varphi_i(t) \text{ für die Spalten } \varphi_i \\ &\Rightarrow \quad \dot{\Phi}(t) = [A\,\varphi_1(t)\ \cdots\ A\,\varphi_n(t)] = A\,\Phi(t) \end{aligned}$$

Außerdem ist $\det\Phi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, da die Spalten einer Fundamentalmatrix eine Basis des Lösungsraumes bilden und als solche linear unabhängig sind.
$(\Leftarrow)$: Wegen $\dot{\Phi}(t) = A\,\Phi(t)$ sind alle Spalten der Fundamentalmatrix Lösungen und aus der linearen Unabhängigkeit der Spalten zum Zeitpunkt $t = 0$ folgt nach Korollar 1.3.8 die lineare Unabhängigkeit der $\varphi_i(\cdot)$.

(ii): Es gilt $\Psi(t)$, $\Phi(t) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ für alle $t \in \mathbb{R}$, da $\det(\Phi(t)) \neq 0$. Die Gruppe $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ ist abgeschlossen gegenüber der Multiplikation, so daß $\Phi^{-1}\,\Psi(t) = C(t)$ folgt. $C(t)$ ist jedoch konstant, denn durch Differentiation ergibt sich aus $\Psi(t) = \Phi(t)\,C(t)$

$$\begin{array}{rll} & \dot\Psi(t) & = \dot\Phi(t)\,C(t) + \Phi(t)\,\dot C(t) \\ \Leftrightarrow & A\,\Phi(t)\,C(t) & = A\,\Phi(t)\,C(t) + \Phi(t)\,\dot C(t) \\ \Leftrightarrow & \Phi(t)\,\dot C(t) & = 0 \end{array}$$

Da $\det(\Phi(t)) \neq 0$, ist $\Phi(t) \neq 0$, also muß $\dot C(t) = 0$ sein. Damit ist $C(t)$ konstant.

(iii): $e^{A\,t}$ und $\Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$ sind beides Lösungen der Differentialgleichung (3). denn es gilt

$$\frac{d}{dt}\,\Phi(t)\,\Phi^{-1}(0) = \left(\frac{d}{dt}\,\Phi(t)\right)\,\Phi^{-1}(0) = A\,\Phi(t)\,\Phi^{-1}(0)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ stimmen beide Lösungen überein, so daß die Behauptung aus dem Eindeutigkeitssatz folgt (spaltenweise angewandt).

■

Bemerkung
Wegen $\frac{d}{dt}\,\Phi(t) = A\,\Phi(t)$ ist die Fundamentalmatrix Φ die Lösung der Matrixdifferentialgleichung $\dot X(t) = A\,X(t)$.

Zeitinvariante lineare inhomogene Differentialgleichungen

Im vorigen Abschnitt wurde die Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ als Lösung der Matrixdifferentialgleichung $\dot X(t) = A\,X(t)$ eingeführt. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, eine Lösungsformel für inhomogene lineare Differentialgleichung herzuleiten. Dabei orientieren wir uns an der Vorgehensweise der Methode der Variation der Konstanten im skalaren Fall aus Kapitel 1.
Es sei also das Anfangswertproblem

$$\dot x(t) = A\,x(t) + b$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ gegeben, wobei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{K}^n$ und $\Phi(t)$ eine zugehörige Fundamentalmatrix des homogenen Systems mit den Spalten $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ist. Wie im skalaren Fall versuchen wir die Lösung als zeitvariante Linearkombination

$$\varphi(t) = u_1(t)\,\varphi_1(t) + \cdots + u_n(t)\,\varphi_n(t)$$

darzustellen. Faßt man die Funktionen $u_i(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ zu dem Vektor

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

zusammen, so kann man die Lösung

$$(*) \quad \varphi(t) = \Phi(t)\, u(t)$$

als Produkt der Lösungen der homogenen Differentialgleichung mit einer noch zu bestimmenden stetig differenzierbaren Funktion $u(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ auffassen und es folgt:

$$\begin{array}{rrcl} & \dot{\varphi}(t) & = & \dot{\Phi}(t)\, u(t) + \Phi(t)\, \dot{u}(t) \\ & & = & A\, \varphi(t) + b \\ \overset{(*)}{\Leftrightarrow} & A\, \Phi(t)\, u(t) + \Phi(t)\, \dot{u}(t) & = & A\, \Phi(t)\, u(t) + b \\ \Leftrightarrow & \Phi(t)\, \dot{u}(t) & = & b \\ \Leftrightarrow & \dot{u}(t) & = & \Phi(t)^{-1}\, b \\ \Leftrightarrow & u(t) & = & \displaystyle\int \Phi(t)^{-1}\, b\, dt + k \quad k \in \mathbb{K} \end{array}$$

man erhält somit die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung durch

$$\varphi(t) = \Phi(t)\, (\int \Phi(t)^{-1}\, b\, dt + k),$$

wobei $k \in \mathbb{K}$ eine Integrationskonstante ist. Durch Integration und anschließende Multiplikation mit $\Phi(t)$ erhält man aus $\dot{u}(t) = \Phi(t)^{-1}\, b$ und $u(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}\, \varphi(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}\, x^0$ gerade

$$\varphi(t) = \Phi(t)\, \Phi(t_0)^{-1}\, x^0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\, b\, ds.$$

Insbesondere gilt bei Wahl von $\Phi(t) = e^{A\,t}$:

$$\varphi(t) = e^{A\,(t-t_0)}\, x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A\,(t-s)}\, b\, ds.$$

Damit haben wir die als Variation der Konstanten bezeichnete Lösungsformel für zeitinvariante inhomogenen Differentialgleichungen hergeleitet:

Satz 3.2.9 (Variation der Konstanten)
Für beliebige Anfangsbedingungen $(t_0, x^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ lautet die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = A\, x(t) + b$

$$\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x^0) = e^{A\,(t-t_0)}\, x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A\,(t-s)}\, b\, ds$$

für $t \in \mathbb{R}$. □

Beweis
Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 3.2.8. ∎

Bemerkung
Seien ψ_1 und ψ_2 Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t) + b$, so ist $\varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$ Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Damit erhält man die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung durch Addition einer partikulären Lösung zur allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$.

Die besondere Form der Funktion $\varphi(t)$ legt nahe, die Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung als Überlagerung zweier einzelner Schwingungen zu betrachten. Man unterscheidet zwischen der freien Bewegung [9] $e^{A\,(t-t_0)}\,x^0$ und der erzwungenen Bewegung [10] aus der Ruhelage $\int_{t_0}^{t} e^{A\,(t-s)}\,b\,ds$. Dabei beschreibt die freie Bewegung das Verhalten des ungestörten homogenen Systems, die erzwungene Bewegung dagegen eine äußere Einwirkung auf das sich im Gleichgewichtszustand befindliche homogene System.

Beispiel:
Sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x(0) = \binom{1}{1}$ und $t \geq 0$ gegeben. Mit $A^2 = -I_2$ folgt

$$\begin{aligned}
e^{A\,t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,A^k \\
&= I + A\,t - \frac{t^2}{2!}\,I - \frac{t^3}{3!}\,A + \frac{t^4}{4!}\,I + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k\,\frac{t^{2\,k}}{(2\,k)!}\,I + (-1)^k\,\frac{t^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!}\,A \right] \\
&= I \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,\frac{t^{2\,k}}{(2\,k)!} + A \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,\frac{t^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!} \\
&= I\,\cos(t) + A\,\sin(t) \\
&= \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

---
[9] free motion
[10] forced motion

Damit ist eine Fundamentalmatrix gegeben, d.h. die Spalten $\binom{\cos t}{-\sin t}$ und $\binom{\sin t}{\cos t}$ bilden ein Fundamentalsystem zu A. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet demnach:

$$\begin{aligned}
\varphi(t, t_0, x^0) &= \varphi(t, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \\
&= \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(t-s) \\ \cos(t-s) \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \sin(t) + 1 \\ \cos(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung

Alle Resultate dieses Paragraphens gelten auch für Differentialgleichungen der Form $\dot{x}(t) = A\,x(t) + b(t)$. Man ersetzt einfach den Vektor $b \in \mathbb{K}^n$ in allen Betrachtungen durch die stetige Funktion $b(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$. Gleichungen dieser Form nennt man auch *Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*, da die Einträge der Systemmatrix und damit auch die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung $y^{(n)}(t) + a_{(n-1)}\,y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0\,y(t) = b(t)$ konstant sind.

Beispiel: Schwingung eines Doppelpendels

Man betrachte ein gemäß Abbildung 2 aus den Massen m_1 und m_2 bestehendes Federpendel, bei dem die Gewichte an zwei linearen, masselosen Federn mit den Federkonstanten k_1 beziehungsweise k_2 befestigt sind. Nach Vernachlässigung der Reibung lassen sich die Auslenkungen $z_1(t)$ beziehungsweise $z_2(t)$ der beiden Massen von ihren Gleichgewichtslagen zum Zeitpunkt t durch die folgenden Gleichungen beschreiben:

$$(*) \qquad \begin{cases} m_1 \ddot{z}_1(t) = -k_1 z_1(t) - k_2 z_1(t) + k_2 z_2(t) \\ m_2 \ddot{z}_2(t) = k_2 z_1(t) - k_2 z_2(t) \end{cases}$$

1. Bestimme ein zu $(*)$ äquivalentes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

2. Bestimme die komplexen und reellen Eigenschwingungen des Systems für die Werte $k_1 = k_2 = 1$ und $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

3. Bestimme die Lösung zum Anfangswert

$$z_1(0) = 1, \quad \dot{z}_1(0) = 0, \quad z_2(0) = -1, \quad \dot{z}_2 = 0.$$

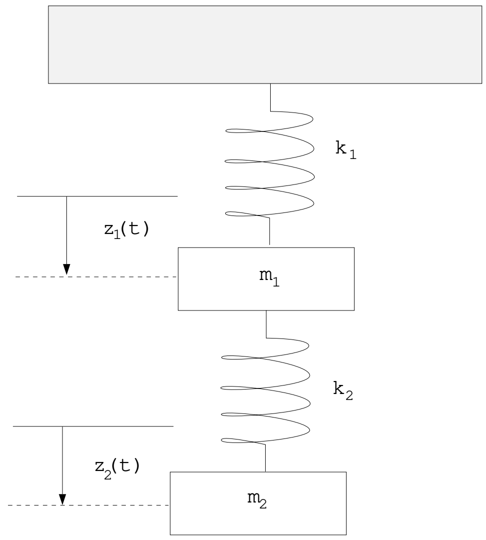


Abbildung 2: Modell eines Doppelfederpendels

4. Man zeichne die Graphen von $z_1(\cdot)$, $z_2(\cdot)$ für die in (3) bestimmte Lösung. Was passiert, wenn m_2 beziehungsweise m_1 verzehnfacht wird?

(1) Man definiere den Zustand $x(t)$ des Systems $(*)$ folgendermaßen:

$$x_1(t) := z_1(t), \quad x_2(t) := z_2(t), \quad x_3(t) := \dot{z}_1(t), \quad x_4(t) := \dot{z}_2(t).$$

Nach unseren Ergebnissen aus Kapitel 2 kann ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung in eine vektorwertige Differentialgleichung erster Ordnung mit vier Zustandskomponenten umgeformt werden. Dies ergibt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{-k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

oder, in Kurzform

$$\dot{x} = A\,x.$$

(2) Mit obigen Festlegungen erhält man die neue Systemmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -12 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist gerade $\det(sI - A) = s^4 + \frac{5}{2}s^2 + \frac{1}{2}$, dessen Wurzeln die vier komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-5 + 17^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}\left(-5 + 17^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(-5 - 17^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \lambda_4 = -\tfrac{1}{2}\left(-5 - 17^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

sind. Da das durch A gegebene System vier komplexe Eigenwerte der Vielfachheit 1 aufweist, besitzt es vier komplexe Eigenvektoren

$$y_n(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \lambda_n^2 \\ \lambda_n \\ \lambda_n(2 + \lambda_n^2) \end{pmatrix},$$

so daß sich vier komplexe Eigenschwingungen der Form

$$\psi_n(t) = e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \lambda_n^2 \\ \lambda_n \\ \lambda_n(2 + \lambda_n^2) \end{pmatrix}$$

für $n = 1, \ldots, 4$ ergeben. Wenn wir die konjugiert komplexen Eigenwertpaare $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ und $\lambda_3 = \overline{\lambda_4}$ beachten, lassen sich unsere Ergebnisse mit $w_1 := i\lambda_1 = -i\lambda_2$ und $w_2 := i\lambda_3 = -i\lambda_4$ in vier reelle Eigenschwingungen zusammenfassen:

$$\varphi_1(t) = \mathsf{Re}(\varphi_1(t)) = 1/2\,(\psi_1(t) + \psi_2(t)) = \begin{pmatrix} \cos w_1 t \\ (2 - w_1^2)\cos w_1 t \\ -w_1 \sin w_1 t \\ -w_1(2 - w_1^2)\sin w_1 t \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = \mathsf{Im}(\varphi_1(t)) = i/2\,(\psi_1(t) - \psi_2(t)) = \begin{pmatrix} \sin w_1 t \\ (2 - w_1^2)\sin w_1 t \\ w_1 \cos w_1 t \\ w_1(2 - w_1^2)\cos w_1 t \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(t) = \mathsf{Re}(\varphi_3(t)) = 1/2\,(\psi_3(t) + \psi_4(t)) = \begin{pmatrix} \cos w_2 t \\ (2 - w_2^2)\cos w_2 t \\ -w_2 \sin w_2 t \\ -w_2(2 - w_2^2)\sin w_2 t \end{pmatrix}$$

$$\varphi_4(t) = \mathsf{Im}(\varphi_1(t)) = i/2\,(\psi_3(t) - \psi_4(t)) = \begin{pmatrix} \sin w_2 t \\ (2 - w_2^2)\sin w_2 t \\ w_2 \cos w_2 t \\ w_2(2 - w_2^2)\cos w_2 t \end{pmatrix}$$

(3) Gesucht ist die Lösung, die speziell die Anfangsbedingungen

$$z_1(0) = 1, \quad \dot{z}_1(0) = 0, \quad z_2(0) = -1, \quad \dot{z}_2 = 0.$$

erfüllt. Dies ist äquivalent zur Vektorschreibweise $x^0 = (1, -1, 0, 0)^T$. Aus (2) wissen wir, daß sich jede Lösung von $(*)$ als Linearkombination der Form

$$x(t) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4$$

schreiben läßt. Aus

$$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ (2-w_1^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1 \\ w_1(2-w_1^2) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ (2-w_2^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \\ w_2(2-w_4^2) \end{pmatrix}$$

bestimmt man $c_2 = c_4 = 0,\ c_1 + c_3 = 1,\ (2-w_1^2)c_1 + (2-w_2^2)c_3 = -1$, so daß

$$x(t) = \frac{w_1^2-3}{w_1^2-w_2^2}\varphi_1(t) + \frac{w_2^2-3}{w_1^2-w_2^2}\varphi_3(t).$$

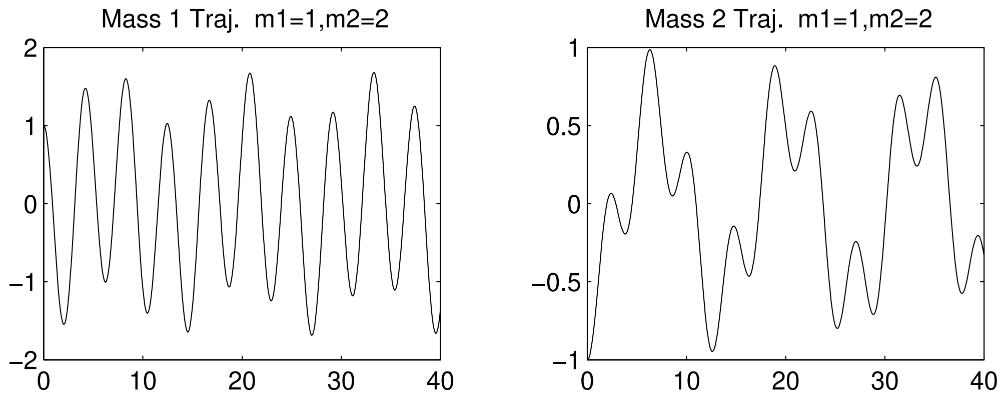


Abbildung 3: Phasenportraits zum Federpendel mit der angegebenen Massenverteilung.

□

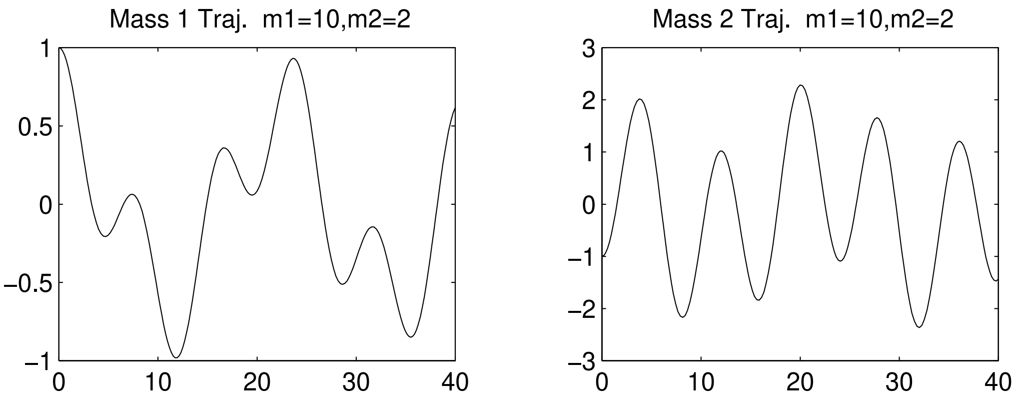


Abbildung 4: Phasenportraits zum Federpendel mit der angegebenen Massenverteilung

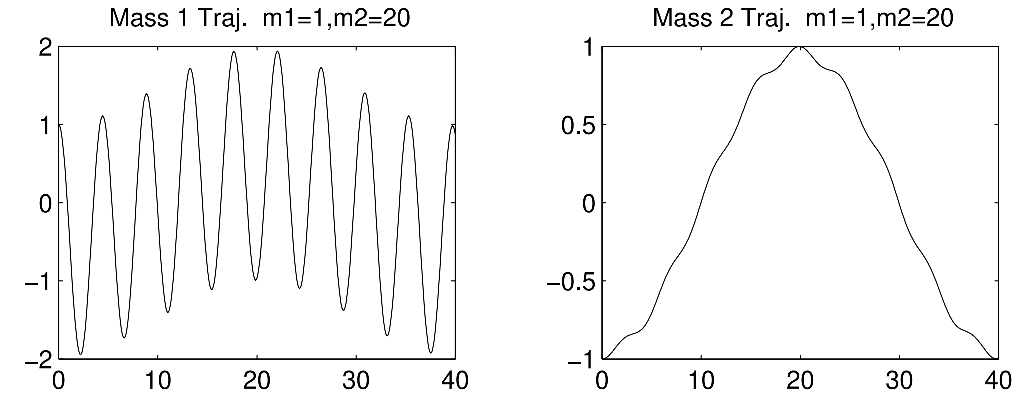


Abbildung 5: Phasenportraits zum Federpendel mit der angegebenen Massenverteilung

3.3 Differentialgleichungen und Stabilität

Die Ergebnisse des vorangegangenen Paragraphen versetzen uns in die Lage, die Lösungen beliebiger zeitinvarianter linearer Differentialgleichungen zu berechnen. Zum besseren Verständnis der Eigenschaft des durch die Differentialgleichung beschriebenen Systems benötigt man jedoch noch den Begriff der *Stabilität eines Gleichgewichtspunktes* $\overline{x}$. Dieser Stabilitätsbegriff beschreibt grob gesprochen die Empfindlichkeit einer Gleichgewichtslage gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangslage, d.h. das Verhalten von Lösungstrajektorien, die nicht im Gleichgewichtszustand selbst, sondern in einer Umgebung von $\overline{x}$ starten. Im Folgenden wollen wir einige in diesem Zusammenhang grundlegende

Begriffe am Beispiel linearer homogener zeitinvarianter Differentialgleichungen erläutern.

Stabilität von Gleichgewichtspunkten

Wie wir in Kapitel 6 zeigen werden, ist bei linearen Systemen die Stabilität eines Gleichgewichtspunktes gleichbedeutend mit der Stabilität aller. In diesem Fall nennt man das zugehörige System stabil.

Je nach Systemverhalten unterscheidet man insgesamt zwischen drei Stabilitätsklassen:

1) Ein Gleichgewichtspunkt $\overline{x}$ heißt stabil [11] oder marginal stabil [12], wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von $\overline{x}$ existiert, so daß für alle Anfangswerte $x^0 \in U$ von $\overline{x}$ gilt:

$$\varphi(t, 0, x^0) \subset K(\overline{x}, \varepsilon) \text{ für alle } t \geq 0.$$

   Dies bedeutet: Verändert man das sich in der Gleichgewichtslage befindliche System nur geringfügig, so verbleibt die zum gestörten Anfangswert x^0 gehörige Lösungstrajektorie in der Nähe, d.h. in einer Umgebung $K(\overline{x}, \varepsilon)$ der Gleichgewichtslage. Insbesondere kann das System in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes nicht „explodieren", was nichts anderes bedeutet als daß $\|\varphi(t, 0, x^0)\| < \infty$ für alle $(t, x^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ gilt.

2) Ein Gleichgewichtspunkt heißt asymptotisch [13] stabil, wenn er stabil ist und zusätzlich für alle $x^0 \in U$ von $\overline{x}$ gilt $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, 0, x^0) = \overline{x}$. Die Menge aller Zustände $x^0 \in \mathbb{K}^n$ für die diese Bedingung erfüllt ist, nennt man auch *Attraktionsgebiet* der Gleichgewichtslage $\overline{x}$. Dies ist ein sehr starkerStabilitätsbegriff. Ein asymptotisch stabiles System gleicht geringfügige Störungen selbstständig aus, indem es sich langfristig wieder dem Gleichgewichtszustand nähert.

3) Ein Gleichgewichtszustand heißt instabil [14], wenn er nicht stabil ist. Kleinste Unterschiede in den Anfangsbedingungen können dann ein anderes Systemverhalten, d.h. einen völlig anderen Verlauf der Trajektorie hervorrufen.

Bemerkung
Da jedes homogene System trivialerweise die Gleichgewichtslage $\overline{x} = 0$ besitzt, reicht es für eine Stabilität dieser Systeme die Stabilität von $\overline{x} = 0$ zu untersuchen.

---

(11) stable
(12) marginally stable
(13) asymptotic
(14) instable

Beispiel: LINEARISIERTE PENDELGLEICHUNGEN

a) Asymptotisch stabiler Zustand:
Ein gewöhnliches Pendel unter Einfluß der Reibung. Stößt man es aus der Gleichgewichtslage (= Ruhelage) an, so verharrt es nach einiger Zeit wieder in dieser.

b) (Marginal) Stabiler Zustand:
Ein idealisiertes Pendel ohne Reibung. Stößt man das Pendel aus der Ruhelage an, pendelt es mit konstanter Amplitude. Je geringer die Anfangsauslenkung, desto weniger entfernt es sich von der Ruhelage. Dasselbe gilt für eine Kugel auf einer Ebene unter Berücksichtigung des Reibungswiderstandes.

c) Instabiler Zustand:
Ein inverses Pendel. Jede noch so kleine Störung bringt das System aus der Ruhelage. Stöße von links und rechts lassen das Pendel in die eine oder andere Richtung ausschlagen. Geringe Unterschiede in den Anfangsbedingungen rufen ein völlig verändertes Systemverhalten hervor.

□

Als weiteres Beispiel erinnern wir an die skalare Differentialgleichung $\dot{x}(t) = x(t)$ von Seite 22. Die einzige Gleichgewichtslage $\overline{x} = 0$ ist instabil, denn mit $\varepsilon > 0$ gilt für $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} e^t \varepsilon &= \infty \\ e^t\, 0 &\equiv 0 \\ \lim_{t\to\infty} e^t (-\varepsilon) &= -\infty \end{aligned}$$

Die Bedeutung des folgenden allgemeinen Satzes für die Stabilität homogener Systeme behandeln wir direkt nach dem Beweis.

Vorbetrachtung:

Sei $B(t) \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{K}^{n\times m}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\sup_{t\in I} \|B(t)\| < \infty$, d.h. die Matrixfunktion $B(\cdot)$ ist beschränkt auf dem Intervall I.

(ii) $\sup_{t\in I} |b_{ij}(t)| < \infty$, für alle i, j, d.h. alle Einträge der Matrix sind auf I beschränkte Funktionen.

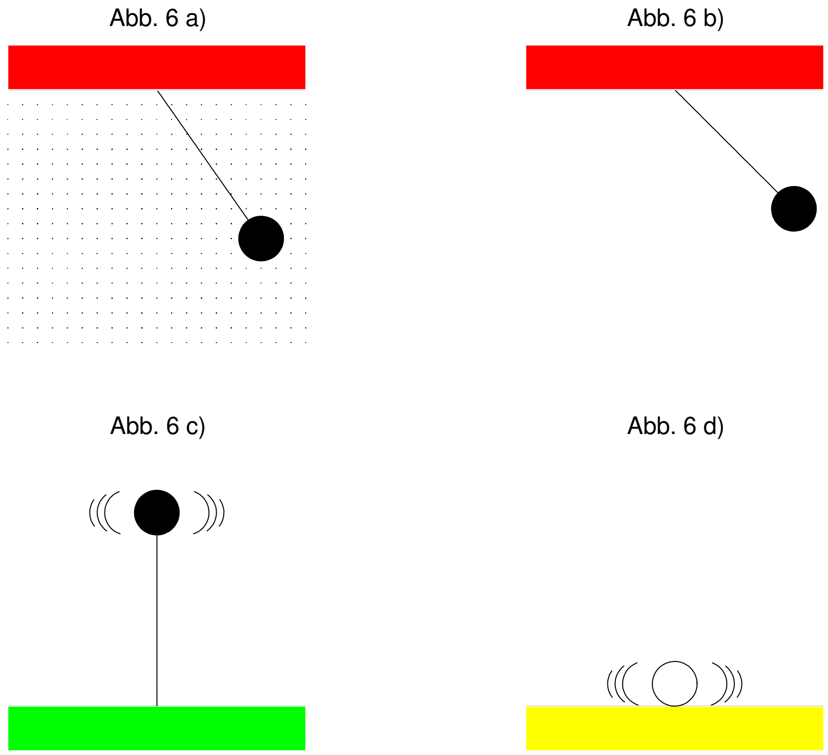


Abbildung 6: *Vier Beispiele zu den neu eingeführten Stabilitätsbegriffen: a) Gewöhnliches Pendel unter Einfluß der Reibung (asymptotisch stabiler Zustand). b) Idealisiertes Pendel ohne Reibung (marginal stabiler Zustand). c) Inverses Pendel (instabiler Zustand). d) Kugel in der Ebene unter Berücksichtigung des Reibungswiderstandes (marginal stabiler Zustand).*

(iii) $\sup_{t\in I} \|B(t)\, x\| < \infty$, für alle $x \in \mathbb{K}^m$, d.h. beliebige Linearkombinationen der Spalten von $B(t)$ sind beschränkt auf I.

Falls I nach rechts unbeschränkt ist, sind auch die folgenden Aussagen gleichbedeutend:

(iv) $\lim_{t\to\infty} \|B(t)\| = 0$

(v) $\lim_{t\to\infty} |b_{ij}(t)| = 0$ für alle i, j.

(vi) $\lim_{t\to\infty} \|B(t)\, x\| = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^m$.

Die Behauptungen sind trivial für die Frobenius-Norm

$$\|B(t)\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |b_{ij}(t)|^2}.$$

Aufgrund der Äquivalenz aller Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum nach Satz 3.1.2 gelten sie damit auch für die Operatornorm $\|\cdot\|$.

Satz 3.3.1
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt:

(a) $\|e^{At}\|$ *ist genau dann beschränkt auf* $\mathbb{R}_0^+$, *wenn die folgenden zwei Aussagen gelten:*

  (i) $\mathsf{Re}(\lambda) \le 0$ *für alle* $\lambda \in \sigma(A)$.

  (ii) Falls $\mathsf{Re}(\lambda) = 0$ *für* $\lambda \in \sigma(A)$ *gilt, ist die algebraische Vielfachheit von* λ *gleich seiner geometrischen Vielfachheit.*

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (i) $\lim_{t\to\infty} \|e^{At}\| = 0$

  (ii) $\exists\, k, \omega > 0$ *mit* $\|e^{At}\| \le k\, e^{-\omega t}$

  (iii) $\mathsf{Re}(\lambda) < 0$ *für alle* $\lambda \in \sigma A$.

□

Nach Vorbetrachtung (iii) ist $\|e^{At}\|$ genau dann auf $\mathbb{R}_0^+$ beschränkt, wenn alle verallgemeinerten Eigenschwingungen der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ beschränkt sind. Ebenso gilt $\|e^{At}\| \longrightarrow 0$ für $t \to \infty$ genau dann, wenn alle verallgemeinerten Eigenschwingungen für $t \to \infty$ gegen Null streben(siehe auch (vi)). Denn für beliebige $x^0 \in \mathbb{K}^n$ gilt mit einer Basis $\{z^1, \cdots, z^n\}$ aus verallgemeinerten Eigenvektoren

$$\|e^{At}\, x^0\| = \|\sum \alpha_i\, (e^{At}\, z^i)\| \le \sum \alpha_i\, \|e^{At}\, z^i\|,$$

so daß man sich im Beweis auf die Betrachtung der verallgemeinerten Eigenvektoren zurückziehen kann.

Beweis

(a): $(\Rightarrow)$: Seien alle verallgemeinerten Eigenschwinungen für $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschränkt. Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und z ein zugehöriger Eigenvektor, d.h. $A\,z = \lambda\,z$ mit $z \neq 0$. Dann folgt wegen

$$\|e^{At}\, z\| = \|e^{\lambda t}\, z\| = |e^{\lambda t}|\, \|z\| = e^{\mathsf{Re}(\lambda)t}\, \|z\|$$

und der Beschränktheit aller verallgemeinerten Eigenschwingungen, daß $\mathsf{Re}(\lambda) \le 0$, also (i). Sei jetzt $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\mathsf{Re}(\lambda) = 0$.
Annahme:

Die algebraische Vielfachheit ist echt größer als die geometrische.
Dann gibt es einen verallgemeinerten Eigenvektor z der Ordnung $m > 1$ zu λ. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\|e^{A\,t}\,z\| &= \|e^{\lambda\,t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\,(A-\lambda\,I)^k\,z\| \\
&= e^{\mathsf{Re}(\lambda)\,t}\,\|\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\,(A-\lambda\,I)^k\,z\| \\
&= \|\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\,(A-\lambda\,I)^k\,z\|
\end{aligned}$$

Da die Einträge des Vektors $\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\,(A-\lambda\,I)^k\,z$ Polynome in t sind und $(A-\lambda\,I)^{m-1}\,z \neq 0$ gilt, ist zumindest eine Komponente des Vektors ein Polynom vom Grad $m-1$, also unbeschränkt. $\lightning$
$(\Leftarrow)$: Seien umgekehrt (i) und (ii) gültig. Sei z zunächst ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann gilt:

$$\|e^{A\,t}\,z\| = e^{\mathsf{Re}(\lambda)\,t}\,\|z\|,$$

da $\mathsf{Re}(\lambda) \leq 0$. Also sind alle Eigenschwingungen beschränkt. Sei nun z ein verallgemeinerter Eigenvektor zu λ mit der Ordnung $m > 1$. Dann folgt aus (ii), daß $\mathsf{Re}(\lambda) < 0$ ist und daß gilt:

$$\|e^{A\,t}\| \leq e^{\mathsf{Re}(\lambda)\,t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\,\|(A-\lambda\,I)^k\,z\| \longrightarrow 0$$

für $t \to \infty$, da $e^{\mathsf{Re}(\lambda)\,t}$ exponentiell gegen Null strebt, die Einträge des zweiten Vektors aber nur Polynome in t sind.

(b): (ii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial. Gilt (ii), so heißt der Operator $e^{A\,t}$ exponentiell beschränkt.
(i) $\Rightarrow$ (iii): Nach Lemma 3.2.1 existiert die Lösung $e^{A\,t}\,x^0$ für alle $x^0 \in \mathbb{K}^n$ auf ganz $\mathbb{R}$, also ist $e^{A\,t}$ nach der Vorbetrachtung beschränkt. Mit (a) gilt: Angenommen, es existiere ein $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\mathsf{Re}(\lambda) = 0$, dann folgt:

$$\|e^{A\,t}\,z\| = e^{\mathsf{Re}(\lambda)\,t}\,\|z\| = \|z\| \neq 0.$$

$\lightning$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Es gelte (iii), d.h. $\mathsf{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathsf{Re}(\lambda) < -\varepsilon$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$. Nun gilt:

$$(A-\varepsilon\,I)\,z = \lambda\,z \Leftrightarrow A\,z = (\lambda+\varepsilon)\,z,$$

das bedeutet, daß $\sigma(A-\varepsilon\,I)$ aus $\sigma(A)$ gerade dadurch hervorgeht, daß jeder Eigenwert um ε in Richtung der imaginären Achse versetzt wird.

Dabei ist ε so gewählt, daß $\sigma(A - \varepsilon I) \subset \mathbb{C}_-$. Daher erfüllt $e^{(A+\varepsilon I)t}$ die Bedingungen (i) und (ii) von (a), so daß ein $\alpha > 0$ mit $\|e^{(A+\varepsilon I)t}\| \leq \alpha$ existiert. Da jede Matrix mit der Identität vertauschbar ist, gilt nach Lemma 3.2.2:

$$\begin{array}{rrcl} & \|e^{\varepsilon I t}\, e^{A t}\| & \leq & \alpha \\ \Leftrightarrow & e^{\varepsilon t}\, \|e^{A t}\| & \leq & \alpha \\ \Leftrightarrow & \|e^{A t}\| & \leq & \alpha\, e^{-\varepsilon t} \end{array}$$

für alle $t \geq 0$.

■

Der Satz 3.3.1 erlaubt es uns, Aussagen über Stabilität eines homogenen Systems aufgrund der Kenntnis des Spektrums der Systemmatrix A zu treffen.

Korollar 3.3.2
Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Systemmatrix der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\, x(t)$.

(i) Das System ist genau dann stabil, wenn für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt:

  (a) $\mathsf{Re}(\lambda) \leq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$.

  (b) Falls $\mathsf{Re}(\lambda) = 0$ für $\lambda \in \sigma(A)$ gilt, ist die algebraische Vielfachheit von λ gleich seiner geometrischen Vielfachheit.

(ii) Das System ist asymptotisch stabil genau dann, wenn das Spektrum von A in der linken Halbebene $\mathbb{C}_-$ liegen.

□

Beweis
Betrachte $\overline{x} = 0$. Mithilfe von Satz (3.3.1) folgt:

(i) $(\Leftarrow)$: Sei $\|e^{A t}\| \leq \alpha \quad \forall t \geq 0$. Setze für $\delta > 0 \quad \varepsilon := \alpha\, \delta$, so folgt für die Trajektorie mit Anfangswert $x^0 \in K(0, \delta) = U(0)$.

$$\|\varphi(t, x^0)\| = \|e^{A t}\, x^0\| \leq \alpha\, \|x^0\| < \varepsilon,$$

also $\varphi(t, x^0) \subset K(0, \varepsilon)$ für alle $t \geq 0$ und $x^0 \in U(0)$.

$(\Rightarrow)$: Sei (3) stabil, aber $e^{A t}$ unbeschränkt, d.h. $\exists t_0 \geq 0 \quad \forall \alpha > 0 :$ $\|e^{A t_0}\| > \alpha$. Dann explodiert das System (3) zum Zeitpunkt t_0 im Widerspruch zur Annahme seiner Stabilität. ↯

(ii) Die Behauptung ist nach Satz 3.3.1 äquivalent zu $\lim_{t \to \infty} \|e^{A t}\| = 0$, und dies gilt genau dann, wenn das System (3) stabil ist und gilt $\lim_{t \to \infty} \varphi(t, x^0) = 0$.

■

Klassifikation der linearen homogenen Systeme zweiter Ordnung

Im weiteren Verlauf dieses Paragraphens soll die Stabilität, die genaue Form der Phasenportraits und das Systemverhalten für $t \to \infty$ von reellen homogenen Systemen zweiter Ordnung der Form

$$\dot{x}(t) = A\,x(t); \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{5}$$

untersucht werden. Dazu benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 3.3.3
Sei $\overline{X}$ die Menge aller Gleichgewichtspunkte der homogenen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$. Dann gilt:

$$\overline{X} = \mathrm{Ker}(A)$$

□

Beweis

$(\Rightarrow)$: $\forall\, \overline{x} \in \overline{X}$ gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & e^{A\,t}\,\overline{x} & = & \overline{x} \\ \Rightarrow & A\,e^{A\,t}\,\overline{x} & = & 0 \\ \Rightarrow & A\,\overline{x} & = & 0 \\ \Rightarrow & \overline{x} & \in & \mathrm{Ker}(A) \end{array}$$

$(\Leftarrow)$: $\forall\, x \in \mathrm{Ker}(A)$ folgt:

$$e^{A\,t}\,x = I_n\,x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}\,t^k}{k!}\,A\,x = x$$

■

Bemerkung
Für einfach gebaute 2×2 Matrizen mit mindestens einem Nulleintrag ist es oft ratsam, die Systemmatrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mit $x(t) = \binom{x_1(t)}{x_2(t)}$ als System aus zwei Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & c\,x_1(t) + d\,x_2(t) \end{array}$$

aufzufassen und die Komponentenfunktion $x_1(\cdot)$, bzw. $x_2(\cdot)$ wie in Kapitel 1 zu bestimmen. Sind alle Einträge von Null verschieden, liegt dagegen ein System aus zwei gekoppelten skalaren Differentialgleichungen vor, die so nicht mit den Methoden des ersten Kapitels angegangen werden können. Sind die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren bereits berechnet worden, läßt sich die Lösung sofort als Linearkombination von (verallgemeinerten) Eigenschwingungen angeben:

$$\varphi(t) = \alpha\, e^{\lambda_1 t}\, z_1 + \beta\, e^{\lambda_2 t}\, z_2,$$

falls wir es in der Jordan-Normalform mit zwei Lambda-Blöcken erster Ordnug zu tun haben und

$$\varphi(t) = \alpha\, e^{\lambda t}\, z + \beta\, e^{\lambda t}(z + t\,[A - \lambda\, I_2]\, z)$$

für einen Block zweiter Ordnung. Je nach Lage der Eigenvektoren zueinander wird das Phasenportrait einer konkret gegeben Matrix gegenüber den im folgenden besprochenen Grundformen gedreht beziehungsweise verzerrt erscheinen.

Die Beschränkung der Differentialgleichung (3) auf die Form (5) erlaubt nun eine vollständige Klassifizierung aller bei diesem Spezialfall möglichen Fälle. Je nach Größe des Kerns von A zerfallen die reellen 2×2-Matrizen in natürlicher Weise in drei Klassen und es ist möglich, jedem System über die Kenntnis seiner Jordan-Normalformen einem bestimmten Typ von Phasenportrait zuzuordnen. Dazu betrachte man die im Folgenden für jeden Typ einzeln angegebene lineare Transformation $T \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{K})$, die jede Matrix A in ihre Jordan-Normalform überführt. Mithilfe der Koordinatentransformation $x(t) = T\, z(t)$, beziehungsweise $z(t) = T^{-1}\, x(t)$ gehen somit die Lösungen $\varphi_x(t)$ von (5) in Lösungen $\varphi_z(t)$ des transformierten Systems

$$\dot{z}(t) = J\, z(t)$$

über, denn es gilt

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= T^{-1}\, \dot{x}(t) \\ &= T^{-1}\, A\, x(t) \\ &= T^{-1}\, A\, T\, z(t) \\ &= J\, z(t), \end{aligned}$$

wobei $J = T^{-1}\, A\, T$ die Jordan-Normalform zu A bezeichnet. Im Zusammenhang mit dieser Transformation wird natürlich auch das Phasenportrait von A einer Drehstreckung unterworfen, ohne daß sich jedoch die typischen Merkmale wie die grundlegende Form des Orbits, des Stabilitätsverhaltens oder das Systemverhalten für $t \to \infty$ verändert hätte. Es ist daher ausreichend, das Verhalten der auftretenden Jordan-Normalformen zu untersuchen, um sich ein Bild von den möglichen Phasenportraits zu machen.

Vorbetrachtung

Man beachte, daß ein homogenes System des Typs (3) nach Lemma 3.3.3 höchstens einen einzigen asymptotisch stabilen Gleichgewichtszustand, wohl aber unendlich viele stabile Gleichgewichtspunkte besitzen kann. Denn mehrere Gleichgewichtspunkte können nur dann auftreten, wenn

$$\{0\} \subsetneqq \operatorname{Ker}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \sigma(A) \text{ mit } \lambda = 0,$$

da dann ein Eigenvektor $\widetilde{x} \in \mathbb{K}^n$ existiert mit $A\,\widetilde{x} = 0$.

Nach Korollar 3.3.2.(ii) kann das System in diesem Fall nicht asymptotisch stabil sein. Es kann also neben einem asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt bei homogenen Systemen keine weiteren Gleichgewichtslagen geben. Weiterhin gilt: Mit jedem marginal stabilen Gleichgewichtspunkt ist auch der durch ihn aufgespannte eindimensionale Unterraum marginal stabil.

1. $\underline{\dim \operatorname{Ker}(A) = 0}$
   Dies ist der interessanteste Fall. Gemäß Lemma 3.3.3 ist der Nullpunkt der einzige Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung (5) erzeugten Systems; der Eigenwert $\lambda = 0$ kann aufgrund unserer Vorbetrachtung nicht auftreten. Setze $d := \det(A)$ und $s := \operatorname{Sp}(A)$, so besitzt das zugehörige charakteristische Polynom $\chi_A(x) = \det(x\, I_2 - A) = x^2 - s\, x + d$ die Nullstellen $\lambda_1 = s/2 + \sqrt{s^2/4 - d}$ und $\lambda_2 = s/2 - \sqrt{s^2/4 - d}$. Sei $D = s^2/4 - d$ die Diskriminante der beiden Nullstellen. Dies führt zu der folgenden Fallunterscheidung:

   (i) $\underline{D > 0}$:
   Das charakteristische Polynom besitzt die zwei reellen Nullstellen λ_1 und λ_2. Alle Matrizen dieses Typs sind ähnlich zur Jordan-Normalform $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ mit zwei reellen λ_i-Blöcken erster Stufe. Sind v^1, v^2 die zugehörigen Eigenvektoren, so bilden diese aufgrund ihrer linearen Unabhängigkeit eine Jordanbasis zu A. Damit ergibt sich das transformierte System wie auf Seite 137 beschrieben mit Hilfe von $T = [v^1\ v^2]$.
   Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \lambda_1\, x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda_2\, x_2(t) \end{aligned}$$

   wird durch die Funktion $\varphi(t) = \binom{e^{\lambda_1 t}\, c_1}{e^{\lambda_2 t}\, c_2}$ gelöst und man erhält die

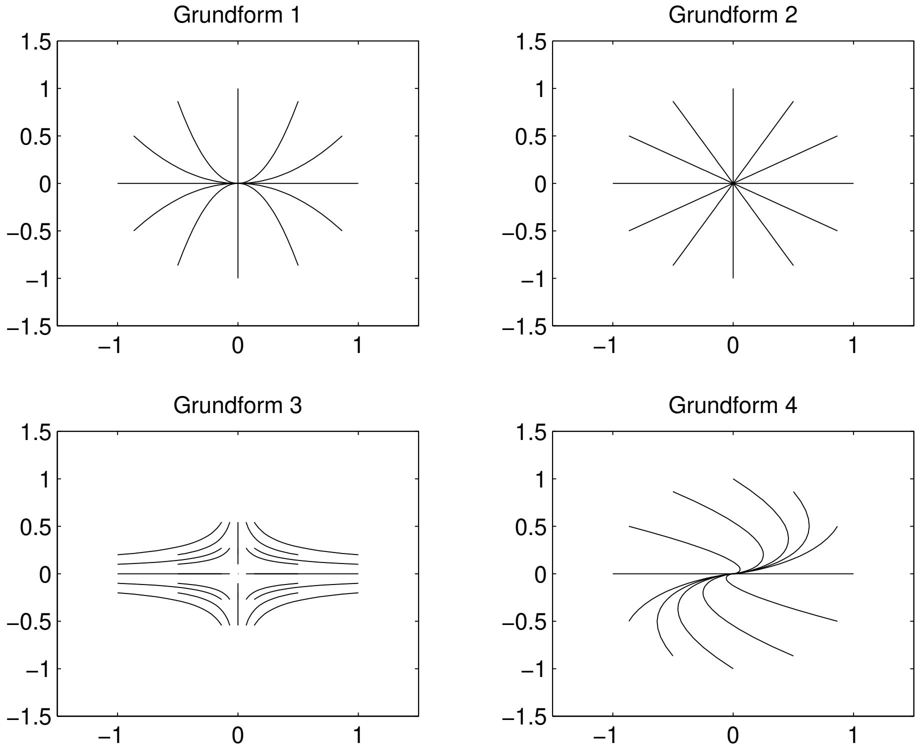


Abbildung 7: *Grundformen der Phasenportraits homogener Systemen zweiter Ordnung*

entsprechenden Orbits in der x-y-Ebene für $c_1 \neq 0$ wegen

$$\begin{aligned} x &= e^{\lambda_1 t}\, c_1 \\ y &= e^{\lambda_2 t}\, c_2 \\ \Rightarrow \left(\frac{x}{c_1}\right)^{1/\lambda_1} &= e^t \\ \Rightarrow \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\lambda_2} &= \left(\frac{y}{c_2}\right)^{\lambda_1} \end{aligned}$$

durch die Potenzkurve $y = p\, x^q$, wobei

$$p = \frac{c_2}{(c_1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} \quad \text{und} \quad q = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Für $d > 0$ besitzen beide Eigenwerte dasselbe Vorzeichen (vgl. Abbildung 7, Grundform 1), so daß die zugehörigen Systeme für $s < 0$ asymptotisch stabil sind und ihre Orbits somit bei $t \to \infty$ gegen den Nullpunkt streben, für $s > 0$ jedoch instabil sind. Im Fall $d < 0$ liegt stets ein instabiles System vor, da ein Eigenwert größer als Null ist

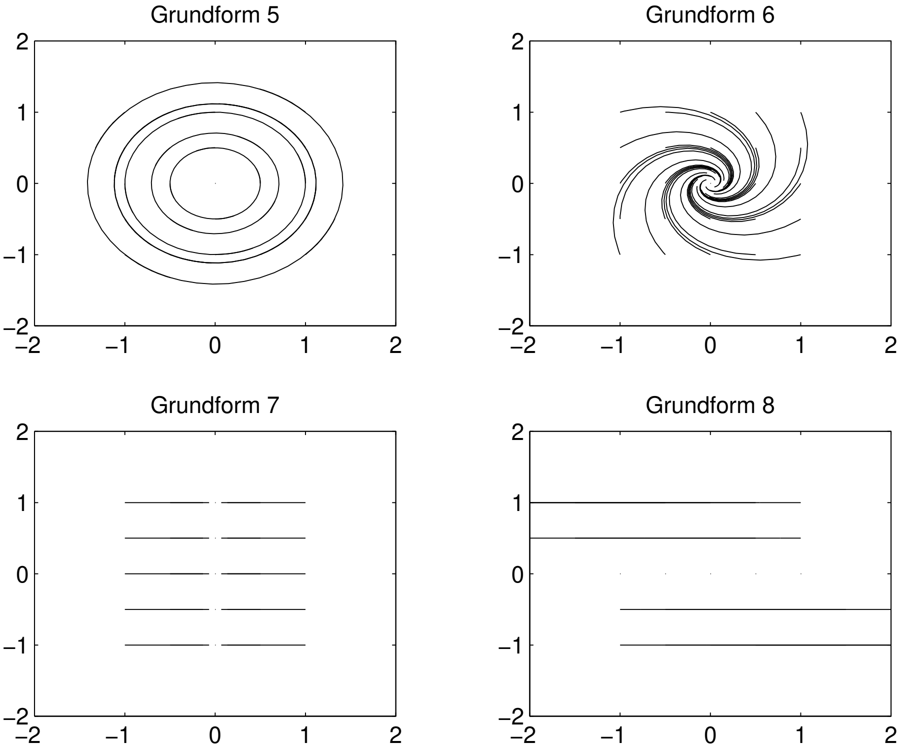


Abbildung 8: *Grundformen der Phasenportraits homogener Systemen zweiter Ordnung*

(vgl. Abbildung 7, Grundform 2). Es gibt hier nur zwei zum Nullpunkt weisende Orbits, die anderen Lösungen streben für $t \to \infty$ ins Unendliche. Der Nullpunkt wird bei Systemen dieses Typs Sattelpunkt genannt.

(ii) $\underline{D = 0}$:
Der Eigenwert $\frac{s}{2}$ ist Doppelnullstelle des charakteristischen Polynoms. Für Matrizen dieses Typs gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder weisen sie die Jordan-Normalform $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ auf oder mit $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ einen λ-Block zweiter Stufe, je nach Dimension des Eigenraums. Der erste Fall führt mit $\lambda_1 = \lambda_2$ auf einen Spezialfall von (i), die Transformation T wird wie dort beschrieben bestimmt. Die Orbits erfüllen die Gleichung $y = p\,x$, sodaß das Phasenportrait eine sternförmige Gestalt aufweist (vgl. Abbildung 7, Grundform 3). Je nach Vorzeichen des Eigenwerts λ ist das System dann entweder asymptotisch stabil oder instabil. Für den zweiten Fall, der auftritt, falls der Eigenraum von A nur eindimensional ist, ist als Transformation $T = [v\ \tilde{v}]$

zu wählen, wobei $\widetilde{v}$ der Bedingung $(A - \lambda I_2)\, v = \widetilde{v}$ genügen muß (vgl. Seite 137). Matrizen dieser Art erzeugen Differentialgleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \lambda\, x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda\, x_2(t) \end{aligned}$$

mit der Lösungsfunktion $\varphi(t) = \binom{e^{\lambda t} c_1 + t\, e^{\lambda t} c_2}{e^{\lambda t} c_2}$. Bei Wahl von $x = e^{\lambda t} c_1 + t\, e^{\lambda t} c_2$ und $\frac{y}{c_2} = e^{\lambda t}$ erhält man mit $x = \frac{c_1}{c_2}\, y + \frac{1}{\lambda}\, ln(\frac{y}{c_2})\, y$ elegant geschwungene Orbits wie in Abbildung 7, Grundform 4. Für $\lambda < 0$ ist das System asymptotisch stabil und für $\lambda > 0$ instabil.

(iii) $\underline{D < 0}$:
Das charakteristische Polynom besitzt zwei rein komplexe Nullstellen. Matrizen dieser Form weisen ein konjugiert-komplexes Paar von Eigenwerten mit $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ auf. $T = [v\ \overline{v}]$ würde ebenfalls $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$ liefern, wir sind jedoch an der reellen Normalform $\begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix}$ interessiert. Diese erhält man auf einfache Weise [15] durch einen Trick: Sei $\lambda = \alpha + i\,\omega$ mit $\omega > 0$ der eine Eigenwert und $v = \binom{u_1 + i\, v_1}{u_2 + i\, v_2}$ der zugehörige Eigenvektor. Durch Aufspalten der Gleichung $A\, v = \lambda\, v$ in Real- und Imaginärteil erhält man

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} &= \left[A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gilt. Da v und $\overline{v}$ hier unabhängig sind und durch $\binom{u_1}{u_2}, \binom{v_1}{v_2} \in \mathbb{R}^2$ dargestellt werden können, sind auch die beiden reellen Vektoren u, v linear unabhängig und $T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ führt zur gewünschten Transformation. Da die Systemmatrix von A ausschließlich reelle Einträge aufweist, ist es möglich, die Form der Lösungen wie auf Seite 133

[15] Für gewissenhafte Leser: Siehe Skript zur Linearen Algebra 2, Kapitel IX, Anhang, Seite 74 ff.

zu bestimmen. Ist z der Eigenvektor zu $\lambda = \alpha + i\,\omega$, so stellt jede Linearkombination der reellen Eigenschwingungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\alpha\,t}[\mathsf{Re}(z)\,\cos(\omega\,t) - \mathsf{Im}(z)\,\sin(\omega\,t)] \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha\,t}\,[\mathsf{Re}(z)\,sin(\omega\,t) + \mathsf{Im}(z)\,cos(\omega\,t)] \end{aligned}$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung dar. Ist $\alpha = 0$, so führt dies zu einem marginal stabilen System mit kreis- oder ellipsenförmigen Orbits (vgl. Abbildung 8, Grundform 5). Für die Fälle $\alpha < 0$ beziehungsweise $\alpha > 0$ erhält man asymptotisch stabile, beziehungsweise instabile Systeme mit spiralförmigen Phasenportrait (vgl. Abbildung 8, Grundform 6). Der Drehsinn der Spiralarme ist für $\omega < 0$ mit und für $\omega > 0$ gegen den Uhrzeigersinn gerichtet.

2. $\underline{\dim \mathrm{Ker}(A) = 1}$:
Die Menge aller Gleichgewichtspunkte bilden in diesem Fall einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ und liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt. Die Matrix A weist mindestens einmal den Eigenwert $\lambda = 0$ auf.

(iv) $\underline{D > 0}$:
Matrizen dieses Typs besitzen die Jordan-Normalform $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, also je einen λ-Block und einen Nullblock erster Ordnung. Die Transformation T bestimmt man analog zum Fall (i). Das zugehörige System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \lambda\,x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 0, \end{aligned}$$

wird durch die Funktion $\varphi(t) = \binom{c_1\,e^{\lambda\,t}}{c_2}$ mit Anfangswerten $c_i \in \mathbb{R}$ gelöst. Die Orbits von Systemen dieses Typs verlaufen also entlang von Geraden (vgl. Abbildung 8,Grundform 7). Der Kern von A und damit die Menge der Gleichgewichtspunkte besteht aus allen Punkten auf der Y-Achse.

(v) $\underline{D = 0}$:
Alle Matrizen dieser Art sind zu einem Nullblock zweiter Ordnung $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ähnlich. Die Transformation ergibt sich wie in (ii). Wir erhalten für das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

die Lösungsfunktion $\varphi(t) = \binom{c_2\,t}{c_2}$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$. Wie im Fall zuvor verlaufen die Orbits entlang von Geraden (vgl. Abbildung 8,Grundform 8). Der Kern von A und damit die Menge der Gleichgewichtspunkte besteht aus allen Punkten auf der X-Achse.

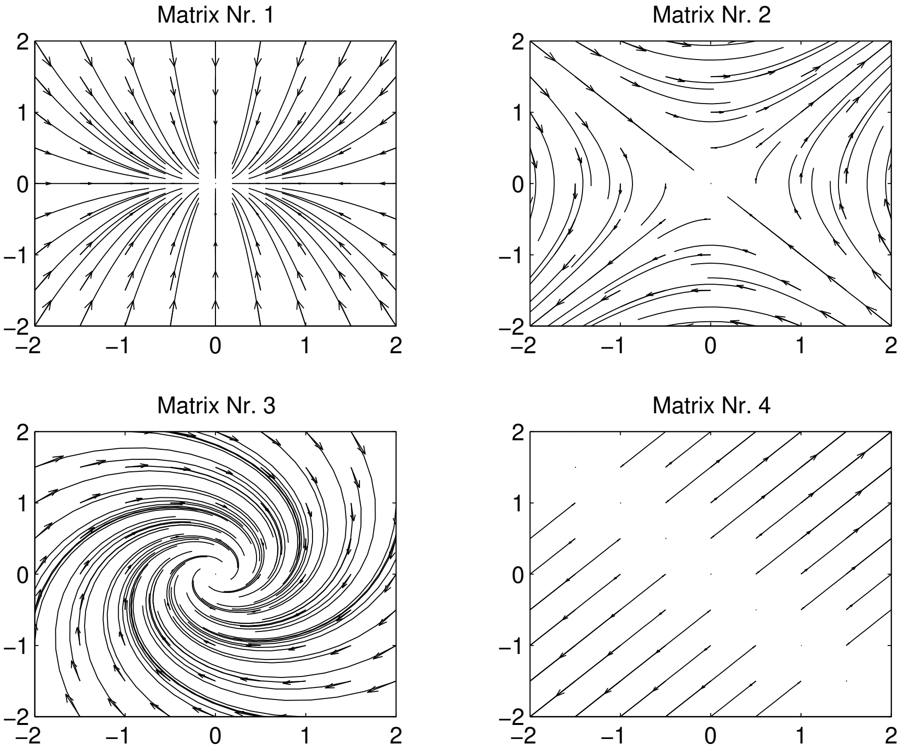


Abbildung 9: *Phasenprotaits und Geschwindigkeitsvektorfelder zu den Beispielen*

3. dim Ker$(A) = 2$:
Dieser Fall sei nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Die Nullmatrix erzeugt trivialer Weise ein stabiles System. Jeder Zustand ist gleichzeitig ein Gleichgewichtspunkt.

Beispiel: Stabilitätseigenschaften homogener Systeme
Gegeben seien die folgenden homogenen Systeme.

$$(i)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (ii)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (iii)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (iv)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(v)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (vi)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (vii)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (viii)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Man bestimme je ein reelles Fundamentalsystem, die Gleichgewichtspunkte, deren Stabilitätseigenschaften und zeichne einige charakteristische Orbits.

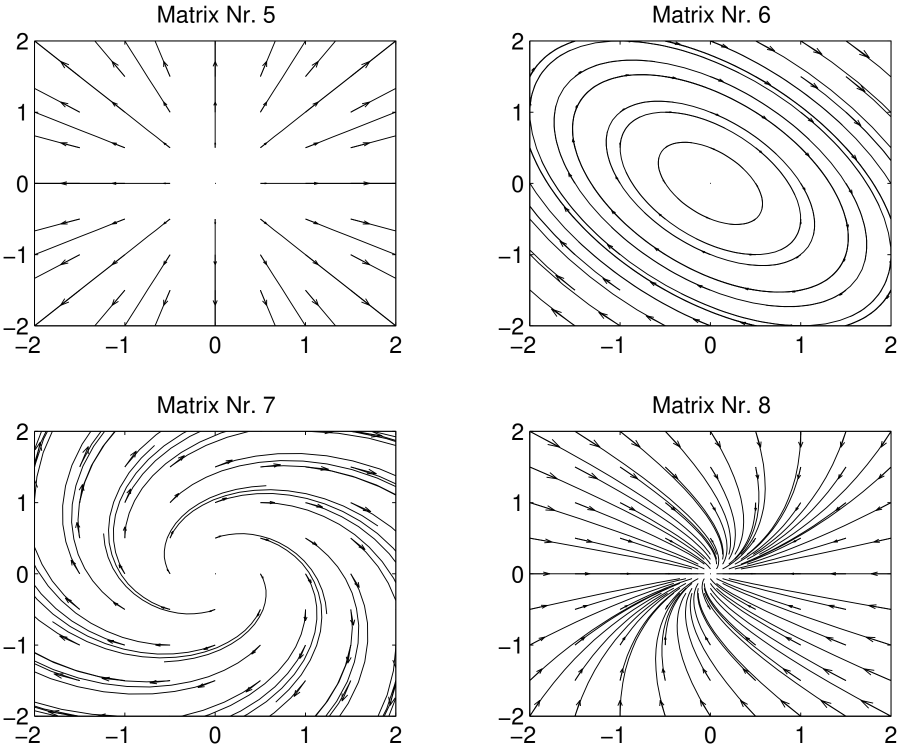


Abbildung 10: *Phasenprotaits und Geschwindigkeitsvektorfelder zu den Beispielen*

(i): Die Systemmatrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$. Die zugehörigen Eigenvektoren lauten zum Beispiel $z^1 = \binom{1}{0}$ und $z^2 = \binom{0}{1}$. Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem $\left\{ \binom{e^{-t}}{0}, \binom{0}{e^{-2\,t}} \right\}$. Da die Matrix A Vollrang besitzt, weist das System nur die Gleichgewichtslage $\overline{x} = 0$ auf. Wegen $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ ist das System gemäß Korollar 3.3.2 asymptotisch stabil. Die Orbits der Eigenschwingungen reeller Eigenwerte verlaufen wegen $e^{A\,t}\,z^i = e^{\lambda\,t}\,z^i$ auf Halbgeraden entlang der Eigenvektoren. Diese teilen den $\mathbb{R}^2$ in vier Sektoren auf. Da sich die Orbits aufgrund des Eindeutigkeitssatzes nicht schneiden dürfen, verbleibt jeder Orbit in dem Sektor, in dem sein Anfangszustand liegt. Die Eigenwerte λ_i wirken entlang der zugehörigen Eigenvektoren z^i, wobei $|\lambda_i|$ die Geschwindigkeit des Prozesses und $\operatorname{sign}(\lambda_i)$ die Richtung des Prozeßverhaltens bestimmen. Die Orbits werden in der x-y-Ebene durch die Gleichung $y = p\,x^2$, also durch Parabeln beschrieben.

(ii): Die Systemmatrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $z^1 = \binom{1}{1}$ und $z^2 = \binom{1}{-1}$. Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem $\left\{\binom{e^t}{e^t}, \binom{e^{-t}}{-e^{-t}}\right\}$. Da die Matrix A den Rang 2 besitzt, ist der Nullpunkt der einzige Gleichgewichtspunkt. Dieser ist wegen $\mathsf{Re}(\lambda_1) > 0$ instabil. Das System ist ähnlich zu einer Normalform mit hyperbelförmigen Orbits der Art $y = p\,x^{-1}$, allerdings ist das durch die Eigenvektoren vorgegebene Achsenkreuz gegebenüber der x-y-Ebene um $\pi/4$ gedreht.

(iii): Die Systemmatrix A besitzt das konjugiert komplexe Eigenwertpaar $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2\,i$ und die Eigenvektoren $z^1 = \binom{1}{-i}$ und $z^2 = \binom{1}{i}$. Daraus ergibt sich folgendes, aus reellen Eigenschwingungen bestehende Fundamentalsystem

$$\left\{e^{-t}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos(2\,t) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin(2\,t)\right];\ e^{-t}\left[\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cos(2\,t) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin(2\,t)\right]\right\}.$$

Der Nullpunkt ist auch hier der einzige Gleichgewichtszustand des Systems. Wegen $\mathsf{Re}(\lambda_i) < 0$ ist das System asymptotisch stabil, der Nullpunkt aber global attraktiv.

(iv): Die Systemmatrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ mit $z^1 = \binom{1}{-1}$ und $z^2 = \binom{1}{1}$. Dies führt zu dem Fundamentalsystem $\{\binom{1}{-1}, \binom{e^{2\,t}}{e^{2\,t}}\}$. Jeder Anfangswert der Form $\overline{x} = \binom{x_1}{-x_1}$ kennzeichnet wegen $A\,\overline{x} = 0$ einen stationären Punkt im Geschwindigkeitsvektorfeld, was gleichbedeutend mit einem Gleichgewichtspunkt des Systems ist. Das System ist aufgrund von $\lambda_2 > 0$ instabil.

(v): Die Systemmatrix A weist den Eigenwert $\lambda = 2$ mit der algebraischen Vielfachheit 2 auf und die Eigenvektoren $z^1 = \binom{1}{0}$ und $z^2 = \binom{0}{1}$. Das Fundamentalsystem lautet also $\{\binom{e^{2\,t}}{0}, \binom{0}{e^{2\,t}}\}$. Da der Eigenraum zweidimensional ist, werden die Orbits in der x-y-Ebene durch die Geradengleichung $y = p\,x$ beschrieben. Weil A Vollrang besitzt, ist die Null der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems. Dieses ist wegen $\mathsf{Re}(\lambda) > 0$ instabil.

(vi): Die Systemmatrix A besitzt das rein imaginäre Eigenwertpaar $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}\,i$ mit den Eigenvektoren $z^1 = \binom{1}{-1/2+\sqrt{3}/2\,i}$ und $z^2 = \binom{1}{-1/2-\sqrt{3}/2\,i}$. Daraus ergibt sich das aus den folgenden Basislösungen bestehende reelle Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \left[\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}\cos(\sqrt{3}\,t) - \begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\sin(\sqrt{3}\,t)\right]\\
\varphi_2(t) &= \left[\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}\sin(\sqrt{3}\,t) + \begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\cos(\sqrt{3}\,t)\right]
\end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist einziger Gleichgewichtspunkt des Systems, wegen $\mathsf{Re}(\lambda_i) = 0$ ist dieses stabil. Aufgrund der linearen Transformation T ist die kreisförmige Grundform des Systems in eine Ellipse übergegangen.

(vii): Die Systemmatrix A weist das konjugiert komplexe Eigenwertpaar $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\,i$ mit den Eigenvektoren $z^1 = \binom{1}{i}$ und $z^2 = \binom{1}{-i}$ auf. Daraus ergibt sich das reelle Fundamentalsystem

$$\left\{ e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2\,t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2\,t) \right] ; \; e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\,t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2\,t) \right] \right\}.$$

Wegen $\mathsf{Re}(\lambda_i) > 0$ handelt es sich um ein instabiles System.

(viii): Die Systemmatrix A hat den Eigenwert $\lambda = -2$ mit algebraischer Vielfachheit 2, aber mit geometrischer Vielfachheit 1. Der Eigenvektor lautet $z^1 = \binom{1}{0}$ und der verallgemeinerte Eigenvektor $z^2 = \binom{0}{1}$ wegen $(A - \lambda\,I)\,z^2 = z^1$. Dies führt zu dem Fundamentalsystem $\{\binom{e^{-2\,t}}{0}, \binom{t\,e^{-2\,t}}{e^{-2\,t}}\}$. Das System ist wegen $\mathsf{Re}(\lambda_i) < 0$ asymptotisch stabil.

$\square$

3.4 Exkurs in die Regelungstheorie

An dieser Stelle soll als Anwendung der bisherigen Theorie eine weiterführende Fragestellung aus der Systemtheorie vorgestellt werden. Betrachten wir für diesen Exkurs in die Regelungstheorie [16] die folgende Situation:
Gegeben sei ein zeitinvariantes homogenes System

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \tag{6}$$

mit der Systemmatrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Stellen wie uns ferner vor, es ständen m skalare Steuerungen $u_i(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ zur Verfügung, mit denen das System beeinflußt werden kann. Dies führt insgesamt zu einem inhomogenen System der Form

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \tag{7}$$

wobei der Vektor $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$ die *Steuerung* [17] repräsentiert und die Matrix

$B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ bestimmt, in welcher Weise die einzelnen Zustandskomponenten von $x(t)$ beeinflußt werden können. Im Fall $B = [0]_{n\times m}$ entzöge sich das System (7) beispielsweise jeglicher Steuerung, während man bei der Wahl von $B = I_n$ jede Komponente einzeln kontrollieren könnte.

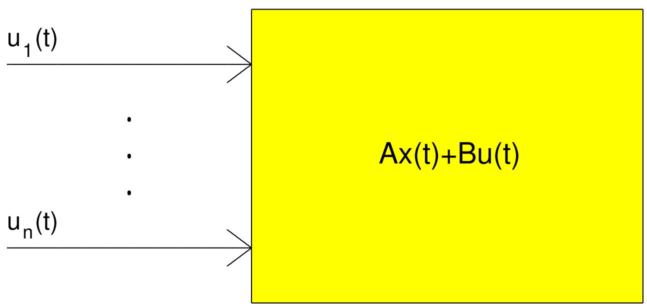


Abbildung 11: *Veranschaulichung eines Systems mit vektorwertiger Kontrolle $u(t)$.*

Das Steuern eines Systems im Zeitintervall $[t_0, t]$ ist also gleichbedeutend mit der Wahl einer geeigneten stetigen Funktion $u(\cdot) \in \mathcal{C}([t_0, t], \mathbb{K}^m)$. Eine Trajektorie des Systems (7) weist nun die Form $\varphi(\cdot\,; t_0, x^0, u(\cdot))$ auf, wobei $\varphi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$

[16] Control Theory
[17] control

den Zustand bezeichnet, in den das System durch die Steuerung $u(\cdot)$ überführt wird, wenn es sich zum Zeitpunkt t_0 im Zustand x^0 befunden hat. Dabei ergeben sich für unser zeitinvariantes homogenes System mit zeitvariantem Steuerterm $B\,u(t)$ folgende Fragestellungen, die im Verlauf dieses Paragraphen geklärt werden sollen:

(i) Der Zustand x^0 des Systems zum Zeitpunkt t_0 sei bekannt und ein weiterer Zustand x^1 vorgegeben. Ist es möglich, das System innerhalb eines festgelegten Zeitraums $[t_0, t_1]$ in den gewünschten Endzustand $x(t_1) = x^1$ zu steuern? Und wie konstruiert man gegebenenfalls eine passende Steuerung?

(ii) Welche Zustände x sind überhaupt in einem vorgegebenen Zeitintervall $[t_0, t_1]$ von x^0 aus erreichbar?

(iii) Welche Eigenschaften müssen die Matrizen A und B aufweisen, damit man das System von jedem gegebenen Anfangszustand in einen beliebigen Endzustand steuern kann?

Natürlich umfassen die vorgestellten Ergebnisse nur einen Ausschnitt des Arbeitsgebietes der Kontrolltheorie. Man wird sich beispielsweise im allgemeinen nicht mit der Angabe einer beliebigen Steuerung zufriedengeben, sondern versuchen, unter allen möglichen Steuerungen eine in einem noch zu spezifizierenden Sinne *optimale* Steuerung auszusuchen. Je nach Anwendungsproblem kann dabei eine zeitoptimale Steuerung mit möglichst kleinem Steuerungsintervall $[t_0, t_1]$ oder eine energieoptimale Kontrolle, gemessen durch die Größe der Norm $\|u(t)\|$, von Interesse sein. Zusätzlich sind bei praktischen Anwendungen zahlreiche Einschränkungen an die Zustandskomponenten und Parameter in Erwägung zu ziehen: Es stehen keinesfalls beliebig große oder kleine Zeiträume und Energiemengen zur Verfügung, denn Meßwerte, Korrekturberechnungen und Steuersignale benötigen eine gewisse Verarbeitungszeit (Systeme mit Totzeiten) und schließlich erfordern Datenverarbeitung und -übertragung eine zeitdiskrete Behandlung des Steuerungsvorganges.

Definition 3.4.1 (STEUERBAR UND VOLLSTÄNDIG STEUERBAR)

Gegeben sei das System $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $u(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Steuerung ist. Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und ein weiterer Zustand $x^1 \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben.

(i) Das System heißt von x^0 nach x^1 steuerbar[18] *im Zeitraum $[0, t_1]$, wenn eine stetige Funktion $u(\cdot) : [0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ existiert mit $\varphi(t_1; x^0, u(\cdot)) = x^1$.*

[18] controllable

(ii) Das System heißt vollständig steuerbar [19] *im Zeitraum* $[0, t_1]$, *wenn zu jedem Paar* $(x^0, x^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *eine stetige Steuerung* $u(\cdot) : [0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *mit* $\varphi(t_1; x^0, u(\cdot)) = x^1$ *existiert.*

□

Im weiteren Verlauf wollen wir zunächst die Menge aller Zustände x^1, zu denen eine Steuerung von $x^0 = 0$ aus im Zeitraum $[0, t]$ existiert, genauer bestimmen. Zur Ermittlung dieses sogenannten *Erreichbarkeitsraumes* $\mathcal{R}(t)$ zeigen wir, daß die Aussage „x^0 ist steuerbar nach x^1 im Zeitraum $[0, t]$" gleichbedeutend damit ist, daß der Vektor $x^1 - e^{A\,t}\,x^0$ im Bild einer gewissen Abbildung Q_t liegt. Der Erreichbarkeitsraum ist somit durch den Untervektorraum zu Q_t gegeben. Dieser ist jedoch für die Praxis zu unhandlich, so daß wie aus den Ergebnissen die Erreichbarkeitsform, eine Matrixwertige Abbildung $W(t)$, herleiten, da deren Bildraum ebenfalls mit dem Erreichbarkeitsraum $\mathcal{R}(t)$ übereinstimmt.

Aus der Formel der Variation der Konstanten und der Definition der Steuerbarkeit ergibt sich unmittelbar, daß das System (6) von x^0 nach x^1 im Zeitraum $[0, t]$ steuerbar ist, wenn

$$x^1 = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}\,x^0 + \int_0^t \Phi(t)\,\Phi(s)^{-1}\,B\,u(s)\,ds$$

gilt. Wählen wir speziell $\Phi(t) = e^{A\,t}$, so erhält man

$$\begin{aligned} x^1 &= e^{A\,t}\,x^0 + \int_0^t e^{A\,(t-s)}\,B\,u(s)\,ds \\ \Leftrightarrow \quad x^1 - e^{A\,t}\,x^0 &= \int_0^t e^{A\,(t-s)}\,B\,u(s)\,ds, \end{aligned}$$

d.h. $u(\cdot) : [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ steuert x^0 nach x^1 im Zeitraum $[0, t]$ genau dann, wenn $u(\cdot)$ den Zustand 0 nach $x^1 - e^{A\,t}\,x^0$ im Zeitraum $[0, t]$ steuert, aber der Vektor $x^1 - e^{A\,t}\,x^0$ im Bild der vektorwertigen Abbildung

$$\begin{aligned} Q_t : \mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ u(\cdot) &\longmapsto \int_0^t e^{A\,(t-s)}\,B\,u(s)\,ds \end{aligned}$$

liegt. Somit ist die vollständige Steuerbarkeit des Systems (6) im Zeitraum $[0, t]$ genau dann gegeben, wenn das homogene System $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ vermittels einer Steuerung $u(\cdot)$ aus der Ruhelage $x^0 = 0$ in jeden gewünschten Endzustand $x(t) = x^1 \in \mathbb{R}^n$ überführt werden kann.

---

[19] completely controllable

Definition 3.4.2 (Erreichbarkeitsraum)
Der Unterraum aller Zustände $x \in \mathbb{R}^n$, zu denen eine Steuerung von $x^0 = 0$ im Zeitraum $[0, t]$ existiert, heißt der Erreichbarkeitsraum [20] $\mathcal{R}(t)$ *des Systems* $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ *und ist gegeben durch*

$$\mathcal{R}(t) := \operatorname{Im} Q_t = \left\{ \int_0^t e^{A\,(t-s)}\,B\,u(s)\,ds : u(\cdot) \in \mathcal{C}([0,t], \mathbb{R}^m) \right\},$$

d.h. $\mathcal{R}(t)$ *ist die Menge aller von Null aus erreichbaren Zustände.* □

Diese Definition ist allerdings wegen der notwendigen Integration meist ungeeignet für die praktische Bestimmung des Erreichbarkeitsraumes .

Bemerkung
Allgemein gilt (vgl. etwa [3], S.103 ff.): Es sei $G(t) : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ eine stetige matrixwertige Abbildung. Dann ist der Bildraum der Abbildung $u(\cdot) \longmapsto \int_0^t G(s)\,u(s)\,ds$ ist gleich dem Bildraum der matrixwertigen Abbildung

$$\begin{aligned} W(\cdot) : \mathbb{R}_0^+ \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^{n\times m} \\ t \quad &\longmapsto \quad \int_0^t G(s)\,G^T(s)\,ds. \end{aligned}$$

Beachte: Wir sprechen im folgenden kurz von Kern und Bild einer $n \times m$ Matrix A an Stelle von Bild und Kern der mit A identifizierten linearen Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : A\,x = 0\}$ und $\operatorname{Im}(A) = \{A\,x : x \in \mathbb{R}^m\}$. $W(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ steht im folgenden für eine konstante Matrix mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}_0^+$. Bei Wahl von $G(t) = e^{A\,(t-s)}\,B$ erhalten wir

$$W(t) := \int_0^t e^{A\,(t-s)}\,B\,B^T\,e^{A^T\,(t-s)} ds$$

oder –durch Variablentransformation– die später verwendete Form

$$W(t) = \int_0^t e^{A\,s}\,B\,B^T\,e^{A^T\,s} ds.$$

Dies führt unmittelbar auf das Lemma 3.4.3.

Korollar 3.4.3
Sei $t \in \mathbb{R}_0^+$ fest gewählt. Dann gilt: $\operatorname{Im} Q_t = \operatorname{Im} W(t)$, *d.h.*

(i) $\mathcal{R}(t) = \operatorname{Im} W(t)$

(ii) Das System $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ *ist genau dann vollständig steuerbar, wenn* $W(t)$ *regulär ist.*

□

[20] reachability subspace

Die bisherigen Kriterien für die Steuerbarkeit bleiben auch gültig, wenn man statt e^{At} eine beliebige Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ wählt oder auch zeitvariante Systeme der Form $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$ betrachtet. Der von uns behandelte Spezialfall bietet jedoch den Vorteil, daß es nun möglich ist, für die Steuerbarkeit rein algebraische Kriterien zu entwickeln. Dafür benötigen wir den folgenden Begriff:

Definition 3.4.4 (A-Invarianz)
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Ein Unterraum $V \in \mathbb{K}^n$ heißt A-invariant, falls $A\,V \subset V$, d.h. $A\,v \in V$ für alle $v \in V$. □

Lemma 3.4.5
Sei $V \subset \mathbb{K}^n$ ein linearer Unterraum und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\langle A|V\rangle &:= V + A\,V + \cdots + A^{n-1}\,V \\ &= \{v^1 + A\,v^2 + \cdots + A^{n-1}v^n : v^j \in V\}\end{aligned}$$

der kleinste A-invariante Unterraum, der V enthält. □

Beweis
Zu zeigen ist die A-Invarianz von $\langle A|V\rangle$, d.h. $A\,\langle A|V\rangle \subset \langle A|V\rangle$. Sei $v = v^1 + A\,v^2 + \cdots + A^{n-1}\,v^n \in \langle A|V\rangle$. Dann ist $A\,v = A\,v^1 + \cdots + A^n\,v^n$. Sei $\chi_A(s) = x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_0$ das charakteristische Polynom von A. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton annulliert das charakteristische Polynom $\chi_A(s)$ die Matrix A selbst:

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}\,A^{n-1} + \cdots + a_0\,I_n = 0 \quad\Leftrightarrow\quad A^n = -(a_{n-1}\,A^{n-1} + \cdots + a_0\,I_n)$$

Also ist

$$A\,v = A\,v^1 + \cdots + A^{n-1}\,v^{n-1} - (a_{n-1}\,A^{n-1} + \cdots + a_0\,I_n)\,v^n \in \langle A|V\rangle\,.$$

Zu zeigen ist noch, daß $\langle A|V\rangle$ der kleinste A-invariante Unterraum ist: Sei U ein A-invarianter Unterraum, der V enthält, d.h. $V \subset U$ und $A\,u \in U$ für alle $u \in U$. Dann gilt für beliebige Vektoren $v^1, \ldots, v^n \in V$ stets:

$$v^1 + A\,v^2 + \cdots + A^{n-1}\,v^n = u \in U \quad\Rightarrow\quad \langle A|V\rangle \subset U$$

■

Lemma 3.4.6
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dann gilt für alle $t > 0$:

(i) $\langle A|\,\mathrm{Im}\,B\rangle = \mathrm{Im}\,W(t)$

(ii) $\langle A|\,\mathrm{Im}\,B\rangle = \mathbb{R}^n \quad\Leftrightarrow\quad W(t) \succ 0$

□

Beweis

(i): Wir zeigen die äquivalente Aussage $\langle A|\operatorname{Im} B\rangle^{\perp} = [\operatorname{Im} W(t)]^{\perp}$.
$(\subset)$: Sei $x \in \langle A|\operatorname{Im} B\rangle^{\perp}$. Wegen $\operatorname{Im} B = \{B\,y : y \in \mathbb{R}^m\}$ gilt

$$\begin{array}{cccc} x^T\,B\,y = 0, & x\,A\,B\,x^T = 0, & \ldots, & x^T\,A^k\,b\,y = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\, y \in \mathbb{R}^m \\ x^T\,B = 0, & x\,A\,B = 0, & \ldots, & x^T\,A^k\,B = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \end{array}$$

und damit

$$\begin{aligned} x^T\,e^{A\,s}\,B &= x^T\,\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\,A^k\right]\,B \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\,x^T\,A^k\,B \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also auch

$$x^T\,W(t) = x^T\,\int_0^t e^{A\,s}\,B\,B^T\,e^{A^T\,s}\,ds = 0$$

und schließlich $x^T\,W(t)\,y = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^m$, also $x \in [\operatorname{Im} W(t)]^{\perp}$.
$(\supset)$: Sei $x \in [\operatorname{Im} W(t)]^{\perp}$, d.h. $x^T\,W(t)\,y = 0\,\forall\, y \in \mathbb{R}^m$. Wähle $y = x$, so folgt

$$0 = x^T\,W(t)\,x = \int_0^t x^T\,e^{A\,s}\,B\,B^T\,e^{A^t\,s}\,x\,ds = \int_0^t \|B^T\,e^{A\,s}\,x\|^2\,ds,$$

so daß $x^T\,e^{A\,s}\,B = 0$ für $s \in [0,t]$. k-maliges Differenzieren von $x^T\,e^{A\,s}\,B$ nach s liefert: $x^T\,A^k\,e^{A\,s}\,B = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}, s \in [0,t]$. Mit $s = 0$ erhält man $x^T\,A^k\,B = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also

$$x^T\,(B\,v^1 + A\,B\,v^2 + \cdots + A^{n-1}\,B\,v^n) = 0 \quad \forall\, v^1, \ldots, v^n \in \mathbb{R}^n$$

und damit letztendlich $x \in \langle A|\operatorname{Im} B\rangle^{\perp}$.

(ii): Definitionsgemäß gilt für Matrizen $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $P \succ 0 :\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Es gilt stets

$$\begin{aligned} \langle x|W(t)\,x\rangle &= x^T\,W(t)\,x = \int_0^t x^T\,e^{A\,s}\,B\,B^T\,e^{A^T\,s}\,x\,ds \\ &= \int_0^t \langle B^T\,e^{A^T\,s}\,x|B\,e^{A\,s}\,x\rangle\,ds \\ &= \int_0^t \|B^T\,e^{A^T\,s}\,x\|^2\,ds \geq 0 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \dim\langle A|\operatorname{Im} B\rangle = n \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} W(t) = n \\ &\Leftrightarrow \quad W(t) = 0 \end{aligned}$$

■

Das Lemma 3.4.6 liefert mit $\mathcal{R}(t) = \langle A|\,\mathrm{Im}\,B\rangle$ ein rein algebraisches Kriterium zur Bestimmung des Erreichbarkeitsraumes.

Bemerkung
Aus $\mathcal{R}(t) = \langle A|\,\mathrm{Im}\,B\rangle$ folgt auch, daß $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}$ nicht von der betrachteten Zeitspanne abhängt. Kann man das System überhaupt von x^0 nach x^1 steuern, so ist dies auch in beliebig kurzer Zeit möglich. Das stellt aber möglicherweise Anforderungen an die verwendete Steuerung, die physikalisch unrealistisch sind. Für unser mathematisches Modell bedeutet dieser Umstand jedoch kein Hindernis, da wir die Steuerung $u(\cdot)$ aus dem Raum der stetigen Funktionen frei wählen können.

Außerdem gilt $\langle A|\,\mathrm{Im}\,B\rangle = \mathrm{Im}[B\ A\,B \ldots A^{n-1}\,B]$. Denn für beliebige Vektoren $v^i \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle A|\,\mathrm{Im}\,B\rangle &= B\,v^1 + A\,B\,v^2 + \cdots + A^{n-1}\,B\,v^n \\ &= [B\ A\,B \ldots A^{n-1}\,B] \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Im}[B\ A\,B \ldots A^{n-1}\,B]\end{aligned}$$

Definition 3.4.7 (Erreichbarkeitsmatrix)
Die Matrix $R(A,B) = [B\ A\,B \ldots A^{n-1}\,B] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt Erreichbarkeitsmatrix [(21)] *des Systems $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$.* □

Korollar 3.4.8
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) *Das System $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ ist im Zeitraum $[0,t_1]$ vollständig steuerbar.*

(ii) $\mathcal{R}(t) = \langle A|\,\mathrm{Im}\,B\rangle = \mathrm{Im}\,W(t) = \mathbb{R}^n$

(iii) $W(t) \succ 0$

(iv) $\mathrm{rg}\,R(A,B) = n$

□

Falls schon bekannt ist, daß das System (7) im Zeitraum $[0,t_1]$ von x^0 nach x^1 steuerbar ist, stellt sich die Frage, wie die zugehörige Steuerung $u(t)$ konkret berechnet werden kann.

(21) reachability matrix

Berechnung einer Steuerung u(t)

Es gilt $\varphi(t_1, 0, x^0, u(\cdot)) = x^1 \;\Leftrightarrow\; \varphi(t_1, 0, 0, u(\cdot)) = x^1 - e^{A\,t_1}\,x^0$. Dann erfolgt die Berechnung in drei Schritten:

1. Berechne $\int_0^{t_1} e^{A\,s}\,B\,B^T\,e^{A^T\,s}\,ds$.

2. Da $x^1 - e^{A\,t_1}\,x \in \operatorname{Im} W(t)$, gibt es einen Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ mit $x^1 - e^{A\,t_1}\,x^0 = W(t_1)\,z$.

3. Die gesuchte Steuerung ist somit durch $u(t) = B^T\,e^{A^T\,(t_1 - t)}\,z$ gegeben für $t \in [0, t_1]$.

Beispiel: Balancieren eines Stabes
Man betrachte das nebenstehende Balancierproblem. Die gesamte Masse sei an der Spitze des Stabes konzentriert. Für kleine Winkel und geringe Winkelgeschwindigkeiten wird das System linearisiert durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$(*) \qquad \ddot{x}(t) = \frac{g}{L}(x(t) - u(t)),$$

wobei $u(\cdot)$ eine skalare Steuerung bezeichnet.

a) Beschreibe das System im Zustandsraum, mit dem Zustandsvektor

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}.$$

Aus $(*)$ folgt

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) &= \dot{x}(t) = z_2(t) \\
\dot{z}_2(t) &= \ddot{x}(t) = \frac{g}{L}\,x(t) - \frac{g}{L}\,u(t) \\
&= \frac{g}{L}\,z_1(t) - \frac{g}{L}\,u(t).
\end{aligned}$$

Damit haben wir das System $(*)$ in die Matrixdifferentialgleichung $\dot{z}(t) = A\,z(t) + b\,u(t)$ umgewandelt, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L} \end{pmatrix}.$$

b) Zeige, daß das System $(*)$ vollständig steuerbar ist.
Ein System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn seine Erreichbarkeitsmatrix $R(A,b) = [b\ A\,b]$ Vollrang besitzt:

$$\begin{aligned} R(A,b) &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{g}{L} \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{g}{L} \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{g}{L} \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt wegen $g \neq 0$.

c) Bestimme analytisch eine Steuerung, die das System mit der speziellen Länge $L = g$ aus dem Anfangszustand $z(0) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ in die (instabile) Ruhelage $z(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ überführt.
Für $L = g$ lautet unser System

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t).$$

Um die gesuchte Kontrollfunktion zu bestimmen, führt man die auf der vorangehenden Seite beschriebenen Schritte durch. In diesem Fall ist $A = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Also gilt

$$\begin{aligned} e^{A\,s} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^s + e^{-s} & e^s - e^{-s} \\ e^s - e^{-s} & e^s + e^{-s} \end{bmatrix} \\ e^{A\,s}\, b\, b^T\, e^{A^T s} &= \begin{bmatrix} e^s + e^{-s} & e^s - e^{-s} \\ e^s - e^{-s} & e^s + e^{-s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} [0 \quad -1] \\ &\quad \begin{bmatrix} e^s + e^{-s} & e^s - e^{-s} \\ e^s - e^{-s} & e^s + e^{-s} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{2\,s} - 2 + e^{-2\,s} & e^{2\,s} - e^{-2\,s} \\ e^{2\,s} - e^{-2\,s} & e^{2\,s} - 2 + e^{-2\,s} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit $t_1 = 1$ folgt

$$W(1) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} e^2 - 4 - e^{-2} & e^2 + e^{-2} - 2 \\ e^2 + e^{-2} - 2 & -e^{-2} + 4 + e^2 \end{bmatrix}.$$

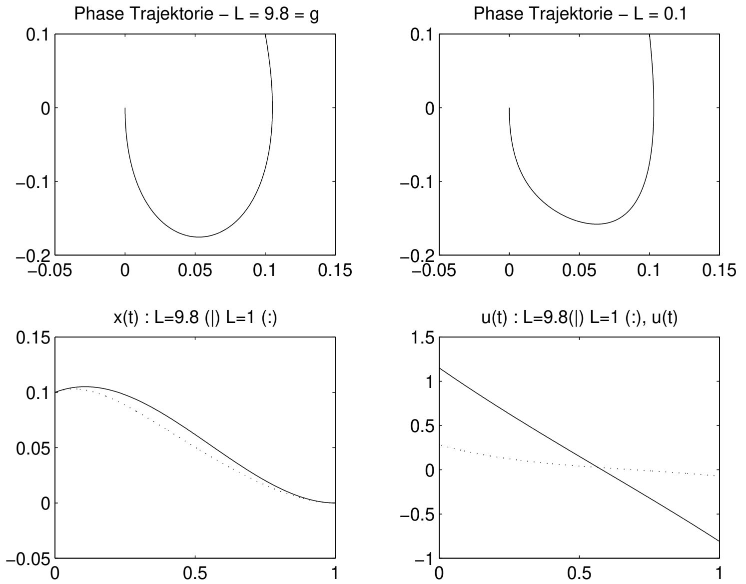


Abbildung 12: *Teil d) des Beispiels: Es gilt einen Stab der Länge* $L = 1$ *aus dem Anfangszustand im Zeitintervall* $[0, 1]$ *in die Ruhelage zu balancieren.*

Da $W(1)$ regulär ist, kann man z^0 eindeutig bestimmen.

$$\begin{aligned} z^0 &= W(1)^{-1}\left(z(1) - e^A z^0\right) \\ &= 8 \begin{bmatrix} e^2 - 4 - e^{-2} & e^2 + e^{-2} - 2 \\ e^2 + e^{-2} - 2 & -e^{-2} + 4 + e^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e + e^{-1} & e - e^{-1} \\ e - e^{-1} & e + e^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{2\,e}{5\,(e^2 - 6 + e^{-2})} \begin{pmatrix} e^{-2} - 3 \\ e^{-2} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die gesuchte Steuerung lautet somit

$$\begin{aligned} u(t) &= b^T e^{A^T(1-t)} z^0 \\ &= \frac{e}{5\,(e^2 - 6 + e^{-2})} [0 \quad -1] \begin{bmatrix} e^{1-t} + e^{t-1} & e^{1-t} - e^{t-1} \\ e^{1-t} - e^{t-1} & e^{1-t} + e^{t-1} \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} e^{-2} - 3 \\ e^{-2} + 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\,(e^{-t} - e^{2-t} + 2\,e^t)}{5\,(e^2 + e^{-2} - 6)}. \end{aligned}$$

d) Bestimme mit Hilfe des Rechners eine Steuerung, die einen Stab der Länge 1 aus dem obigen Anfangszustand im Zeitintervall $[0,1]$ in die Ruhelage bringt. Zeichne die beiden Trajektorien aus c) und d) mit Hilfe des Rechners.

$\square$

Aufgaben

1) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum und (a_k) eine Folge in E. Zeige, daß die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ konvergiert, wenn die reelle Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|$ konvergiert. Wende diesem Satz an, um zu beweisen, daß für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Reihe
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} A^k$$
in $\mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert. (Der Grenzwert der Reihe wird mit e^A bezeichnet.)

2) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $s, t \in \mathbb{R}$. Man beweise

   (i) $e^{A\,t} e^{A\,s} = e^{A\,(t+s)}$

   (ii) $(e^{A\,t})^{-1} = e^{-A\,t}$

   (iii) $P^{-1}\, e^{A\,t}\, P = e^{P^{-1}+A\,P\,t}$.

   Man gebe einen direkten Beweis für die Gleichung

   (iv) $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ wenn $A\,B = B\,A$

   Man gebe ein Beispiel für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$.

3)

4) Man bestimme ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen (d.h. n linear unabhängige Lösungen, $n = 2$ bzw. 3). Zu den linearen Gleichungssystemen $\dot{x} = A\,x$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

   (i) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

   (iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

   (v) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, (vii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   Man zeichne einige charakteristische Orbits um den Gleichgewichtspunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ für jedes dieser 7 Systeme (mit Richtungsangabe).

5) Man löse das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kapitel 4

Zeitvariante lineare Differentialgleichungssysteme

Zu Beginn dieses Kapitels sollen analog zu den Ergebnissen des dritten Kapitels die entsprechenden Begriffe und Sätze auch für zeitvariante Differentialgleichungen entwickelt werden. Im Prinzip sind hierbei nur geringfügige Änderungen notwendig, da sich die meisten Sätze unmittelbar aus den vorhergehenden Kapiteln übertragen lassen. So erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen, den Begriff der *Fundamentalmatrix* und die Methode der *Variation der Konstanten* auch für den zeitvarianten Fall. Dennoch weist diese Vorgehensweise einen entscheidenden Nachteil auf: Da es zu zeitvarianten Matrixfunktionen $A(t)$ keine Eigenwerte im herkömmlichen Sinn geben kann, ist es nicht möglich unsere bisherigen Lösungsmethoden auf zeitvariante, homogene, lineare Systeme zu übertragen. Im allgemeinen existiert für zeitvariante Differentialgleichungen keine abgeschlossene Theorie; man ist lediglich in einigen glücklichen Fällen in der Lage eine analytische Lösung anzugeben.
Es bleibt daher der Numerik vorbehalten, für praktische Anwendungen entsprechende Algorithmen zur näherungsweisen Berechnung von Fundamentalmatrizen bereitzustellen. Dies stellt für die eigentliche Theorie jedoch kein Hindernis dar, da die globale Existenz einer solchen Lösung bereits im zweiten Kapitel nachgewiesen wurde. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels führen wir im zweiten Paragraphen den Begriff des *Logarithmus einer komplexen Matrix* ein und beweisen, daß jede reguläre Matrix einen solchen besitzt. Mithilfe dieser Resultate können wir dann im dritten Paragraphen die sogenannte *Floquet-Darstellung* von Fundamentalmatrizen periodischer Differentialgleichungen herleiten.

4.1 Zeitvariante lineare Differentialgleichungen

Im ersten Kapitel hatten wir bereits im Zusammenhang mit zeitvarianten Differentialgleichungen und der Definition 1.1.10 den *Evolutionsoperator* als Ge-

genstück zum Fluß eingeführt. Die Matrixdarstellung dieses Operators, die sogenannte *Übergangsmatrix*, entspricht einer Fundamentalmatrix im zeitvarianten Fall. Aufgrund der oben angesprochenen Schwierigkeiten soll hier eine Herangehensweise skizziert werden, wie die Übergangsmatrix zumindest prinzipiell berechnet werden könnte (Gantmacher [6], S. 485-486):
Man betrachte die Matrixdifferentialgleichung

$$(*) \quad \dot{X}(t) = A(t)\, X(t),$$

wobei $A(\cdot)$ eine auf dem beliebigen, offenen Intervall I stetige Matrixfunktion ist. Die Lösung von $(*)$, eine Fundamentalmatrix des zugehörigen Differentialgleichungssystems, existiert nach den Resultaten des zweiten Kapitels und wird von uns mit $\Phi(t, t_0)$ bezeichnet. Zerlegt man das Intervall $[t_0, t]$ durch die Einteilung $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t$ mit dem Abstand $\Delta t_k := t_k - t_{k-1}$, so erhält man analog zur Eigenschaft (E2) aus Definition 1.1.10:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_{n-1}) \ldots \Phi(t_2, t_1)\, \Phi(t_1, t_0)$$

Bleibt Δt_k klein, so können wir bis auf Terme zweiter und höherer Ordnung $A(t) \approx A(\tau_k) = const.$ annehmen, wenn wir τ_k aus dem Intervall $]t_{k-1}, t_k[$ wählen. Bis auf Restglieder R_i zweiter Ordnung erhält man dann

$$\Phi(t_k, t_{k-1}) = e^{A(\tau_k)\,\Delta t_k} + R_1(\Delta t_k) = I + A(\tau_k)\,\Delta t_k + R_2(\Delta t_k).$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= e^{A(\tau_n)\,\Delta t_n} \cdot \ldots \cdot e^{A(\tau_2)\,\Delta t_2}\, e^{A(\tau_1)\,\Delta t_1} + \widetilde{R}_1 \\ &= [I + A(\tau_n)\,\Delta t_n] \cdot \ldots \cdot [I + A(\tau_2)\,\Delta t_2]\,[I + A(\tau_1)\,\Delta t_1] + \widetilde{R}_2. \end{aligned}$$

Läßt man nun die Länge der Teilintervalle gegen Null streben, so erhält man die Darstellungen

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= \lim_{\Delta t_k \to 0} e^{A(\tau_n)\,\Delta t_n} \cdot \ldots \cdot e^{A(\tau_2)\,\Delta t_2}\, e^{A(\tau_1)\,\Delta t_1} \\ &= \lim_{\Delta t_k \to 0} [I + A(\tau_n)\,\Delta t_n] \cdot \ldots \cdot [I + A(\tau_2)\,\Delta t_2]\,[I + A(\tau_1)\,\Delta t_1]. \end{aligned}$$

Die rechte Seite des letzten Ausdruckes ist analog zu den Riemannsummen eines gewöhnlichen Integrals zu verstehen. Ihren Grenzwert nennt man *Produktintegral* und definiert

$$\int_{t_0}^{t} [I + A(\tau)\, d\tau] := \lim_{\Delta t_k \to 0} [I + A(\tau_n)\,\Delta t_n] \cdot \ldots \cdot [I + A(\tau_2)\,\Delta t_2]\,[I + A(\tau_1)\,\Delta t_1].$$

Diese Sichtweise wurde zuerst im Jahr 1887 von dem italienischen Mathematiker und Physiker Volterra [(1)] eingeführt. Er lieferte wichtige Beiträge zur Funktionalanalysis, zur Theorie der Differential- und Integralgleichungen, sowie zu zahlreichen Anwendungsgebieten dieser Arbeitsfelder in den Naturwissenschaften. Der Begriff des Produktintegrals wurde von ihm zur Entwicklung eines infinitesimalen Matrizenkalküls benutzt.

---

(1) Vito Volterra (1860-1940)

Der Evolutionsoperator

Grundsätzlich betrachten wir in diesem Paragraphen zeitvariante Differentialgleichungen der Form

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t),$$

wobei $A(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind. Wie üblich erhält man das zugehörige homogene System

$$(2) \qquad \dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$$

durch Wahl von $b(\cdot) \equiv 0$. Aufgrund der linearen Beschränktheit von (1) folgt nach Korollar 2.3.7, daß zu jeder Anfangsbedingung $(t_0, x^0) \in I \times \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $\varphi(t) = \varphi(t; t_0, x^0)$ von (1) mit $\varphi(t_0) = x^0$ auf ganz I existiert. Wie im zeitinvarianten Fall gilt für alle Lösungen von (1):

$$(3) \qquad \varphi(t; t_0, x^0) = \varphi(t; t_1, \varphi(t_1; t_0, x^0)),$$

denn sei $x^1 = \varphi(t_1; t_0, x^0)$ für ein $t_1 \in I$ und

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \varphi(t; t_0, x^0), \\ \varphi_1(t) &= \varphi(t; t_1, x^1), \end{aligned}$$

so gilt: $\varphi_0(t_1) = \varphi(t_1; t_0, x^0) = x^1 = \varphi_1(t_1)$.

Stimmen zwei Lösungen derselben Differentialgleichung zu einem Zeitpunkt überein, so stimmen sie aufgrund der Eindeutigkeitsaussage auf ganz I überein.

Im folgenden betrachten wir zunächst ausschließlich die homogene Differentialgleichung (2). Insbesondere beziehen sich die Lösungen $\varphi(\cdot\,; t_0, x^0)$ immer auf diese.

Satz 4.1.1
Für die Lösungen der homogenen Differentialgleichung (2) $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ gilt:

- *(i) Der Vektorraum $\mathcal{L}_0$ aller Lösungen von (2) ist ein n-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.*
- *(ii) Eine Familie $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ von Lösungen von (2) bildet genau dann eine Basis von $\mathcal{L}_0$, wenn für ein beliebiges $t_0 \in I$ die Vektoren $\varphi_1(t_0), \cdots, \varphi_n(t_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.*

(iii) *Für jedes $t_0 \in I$ ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}_0 \\ x^0 & \longmapsto & \varphi(\cdot\,; t_0, x^0), \end{array}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus.

□

Beweis
Wir beweisen die Aussage in umgekehrter Reihenfolge.

(iii): Man betrachte die Abbildung F, die jedem Anfangswert die zugehörige Lösung der Differentialgleichung (2) zuordnet.

(a) F ist linear, denn sei $\varphi_1(\cdot) = \varphi(\cdot\,; t_0, x^1)$ und $\varphi_2(\cdot) = \varphi(\cdot\,; t_0, x^2)$ so ist $\varphi(\cdot) = \alpha\,\varphi_1(\cdot) + \beta\,\varphi_2(\cdot)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ als Linearkombination zweier Lösungen eines homogenen Systems ebenfalls eine Lösung und besitzt den Anfangswert $\varphi(t_0) = \alpha\,x^1 + \beta\,x^2$. Dann ergibt sich aus dem Eindeutigkeitssatz

$$\varphi(t; t_0, \alpha\,x^1 + \beta\,x^2) = \alpha\,\varphi(t; t_0, x^1) + \beta\,\varphi(t; t_0, x^2), \tag{4}$$

(b) F ist bijektiv, denn es existiert eine Umkehrabbildung

$$\begin{array}{rcl} F^{-1} : \mathcal{L}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \varphi(\cdot) & \longmapsto & \varphi(t_0)\,, \end{array}$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} (F^{-1} \circ F)x^0 &= F^{-1} \circ \varphi(\cdot\,; t_0, x^0) \\ &= \varphi(t_0; t_0, x^0) \\ &= x^0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (F \circ F^{-1})\varphi(\cdot) &= F \circ \varphi(t_0\,; t_0, x^0) \\ &= F \circ x^0 \\ &= \varphi(\cdot\,; t_0, x^0). \end{aligned}$$

(ii): Als Vektorraumisomorphismus überführt die Funktion F Basen des $\mathbb{K}^n$ in Basen des $\mathcal{L}_0$.

(i): Die Dimension von $\mathcal{L}_0$ folgt aus der Existenz eines Vektorraumisomorphismuses zwischen $\mathcal{L}_0$ und dem $\mathbb{K}^n$. Die Lösungen sind stetig differenzierbar, denn $\dot{\varphi}(t) = A(t)\,\varphi(t)$ ist als Produkt stetiger Funktion wiederum stetig.

■

Definition 4.1.2 (FUNDAMENTALSYSTEM UND FUNDAMENTALMATRIX)
Bilden die Funktionen $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ *eine Basis des Lösungsraumes von* $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$*, so heißt* $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ *ein Fundamentalsystem von Lösungen und die Matrixfunktion*

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t) \cdots \varphi_n(t)] \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, K^{n\times n})$$

Fundamentalmatrix für $t \in I$. □

Bemerkung
$\Phi(t)$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix zu (2), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{array}{lrl} (i) & \dot{\Phi}(t) & = A(t)\,\Phi(t) \\ (ii) & \det\Phi(t_0) & \neq 0 \end{array}$$

Dabei bedeutet (i), daß es sich bei den Spalten von $\Phi(t)$ tatsächlich um Lösungen handelt, (ii), daß diese Lösungen linear unabhängig sind.

Mit unserer neuen Begriffsbildung ergibt sich nun:

Definition 4.1.3 (EVOLUTIONSOPERATOR)
Zu einem gegebenen Paar $(t, t_0) \in I^2$ *heißt die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \Phi(t, t_0) : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x^0 & \longmapsto & \varphi(t\,; t_0, x^0), \end{array}$$

der Evolutionsoperator [2] *der Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$. □

Der Evolutionsoperator beschreibt geometrisch gesehen die Gesamtheit aller Integralkurven.

Dabei interpretiert man $\Phi(t, t_0)\,x^0$ als denjenigen Zustand, den das System (2) zum Zeitpunkt t annimmt, wenn es sich zum Zeitpunkt t_0 im Zustand x^0 befunden hat.

Bemerkung
Bezeichne $k_F(v)$ wie üblich die Koordinaten des Vektors v bezüglich der Basis F. Jeder linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen mit den Basen $F = (v^1, \cdots, v^n)$ und $G = (w^1, \cdots, w^n)$ ist eine Matrix $M_G^F(f)$ zugeordnet, so daß $k_W(f(v)) = M_G^F(f)\; k_F(v)$ gilt. Man erhält diese Matrix [3] über den Ausdruck $M_G^F(f) = [\,k_W(f(v^i))\,]_{i=1\ldots n}$.

[2] evolution operator
[3] vgl. etwa „Lineare Algebra“ Skript I, Kap. IV, S.35 ff.

Aus Satz 4.1.1(iii) folgt unmittelbar, daß $\Phi(t,t_0)$ ein Automorphismus darstellt, d.h. den $\mathbb{K}^n$ bijektiv in sich abbildet. Wir identifizieren im folgenden den linearen Operator $\Phi(t,t_0)$ mit der zugehörigen Matrixdarstellung $M_S^S(\Phi(t,t_0))$ bezüglich der Standardbasen und bezeichnen diese mit demselben Symbol:

$$\begin{aligned}
\Phi(t,t_0) &= M_S^S(\Phi(t,t_0)) \\
&= [\, k_S(\Phi(t,t_0)\, e^i)\,]_{i=1,\ldots,n} \\
&= [\Phi(t,t_0)\, e^i]_{i=1,\ldots,n} \\
&= [\, \varphi(t;t_0,e^i)\,]_{i=1,\ldots,n}
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichne $(e^i)_{i=1,\cdots,n}$ die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$.

Definition 4.1.4 (ÜBERGANGSMATRIX)
Die Matrixdarstellung des Evolutionsoperators bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ heißt Übergangsmatrix (oder Zustandsüberführungsmatrix) des Systems und hat die Form

$$\Phi(t,t_0) = [\, \varphi(t;t_0,e^1) \;\cdots\; \varphi(t;t_0,e^n)\,].$$

□

In der j-ten Spalte der Übergangsmatrix steht der Zustand, in den das System (2) den j-ten Standardbasisvektor im Zeitraum $]\,t_0,t\,[$ überführt. Die Übergangsmatrix ist eindeutig bestimmt durch die folgende Matrixdifferentialgleichung (i) mit Anfangswert (ii) bestimmt:

$$\begin{array}{lrcl}
(i) & \dfrac{d}{dt}\,\Phi(t,t_0) & = & A(t)\,\Phi(t,t_0) \\
(ii) & \Phi(t_0,t_0) & = & I_n
\end{array}$$

Lemma 4.1.5
Der Evolutionsoperator weist folgende Eigenschaften auf:

(i) Für beliebige $t,t_0,t_1 \in I$ gilt:

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & \Phi(t_0,t_0) & = & I_n \\
(b) & \Phi(t,t_1)\,\Phi(t_1,t_0) & = & \Phi(t,t_0) \\
(c) & \Phi(t,t_0)^{-1} & = & \Phi(t_0,t)
\end{array}$$

Alle linearen Abbildungen, die diese Bedingungen erfüllen, heißen Evolutionsoperatoren.

(ii) Ist $\Phi(t)$ eine beliebige Fundamentalmatrix zu $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$, so gilt $\Phi(t,t_0) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}$.

(iii) Sind $\Phi(t), \Psi(t)$ Fundamentalmatrizen zu $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$, so existiert eine konstante Matrix $C \in Gl_n(\mathbb{K})$ mit $\Psi(t) = \Phi(t)\,C$.

□

Beweis

(i) (a): $\Phi(t_0,t_0) = [\,\varphi(t_0;t_0,e^i)\,]_{i=1,\ldots,n} = I_n$

(b):

$$\begin{array}{rcl} \Phi(t,t_1)\,\Phi(t_1,t_0)\,x^0 & = & \Phi(t,t_1)\,\varphi(t;t_0,x^0) \\ & \stackrel{(3)}{=} & \varphi(t;t_1,\varphi(t_1;t_0,x^0)) \\ & = & \varphi(t;t_0,x^0) \\ & =: & \Phi(t,t_0)\,x^0 \quad \forall\, x^0 \end{array}$$

(c): Folgt aus (a) und (b), denn

$$\Phi(t_0,t)\,\Phi(t,t_0) \stackrel{(b)}{=} \Phi(t_0,t_0) \stackrel{(a)}{=} I_n \stackrel{(a)}{=} \Phi(t,t) \stackrel{(b)}{=} \Phi(t,t_0)\,\Phi(t_0,t)$$

(ii) Sei $\Phi(t)$ eine beliebige Fundamentalmatrix zu (2). Dann gilt für $t = t_0$: $\Phi(t_0,t_0) = I_n = \Phi(t_0)\,\Phi(t_0)^{-1}$. Stimmen zwei Fundamentalmatrizen zu einem Zeitpunkt überein, so sind sie überall gleich, wie man durch spaltenweise Anwendung des Eindeutigkeitssatzes auf die Lösungen $\varphi(\cdot)$ zeigt.

(iii) Nach (ii) gilt:

$$\begin{array}{rcl} \Psi(t)\,\Psi(t_0)^{-1} & = & \Phi(t,t_0) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\Psi(t) \\ & = & \Phi(t)\,(\Phi(t_0)^{-1}\,\Psi(t_0)) \\ & = & \Phi(t)\,C, \end{array}$$

mit $C := \Phi(t_0)^{-1}\,\Psi(t_0)$.

■

Bemerkung
Die Übergangsmatrix $\Phi(t,t_0)$ entspricht der Bedeutung der Matrix e^{At} im zeitvarianten Fall. Es gibt beliebig viele Fundamentalmatrizen, aber nur eine bezüglich der Standardbasis ausgezeichnete Matrix $\Phi(t,t_0) = M_S^S(\Phi(t,t_0))$. (vgl. Kapitel 3).

Die Wronski-Determinante

Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß das orientierte Volumen eines n-dimensionalen Parallelotops in einem n-dimensionalen Vektorraum, aufgespannt durch die Vektoren $v^1, \ldots, v^n$, gerade durch $\det[v^1 \ldots v^n]$ gegeben ist. Die Liouville'sche Formel gibt Auskunft über die Entwicklung des orientierten Volumens eines Parallelotops, das aus den Spalten einer Fundamentalmatrix gebildet wird.

Sei $\Phi(t) = [\,\varphi_1(t)\,\ldots\,\varphi_n(t)\,]$ eine Fundamentalmatrix zu (2), so ist $W(t) = \det[\,\varphi_1(t)\,\ldots\,\varphi_n(t)\,]$ die zugehörige Wronski-Determinante.

Definition 4.1.6 (Wronski-Determinante)
Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Lösungen von $\dot{x} = A(t)\,x$, so heißt

$$W(t) = \det[\,\varphi_1(t)\,\ldots\,\varphi_n(t)\,],$$

für $t \in I$ die zugehörige Wronski-Determinante. □

Korollar 4.1.7
Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)\,x$ und $t \in I$. Die Funktionen $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ bilden genau dann eine Basis des Lösungsraumes, wenn für ein $t_0 \in I \quad W(t) \neq 0$ gilt. □

Beweis
$(\Rightarrow)$: Folgt aus Satz 4.1.1.(ii).
$(\Leftarrow)$: Ist die Familie $\varphi_i(\cdot)_{i=1,\ldots,n}$ von Lösungen linear abhängig, so gilt dies auch für die Vektoren $\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)$. Also folgt:

$$\begin{aligned} W(t_0) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0) \text{ sind linear unabhängig} \\ &\Rightarrow \quad \varphi_i(\cdot)_{i=1,\ldots,n} \text{ ist linear unabhängig} \end{aligned}$$

■

Satz 4.1.8 (Liouville'sche Formel)
Sei $\Phi(t) = [\,\varphi_{ij}(t)\,]$ eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)\,x$. Dann gilt für die zugehörige Wronski-Determinante, für alle $t \in I$ und ein beliebiges $t_0 \in I$:

$$W(t) = \det \Phi(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, A(s)\, ds} \qquad t \in I. \tag{5}$$

□

Dabei bezeichnet $\mathrm{Sp}(A)$ die Spur einer quadratischen Matrix A die durch

$$\mathrm{Sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$$

gegeben ist.

Beweis
Der Beweis beruht auf der Herleitung einer Matrixdifferentialgleichung in $W(t)$, aus deren Lösung dann die Liouville'sche Formel folgt. Aus der linearen Algebra ist uns die folgende Darstellung der Determinante bekannt:

$$W(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, \varphi_{1\,\sigma(1)}(t) \cdot \cdots \cdot \varphi_{n\,\sigma(n)}(t)$$

Da die Funktionen $\varphi_{ij}(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ differenzierbar sind ist auch $W(t)$ selbst differenzierbar und man erhält

$$\begin{aligned}\dot{W}(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, & \dot{\varphi}_{1\,\sigma(1)}(t)\, \varphi_{2\,\sigma(2)}(t) \cdot \cdots \cdot \varphi_{n\,\sigma(n)}(t) \\ & + \varphi_{1\,\sigma(1)}(t)\, \dot{\varphi}_{2\,\sigma(2)}(t) \cdot \cdots \cdot \varphi_{n\,\sigma(n)}(t) \\ & + \varphi_{1\,\sigma(1)}(t)\, \varphi_{2\,\sigma(2)}(t) \cdot \cdots \cdot \dot{\varphi}_{n\,\sigma(n)}(t)\end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned} W_i(t) &:= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, \varphi_{1\,\sigma(1)}(t) \cdot \cdots \cdot \varphi_{i-1\,\sigma(i-1)}(t)\, \dot{\varphi}_{i\,\sigma(i)}(t) \cdot \cdots \cdot \varphi_{n\,\sigma(n)} \\ &= \det \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\varphi}_{i1}(t) & \cdots & \dot{\varphi}_{in}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

also

$$\dot{W}(t) = W_1(t) + \cdots + W_n(t) \tag{6}$$

Aus $\dot{\Phi}(t) = A(t)\,\Phi(t)$ folgt $\dot{\varphi}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\,\varphi_{kj}(t)$. Demnach ist

$$W_i(t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\,\varphi_{k1}(t) & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\,\varphi_{kn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Aus den Rechenregeln für Determinanten folgt

$$\begin{aligned}
W_i(t) &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) \det \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k1}(t) & \cdots & \varphi_{kn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix} \\
&= a_{ii}(t) \det \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k1}(t) & \cdots & \varphi_{kn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

da für $k \neq i$ jeweils zwei Zeilen den gleichen Eintrag haben. Wir können daher schreiben:

$$\begin{aligned}
W_i(t) &= a_{ii}(t) \det \Phi(t) \\
&= a_{ii}(t)\, W(t)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (6) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t) &= a_{11}(t)\, W(t) + \cdots + a_{nn}(t)\, W(t) \\
&= (\operatorname{Sp} A(t))\, W(t),
\end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung liefert den Beweis

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(s)\, ds}.$$

■

Da durch das $\boxed{\text{Fundamentalsystem der Fluß}}$ Φ gegeben ist, läßt sich anhand der Liouville'schen Formel nun eine Aussage über das von ihm eingenommene Volumen treffen:

Bemerkung

(i) $\operatorname{Sp} A(t) < 0$ für alle $t \in I$
$\Rightarrow$ das Volumen von $\Phi(t)$ sinkt mit wachsendem t

(ii) $\operatorname{Sp} A(t) > 0$ für alle $t \in I$
$\Rightarrow$ das Volumen von $\Phi(t)$ steigt mit wachsendem t

(iii) $\operatorname{Sp} A(t) \equiv 0$ für alle t
$\Rightarrow$ das Volumen von $\Phi(t)$ bleibt für alle t erhalten

Beispiel: Gleichung der Schaukel

$$\ddot{y}(t) + b(t)\, y(t) = 0$$

Man schreibe die Gleichung in ein System erster Ordnung mit $x(t) = \binom{y(t)}{\dot{y}(t)}$ um. Dann lautet die zugehörige Zustandsgleichung der Schaukel:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Es ist $\operatorname{Sp} A(s) \equiv 0$ für alle s. Damit ist der Fluß der Schaukelgleichung also volumenerhaltend. □

Die adjungierte Differentialgleichung

In diesem Abschnitt soll die aus der linearen Algebra bekannte Theorie der adjungierten Abbildungen auf Fundamentalmatrizen übertragen werden. Zu diesem Zweck identifizieren wir jede Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ mit einem Automorphismus $F : \mathbb{K} \xrightarrow{bij} \mathbb{K}$.

Zunächst jedoch eine Erinnerung an die allgemeine Definition: Seien V, W euklidische oder unitäre Vektorräume, d.h. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und auf V, W sei jeweils ein Skalarprodukt definiert, und sei zusätzlich mit $F : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen den beiden Räumen gegeben.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{V} \arrow[r, "\boldsymbol{F}"'] \arrow[d, "\widetilde{\boldsymbol{s}}"'] & \boldsymbol{W} \arrow[d, "\widetilde{\boldsymbol{r}}"] \\ \boldsymbol{V^*} & \boldsymbol{W^*} \arrow[l, "\boldsymbol{F^*}"'] \end{tikzcd}$$

Definition 4.1.9 (Adjungierte Abbildung)
Eine lineare Abbildung[4] $F^* : W \longrightarrow V$ *heißt die zu* $F : V \longrightarrow W$ *adjungierte Abbildung, wenn für alle Vektoren* $v \in V$ *und* $w \in W$ *gilt:*

$$(F\, v)\, w = v(F^*\, w). \tag{7}$$

□

[4] adjoint map

Mit (7) gilt natürlich auch $w\,(F\,v) = (F^*\,w)\,v$. Im allgemeinen braucht es allerdings zu einer beliebigen linearen Abbildung $F: V \longrightarrow W$ keine adjungierte Abbildung zu geben. Im Falle der Existenz ist F^* jedoch eindeutig bestimmt. Sind V und W endlichdimensional, $(v^1, \ldots, v^n)$ und $(w^1, \ldots, w^m)$ Orthonormalbasen von V beziehungsweise W und ist A die Matrix von F bezüglich dieser Basen, so entspricht der adjungierten Abbildung F^* hinsichtlich dieser Basen die Matrix A^*.

Bemerkung
Für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ bedeutet $A^* := (\overline{A})^T$. Offensichtlich gilt $A^{**} = A$ und $\det A = \det A^*$.

Diese Resultate aus der linearen Algebra gelten auch dann, wenn V und W zusammenfallen. Man betrachtet in diesem Fall Endomorphismen auf V. Ist F zusätzlich bijektiv, so erhalten wir damit wir damit den Begriff des adjungierten Automorphismus.

Definition 4.1.10 (Adjungierte Differentialgleichung)
Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -A^*(t)\,x(t) \tag{8}$$

heißt die zu $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ adjungierte Differentialgleichung [5] . □

Die zu (8) adjungierte Differentialgleichung ist natürlich wiederum $\dot{x} = A(t)\,x(t)$.

Satz 4.1.11
Die Abbildung $\Phi(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix zu $\dot{x} = A(t)\,x(t)$, wenn $\Phi^*(\cdot)^{-1}$ eine Fundamentalmatrix für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -A^*(t)\,x(t)$ ist. □

Beweis
Sei $\Phi(t)$ Fundamentalmatrix zu $\dot{x} = A(t)\,x$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\left(\Phi(t)\,\Phi(t)^{-1}\right) \\
&= \dot{\Phi}(t)\,\Phi(t)^{-1} + \Phi(t)\,\frac{d}{dt}\,\Phi(t)^{-1} \\
\frac{d}{dt}\,\Phi(t)^{-1} &= -\Phi(t)^{-1}\,\dot{\Phi}(t)\,\Phi(t)^{-1} \\
&= -\Phi(t)^{-1}\,A(t)\,\Phi(t)\,\Phi(t)^{-1} \\
&= -\Phi(t)^{-1}\,A(t)
\end{aligned}$$

[5] adjoint ODE

Mit $A^* = [a_{ij}]^* = (\overline{A})^T = [\overline{a}_{ji}]$ folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\Phi^*(t)^{-1}) &= (-\Phi(t)^{-1}A(t))^* \\ &= -A^*(t)\,\Phi^*(t)^{-1}\end{aligned}$$

■

Korollar 4.1.12
Sei $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix zu $\dot{x} = A(t)\,x(t)$ und $\Psi(t) = \Phi^*(t)^{-1}$ eine Fundamentalmatrix zu $\dot{x}(t) = -A^*(t)\,x(t)$, so ist

(9) $$\Phi(t) = \Psi^*(t)^{-1}C \quad ,t\in I$$

eine konstante, reguläre Matrix. □

Beweis
Aufgrund der Symmetrie der adjungierten Gleichung ist $\Psi^*(t)^{-1}$ Fundamentalmatrix zu (2). Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 4.1.5(iii). ■

Variation der Konstanten für zeitvariante Systeme

Wir leiten nun mit Hilfe einer geeigneten Zustandsraumtransformation die Methode der *Variation der Konstanten* für höherdimensionale Systeme her. Dazu gehen wir von der inhomogenen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$$

aus. Man betrachte nun die zeitvariante Koordinatentransformation

(10) $$z(t) = S(t)^{-1}\,x(t),$$

wobei $S(t) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}), t \longmapsto S(t)$ differenzierbar ist.

Satz 4.1.13
Eine Funktion $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ist genau dann eine Lösung von (1), wenn $\psi(t) = S(t)^{-1}\,\varphi(t)$ die folgende nach (10) transformierte Differentialgleichung löst:

(11) $$\dot{z}(t) = S(t)^{-1}\,[A(t)\,S(t) - \dot{S}(t)]\,z(t) + S(t)^{-1}\,b(t)$$

Ist $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix zur Differentialgleichung (2), so ist $\psi(t) = S(t)^{-1}\,\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix zu

(12) $$\dot{z}(t) = S(t)^{-1}\,[A(t)\,S(t) - \dot{S}(t)]\,z(t)$$

und umgekehrt. □

Beweis
Sei φ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) auf I und sei $\psi(t) := S(t)^{-1}\,\varphi(t)$ für $t \in I$. Dann ist $\varphi(t) = S(t)\,\psi(t)$ und $\dot\varphi(t) = \dot S(t)\,\psi(t) + S(t)\,\dot\psi(t)$. Also gilt:

$$\dot\psi(t) = S(t)^{-1}\,\dot\varphi(t) - S(t)^{-1}\,\dot S(t)\,\psi(t).$$

Da φ Lösung ist, kann Gleichung (1) benutzt werden.

$$\dot\psi(t) = s(t)^{-1}\,[A(t)\,\varphi(t) + b(t)] - s(t)^{-1}\,\dot S(t)\,\psi(t)$$

Mit $\varphi(t) = s(t)\,\psi(t)$ folgt:

$$\dot\psi(t) = s(t)^{-1}\,[A(t)\,S(t) - \dot S(t)]\,\psi(t) + S(t)^{-1}\,b(t)$$

Die Umkehrung erhält man analog.
Der zweite Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus dem ersten. Denn eine Fundamentalmatrix ist eine Basis von Lösungen. Für eine einzelne Lösung haben wir die Behauptung für die homogene Differentialgleichung bereits gezeigt, daß die lineare Unabhängigkeit aus der Invertierbarkeit von $\Psi(t) = S(t)^{-1}\,\Phi(t)$ folgt. ∎

Bemerkung
Sind $\Phi(t,t_0)$, beziehungsweise $\Psi(t,t_0)$ die Übergangsmatrizen zu den Differentialgleichung (2), beziehungsweise (12), so gilt

$$\Psi(t,t_0) = S(t)^{-1}\,\Phi(t,t_0)\,s(t_0). \tag{13}$$

Denn sei $\Phi(t)$ beliebige Fundamentalmatrix zu $\dot x = A(t)\,x$. Dann ist $\Psi(t) = S(t)^{-1}\,\Phi(t)$ Fundamentalmatrix zu $\dot z(t) = S(t)^{-1}\,[A(t)\,S(t) - \dot S(t)]\,z(t)$, also

$$\begin{aligned} \Psi(t,t_0) &= \Psi(t)\,\Psi(t_0)^{-1} \\ &= S(t)^{-1}\,\Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\,s(t_0) \\ &= S(t)^{-1}\,\Phi(t,t_0)\,s(t_0) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den folgenden Spezialfall: $S(t) \equiv S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$. Dann hat die Gleichung (11) die Form

$$\dot z(t) = S^{-1}\,A(t)\,S\,z(t) + S^{-1}\,b(t) \tag{14}$$

mit zugehöriger Übergangsmatrix des homogenen Systems

$$\Psi(t,t_0) = S^{-1}\,\Phi(t,t_0)\,S. \tag{15}$$

Die Übergangsmatrizen sind also zueinander ähnlich.
Jetzt wollen wir als nächsten Schritt die zeitvariante Koordinatentransformation benutzen, um die zeitvariante inhomogene Differentialgleichung (1) in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu überführen.

Sei dazu $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix zur zeitvarianten homogenen Differentialgleichung. Wähle $S(t) = \Phi(t)$. Dann hat die Gleichung

$$\dot{z}(t) = S(t)^{-1}\,[A(t)\,S(t) - \dot{S}(t)]\,z(t) + S(t)^{-1}\,b(t)$$

die folgende Form:

$$\dot{z}(t) = \Phi(t)^{-1}\,[A(t)\,\Phi(t) - \dot{\Phi}(t)]\,z(t) + \Phi(t)^{-1}\,b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{z}(t) = \Phi(t)^{-1}\,b(t)$$

Dies ist dann ein System mit konstanten Koeffizienten.

Satz 4.1.14 (Variation der Konstanten)
Für beliebige $(t_0, x^0) \in I \times \mathbb{K}^n$ ist die eindeutige Lösung φ von $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$ mit $\varphi(t_0) = x^0$ gegeben durch

$$\varphi(t) = \varphi(t; t_0, x^0) = \Phi(t, t_0)\,x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\,b(s)\,ds. \tag{16}$$

□

Bemerkung
Dabei stellt der Term $\Phi(t, t_0)\,x^0$ die freie Bewegung und das Integral $\int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\,b(s)\,ds$ die erzwungene Bewegung aus der Ruhelage dar.

Beweis
Es existiert die Lösung $\varphi(t)$ und sie ist eindeutig bestimmt: $\varphi(t) = \varphi(t; t_0, x^0)$.
Nach Satz 4.1.13 gilt:
Sei $\Phi(t)$ Fundamentalmatrix zu (2). Dann ist nach dem Satz $\psi(t) = \Phi(t)^{-1}\,\varphi(t)$ eine Lösung der transformierten Gleichung $\dot{z}(t) = \Phi(t)^{-1}\,b(t)$ mit $\psi(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}\,x^0$. Also:

$$\psi(t) = \Phi(t_0)^{-1}\,x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\,b(s)\,ds$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \Phi(t)\,\psi(t) \\
&= \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\,x^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\,b(s)\,ds \\
&= \Phi(t, t_0)\,x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\,b(s)\,ds
\end{aligned}$$

■

4.2 Der Logarithmus einer Matrix

Als weiteres Hilfsmittel aus der linearen Algebra benötigen wir für den weiteren Aufbau der Theorie den Begriff des komplexen Logarithmus einer Matrix. Von besonderem Interesse ist die Struktur der Eigenwerte eines Logarithmus einer Matrix, die in Satz 4.2.3 zum Ausdruck kommt. Diese Struktur kann in der Floquet-Theorie für die Bestimmung der sogenannten charakteristischen Multiplikatoren hilfreich sein .

Wir betrachten in diesem Abschnitt ausschließlich Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$. Da über $\mathbb{C}$ die Eindeutigkeit des Logarithmus und die Injektivität der Exponentialfunktion nicht mehr gegeben ist, machen wir vorab eine Bemerkung zur komplexen Exponentialfunktion und zum komplexen Logarithmus.

Bemerkung

(i) Die komplexe Exponentialfunktion:
Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $e^{2\,k\,\pi\,i} = 1$, also gilt auch $e^{z+2\,k\,\pi\,i} = e^z e^{2\,k\,\pi\,i} = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die komplexe Exponentialfunktion ist also $2\pi i$-periodisch. Außerdem bildet sie $\mathbb{C}$ surjektiv auf $\mathbb{C}^*$ ab.

(ii) Der komplexe Logarithmus:
Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine Darstellung $z = |z|e^{i\,\theta}$ mit $\theta \in [\,0, 2\,\pi[$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist der komplexe Logarithmus gegeben durch

$$\ln(z) = \ln(|z|e^{i\,\theta}) = \ln|z| + i\,\theta + 2k\pi\,i,$$

wobei $\theta \in [\,0, 2\,\pi[$. Zwei Logarithmen einer komplexen Zahl z unterscheiden sich also um ein Vielfaches von $2\pi\,i$.

Definition 4.2.1 (Logarithmus einer Matrix)
Sei $A \in Gl_n(\mathbb{K})$. Dann heißt $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Logarithmus von A, wenn $e^L = A$ gilt. Man schreibt auch $L = \ln(A)$. □

Wegen der obigen Bemerkung ist der Logarithmus einer Matrix A nicht eindeutig bestimmt, denn für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:
$e^{L+2\,k\,\pi\,i\,I_n} = e^L e^{2\,k\,\pi\,i\,I_n} = A.$

Mit L ist somit ebenfalls $L + 2\,k\,\pi\,i\,I_n$ ein Logarithmus von A.

Der Rest dieses Abschnitts ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil wird gezeigt, daß man sich darauf beschränken kann, die Existenz des Logarithmus einer Matrix A auf die Existenz eines zu A gehörigen Jordan-Blocks zurückzuführen. Im zweiten Teil wird die Existenz des Logarithmus bewiesen. Im dritten Teil wird schließlich der Logarithmus zu einem Jordan-Block angegeben. Die Resultate werden abschließend nocheinmal in einem Satz festgehalten.

(i) Beschränkung auf Jordan-Normalform

Aufgrund der folgenden Betrachtung können wir uns darauf beschränken die Existenz des Logarithmus für einen einzigen Jordan-Block nachzuweisen: Sei dazu $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ gegeben, A_J die Jordan-Normalform von A und sei S die Transformationsmatrix mit

$$A_J = SAS^{-1}.$$

Weiterhin sei L ein Logarithmus zu A. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^L = A \quad \Leftrightarrow \quad Se^LS^{-1} &= SAS^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad e^{SLS^{-1}} &= A_J\,, \end{aligned}$$

d.h., SLS^{-1} ist ein Logarithmus von A_J. Seien nun $A_{J1}, \ldots, A_{Jr}$ die einzelnen Jordan-Blöcke von A_J und $L_1, \ldots, L_r$ jeweils Logarithmen zu $A_{J1}, \ldots, A_{Jr}$, also $e^{L_i} = A_{Ji}$ für $i = 1, \ldots, r$, so gilt:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{diag}(L_1,\ldots,L_r)} &= \mathrm{diag}(e^{L_1}, \ldots, e^{L_r}) \\ &= \mathrm{diag}(A_{J1}, \ldots, A_{Jr}) \\ &= A_J \end{aligned}$$

Die Berechnung des Logarithmus auf der Blockdiagonalen geht also blockweise von statten. Es bleibt also das Problem einen Logarithmus zu einem einzelnen Jordan-Block zu bestimmen.

(ii) Existenz des Logarithmus

Wir betrachten o.B.d.A. einen Jordan-Block der Matrix A von der Ordnung m zu einem Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ und bezeichnen diesen der Einfachheithalber mit $J(\lambda, m)$. Dann gilt weiterhin

$$J(\lambda, m) = \lambda\, I_m + N_m,$$

wobei N_m die zugehörige nilpotente Matrix mit $N_m^m = 0$ ist. Da wir zu $J(\lambda, m)$ einen Logarithmus konstruieren wollen, also eine Matrix L_J mit $e^{L_J} = J(\lambda, m)$ suchen, können wir annehmen, daß $\lambda \neq 0$ ist. Denn für eine beliebige quadratische Matrix L ist e^L stets invertierbar. Deshalb kann die folgende Umformung auch bedenkenlos durchgeführt werden:

$$J(\lambda, m) = \lambda\,(I_m + \frac{1}{\lambda}\,N_m)\,.$$

Wir werden jetzt im weiteren Verlauf nur noch die Matrix $I_m + \frac{1}{\lambda}\,N_m$ betrachten. Denn angenommen wir haben eine Matrix $L_m(\lambda)$ gefunden mit

$$e^{L_m(\lambda)} = I_m + \frac{1}{\lambda}\,N_m\,,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} e^{(\ln\lambda)I_m + L_m(\lambda)} &= e^{(ln\lambda)I_m}e^{L_m(\lambda)} \\ &= \lambda\,(I_m + \frac{1}{\lambda}\,N_m) \\ &= J(\lambda, m)\,, \end{aligned}$$

und $\ln(\lambda)I_m + L_m(\lambda)$ wäre somit ein Logarithmus von $J(\lambda, m)$.

Nun haben wir also das Problem einen Logarithmus eines Jordan-Blockes dahingehend eingegrenzt, einen Logarithmus von $I_m + \frac{1}{\lambda}\,N_m$ zu bestimmen. Die Idee die uns die Existenz dieses Logarithmus liefert ist, die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= -\frac{1}{\lambda}N_m\,(I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^{-1}\,X(t) \\ X(0) &= I_m \end{aligned}$$

zu betrachten.

Zunächst zeigen wir, daß $I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m$ immer invertierbar ist. Dazu erinnern wir uns an die aus der Analysis bekannte Reihendarstellung

$$\log(1-\alpha) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\,\alpha^{k+1}, \qquad |\alpha| < 1$$

Differentiation nach α auf dem Konvergenzradius liefert:

$$(1-\alpha)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\,\alpha^k.$$

Setzen wir nun für $\alpha := t\,\frac{1}{\lambda}N_m$ so erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
(I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^k
\end{aligned}
$$

Da

$$
\begin{aligned}
(I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m)\,\sum_{k=0}^{m-1} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^k &= \sum_{k=0}^{m-1} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^k - \sum_{k=0}^{m-1} t^{k+1}\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^{k+1} \\
&= I_m - t^m\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^m \\
&= I_m \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^k\,(I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m)
\end{aligned}
$$

gilt also, daß $(I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^k$ die inverse Matrix zu $I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m$ ist. Wir können nun also unsere Differentialgleichung auch in der Form

$$
\begin{aligned}
\dot{X}(t) &= -\frac{1}{\lambda}N_m\,\sum_{k=0}^{m-1} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^k\,X(t) \\
&= -\sum_{k=0}^{m-1} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^{(k+1)}\,X(t)
\end{aligned}
$$

schreiben.

Hieraus folgt, daß $X(t) = e^{-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{k+1}(t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^{k+1}}$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist,denn es gilt

$$
\begin{aligned}
\dot{X}(t) &= -\sum_{k=0}^{m-2} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^{k+1}\,e^{-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{k+1}(t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^{k+1}} \\
&\overset{N_m^m=0}{=} -\sum_{k=0}^{m-1} t^k\,(\frac{1}{\lambda}N_m)^{k+1}\,e^{-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{k+1}(t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^{k+1}} \\
&= -\frac{1}{\lambda}N_m\,(\sum_{k=0}^{m-1}(t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^k)\,X(t) \\
&= -\frac{1}{\lambda}N_m\,(I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^{-1}\,X(t).
\end{aligned}
$$

Offensichtlich ist aber $X(t) = I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m$ ebenfalls eine Lösung des Anfangswertproblems. Aus dem Eindeutigkeitssatz für Lösungen folgt nun, daß beide Lösungen gleich sein müssen. Damit haben wir das folgende Lemma bewiesen.

Lemma 4.2.2
Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$I_m - t\,\frac{1}{\lambda}N_m = e^{-\sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1}\,(t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^{k+1}} \tag{17}$$

□

Bemerkung
Setzen wir in dem Lemma nun $t = 1$, so erhalten wir den gesuchten Logarithmus zu $I_m - \frac{1}{\lambda}N_m$. Damit ist die Existenz gezeigt.

(iii) Form eines Logarithmus zu einem Jordan-Block

Sei ein Jordan-Block $J(\lambda, m)$ der Ordnung m zu einem Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ von A gegeben:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{m\times m}$$

Dann ist nach (ii) ein Logarithmus von $J(\lambda, m)$ gegeben durch

$$\ln(\lambda)I_m + L_m(\lambda) = \ln(\lambda)I_m + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1}\,(t\,\frac{1}{\lambda}N_m)^{k+1}.$$

Berechnet man nun die rechte Seite dieser Gleichung konkret, so lautet der gesuchte Logarithmus

$$L(\lambda, m) = \begin{bmatrix} \ln\lambda & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{2\,\lambda} & \cdots & \frac{(-1)^{m-2}}{m-1}\,\frac{1}{\lambda^{m-1}} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(-1)^{m-3}}{m-2}\,\frac{1}{\lambda^{m-2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ln\lambda \end{bmatrix}.$$

Aus diesen Resultaten erhalten wir schließlich den folgenden Satz:

Satz 4.2.3
Jede reguläre Matrix $A \in Gl_n(\mathbb{C})$ besitzt einen Logarithmus $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$, d.h. $e^L = A$, mit der Eigenschaft, daß die Jordan-Struktur von L zu einem Eigenwert $\mu \in \sigma(L)$ gleich der Jordan-Struktur von A zum Eigenwert $e^\mu \in \sigma(A)$ ist. □

Bemerkung
Dabei ist mit der Jordan-Struktur die Anzahl der Jordan-Blöcke gemeint.

Beispiel:
Sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ -\lambda & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

und $\lambda \in \mathbb{C}^*$ beliebig vorgegeben. Mithilfe der Transformationsmatrix

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

erhalten wir die Jordan-Normalform von A:

$$\begin{aligned} J &= S^{-1}AS \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ -\lambda & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da J nun in Jordan-Normalform vorliegt ist ein Logarithmus $L_J$von J gegeben durch:

$$L_J = \begin{bmatrix} \ln(\lambda) & \frac{1}{\lambda)} \\ 0 & \ln(\lambda) \end{bmatrix}$$

Somit ist ein Logarithmus zu A schließlich gegeben durch

$$\begin{aligned} e^{L_J} = J \quad \Leftrightarrow \quad e^{L_J} &= S^{-1}AS \\ \Leftrightarrow \quad Se^{L_J}S^{-1} &= A \\ \Leftrightarrow \quad e^{SL_JS^{-1}} &= A\,, \end{aligned}$$

und es folgt

$$SL_JS^{-1} = \begin{bmatrix} \ln(\lambda - \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} & \ln(\lambda + \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

□

4.3 Floquet-Theorie

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts ermöglichen eine genaue Analyse des Verhaltens *periodischer Differentialgleichungen*, also solcher, für deren Systemmatrix $A(t+\omega) = A(t)$ gilt und zwar für eine feste Periode $\omega \in \mathbb{R}$. Die folgenden Überlegungen gehen auf den französischen Mathematiker Gaston Floquet [(6)] zurück.
Zu Beginn des Abschnitts werden wir uns mit homogenen periodischen Differentialgleichungen beschäftigen. Über den Ansatz der sogenannten *charakteristischen Multiplikatoren* gelingt es ohne viel Mühe, die Frage nach der Existenz periodischer Lösungen zufriedenstellend zu beantworten. Mit Satz 4.3.6 erhält man durch die Floquet-Darstellung eine Normalform für Fundamentalmatrizen homogener periodischer Differentialgleichungen und kann dann die Stabilitätskriterien des dritten Kapitels auf diesen Spezialfall übertragen. Im weiteren Verlauf der Theorie ergibt sich aus dem *Satz von Ljapunov*, daß sich auch ein periodisches System mit Hilfe einer zeitvarianten Koordinatentransformation stets in ein System mit konstanten Koeffizienten überführen läßt. Abschließend erweitern wir die Theorie, um auch inhomogene periodische Differentialgleichungen untersuchen zu können.
Wie stets im Fall von zeitvarianten Differentialgleichungen ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen zwar durch die entsprechenden Sätze des zweiten Kapitels gesichert, es erweist sich jedoch oft als schwierig, konkret eine Fundamentalmatrix zu einem vorliegen System anzugeben. Die Anwendung dieser Theorie steht also unter dem Vorbehalt, daß eine solche Fundamentalmatrix bereits gegeben ist.

Charakteristische Multiplikatoren und periodische Lösungen

Im Mittelpunkt unserer Betrachtungen stehen zunächst homogene periodische [(7)] Differentialgleichungen der Form

(18) $$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \quad \text{mit} \quad A(t+\omega) = A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

[(6)] Gaston Floquet (1847-1920)
[(7)] periodic

Dabei stellt $A(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ wie üblich eine stetige, matrixwertige Funktion und $\omega \in \mathbb{R}$ die Periode des Systems dar. Wesentliches Kennzeichen der Lösungen einer periodischen Differentialgleichung vom Typ (18) ist es, daß mit $\varphi(t)$ auch die um eine Periode verschobene Funktion $\psi(t) = \varphi(t+\omega)$ eine Lösung des Systems ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\varphi(t+\omega) &= A(t+\omega)\,\varphi(t+\omega) \\ &= A(t)\,\varphi(t+\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dabei interessiert man sich naturgemäß besonders für die periodischen Lösungen $\varphi(t) = \varphi(t+\omega)$ der Differentialgleichung.

Lemma 4.3.1
Sei $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix zur periodischen Differentialgleichung (18). Dann existiert eine reguläre Matrix $C \in Gl_n(\mathbb{K})$ mit

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\,C. \tag{19}$$

Ist $\Psi(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ eine weitere Fundamentalmatrix mit $\Psi(t+\omega) = \Psi(t)\,\widetilde{C}$, so sind C und $\widetilde{C}$ ähnlich zueinander. □

Beweis
Sei $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix zu (18). Nach unserer Vorüberlegung sind mit den Spalten $\varphi_i(t)$ auch auch die verschobenen Funktionen $\varphi_i(t+\omega)$ Lösungen zu (18). Das System $\{\varphi_i(t+\omega)\}_{i=1,\dots,n}$ ist linear unabhängig, da zum Zeitpunkt $t = 0$ $\Phi(0+\omega) = \Phi(\omega)$ gilt und $\Phi(\cdot)$ als Fundamentalmatrix regulär ist. Also ist auch $\Phi(t+\omega)$ eine Fundamentalmatrix von (18) und die Darstellung (19) folgt direkt aus Lemma 4.1.5 (iii).
Sei nun $\Psi(t)$ eine weitere Fundamentalmatrix zu (18) mit $\Psi(t+\omega) = \Psi(t)\,\widetilde{C}$. Dann existiert jedenfalls eine Matrix $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ mit $\Psi(t) = \Phi(t)\,P$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \Phi(0)\,C &\overset{(19)}{=} \Phi(\omega) \\ &= \Psi(\omega)\,P^{-1} \\ &= \Psi(0)\,\widetilde{C}\,P^{-1} \\ &= \Phi(0)\,P\widetilde{C}\,P^{-1}, \end{aligned}$$

also die gewünschte Ähnlichkeitsaussage $C = P\,\widetilde{C}\,P^{-1}$. ■

Definition 4.3.2 (CHARAKTERISTISCHER MULTIPLIKATOR)
[8] *Gilt für eine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ von (18) die Gleichung $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\,C$, so heißen die Eigenwerte von C die charakteristischen Multiplikatoren der Differentialgleichung (18).* □

[8] characteristic multiplier

Die charakteristischen Multiplikatoren sind dabei aufgrund der Ähnlichkeitsaussage von Lemma 4.3.1 unabhängig von einer speziellen Wahl von $\Phi(t)$.
Sei nun $\Phi(t, t_0)$ die Übergangsmatrix des Systems (18). Für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die um ein k-faches der Periode verschobene Übergangsmatrix $\Phi(t + k\,\omega, t_0 + k\,\omega)$.

Lemma 4.3.3
Sei $\Phi(t, t_0)$ die Übergangsmatrix der Differentialgleichung (18). Dann gilt für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{llcl} (i) & \Phi(t + k\,\omega, t_0 + k\,\omega) & = & \Phi(t, t_0) \\ (ii) & \Phi(t + k\,\omega, 0) & = & \Phi(t, 0)\,\Phi^k(\omega, 0) \end{array}$$

□

Dabei bestimmt der Operator $\Phi(\omega, 0)$ das Langzeitverhalten des durch die Differentialgleichung (18) beschriebenen Systems, während $\Phi(t, 0)$ eingeschränkt auf $[0, \omega[$ das Systemverhalten innerhalb einer Periode erfaßt. Man beachte, daß Lemma 4.3.3(i) keineswegs aussagt, daß die Übergangsmatrix ω-periodisch ist. Dies wäre im Fall von $\Phi(t + \omega, t_0) = \Phi(t, t_0)$ gegeben.

Beweis

(i) Sei $\Psi(t) := \Phi(t + k\,\omega, t_0 + k\,\omega)$. $\Psi(t)$ ist eine Fundamentalmatrix zu (18), denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi(t) &= A(t + k\,\omega)\,\Phi(t + k\,\omega, t_0 + k\,\omega) \\ &= A(t)\,\Psi(t). \end{aligned}$$

Zusätzlich folgt für $t = t_0$:

$$\Psi(t_0) = \Phi(t_0 + k\,\omega; t_0 + k\,\omega) = I_n = \Phi(t_0, t_0).$$

Stimmen zwei Fundamentalmatrizen eines Systems zu einem Zeitpunkt überein, so sind sie aufgrund des Eindeutigkeitssatzes auf dem betrachteten Intervall identisch.

(ii) Wählt man speziell $t_0 = 0$, so folgt aus (i) und Lemma 4.1.5(i):

$$\begin{aligned} \Phi(t + k\,\omega; 0) &= \Phi(t + k\,\omega; k\,\omega)\,\Phi(k\,\omega; (k-1)\,\omega) \cdots \Phi(\omega, 0) \\ &\overset{(i)}{=} \Phi(t, 0)\,\Phi^k(\omega, 0) \end{aligned}$$

■

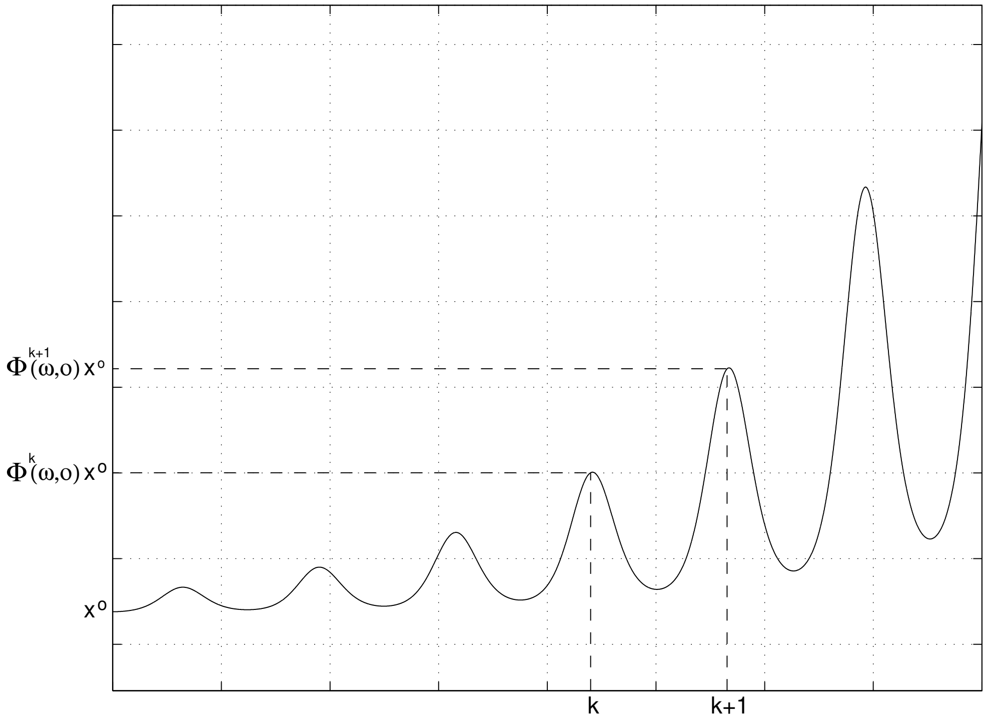


Abbildung 1: *Langzeitverhalten einer nichtperiodischer Lösung der periodischen Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = (sin(t) + 1/12)\,x(t)$*. Der Operator* $\Phi(t,0)$ *bestimmt dabei das Verhalten innerhalb einer Periode, der Operator* $\Phi^k(\omega,0)$ *den Anfangspunkt der* k*-ten Periode und damit insgesamt das Langzeitverhalten.*

Aus Lemma 4.1.5 folgt außerdem für $k = 1$:

$$\Phi(t+\omega,0) = \Phi(t,0)\,\Phi(\omega,0), \tag{20}$$

Die charakteristischen Multiplikatoren von (18) sind also gerade die Eigenwerte des Operators $\Phi(\omega,0)$. Die Fundamentalmatrix ist also zumindest dann periodisch, wenn $\Phi(\omega,0) = I_n$ gilt. Nun ist es auch möglich, die Frage nach der Existenz einzelner periodischer Lösungen zu beantworten.

Satz 4.3.4
Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$*. Dann existiert genau dann eine nicht-triviale Lösung* $\varphi(\cdot)$ *der periodischen Differentialgleichung (18) mit der Eigenschaft*

$$\varphi(t+\omega) = \lambda_0\,\varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

wenn λ_0 *ein charakteristischer Multiplikator ist.* □

Beweis
Jede Lösung läßt sich in der Form $\varphi(t;0,x^0) = \Phi(t,0)\,x^0$ schreiben. Daher ist $\varphi(\cdot)$ genau dann nicht-trivial, wenn $x^0 = \varphi(0) \neq 0$ gilt.

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi(t+\omega) & = & \lambda_0\,\varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \Phi(t+\omega,0)\,x^0 & = & \lambda_0\,\Phi(t,0)\,x^0 \\ \Leftrightarrow & \Phi(t,0)\,\Phi(\omega,0)\,x^0 & = & \lambda_0\,\Phi(t,0)\,x^0 \\ \Leftrightarrow & \Phi(\omega,0)\,x^0 & = & \lambda_0\,x^0, \end{array}$$

also genau dann wenn λ_0 charakteristischer Multiplikator von $\Phi(\omega,0)$ ist.

■

Die Lösungen $\varphi(\cdot)$ von (18) mit der Eigenschaft (21) sind gerade die Funktionen der Form $\varphi(t) = \Phi(t,0)\,x^0$, wobei x^0 ein Eigenvektor von $\Phi(\omega,0)$ zum Eigenwert λ_0 ist.

Korollar 4.3.5
Die periodische Differentialgleichung (18) besitzt genau dann eine periodische Lösung, wenn $\lambda_0 = 1$ ein charakteristischer Multiplikator von $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ ist. Es sind dies die Lösungen $\varphi(t;0,x^0)$, deren Anfangswerte die Eigenvektoren von $\Phi(\omega,0)$ zum Eigenwert 1 sind. Ist die Matrix $\Phi(\omega,0)$ diagonalisierbar, so erhält man auf diese Weise ein Fundamentalsystem von Lösungen zu (18). □

Beispiel: PERIODISCHE UND NICHTPERIODISCHE LÖSUNGEN
Man betrachte die einfache periodische Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (sin(t) + 1/12)\,x(t); \qquad x(t_o) = x^o.$$

Wie auf Seite 36 beschrieben, erhält man die folgende Lösung dieser homogenen Differentialgleichung:

$$\varphi(t;t_o,x^o) = x^o\,e^{-cos(t)+1/12\,t+(cos(t_o)-t_o/12)}.$$

Wegen $\Phi(t,t_o) = [\varphi(t;t_o,e_i)]_{i=1,\ldots,n}$ für Systeme n-ter Ordnung, kommt man in diesem skalaren Spezialfall auf $\Phi(t,t_o) = \varphi(t;t_o,e_1) = e^{-cos(t)+1/12\,t+(cos(t_o)-t_o/12)}$. Sei wie oben $t_o = 0$ gewählt. Damit ist es ein leichtes den charakteristischen Multiplikator der Differentialgleichung anzugeben: $\Phi(\omega,0) = \Phi(2\,\pi,0) = e^{\frac{\pi}{6}}$. Der Eigenwert eines Skalars ist das Skalar selber, wegen $e^{\frac{\pi}{6}} \neq 1$ ist die Lösung nichtperiodisch. Die auf Seite 36 besprochene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -sin(t)\,x(t); \qquad x(0) = 3/2$$

besitzt dagegen den charakteristischen Multiplikator $\Phi(\omega,0) = e^{1-cos(2\,\pi)} = 1$ und mithin periodische Lösungen (vgl. Abbildung 10 im ersten Kapitel). □

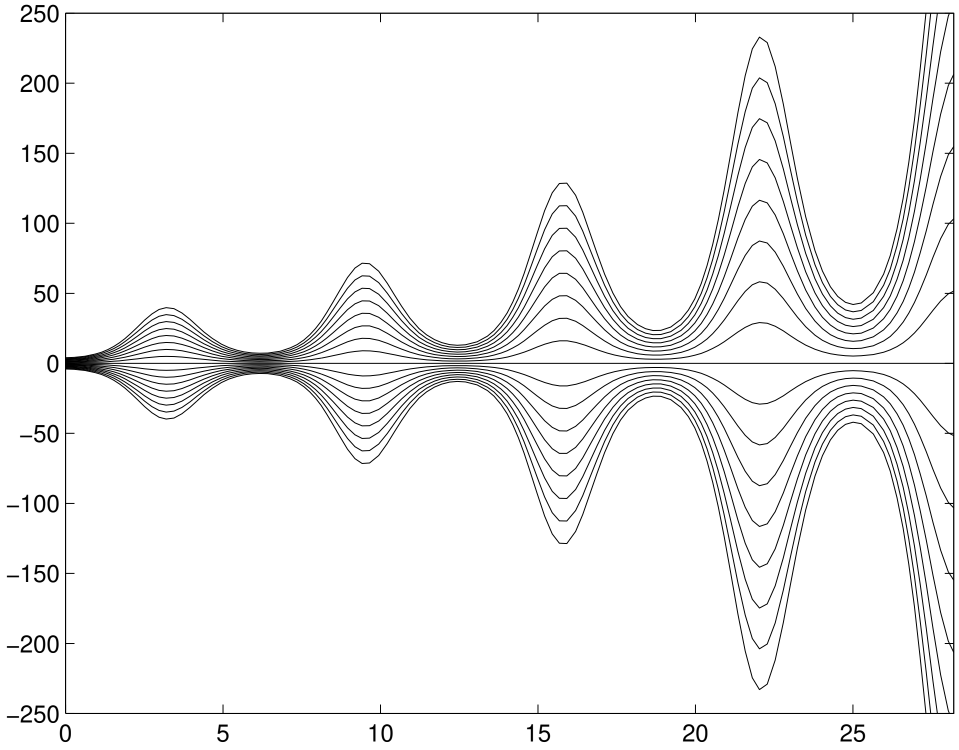


Abbildung 2: *Die periodische Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = (sin(t) + 1/12)\, x(t)$

Die Floquet-Darstellung

Satz 4.3.6 (Satz von Floquet)
Jede Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ *von* $\dot{x}(t) = A(t)\, x(t)$ *kann in der Form*

$$\Phi(t) = P(t)\, e^{L\, t} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

der sogenannten Floquet-Darstellung, geschrieben werden, wobei $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *konstant und* $P(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$ *eine* ω*- periodische differenzierbare Matrixfunktion mit regulärem Bild* $P(t)$ *ist. Die Eigenwerte von* $e^{L\,\omega}$ *sind die charakteristischen Multiplikatoren von (18) und die Übergangsmatrix besitzt die spezielle Form*

$$\Phi(t, t_0) = P(t)\, e^{L\,(t-t_0)}\, P(t_0)^{-1} \tag{23}$$

Dabei beschreibt $P(t)$ *das Verhalten innerhalb einer Periode und* $e^{L\,t}$ *das Langzeitverhalten des Systems.* □

Beweis
Sei $\Phi(t)$ Fundamentalmatrix zu (18). Dann existiert nach Lemma 4.3.1 eine Matrix $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ mit $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\, C$. Da C regulär ist, läßt sich gemäß Satz (4.2.3) ein Logarithmus $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ finden, so daß $e^{\omega L} = C$. Dann gilt:

$$(*) \quad \Phi(t+\omega) = \Phi(t)\, e^{\omega L}$$

Definiert man nun $P(\cdot) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch $\Phi(t) = P(t)\, e^{L\,t}$, d.h. setzt

$$P(t) := \Phi(t)\, e^{-L\,t},$$

so weist $P(\cdot)$ die geforderten Eigenschaften auf:

(i) $P(t)$ ist invertierbar, denn $\Phi(t),\, e^{-L\,t} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$.

(ii) $P(t)$ ist als Produkt zweier differenzierbarer Matrixfunktionen differenzierbar.

(iii) $P(t)$ ist ω-periodisch, da für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} P(t+\omega) &= \Phi(t+\omega)\, e^{-L(\omega+t)} \\ &\overset{(*)}{=} \Phi(t)\, e^{\omega L}\, e^{-\omega L}\, e^{-L\,t} \\ &= \Phi(t)\, e^{-L\,t} \\ &= P(t) \end{aligned}$$

Aufgrund der Beziehung $(*)$ sind die Eigenwerte von $e^{L\,\omega}$ die charakteristischen Multiplikatoren von (18).
Zu zeigen bleibt noch die Aussage (23):

$$\begin{aligned} \Phi(t,t_0) &= \Phi(t)\, \Phi(t_0)^{-1} \\ &= P(t)\, e^{L\,t}\, (P(t_0)\, e^{L\,t_0})^{-1} \\ &= P(t)\, e^{L\,(t-t_0)}\, P(t_0)^{-1} \end{aligned}$$

■

Bemerkung

(i) Selbst wenn $A(t)$ reell ist, sind L und $P(t)$ im allgemeinen komplex.

(ii) Die Eigenwerte μ_i von L heißen *charakteristische Exponenten* [9] der Differentialgleichung (18). Gilt $\Phi(\omega, 0) = C = e^{\omega L}$ wie im Satz, so erhält

[9] characteristic exponent

man man die charakteristischen Exponenten mithilfe der charakteristischen Multiplikatoren λ_i durch

$$\mu_i = \frac{1}{\omega} \ln(\lambda_i). \tag{24}$$

Denn sei $\mu_i \in \sigma(L)$ und v_i ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt

$$\Phi(\omega, 0)\, v_i = e^{\omega L}\, v_i = e^{\omega \mu_i},$$

so daß $\lambda_i := e^{\omega \mu_i} \in \sigma(\Phi(\omega, 0))$ ein charakteristischer Multiplikator ist. Man beachte, daß die charakteristischen Exponenten im Gegensatz zu den charakteristischen Multiplikatoren aufgrund von

$$e^{\omega\,(\mu + \frac{2\pi i}{\omega})} = e^{\omega\,\mu}$$

nur bis auf ein Vielfaches von $\frac{2\pi i}{\omega}$ festgelegt sind. Ihr Realteil ist jedoch eindeutig bestimmt, denn aus (24) folgt:

$$e^{\omega\,\mu_i} = \lambda_i \quad \Rightarrow \quad |\lambda_i| = e^{\omega\, Re(\mu_i)}$$

also

$$Re(\mu_i) = \frac{1}{\omega} \ln|\lambda_i|. \tag{25}$$

Wir können nun die Ergebnisse zur Stabilität linearer, homogener Differentialgleichungen aus Satz (3.3.1) auf das System (18) übertragen.

Korollar 4.3.7
Sei $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix zur periodischen Differentialgleichung (18). Dann gilt mit den Bezeichnungen aus dem Satz von Floquet:
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\lim_{t\to\infty} \|\Phi(t)\| = 0$

(ii) $\lim_{k\to\infty} \|\Phi(\omega, 0)^k\| = 0$

(iii) $\lim_{t\to\infty} \|e^{L\,t}\| = 0$

(iv) Die charakteristischen Multiplikatoren μ_i von $\dot{x}(t) = A(t)\, x(t)$ liegen alle im offenen Einheitskreis, d.h. $|\mu_i| < 1$.

Außerdem gilt:

$$\begin{array}{rlcl} & \exists\, c_0 > 0 & : & \|\Phi(t)\| \leq c_0, \quad \forall t \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \exists\, c_1 > 0 & : & \|e^{L\,t}\| \leq c_1 \\ \Leftrightarrow & \exists\, c_2 > 0 & : & \|\Phi(\omega,0)^k\| \leq c_2 \end{array}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren λ_i in der abgeschlossenen linken Halbebene liegen und die Jordan-Blöcke der λ_i, die auf der imaginären Achse liegen, die Ordnung 1 haben, d.h. die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen ist. □

Beweis
(i) ⇒ (ii): Aus Lemma 4.3.3 (ii) folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|\Phi(\omega,0)^k\| &= \lim_{k\to\infty} \|\Phi^{-1}(t,0)\,\Phi(t+k\,\omega,0)\| \\ &= \lim_{k\to\infty} \|\Phi(0)\,\Phi^{-1}(t)\,\Phi(t+k\,\omega)\,\Phi^{-1}(0)\| \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $\Phi(0)$ und $\Phi^{-1}(0)$ konstante Matrizen sind.
(ii) ⇒ (iii): Aus der Periodizität von $P(\cdot)$ folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|\Phi(\omega,0)^k\| &\overset{(23)}{=} (P(\omega)\,e^{L\,\omega}\,P^{-1}(0))^k \\ &= (P(0)\,e^{L\,\omega}\,P^{-1}(0))^k \\ &= P(0)\,(e^{L\,\omega})^k\,P^{-1}(0). \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \|e^{L\,t}\| &= \lim_{k\to\infty} \|e^{L\,(k\,\omega)}\| \\ &= \lim_{k\to\infty} \|P^{-1}(0)\,\Phi^k(\omega,0)P(0)\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) ⇒ (i):

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \|\Phi(t)\| &\overset{(22)}{=} \lim_{t\to\infty} \|P(t)\,e^{L\,t}\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) ⇔ (iv): Mit Satz(3.3.1)folgt:

$$\begin{array}{cl} & \lim_{t\to\infty} \|e^{L\,t}\| = 0 \\ \Leftrightarrow & Re(\mu_i) < 0, \quad \forall \mu_i \in \sigma(L) \\ \overset{(25)}{\Leftrightarrow} & Re(\lambda_i) < 0, \quad \forall \lambda_i \in \sigma(\Phi(\omega)) \end{array}$$

■

Die charakteristischen Multiplikatoren einer periodischen Differentialgleichung bestimmen also ihr Stabilitätsverhalten:

1. Das System (18) $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ ist:

asymptotisch stabil,	wenn $\lvert\lambda\rvert < 1$ für alle $\lambda \in \sigma(\Phi(\omega,0))$ gilt.
stabil,	wenn $\lvert\lambda\rvert \leq 1$ für alle $\lambda \in \sigma(\Phi(\omega,0))$ gilt und für die Eigenwerte mit $\lvert\lambda\rvert = 1$ die algebraische Vielfachheit von λ gleich der geometrischen ist.
instabil	in allen anderen Fällen.

Man betrachte nun die folgende, zeitvariante Koordinatentransformation zur Differentialgleichung (18)

$$z(t) = P^{-1}(t)\,x(t),$$

wobei $P(\cdot)$ die in Satz 4.3.6 eingeführte Matrix ist. Die Transformationsmatrix P besitzt die Eigenschaft regulär und differenzierbar zu sein und es gilt:

- $P(t)$ ist stetig differenzierbar und ω-periodisch, also beschränkt
- $P(t)^{-1}$ ist stetig differenzierbar und ω-periodisch, also beschränkt
- $\dot{P}(t)$ ist stetig und ω-periodisch, also beschränkt

Hieraus ergibt sich die sogenannte Ljapunov-Transformation.

Definition 4.3.8 (Ljapunov-Transformation)
Eine Koordinatentransformation $z = S(t)^{-1}\,x$, mit stetig differenzierbarer Transformationsmatrix $S : \mathbb{R} \longrightarrow Gl_n(\mathbb{K})$, heißt Ljapunov-Transformation, wenn $S(\cdot), \dot{S}(\cdot)$ und $S(\cdot)^{-1}$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt sind. □

Definition 4.3.9 (Reduzible Differentialgleichung)
Eine zeitvariante Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ heißt reduzibel[10], wenn sie durch eine Ljapunov-Transformation in ein zeitinvariantes Differentialgleichungssystem überführt werden kann. □

[10] reducible

Satz 4.3.10 (Satz von Ljapunov)
Jede periodische lineare homogene Differentialgleichung ist reduzibel. □

Beweis
Man wähle die Koordinatentransformation $z(t) = P(t)^{-1}\, x(t)$. Diese überführt das System (18) in

$$(*) \quad \dot{z}(t) = P(t)^{-1}\,[A(t)\,P(t) - \dot{P}(t)]\,z(t),$$

denn es gilt: Durch Differentiation erhält man aus $P(t)P^{-1}(t) = I_n$ den Ausdruck

$$\dot{P}^{-1}(t) = -P^{-1}(t)\,\dot{P}(t)\,P^{-1}(t),$$

woraus $(*)$ folgt:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= P^{-1}(t)\,\dot{x}(t) + \dot{P}^{-1}(t)\,x(t) \\ &= P^{-1}(t)\,A(t)x(t) - P^{-1}(t)\,\dot{P}(t)\,P^{-1}(t)\,x(t) \\ &= P(t)^{-1}\,[A(t)\,P(t) - \dot{P}(t)]\,z(t). \end{aligned}$$

Ist $\Phi(t,0)$ die Übergangsmatrix des Systems (18), so besitzt $(*)$ die Übergangsmatrix

$$\Psi(t,t_0) := P(t)^{-1}\,\Phi(t,t_0)\,P(t_0) = e^{L\,(t-t_0)}.$$

Dies folgt aus:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t,t_0) &= P(t)^{-1}\,\dot{\Phi}(t,t_0)\,P(t_0) + \dot{P}^{-1}(t)\,\Phi(t,t_0)\,P(t_0) \\ &= P(t)^{-1}\,A(t)\,P(t)\,\Psi(t,t_0)\,P(t_0)^{-1}\,P(t_0) \\ &\quad -P^{-1}(t)\,\dot{P}(t)\,P^{-1}(t)\,P(t)\,\Psi(t,t_0)\,P(t_0)^{-1}\,P(t_0) \\ &= P(t)^{-1}\,[\,A(t)\,P(t)\, - \dot{P}(t)\,]\,\Psi(t,t_0) \end{aligned}$$

und $\Psi(t_0,t_0) = P(t_0)^{-1}\,P(t_0) = I_n$.
Die Matrix $e^{L\,(t-t_0)}$ ist aber Übergangsmatrix der linearen, zeitvarianten Differentialgleichung

$$(**) \quad \dot{z}(t) = L\,z(t).$$

Da eine lineare homogene Differentialgleichung vollständig durch ihre Übergangsmatrix bestimmt ist, müssen $(*)$ und $(**)$ identisch sein, d.h.

$$P(t)^{-1}\,[A(t)\,P(t) - \dot{P}(t)] = L$$

Also ist $(*)$ zeitinvariant. ■

Inhomogene periodische Differentialgleichungen

Im folgenden wenden wir uns den inhomogenen periodischen Differentialgleichungen zu. Am interessantesten ist der Fall, bei dem das inhomogene Glied $b(\cdot)$ dieselbe Periode ω wie die zugehörige Systemmatrix aufweist

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t), \tag{26}$$

so daß $A(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetige, ω-periodische Funktionen sind. Die Frage ist naheliegend, unter welchen Bedingungen (26) periodische Lösungen besitzt. Es ist klar, daß mit zwei ω-periodische Lösungen $\varphi(\cdot)$ und $\psi(\cdot)$ auch jede Linearkombination $\alpha\,\varphi(\cdot) + \beta\,\psi(\cdot)$ ω-periodisch ist.

Satz 4.3.11
Es gilt:

(a) *Seien $\mathcal{L}_p$, beziehungsweise $\mathcal{L}_p^*$ die Vektorräume der ω-periodischen Lösungen der homogenen Systeme $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$, beziehungsweise $\dot{z}(t) = -A^*(t)\,z(t)$ und $\Phi(t,t_0)$ die Übergangsmatrix zu $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$. Dann gilt:*

$$\dim \mathcal{L}_p = \dim \mathcal{L}_p^* = \dim \operatorname{Ker}[\Phi(\omega,0) - I].$$

(b) *Die Differentialgleichung (26) besitzt genau dann eine nicht-triviale ω-periodische Lösung, wenn für alle ω-periodischen Lösungen $z \in \mathcal{L}_p^*$*

$$\int_0^\omega z^*(s)\,b(s)\,ds = 0 \tag{27}$$

gilt.

□

Im Verlauf des Beweises werden wir des öfteren von dem folgenden Lemma aus der linearen Algebra Gebrauch machen:

Lemma 4.3.12
Es gilt:

(i) $\operatorname{rg}(A\,B) = \operatorname{rg}(B)$ *für reguläre Matrizen A.*

(ii) $\operatorname{rg}(A^*) = \operatorname{rg}(A)$, *denn Transposition oder Konjungation ändern nichts an der linearen Unabhängigkeit der Spalten.*

(iii) $\operatorname{rg}(-A) = \operatorname{rg}(A)$, *denn einfache Spaltenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.*

(iv) $A\,B\,x = 0 \Leftrightarrow B\,x = 0$ *für reguläre Matrizen A.*

□

Zur Überprüfung der zweiten Aussage des Satzes 4.3.11 ist es natürlich ausreichend, das Kriterium (27) für eine Basis $(z_1^*, \ldots, z_n^*)$ von $\mathcal{L}_p^*$ zu verifizieren. Regt das Eingangssignal $b(\cdot)$ die Eigenschwingungen des Systems an, so kommt es zur Resonanzkatastrophe. Ist dies nicht der Fall, so garantiert der Satz 4.3.11 die Existenz periodischer Lösungen.

Beweis

a): Nach Korollar 4.3.5 ist eine Lösung $\varphi(\cdot, 0, x^0)$ des homogenen Systems $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ genau dann ω-periodisch, wenn gilt:

$$\begin{array}{lrcl} & \Phi(\omega,0)\,x^0 & = & x^0 \\ \Leftrightarrow & (\Phi(\omega,0) - I_n)\,x^0 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \varphi(0) & \in & \mathrm{Ker}(\Phi(\omega,0) - I_n) \end{array}$$

Man betrachte nun den Vektorraumisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} F:\ \mathcal{L}_p & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\Phi(\omega,0) - I_n) \\ \varphi(\cdot) & \longmapsto & \varphi(0), \end{array}$$

der jeder ω-periodischen Lösung ihren Anfangswert (nach Korollar 4.3.5 einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$) zuordnet. F ist injektiv aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für Lösungen und surjektiv, da zu jedem Eigenvektor des charakteristischen Multiplikators $\lambda = 1$ genau eine Lösung existiert. Die Linearität ergibt sich aus der Linearität von F^{-1} mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes:

$$\varphi(t, 0, \alpha\, x_1^0 + \beta, x_2^0) = \alpha\, \varphi(t, 0, x_1^0) + \beta\, \varphi(t, 0, x_2^0)$$

Die Dimension eines inhomogenen Systems ist gleich der Dimension des zugehörigen homogenen, so daß $\dim L_p = \dim \mathrm{Ker}(\Phi(\omega,0) - I_n)$ gilt. Noch zu zeigen bleibt: $\dim \mathcal{L}_p = \dim \mathcal{L}_p^*$. Sei dazu $\Psi(t,t_0)$ die Übergangsmatrix des adjungierten Systems $\dot{z}(t) = -A(t)^*\, z(t)$. Gemäß Satz 4.1.11 gilt $\Psi(t,t_0) = (\Phi^*(t,t_0))^{-1}$ und aus unseren bisherigen Überlegungen folgt sofort $\dim \mathcal{L}_p^* = \dim \mathrm{Ker}(\Phi(\omega,0) - I_n)$. Für den Rang dieses Operators gilt aber gerade

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(\Psi(t,t_0) - I_n) & = & \mathrm{rg}(\Phi^*(t,t_0)^{-1} - I_n) \\ & = & \mathrm{rg}(\Phi^*(t,t_0)^{-1}\,[I_n - \Phi^*(t,t_0)] \\ & \overset{(i)}{=} & \mathrm{rg}(I_n - \Phi(t,t_0))^* \\ & \overset{(ii)}{=} & \mathrm{rg}(I_n - \Phi(t,t_0)) \end{array}$$

so daß für die Dimension des Lösungsraumes mit Hilfe der Rangformel für lineare Abbildungen folgt:

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{L}_p^* &= \dim \operatorname{Ker}(\Psi(\omega,0) - I_n) \\
&= n - \dim \operatorname{Im}(\Psi(\omega,0) - I_n) \\
&= n - \operatorname{rg}(\Psi(\omega,0) - I_n) \\
&= n - \operatorname{rg}(I_n \Psi(\omega,0)) \\
&\overset{(iii)}{=} \dim \operatorname{Ker}(\Phi(\omega,0) - I_n) \\
&= \dim \mathcal{L}_p
\end{aligned}$$

b): Eine Lösung $\varphi(t,0,x^0)$ ist genau dann ω-periodisch, wenn $\varphi(0) = \varphi(\omega)$ gilt. Mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten folgt dann also für alle $x^0 \in \mathbb{K}^n$:

$$\varphi(t,0,x^0) = \Phi(t,0)\, x^0 + \int_0^t \Phi(t,s)\, b(s)\, ds$$

ist ω-periodisch genau dann, wenn

$$x^0 = \Phi(\omega,0)\, x^0 + \int_0^\omega \Phi(\omega,s)\, b(s)\, ds.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$(I_n - \Phi(\omega,0))\, x^0 = \int_0^\omega \Phi(\omega,s)\, b(s)\, ds$$

gilt. Dieser Sachverhalt kann wie folgt interpretiert werden: $\varphi(\cdot)$ ist genau dann eine ω-periodische Lösung von (26), wenn entweder $b(t) \equiv 0$ und x^0 ein Eigenvektor des Operators $\Phi(\omega,0)$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ (homogener Fall) oder die Steuerung $0 \neq b(\cdot)$ korrigiert die Eigendynamik des Systems geeignet.
Die letzte Gleichung weist die Form $C\, x^0 = c$ auf. Für welche nicht-trivialen Anfangswerte x^0 ist diese Gleichung lösbar? Dies ist genau dann der Fall, wenn c in $\operatorname{Im}(C)$ liegt. Dieses Kriterium ist gleichbedeutend damit, daß jeder Vektor, der senkrecht auf allen Spalten von C steht, auch senkrecht auf dem Vektor c steht. Diese Forderung ist notwendig und hinreichend. Die Gleichung $C\, x = c$ ist also genau dann lösbar, wenn für alle $z \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$z^*\, C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^*\, c = 0$$

Also existiert genau dann eine nicht-triviale ω-periodische Lösung von (26), wenn für alle $z \in \mathbb{K}^n$ folgt:

$$\text{(28)} \qquad z^*\, (I_n - \Phi(\omega,0)) = 0 \quad \Rightarrow \quad z^* \int_0^\omega \Phi(\omega,0)\, b(s)\, ds$$

Nun gilt

$$\begin{array}{rrcl} & z^* \left(I_n - \Phi(\omega,0)\right) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \left(I_n - \Phi^*(\omega,0)\right) z & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\Phi^*(\omega,0)^{-1} - I_n\right) z & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\Psi(\omega,0) - I_n\right) z & = & 0 \end{array}$$

Der Anfangswert z erzeugt also gerade die ω-periodischen Lösungen des zugehörigen homogenen adjungierten Systems. Die Gleichung (28) gilt also genau dann, wenn für alle $z \in \operatorname{Ker}(\Psi(\omega,0) - I_n)$ gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & z^* \displaystyle\int_0^\omega \Phi(\omega,s)\, b(s)\, ds & = & 0 \\ \Leftrightarrow & z^*\, \Phi(\omega,0) \displaystyle\int_0^\omega \Phi(0,s)\, b(s)\, ds & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\Phi^*(\omega,0)\, z\right)^* \displaystyle\int_0^\omega \Phi(0,s)\, b(s)\, ds & = & 0 \\ \overset{(\dagger)}{\Leftrightarrow} & \displaystyle\int_0^\omega z^*\, \Phi(0,s)\, b(s)\, ds & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \displaystyle\int_0^\omega \left(\Phi^*(0,s)\, z\right)^* b(s)\, ds & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \displaystyle\int_0^\omega \left(\Phi^*(s,0)^{-1}\, z\right)^* b(s)\, ds & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \displaystyle\int_0^\omega \left(\Psi(s,0)\, z\right)^* b(s)\, ds & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \displaystyle\int_0^\omega z^*(s)\, b(s)\, ds & = & 0 \end{array}$$

Dabei folgt $(\dagger)$ aufgrund von $I_n - \Phi^*(\omega,0)\, z = 0$ und die letzte Äquivalenz, da der Anfangswert $z \in \mathbb{K}^n$ nach Voraussetzung eine ω-periodische Lösung des adjungierten Systems generiert. Damit ist $z(t) := \Psi(t,0)\, z$ die Lösung, für deren Anfangswert $z(0) = z$ gilt, und es folgt $z(\cdot) \in \mathcal{L}_p^*$.

■

Korollar 4.3.13
Sei $A(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig und ω-periodisch. Die periodische Differentialgleichung (6) besitzt für alle stetigen ω-periodischen $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine nicht-triviale ω-periodische Lösung genau dann, wenn das homogene System $\dot{x}(t) = A(t)\, x(t)$ keine nicht-trivialen ω-periodischen Lösungen besitzt, d.h. 1 *kein charakteristischer Multiplikator von $\dot{x}(t) = A(t)\, x(t)$ ist.* □

Beweis
Die Gleichung

$$\left(I_n - \Phi(\omega,0)\right) x^0 = \int_0^\omega \Phi(\omega,s)\, b(s)\, ds$$

ist genau dann für beliebige $b(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ lösbar, wenn $(I_n - \Phi(\omega,0))$ Vollrang besitzt, d.h. $\dim \operatorname{Ker}(I_n - \Phi(\omega,0)) = 0$. ■

Kapitel 5

Abhängigkeit von Parametern

Bislang haben wir uns ausschließlich mit Differentialgleichungen beschäftigt, die nur von der Zeit t abhängen. In diesem Kapitel soll nun die Abhängigkeit einer Differentialgleichung von einem *Parameter* μ untersucht werden. Dabei behandeln wir zwei unterschiedliche Fragestellungen:
Zunächst betrachten wir die stetige Abhängigkeit einer Differentialgleichung von ihrem Parameter, die entsteht, wenn die Anfangsbedingung der Differentialgleichung unverändert bleibt und der Parameter μ variiert. Im ersten Paragraphen soll untersucht werden, was unter diesen Bedingungen über die Lösung einer parameterabhängigen Differentialgleichung ausgesagt werden kann. Dabei stellt sich heraus, daß die Lösung stetig von μ abhängig ist.
Im zweiten Fall untersuchen wir, was geschieht, wenn man statt dessen den Parameter fixiert und die Anfangsbedingung verändert. Es zeigt sich, daß die Lösung dieser Differentialgleichung, nicht nur stetig in μ, sondern sogar noch bezüglich μ differenzierbar ist.
Die Abhängigkeit der Lösungen von Parametern spielt bei der Beschreibung von Prozessen in den Naturwissenschaften eine wichtige Rolle. Denn in diesem Zusammenhang treten zahlreiche Parameter wie zum Beispiel Gravitationskonstanten, Stoffkonzentrationen oder Wachstumskoeffizienten auf, die in der Praxis nicht exakt bekannt sind, sondern geschätzt oder durch Messungen ermittelt werden müssen. Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung ließe sich in den Naturwissenschaften nicht anwenden, wenn geringfügige Abweichungen vom „wahren“ Wert einzelner Parameter das Verhalten der Lösung wesentlich beeinflussen würden.

5.1 Stetige Abhängigkeit von Parametern

Eine parameterabhängige Differentialgleichung besitzt im allgemeinen die Form

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mu), \tag{1}$$

wobei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ offen. Die Vektorräume $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l$ seien mit der euklidischen Norm versehen. Des weiteren treffen wir folgende Voraussetzung:

f ist stetig auf U und besitzt dort partielle Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x, \mu)$, die auf U stetig sind.

Ziel unserer Betrachtungen ist es, zu zeigen, daß die Lösungen $\varphi(t, \mu)$ von (1) bei fixierter Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = x^0$ stetig von μ abhängen.

Lemma 5.1.1
Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bezüglich $x \in \mathbb{R}^n$ und $(t_0, x^0) \in U$. Sei weiterhin $\varphi(\cdot) :]\, t^-, t^+ [\longrightarrow \mathbb{R}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = g(t, x(t)), x(t_0) = x^0$ auf dem endlichen maximalen Existenzintervall $]\, t^-, t^+ [$. Ist dann $V \subset U$ eine echte, offene Teilmenge, $(t_0, x^0) \in V$ und $\overline{V} \subset U$ kompakt, so existieren t_1, t_2 mit $t^- < t_1 < t_0 < t_2 < t^+$ und $\varphi(t_1) \in \partial V, \varphi(t_2) \in \partial V$. Ferner gilt für das maximale Existenzintervall $]\, t_V^-, t_V^+ [$ der Lösung bei Einschränkung der Differentialgleichung auf V:

$$t_V^- > t^- \quad \text{und} \quad t_V^+ < t^+$$

□

Beweis
Der Abstand zwischen der abgeschlossenen Hülle von V und dem Komplement von U ist positiv, d.h. $\operatorname{dist}(\overline{V}, U^C) = \inf\{\|x - y\| : x \in \overline{V}, y \in U^C\} > 0$. Ist der zweite Teil des Lemmas gezeigt, so folgt unmittelbar, daß es zwei Punkte außerhalb von V geben muß, in denen die Lösung noch existiert. Aus der Stetigkeit von $\varphi(\cdot)$ ergibt sich die Existenz zweier Randpunkte von V durch welche die Lösung verläuft. Dies impliziert die erste Behauptung des Lemmas.
Zu zeigen ist also nur noch der zweite Teil:
Aus den vorhergehenden Überlegungen wissen wir, daß $\partial U \cap \overline{V} = \emptyset$ ist. Angenommen, es ist $t_V^+ = t^+$. Da $\overline{V}$ kompakt ist, existiert eine Folge $(t_k) \uparrow t^+$ derart, daß $(t_k, \varphi(t_k)) \longrightarrow (t^+, x^*)$ gilt. Nach Satz 2.3.4 folgt: $(t^+, x^*) \in \partial U$. Da ebenfalls $(t_k, \varphi(t_k)) \in \overline{V}$, ergibt sich: $(t^+, x^*) \in \partial U \cap \overline{V}$, im Widerspruch zu unserer Anfangsvoraussetzung. ↯ Daraus folgt, daß t_V^+ strikt kleiner als t^+ sein muß.
Den Beweis für $t_V^- > t^-$ erhält man analog. ■

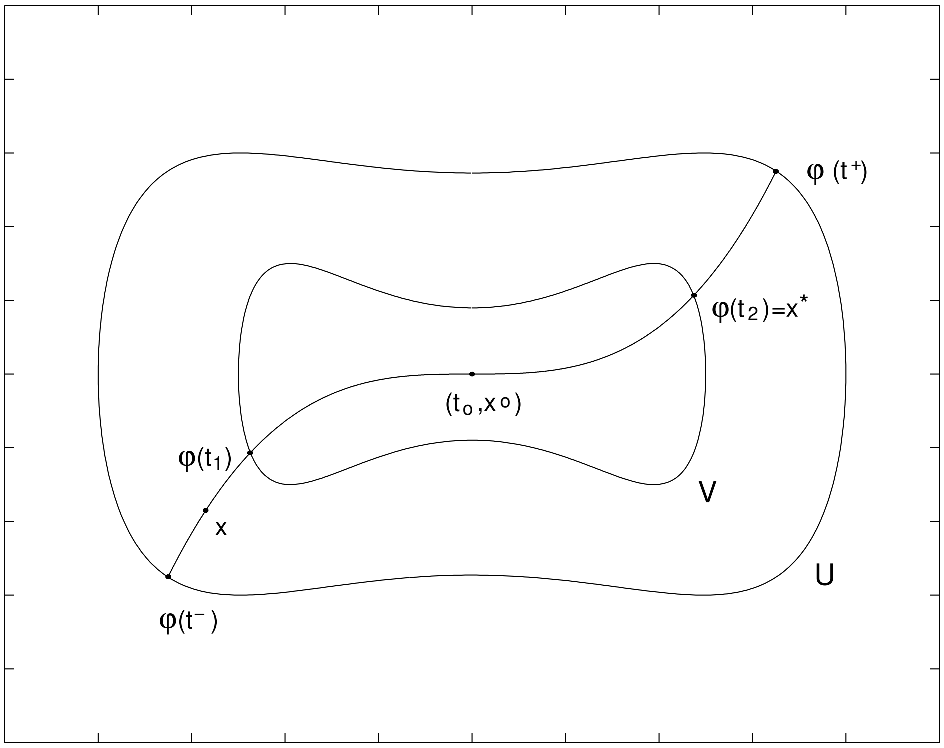


Abbildung 1: *Bild zur Situation von Lemma 5.1.1. Man beachte, daß der Abstand* $\operatorname{dist}(\overline{V}, U^C) := \inf\{\|x-y\| : x \in \overline{V}, y \in U^C\}$ *echt positiv ist.*

Für das nachfolgende, im weiteren Verlauf benötigte Lemma braucht man den Begriff der *Konvexität* (vgl. Abbildung 2) einer Menge bezüglich einer Komponente:

Eine Menge $W \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ *heißt konvex bezüglich der zweiten Komponente, wenn aus* (u, v^1), $(u, v^2) \in W$ *folgt:*

$$\forall\, \alpha \in [0,1]: \quad (u, v^1 + \alpha\,(v^2 - v^1)) \in W.$$

Es wird also gefordert, daß mit je zwei Punkten v^1, v^2 in der zweiten Komponente auch ihre Verbindungsstrecke $[(u, v^1); (u, v^2)]$ ganz in W liegt.

Lemma 5.1.2 (Lemma von Hadamard)
Sei $W \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p, q \geq 1$ offen und konvex bezüglich der zweiten Komponente. Sei

$$\begin{array}{rcl} g: W & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & g(u,v) \end{array}$$

eine stetige Funktion, für die alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial v_j}(u,v)$ existieren und auf W stetig sind. Dann existieren stetige Funktionen $h_j : D \longrightarrow \mathbb{R}$ auf der Menge $D = \{(u,v^1,v^2) : (u,v^1) \in W \text{ und } (u,v^2) \in W\}$ für $j = 1, \cdots q$

$$g(u,v^2) - g(u,v^1) = \sum_{j=1}^{q} h_j(u,v^1,v^2)\,(v_j^2 - v_j^1)$$

für alle $(u,v^1), (u,v^2) \in W$. □

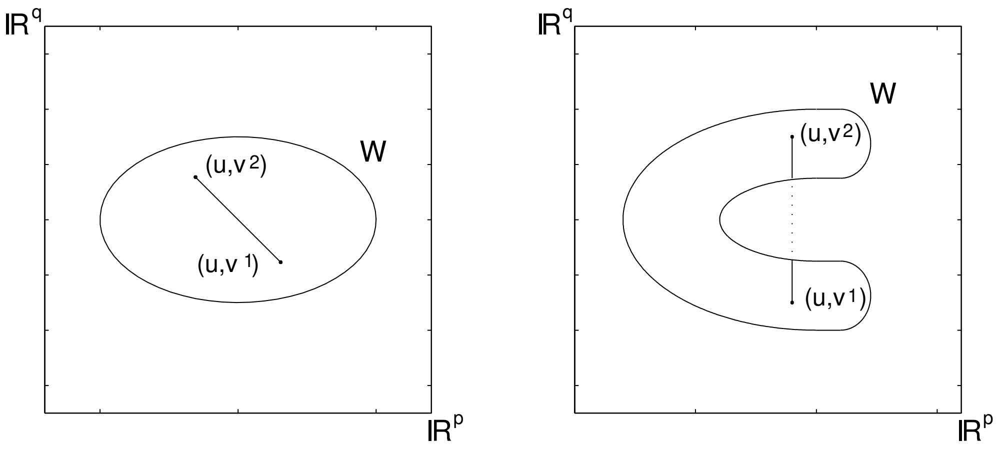


Abbildung 2: *Darstellung zur Verdeutlichung des Konvexitätsbegriffes: Konvexen Mengen wie in der linken Abbildung enthalten mit je zwei Punkten auch deren Verbindungslinie. Bei nicht-konvexen Mengen gilt dies nicht.*

Beweis
Seien $(u,v^1), (u,v^2) \in W$. Setze dann

$$v(s) := v^1 + s\,(v^2 - v^1), \ \in [0,1].$$

Dann gilt nach den Voraussetzungen für W: $(u,v(s)) \in W$, $s \in [0,1]$ und ferner

$$g(u,v^2) - g(u,v^1) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s}(u,v(s))\,ds.$$

Für den Integranden folgt dann mit $(v_j^2 - v_j^1)$ als Ableitung von $v(s)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s}(u, v(s)) &= \frac{\partial g(u, v_1, \cdots, v_q)}{\partial s} \\ &= \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial v_j}(u, v(s))\,(v_j^2 - v_j^1)\end{aligned}$$

Wähle jetzt $h_j(u, v^1, v^2) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial v_j}(u, v(s))\, ds$. Dann ist

$$g(u, v^2) - g(u, v^1) = \sum_{j=1}^{q} h_j(u, v^1, v^2)\,(v_j^2 - v_j^1),$$

da die Abbildung $(u, v) \longmapsto \frac{\partial g}{\partial v_j}(u, v)$ stetig auf W ist. Also ist $h_j(u, v^1, v^2)$ stetig in (u, v^1, v^2), denn es gilt:

$$v^1 + s\,(v^2 - v^1) - (\tilde{v}^1 + s\,(\tilde{v}^2 - \tilde{v}^1)) < \varepsilon$$

für $s \in [0, 1]$, falls $v^1 - \tilde{v}^1 \ll 1$ und $v^2 - \tilde{v}^2 \ll 1$. ■

Nun können wir den Parameter μ einführen und die Konsequenzen untersuchen, die sich aus dem Lemma von Hadamard ergeben. Dies ist der gewünschte Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung von ihrem Parameter μ.

Satz 5.1.3 (Stetige Abhängigkeit von Parametern)
Sei $(t_0, x^0, \mu^0) \in U$ und für jedes $\mu \in \mathbb{R}^l$ mit $(t_0, x^0, \mu) \in U$ sei $\varphi(t, \mu)$ die Lösung von $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mu)$, die der Anfangsbedingung $\varphi(t_0, \mu) = x^0$ genügt. Ist die Lösung $\varphi(t, \mu^0)$ im Intervall $I = [\alpha, \beta]$ definiert, so existiert $\delta > 0$, so daß die Lösungen $\varphi(t, \mu)$ für $\|\mu - \mu^0\| \leq \delta$ auf I definiert werden und die Abbildung $(t, \mu) \longmapsto \varphi(t, \mu), (t, \mu) \in I \times K(\mu^0, \delta)$ auf der Menge $I \times K(\mu^0, \delta)$ stetig ist. □

Beweis
Da der Beweis ziemlich umfangreich ist, haben wir ihn in zwei Teilabschnitte unterteilt. Im ersten Teil soll gezeigt werden, daß, falls μ in einer hinreichend kleinen Umgebung von μ^0 liegt, die Lösung $\varphi(t, \mu)$ auf dem ganzen Intervall $I = [\alpha, \beta]$ existiert. Im zweiten Teil wird dann die Stetigkeit der Lösung nachgewiesen.

a) Zunächst beweisen wir, daß eine geringe Abweichung μ von μ^0 den Lösungsverlauf kaum verändert. Explizit werden wir verifizieren, daß

(2) $$\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^0)\| \leq \tilde{c}\,\varepsilon\,(\|\mu - \mu^0\|)$$

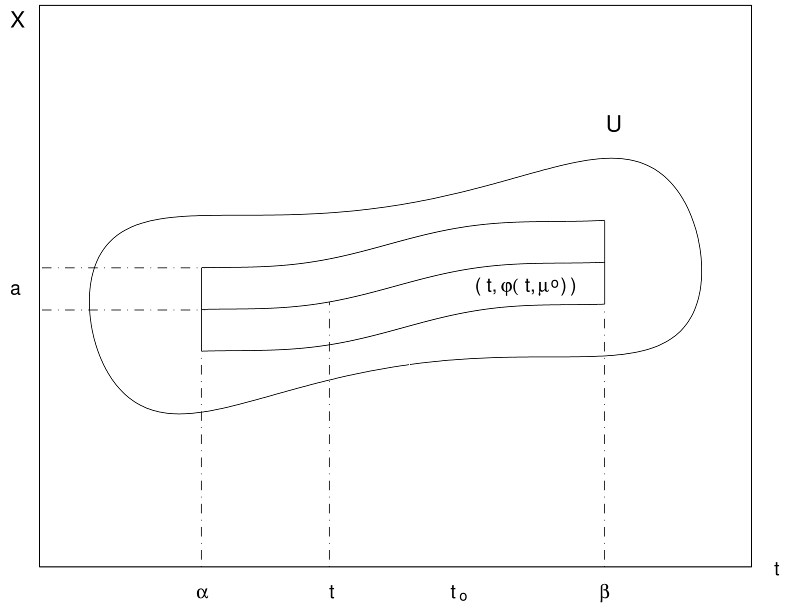


Abbildung 3: *Darstellung zum ersten Teil des Beweies von Satz 5.1.3: Die Trajektorie $(t, \varphi(t, \mu^0))$ verläuft innerhalb eines kompakten Bandes Z.*

gilt. Also lautet unsere Behauptung: Es existieren $a, b > 0$, so daß

$$Z = \{(t, x, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l : \; t \in I, \, \|x - \varphi(t, \mu^0)\| \leq a, \, \|\mu - \mu^0\| \leq b\} \subset U.$$

Man betrachtet daher ein kompaktes Band Z, daß, wie wir noch sehen werden, in U und in dem die Trajektorie $(t, \varphi(t, \mu^0))$ verbleibt. Denn die Kurve $C = \{(t, \varphi(t, \mu^0), \mu^0), t \in I\} \subset U$ ist kompakt, besitzt also einen positiven Abstand $d > 0$ vom Komplement von U, also U^C. Es reicht demnach, $a, b > 0$ so zu wählen, daß $a^2 + b^2 < d$ gilt.
Der Beweis folgt nun mit Hilfe des Lemma von Hadamard. Da Z kompakt ist, existiert $c > 0$ mit

$$(\dagger) \quad \|f(t, x^2, \mu) - f(t, x^1, \mu)\| \leq c \, \|x^2 - x^1\|$$

für alle $(t, x^1, \mu), (t, x^2, \mu) \in Z$.
Als Alternative zum Lemma von Hadamard könnte man auch die aus dem zweiten Kapitel bekannten Lemmata 2.2.2 oder 2.2.3 heranziehen, die ganz analog auch für parameterabhängige Differentialgleichung bewiesen werden können.
Da f stetig und Z kompakt ist, ist f auf dem Band Z sogar gleichmäßig stetig. Daraus folgt, daß eine monoton steigende Funktion $\varepsilon(\delta) > 0$ existiert mit $\lim_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0$ derart, daß

$$(*) \quad \|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu^0)\| < \varepsilon\left(\|\mu - \mu^0\|\right)$$

für alle $(t,x,\mu), (t,x,\mu^0) \in Z$.
Sei nun $\mu \in K(\mu^0, b)$ beliebig und $\varphi(t,\mu)$ die zu μ gehörige Lösung $\varphi(t,\mu)$ mit $\varphi(t_0,\mu) = x^0$. Sei $\varphi(t,\mu)$ definiert auf $[t_1,t_2]$ und $\alpha \le t_1 < t_0 < t_2 \le \beta$. Weiterhin gelte $(t, \varphi(t,\mu^0,\mu)) \in Z$ für alle $t \in [t_1,t_2]$. Unser Zwischenziel ist es, eine Abschätzung von $\|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^0)\|$ auf $[t_1,t_2]$ zu erhalten.
Es gilt

$$\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^0) = \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s,\mu),\mu) - f(s,\varphi(s,\mu^0),\mu^0)\, ds$$

Setze im folgenden $\triangle(s) := f(s,\varphi(s,\mu),\mu) - f(s,\varphi(s,\mu^0),\mu^0)$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung und den Gleichungen $(\dagger), (*)$:

$$\begin{aligned} \| \triangle(s) \| &\le \|f(s,\varphi(s,\mu),\mu) - f(s,\varphi(s,\mu^0),\mu)\| \\ &\quad + \|f(s,\varphi(s,\mu^0),\mu) - f(s,\varphi(s,\mu^0),\mu^0)\| \\ &\le c\,\|\varphi(s,\varphi(s,\mu)) - \varphi(s,\mu^0)\| + \varepsilon\,(\|\mu-\mu^0\|) \end{aligned}$$

Also

$$\|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^0)\| \le \int_{t_0}^{t} c\,\|\varphi(s,\mu) - \varphi(s,\mu^0)\| + \varepsilon\,(\|\mu-\mu^0\|)\, ds$$

Nach dem Lemma von Gronwall folgt mit $v(s) = c\,\|\varphi(s,\mu) - \varphi(s,\mu^0)\|$ und $\varepsilon\,(\|\mu-\mu^0\|) = \text{const.}$ und $\quad (\dagger\dagger) \quad \alpha \le t_1 < t_0 < t_2 \le \beta \quad$ also:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^0)\| &\le \varepsilon\,(\|\mu-\mu^0\|)\,|t-t_0|\,e^{c\,|t-t_0|} \\ &\overset{(\dagger\dagger)}{\le} (\beta-\alpha)\,\varepsilon\,(\|\mu-\mu^0\|)\,e^{c\,(\beta-\alpha)} \\ &\le \widetilde{c}\,\varepsilon\,(\|\mu-\mu^0\|) \end{aligned}$$

Denn α, β, c sind konstant und können somit zu einer einzigen Konstante $\widetilde{c}$ zusammengefaßt werden. Damit wurde die anfängliche Behauptung (2) bewiesen.
Nun ist noch zu zeigen, daß die Lösung $\varphi(t,\mu)$ das Band E aus obigem Bild nicht verlassen kann. Damit wäre gezeigt, daß das Intervall $I = [\alpha,\beta]$ im Existenzintervall der Lösung liegt. Zu diesem Zweck eignet sich ein Widerspruchsbeweis:
Wähle $\varrho > 0$, so daß gilt

$$(\ddagger) \quad \varrho \le b \quad \text{und} \quad \widetilde{c}\,\varepsilon(\delta) < a$$

Wir zeigen nun, daß die Lösung $\varphi(t,\mu^1)$ für $\mu^1 \in K(\mu^0,\varrho)$ auf I existiert. Sei nun $]\,t^-, t^+\,[$ das maximale Existenzintervall von $\varphi(\cdot,\mu^1)$. Deshalb ist zu verifizieren, daß $I \subset]\,t^-, t^+\,[$ gilt, d.h. $t^+ > \beta$ und analog $t^- < \alpha$.
Angenommen, es gelte $t^+ \ge \beta$. Sei $E = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; (t,x,\mu^1) \in Z\}$. E ist als stetige Projektion des Kompaktums $\{(t,x,\mu) \in Z : \mu = \mu^1\}$ selbst

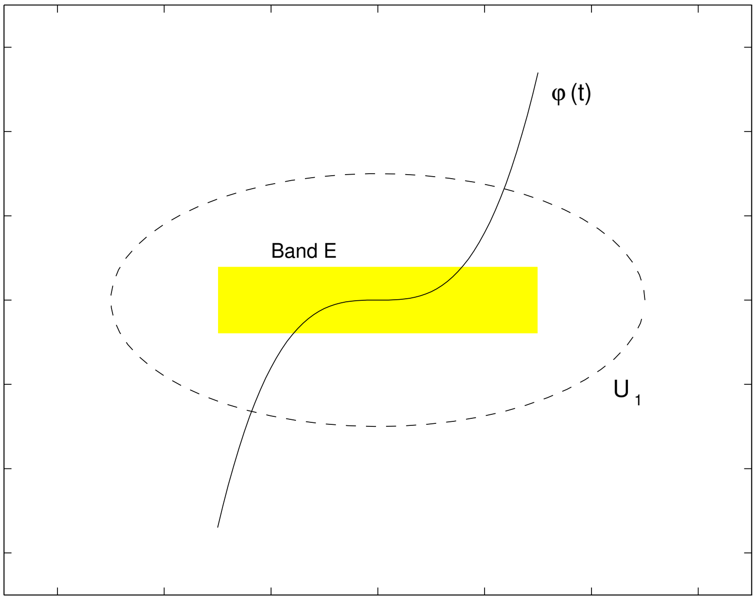


Abbildung 4: *Veranschaulichung des Bandes E*

wieder kompakt. Die Menge $U_1 = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : (t,x,\mu^1) \in U\}$ ist offen.

Es gilt $(t_0, x^0, \mu^1) \in Z$, da (t_0, x^0) die Anfangsbedingung ist. Man betrachtet also eine offene Menge U_1, in der sich ein kompaktes Band E befindet. Die Lösung startet innerhalb von E. Nach vorigem Lemma 5.1.1 existiert ein $t \in]\, t_0, t^+ [$ mit $\varphi(t, \mu^1) \notin E$. Also gibt es ein weiteres t mit $t_2 \in]\, t_0, t^+ [$ mit $\varphi(t_2, \mu^1) \in \partial E$. Bei Betrachtung des ursprünglichen Bildes bedeutet dies, daß aus $t_2 < t^+ < \beta$ folgt, daß $t_2 < \beta$ gelten muß. Die Lösung, die zum Parameter μ^1 gehört, kann E also nur am Rand verlassen, also an der Stelle t_2. Wegen $t_2 < \beta$ gilt, $\|\varphi(t_2, \mu^1) - \varphi(t_2, \mu^0)\| = a$. Auf der anderen Seite folgt aus $\|\mu^1 - \mu^0\| \leq \varrho$ und aus den Gleichungen (2) und (‡) folgendes:

$$\|\varphi(t, \mu^1) - \varphi(t, \mu^0)\| \leq \tilde{c}\,\varepsilon\,(\|\mu^1 - \mu^0\|) < a$$

Dies gilt für alle $t \in [t_1, t_2]$. Dies ist aber der gewünschte Widerspruch zur Annahme $t^+ \geq \beta$. $\lightning$ Damit ist gezeigt, daß $t^+ > \beta$ gelten muß. Folglich existiert die Lösung $\varphi(t, \mu^1)$ auf I. Analog wird dies für $t^- < \alpha$ gezeigt.

b) Im zweiten Teil ist noch die stetige Abhängigkeit der Lösung $\varphi(t, \mu)$ von μ zu zeigen. Dazu beweisen wir die folgende Behauptung:
Die Abbildung $(t, \mu) \longmapsto \varphi(t, \mu)$ ist stetig in jedem beliebigen Punkt $(t_1, \mu^1) \in I \times K(\mu^0, \varrho)$.

Hierzu wende man das bereits Bewiesene auf $\varphi(t, \mu^1)$ an. $\varphi(t, \mu^1)$ erfüllt dieselben Bedingungen wie $\varphi(t, \mu^0)$. Daher existieren $\widetilde{c}_1$ und $\varepsilon_1(\cdot)$, so daß die Gleichung (2) erfüllt ist mit μ^1 anstatt μ^0. Wähle ϱ_1, so daß (‡) gilt. Also $\varrho_1 < b$ und $\widetilde{c}_1\,\varepsilon(\varrho_1) < a$. Dann gilt für alle $\mu \in K(\mu^1, \varrho_1)$ nach Anwendung von (2):

$$\|\varphi(t,\mu) - \varphi(t_1,\mu^1)\| \quad \leq \quad \|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^1)\| + \|\varphi(t,\mu^1) - \varphi(t_1,\mu^1)\|$$

Der Term $\|\varphi(t,\mu^1) - \varphi(t_1,\mu^1)\|$ wird beliebig klein, falls $t \to t_1$. Also

$$\|\varphi(t,\mu) - \varphi(t_1,\mu^1)\| \longrightarrow 0,$$

wenn $\mu \to \mu^1$ und $t \to t_1$. Denn es gilt nach (2)

$$\|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^1)\| \leq \widetilde{c}_1\,\varepsilon_1(\|\mu - \mu^1\|)$$

Da $\|\mu - \mu^1\| \to 0$, wenn $\mu \to \mu^1$, folgt

$$\|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^1)\| \longrightarrow 0$$

Damit haben wir gezeigt, daß $\varphi(t,\mu)$ im Punkt (t_1, μ^1) stetig ist. Dann ist auch $\varphi(t,\mu)$ stetig auf $K(\mu^0, \varrho)$.

■

5.2 Differenzierbare Abhängigkeit von Parametern

Wir betrachten wiederum die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mu),$$

wobei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$. Des weiteren erfülle f wieder die Voraussetzungen aus dem ersten Teil dieses Kapitels: f sei stetig auf U und besitzt dort partielle Ableitungen
$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x, \mu)$, die auf U stetig sind.

Im Gegensatz zu der eben betrachteten Abhängigkeit der Differentialgleichung von einem Parameter μ wollen wir nun eine einzelne Anfangsbedingung fixieren und dagegen μ variieren lassen. Dazu kommen wir noch einmal auf den Satz 5.1.3 an und stellen folgendes fest:

Satz 5.2.1 (Differenzierbare Abhängigkeit von Parametern)
Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x, \mu)$ *und* $\frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}(t, x, \mu), i, j = 1, \cdots, n,\ k = 1, \cdots, l$ *existieren und sind stetig auf* U *mit* $(t_0, x^0, \mu^0) \in U$. *Sei* $\varphi(t, \mu)$ *die Lösung der Differentialgleichung (1) mit* $\varphi(t_0, \mu) = x^0$ *und man nehme an,* $\varphi(t, \mu^0)$ *sei auf* $[\alpha, \beta]$ *mit* $\alpha < t_0 \beta$ *definiert. Dann existiert* $\varrho > 0$, *so daß die Lösung* $\varphi(t, \mu)$ *für alle* $\mu \in \mathbb{R}^l$ *mit* $\|\mu - \mu^0\| < \varrho$ *im Intervall* $[\alpha, \beta]$ *definiert und in* $]\,t, \mu\,[\in [\alpha, \beta] \times K(\mu^0, \varrho)$ *stetig ist. Ferner existieren die partiellen Ableitungen* $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_k}(t, \mu)$ *und sind stetig auf* $[\alpha, \beta] \times K(\mu^0, \varrho)$. *Die gemischten Ableitungen* $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \mu_k}(t, \mu)$ *sind ebenfalls stetig und unabhängig von der Differentiationsreihenfolge. Die partiellen Ableitungen* $\frac{\partial}{\partial \mu_k}(\varphi(t, \mu))$ *genügen im Intervall* $[\alpha, \beta]$ *dem Differentialgleichungssystem der Variationen*

(3)
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial \mu_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \varphi(t, \mu), \mu)\, \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}(t, \mu) + \frac{\partial}{\partial \mu_k} f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)$$

mit $i = 1, \cdots, n$ *und dem Anfangswert* $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_k}(t_0, \mu) = 0$. □

Bemerkung
Setze

$$A(t, \mu) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \varphi(t, \mu), \mu)\right]_{i,j=1\cdots,n}$$

und

$$f_{\mu_k}(t, \varphi(t, \mu), \mu) = \left(\frac{\partial}{\partial \mu_k} f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)\right)_{i=1,\cdots,n}$$

Dann läßt sich Gleichung (3) in der Form:

$$(3') \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi(t,\mu)}{\partial \mu_k}\right) = A(t,\mu)\,\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_k}\,(t,\mu) + f_{\mu_k}(t,\varphi(t,\mu),\mu)$$

schreiben, (3′) ist also nur ein gewöhnliches, zeitvariantes, inhomoges, lineares Differentialgleichungssystem. Dabei sind μ und $\varphi(t,\mu)$ gegeben.

Beweis

Nach Satz 5.1.3 aus dem vorigen Paragraphen gibt es ein $\varrho > 0$, so daß die Lösungen $\varphi(t,\mu)$ auf $[\alpha,\beta]$ existieren und stetig auf $[\alpha,\beta]\times K(\mu^0,\varrho)$ sind. Im folgenden setzen wir immer $\|\mu-\mu^0\| < \varrho$ voraus. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei o.B.d.A. $k = l$ und setze $\mu = (\lambda,\nu)$ mit $\lambda = (\mu_1,\cdots,\mu_{l-1})$ sowie $\nu = \mu_l = \mu_k$. Um $\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}(t,\mu) = \frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}(t,\lambda,\nu)$ zu bestimmen, betrachte die folgende Funktion:

$$\psi_i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{\nu_2-\nu_1}\left(\varphi_i(t,\lambda,\nu_2) - \varphi_i(t,\lambda,\nu_1)\right)$$

für $\nu_1 \neq \nu_2$. Dann lautet die partielle Ableitung von ψ_i nach t

$$\begin{aligned}(4)\ \frac{\partial}{\partial t}\,\psi_i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) &= \frac{1}{\nu_2-\nu_1}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,\lambda,\nu_2) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,\lambda,\nu_1)\right]\\ &= \frac{1}{\nu_2-\nu_1}\left[f_i(t,\varphi(t,\lambda,\nu_2),\lambda,\nu_2) - f_i(t,\varphi(t,\lambda,\nu_1),\lambda,\nu_1)\right]\end{aligned}$$

für $\alpha \le t \le \beta, i = 1,\cdots,n$. Nun erfolgt die Anwendung des Lemmas von Hadamard mit $g(u,v) = f_i(t,x,\lambda,\nu)$ mit $u = (t,\lambda)$ und $v = (x,\nu)$, sowie $W = \{(t,\lambda,x,\nu)\in U : \|x-\varphi(t,\lambda^0,\nu^0)\| < a, \|(\lambda,\nu)-(\lambda^0,\nu^0)\| < b\}$. Dabei ist W eine Zylindermenge. Nach Hadamard existieren stetige $h_j(u,v^1,v^2)$ mit

$$\begin{aligned}g(u,v^2) - g(u,v^1) &= \sum_{j=1}^{n+1} h_{ij}(u,v^1,v^2)\,(v_j^2 - v_j^1)\\ &= \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(u,v^1,v^2)\,(x_j^2 - x_j^1) + h_{i,n+1}(u,v^1,v^2)\,(\nu_2-\nu_1)\end{aligned}$$

Setze $x^2 = \varphi(t,\lambda,\nu_2)$ und $x^1 = \varphi(t,\lambda,\nu_1)$. Dann folgt mit $\varphi(t,\lambda,\nu_i) = x^i$:

$$\begin{aligned}f_i(t,x^2,\lambda,\nu_2) - f_i(t,x^1,\lambda,\nu_1) &= \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t,\lambda,\varphi(t,\lambda,\nu_1)\,\nu_1,\varphi(t,\lambda,\nu_2),\nu_2)\\ &\quad\cdot(\varphi_j(t,\lambda,\nu_2,) - \varphi_j(t,\lambda,\nu_1))\\ &\quad + h_{i,n+1}(t,\lambda,x^1,\nu_1,x^2,\nu_2)\,(\nu_2-\nu_1)\end{aligned}$$

Setzt man nun $\widetilde{h}_{ij}(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) := h_{ij}(t,\lambda,\varphi(t,\lambda,\nu_1)\,\nu_1,\varphi(t,\lambda,\nu_2),\nu_2)$ so ergibt sich

$$\begin{aligned}f_i(t,x^2,\lambda,\nu_2) - f_i(t,x^1,\lambda,\nu_1) &= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{h}_{ij}(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)\,(\varphi_j(t,\lambda,\nu_2)\\ &\quad - \varphi(t,\lambda,\nu_1))\,\widetilde{h}_{i,n+1}(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)\,(\nu_2-\nu_1)\end{aligned}$$

Also gilt mit $\psi_i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)$ nach Hadamard

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) \;&=\; \sum_{j=1}^{n} \widetilde{h}_{ij}(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)\;\psi_i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) \\ &\quad + \widetilde{h}_{i,n+1}(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um ein lineares inhomogenes Differentialgleichungssytem. Da ν_1, ν_2 stetig sind, kann man durch den Grenzübergang $\nu_2 \to \nu_1$ zeigen, daß die partielle Ableitung von ψ_i nach t existiert. Für die Anfangswerte der zeitvarianten linearen Differentialgleichung für ψ_i gilt:

$$\begin{aligned} \psi_i(t_0,\lambda,\nu_1,\nu_2) \;&=\; \frac{1}{\nu_2-\nu_1}\,(\varphi_i(t_0,\lambda,\nu_2) - \varphi_i(t_0,\lambda,\nu_1)) \\ &=\; \frac{1}{\nu_2-\nu_1}\,(x_i^0 - x_i^0) = 0 \end{aligned}$$

Für $t \in [\alpha,\beta]$, $(\lambda,\nu) \in K(\mu^0,\varrho)$ ist die Funktion

$$\psi(t;\lambda,\nu_1,\nu_2) = [\psi_i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)]_{i=1,\cdots,n}$$

eine Lösung des parameterabhängigen linearen Anfangswertproblems

$$(5') \qquad \dot{z}(t) = \widetilde{H}(t;\lambda,\nu_1,\nu_2)\,z(t) + \widetilde{h}_{n+1}(t;\lambda,\nu_1,\nu_2)$$

mit $z(0) = 0$, wobei $\widetilde{h}_{n+1}(\cdots) = [\widetilde{h}_{i,n+1}(\cdots)]_{i=1,\cdots,n}$ sowie $\widetilde{H}(\cdots) = [\widetilde{h}_{ij}(\cdots)]_{i,j=1,\cdots,n}$. Nach den bekannten Sätzen über die Eindeutigkeit einer Lösung gilt:

Es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $\chi(t;\lambda,\nu_1,\nu_2)$ von $(5')$ und die Abbildung $(t;\lambda,\nu_1,\nu_2) \longmapsto \chi(t;\lambda,\nu_1,\nu_2)$ ist stetig nach Satz 5.1.3. Man beachte: Für $\nu_1 \neq \nu_2$ ist $\psi(t;\lambda,\nu_1,\nu_2)$ eine Lösung von $(5')$.

In Gleichung (5) haben wir gesehen, daß die Funktionen ψ_i die Gleichung erfüllen. $(5')$ ist dabei die vektorielle Schreibweise von (5). Betrachtet man umgekehrt $(5')$, so hängen die Matrizen und Vektoren stetig von den Variablen ab. Der Grenzübergang $\nu_2 \to \nu_1 = \nu$ liefert nun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu}\,\varphi(t,\lambda,\nu) \;&=\; \lim_{\nu_2\to\nu} \frac{\varphi(t,\lambda,\nu_2) - \varphi(t,\lambda,\nu)}{\nu_2-\nu} \\ &=\; \lim_{\nu_2\to\nu} \psi(t;\lambda,\nu_2,\nu), \text{ da } \psi \\ &=\; \lim_{\nu_2\to\nu} \chi(t;\lambda,\nu_2,\nu) \\ &=\; \chi(t;\lambda,\nu,\nu) \end{aligned}$$

Wir wissen zwar nicht, ob der Limes von χ existiert, da aber die Existenz der Lösung χ durch die Eindeutigkeitssätze gesichert ist, gilt die letzte Umformung auf jeden Fall. Demnach existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial\nu}\,\varphi(t,\lambda,\nu)$ und ist stetig in (t,λ,ν) nach Satz 5.1.3. Sie erfüllt die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \dot{z}(t) = \widetilde{H}(t;\lambda,\nu,\nu)\,z(t) + \widetilde{h}_{n+1}(t;\lambda,\nu,\nu), \quad z(0) = 0$$

Insbesondere existieren die gemischten Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \nu}\,\varphi_i(t,\lambda,\nu)$ und sind in (t,λ,ν) stetig. Nach Definition gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi_i(t,\lambda,\nu) = f_i(t,\varphi_i(t,\lambda,\nu),\lambda,\nu)$$

mit $\alpha \le t \le \beta$, $(\lambda,\nu) \in K(\mu^0,\varrho)$. Nach Voraussetzung existiert die Ableitung der rechten Seite der Gleichung nach ν_1 und ist stetig. Somit gilt auch

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi_i(t,\lambda,\nu)\right);$$

dieser Ausdruck ist stetig in (t,λ,ν). Wir rechnen die Ableitung einfach aus:

$$(\dagger)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi_i(t,\lambda,\nu) \;&=\; \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(t,\varphi(t,\lambda,\nu),\lambda,\nu)\,\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\,(t,\lambda,\nu)\\ &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial \mu_l}\,(t,\varphi(t,\lambda,\nu),\lambda,\nu)\end{aligned}$$

mit $\mu = (\lambda,\nu)$ folgt aus $(\dagger)$ unmittelbar die Behauptung (3). Man beachte, daß beide gemischten Ableitungen stetig sind und somit übereinstimmen. ∎

Bemerkung
Um die Aussage bezüglich $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_k}\,(t,\mu)$ mit $k = 1,\cdots,l$ herzuleiten, braucht man im Beweis nur die Existenz und Stetigkeit der entsprechenden Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \mu_k}\,(t,x,\mu)$ zu zeigen.

Zusammenfassend beschäftigen wir uns nun mit einer Aussage über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Lösungen in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. In der Schreibweise des folgenden Korollars wird der Parameter μ bei $f(t,x,\mu)$ vernachlässigt.

Korollar 5.2.2
Sei $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t,x,\mu) \longmapsto f(t,x,\mu)$ stetig auf U und nach $x_1,\cdots,x_n$ stetig partiell differenzierbar auf U. Sei $(t_0,x^0) \in U$ gegeben und $\varphi(\cdot) = \varphi(\cdot;t_0,x^0)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t,x), \quad x(t_0) = x^0.$$

*Sei $\varphi(\cdot)$ auf $I = [\alpha,\beta]$ definiert. Dann existiert $\sigma > 0$ mit der Eigenschaft:
Für alle $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ mit*

$$|\tau - t_0| < \sigma \quad \textit{und} \quad \|\xi - x^0\| < \sigma$$

ist die Lösung $\varphi(\cdot;\tau,\xi)$ des Anfangswertproblems

$$(7)\qquad \dot{x}(t) = f(t,x), \quad x(\tau) = \xi$$

auf I definiert und die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} (t,\tau,\xi) & \longmapsto & \varphi(t;\tau,\xi) \\ (t,\tau,\xi) & \in & I\times\,]\,t_0-\sigma,t_0+\sigma\,[\,\times K(x^0\sigma) \end{array}$$

ist simultan stetig und nach den Komponenten von ξ stetig partiell differenzierbar. Die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\xi_k}\,\varphi(t;\tau,\xi)$ sind stetig und von der Differentiationsreihenfolge unabhängig. Die Funktionen

$$\varphi^k(\cdot)=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\,(\cdot;t_0,\xi)\big|_{\xi=x^0}$$

genügen dem Anfangswertproblem

$$\dot v(t)=f_x(t,\varphi(t))\,v(t),\quad t\in[\alpha,\beta] \tag{8}$$

mit Anfangswert $v(t_0)=e^k$. □

Dabei ist e^k der k-te Einheitsvektor und f_x die Jacobi-Matrix.

Beweis

Wir müssen durch Variablentransformation zu einem Problem mit festen Anfangswerten, aber mit Parametern gelangen. Dazu führen wir eine neue Zeit s mit $t=\tau+s$ und einen neuen Vektor z mit $x=\xi+z$ ein. Betrachte dazu die parameterabhängige Differentialgleichung mit fester Anfangsbedingung

$$\dot z(s)=g(s,z(s);\tau,\xi),\quad z(0)=0, \tag{9}$$

wobei $g(s,z(s);\tau,\xi):=f(\tau+s,\xi+z)$ auf der offenen Menge $\widetilde U=\{(s,z;\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n:(\tau+s,\xi+z)\in U\}$ definiert ist. $\widetilde U$ ist offen, da nach Voraussetzung U offen ist und die Addition eine stetige Operation ist, d.h. $\tau+s$ und $\xi+z$ führen nicht aus U heraus. g besitzt auf $\widetilde U$ stetige partielle Ableitungen nach z_j und ξ_k:

$$\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\,(s,z;\tau,\xi)=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(\tau+s;\xi+z)=\frac{\partial g_i}{\partial \xi_j}\,(s,z;\tau,\xi) \tag{10}$$

Sei $\psi(s;\tau,\xi)$ eine Lösung von (9) auf einem Intervall $J\subset\mathbb{R}$. Dann ist

$$\varphi(t;\tau,\xi)=\xi+\psi(t-\tau;\tau,\xi) \tag{11}$$

eine Lösung von (7) auf dem Intervall $\tau+J$ und umgekehrt. Die Lösung $\varphi(\cdot)=\varphi(\cdot;t_0,x^0)$ existiert auf $[\alpha',\beta']$ mit $\alpha'<\alpha$, $\beta<\beta'$, also auf einem etwas größeren Intervall. Die entsprechende Lösung $\psi(\cdot;t_0,x^0)$ existiert auf $[\alpha'-t_0,\beta'-t_0]$. Nun kann man den vorigen Satz 5.2.1 auf die parameterabhängige Differentialgleichung (9) anwenden:

Es existiert $\varrho > 0$, so daß die Lösung $\psi(s;\tau,\xi)$ von (9) auf $[\alpha' - t_0, \beta' - t_0]$ existiert und in (s,τ,ξ) stetig ist für alle (τ,ξ) mit

$$\text{(12)} \qquad \|(\tau,\xi) - (t_0,x^0)\|^2 = |\tau - t_0|^2 + \|\xi - x^0\|^2 < \varrho^2$$

Ferner besitzt $\psi(s;\tau,\xi)$ stetige partielle Ableitungen nach ξ_k, $k = 1,\cdots,n$. Die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial \xi_k}\,\psi(s;\tau,\xi)$ sind stetig und hängen nicht von der Differentiationsreihenfolge ab. Sie genügen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\,\psi(s;\tau,\xi) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(\tau+s;\xi+\psi(s;\tau,\xi))\,\frac{\partial}{\partial \xi_k}\,\psi_j(s;\tau,\xi)\\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \xi_k}\,f_i(\tau+s;\xi+\psi(s;\tau,\xi))\end{aligned}$$

mit $\alpha' - t_0 \le s \le \beta' - t_0$. Nun muß lediglich die Rücktransformation gemäß (11) erfolgen:
Für (τ,ξ) mit (12) existiert $\varphi(t;\tau,\xi)$ auf $[\tau+\alpha'-t_0, \tau+\beta'-t_0]$ und ist in (t,τ,ξ) stetig. Analog folgen die Aussagen über die Differenzierbarkeit. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\,\varphi_i(t;t_0,\xi)\big|_{\xi=x^0} &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\,\psi_i(t-\tau;t_0,\xi)\big|_{\xi=x^0} \quad \text{mit } s = t-\tau\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(\tau+(t-\tau);\xi+\psi(s;\tau,\xi))\\ &\quad \cdot\frac{\partial}{\partial \xi_k}\,(\varphi_i(t;\tau,\xi)-\xi_j) + \frac{\partial}{\partial \xi_k}\,f_i(t;\varphi(t;\tau,\xi))\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(t;\varphi(t;\tau,\xi))\,\frac{\partial}{\partial \xi_k}\,(\psi_j(s;\tau,\xi))\\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k}\,f_i(t;\xi+\psi(t,\tau,\xi))\end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage, ob dies mit dem Anfangswertproblem (8) übereinstimmt. Allerdings entspricht die Ableitung von v, also $\dot v(t)$, vektorwertig gesehen gerade $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\,\varphi_i(t;t_0,\xi)$, wobei $t_0 = \tau$ und $\xi = x^0$ ist. Damit gilt also:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(t;\varphi(t;t_0,x^0)) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\,(\varphi_j(t;t_0,\xi)\big|_{\xi=x^0} - \xi_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}\,f_i(t,\varphi(t;t_0,x^0))$$

Man beachte zum einen, daß

$$f_x(t,\varphi(t)) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(t;\varphi(t;t_0,x^0))\right]_{i,j=1,\cdots,n}$$

die Jacobi-Matrix ist. Zum anderen ist $\frac{\partial}{\partial \xi_k} \xi_j = \delta_{jk}$. Schließlich lautet das Anfangswertproblem (8) wegen $v = \varphi^k$ koordinatenweise:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \varphi_i(t; t_0, \xi)\big|_{\xi = x^0} &= f_x(t, \varphi(t))\, v(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t; \varphi(t; t_0, x^0)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}(t; t_0, \xi) \end{aligned}$$

Für $j \neq k$ steht dann lediglich dort:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t; \varphi(t; t_0, x^0)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}(t; t_0, \xi) + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t; \varphi(t; t_0, x^0)) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t; \varphi(t; t_0, x^0))$$

Also können wir das oben berechnete mit dem Anfangswertproblem (8) gleichsetzen. Es stellt sich jetzt noch die Frage, wo die Gleichheit gilt. Für die Zeit s gilt: $\alpha' - t_0 \leq s \leq \beta' - t_0$. Also gilt unsere Rechnung auf dem Intervall $[\tau + \alpha' - t_0, \tau + \beta' - t_0]$. Da aber hier $t_0 = \tau$ gilt, folgt, daß die Gleichung auf $[\alpha', \beta']$ existiert. Da aber $[\alpha', \beta']$ größer als $[\alpha, \beta]$ ist, haben wir die Behauptung erfüllt, daß das Anfangswertproblem (8) auf I gilt. Nun muß nur die Anfangsbedingung noch geprüft werden. Wir wissen, daß $\psi(0) = 0$ gilt. Also nach Voraussetzung in Satz 5.2.1:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_k}(0) = 0$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}(t_0) &= \frac{\partial}{\partial \xi_k}(\xi + \psi(t - t_0; t_0, x^0)) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_k}(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \psi(0; t_0, x^0) \\ &= e^k \end{aligned}$$

Damit ist die gesamte Behauptung bewiesen. ∎

Bemerkung
Bei (8) handelt es sich um ein zeitvariantes lineares Differentialgleichungssystem. Ist die Lösung $\varphi(t) = \varphi(t; t_0, x^0)$ von (7) bekannt, so erhält man das Anfangswertproblem (8) durch Berechnung der Jacobi-Matrix von f bezüglich x entlang der Lösung $\varphi(t)$:

$$f_x(t, \varphi(t)) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(t, x)\big|_{x = \varphi(t)} \right]_{i,j=1,\cdots,n}$$

Man spricht im Falle von (8) von der Linearisierung von (7) um die Trajektorie $\varphi(t)$. Ist $\eta \in \mathbb{R}^n$ klein und $z(t,\eta)$ die Lösung des Anfangswertproblems (8) zum Anfangswert $z(t_0) = \eta$, so folgt mit Approximation erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\varphi(t; t_0, x^0 + \eta) &= \varphi(t; t_0, x^0) + \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_k}(t; t_0, \xi)\Big|_{\xi = x^0} \right]_{i,k=1,\cdots,n} \\
&= \varphi(t; t_0, x^0) + \sum_{k=1}^{n} \varphi^k(\cdot)\, \eta_k \\
&= \varphi(t; t_0, x^0) + z(t, \eta)
\end{aligned}$$

Dabei ist $\varphi^k(\cdot)\, \eta_k$ eine Linearkombination mit Anfangswert η.

Kapitel 6

Stabilität zeitinvarianter Differentialgleichungen

Nachdem in den vorangegangen Kapiteln das Hauptaugenmerk auf Fragen der Existenz und der konkreten Berechnung von Lösungen lag, soll nun, in Erweiterung der in Kapitel 3 für den Spezialfall homogener Systeme angesprochenen Stabilitätsbegriffe, allgemein auf qualitative Aspekte des Lösungsverhaltens eingegangen werden. Dabei stützen wir uns auf den vom russischen Mathematiker A.M. Ljapunov [(1)] eingeführten Stabilitätsbegriff, der den Lösungsverlauf einer Differentialgleichung bei Variation der Anfangsbedingung charakterisiert. Im Rahmen seiner Forschungsarbeiten als Professor in Charkow und Petersburg beschäftigte er sich mit Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Potentialtheorie. In seiner Dissertation im Jahr 1892 schlug er zwei Methoden, eine direkte und eine indirekte, zur Analyse von Fragestellungen dieser Art vor. Davon erlangte seine sogenannte *direkte Methode* [(2)] entscheidende Bedeutung, da sie die Bestimmung des Stabilitätsverhaltens einer Differentialgleichung ermöglicht, ohne daß deren Lösung selbst bekannt sein muß. Die Idee dieser Methode basiert auf der Angabe einer speziellen skalarwertigen Funktion, aufgrund deren besonderer Eigenschaft man auf Stabilität oder asymptotische Stabilität eines Systems schließen kann. Leider existiert keine geschlossene Theorie zur Bestimmung dieser *Ljapunov-Funktionen*, so daß die Verwendung dieser Methode im nicht-linearen Fall Geschick und Erfahrung voraussetzt. Diese Aussagen kommen in Ljapunovs erstem und zweiten Stabilitätstheorem zum Ausdruck. Um die Beweise übersichtlich zu halten, beschränken wir uns nach der Einführung der Grundbegriffe auf zeitinvariante Systeme. Mit entsprechend größerem Aufwand lassen sich vergleichbare Resultate auch für zeitvariante Differentialgleichungen herleiten.

---

(1) Alexandr Michajlowitsch Ljapunov (1857-1918)

(2) Lyapunovs direct method

6.1 Grundbegriffe

In diesem Abschnitt präzisieren wir die Stabilitätsbegriffe aus Kapitel 3. Hierbei steht das allgemeine Verhalten der Lösung einer Differentialgleichung im Vergleich zu einer ausgezeichneten Referenzlösung im Vordergrund. Dieser Stabilitätsbegriff untersucht also das Verhalten von Trajektorien $t \longmapsto \varphi(t, t_0, x^0)$ einer Differentialgleichung bei Variation des Anfangszustands x^0.

Bis auf weiteres betrachten wir die allgemeine Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

deren rechte Seite stetig und Lipschitz-stetig bezüglich x sei. Die Lösungstrajektorie $\varphi(t, t_0, x^0)$ zu dem Anfangswertproblem $x(t_0) = x^0$ existiere stets auf dem maximalen Existenzintervall $I := [t^-, \infty[$.

Definition 6.1.1 (STABIL)
Eine Trajektorie $\varphi(\cdot, t_0, x^0)$ heißt stabil, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x^0)$ existiert mit

$$\operatorname{dist}(x, x^0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x), \varphi(t, t_0, x^0)) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ und $t \in I$. □

Eine Trajektorie heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist. Genauer gilt:

Definition 6.1.2 (INSTABIL)
Eine Trajektorie $\varphi(\cdot, t_0, x^0)$ heißt instabil, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß es zu jedem $\delta = \delta(\varepsilon, x^0)$ ein $x \in K(x^0, \delta)$ gibt mit

$$\operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x), \varphi(t, t_0, x^0)) \geq \varepsilon$$

für ein $t \in I$. □

So definiert ist die Stabilität einer Trajektorie gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz der Trajektorie $\varphi(t, t_0, x)$ gegen $\varphi(t, t_0, x^0)$ für jedes $t \in I$. Denn für alle $t_0 \in I$ gilt nach Definition 6.1.1:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall \, t \in I : \lim_{x \to x^0} \|\varphi(t, t_0, x) - \varphi(t, t_0, x^0)\| = 0,$$

so daß die δ-Umgebung unabhängig von dem betrachteten Zeitpunkt t gewählt werden kann. Aus dem fünften Kapitel wissen wir bereits, daß die Lösung einer Differentialgleichung stetig von ihrer Anfangsbedingung, insbesondere also stetig von x^0 abhängt. Die gleichmäßige Konvergenz gilt daher im allgemeinen jedoch nur für kompakte Teilmengen von I. Die Stabilität der Trajektorie stellt also eine Verschärfung gegenüber der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen dar. Ein weiterer Stabilitätsbegriff ergibt sich, wenn man das asymptotische Verhalten von Trajektorien untersucht.

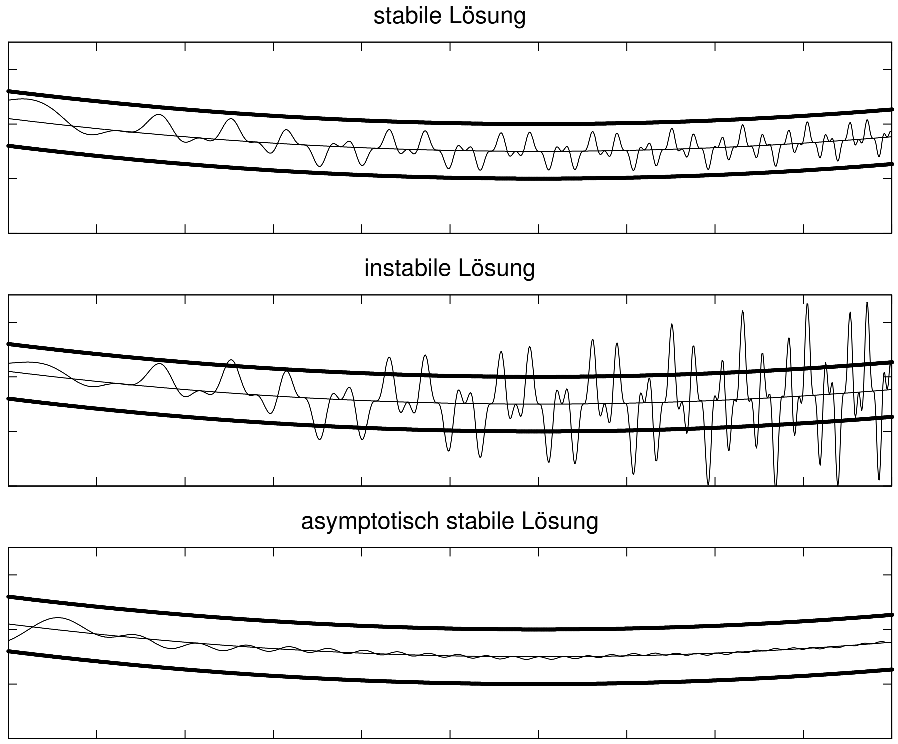


Abbildung 1: *Drei Möglichkeiten des Verlaufs von Trajektorien im erweiterten Phasenraum.*

Definition 6.1.3 (ATTRAKTIV)
Eine Trajektorie $\varphi(\cdot, t_0, x^0)$ *heißt attraktiv, wenn ein* $\delta > 0$ *existiert mit*

(1) $$x \in K(x^0, \delta) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \varphi(t, t_0, x) = \varphi(t, t_0, x^0)$$

□

Definition 6.1.4 (ASYMPTOTISCH STABIL)
[3] *Eine Trajektorie* $\varphi(\cdot, t_0, x^0)$ *heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil und attraktiv ist.* □

Man beachte, daß Attraktivität und Stabilität zwei voneinander unabhängige Eigenschaften einer Trajektorie sein können. Es ist insbesondere möglich, daß eine Lösung attraktiv, aber nicht stabil ist. Die Menge aller Zustände für die die Bedingung (1) erfüllt ist, heißt Attraktionsgebiet der Trajektorie:

[3] asymptote stability

Definition 6.1.5 (Attraktionsgebiet)
[4] *Die Menge $A(x^0, t_0)$ aller Zustände $x \in X$, die der Bedingung*

$$\operatorname{dist}(x, x^0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x), \varphi(t, t_0, x^0)) = 0$$

genügen, nennt man Attraktionsgebiet von $\varphi(\cdot, t_0, x^0)$ zum Zeitpunkt t_0. Gilt $A(x^0, t_0) = X$, so heißt $\varphi(\cdot, t_0, x^0)$ global attraktiv zum Zeitpunkt t_0. □

Die Begriffe stabil, instabil und asymptotisch stabil lassen sich zusammenfassend geometrisch wie folgt veranschaulichen. Man betrachte dazu den Zustandsraum:

(i) Stabile Trajektorie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Kugel $K(x^0, \delta)$ mit der Eigenschaft, daß jede Trajektorie, deren Anfangswert innerhalb dieser Kugel liegt, stets in der Kugel $K(x^0, \varepsilon)$ verbleibt.

(ii) Instabile Trajektorie: Es existiert ein positives ε mit der Eigenschaft, daß in jeder noch so kleinen δ-Kugel $K(x^0, \delta)$ zumindest ein Anfangswert liegt, so daß die Trajektorie $\varphi(\cdot, t_0, x^0)$ die Kugel $K(x^0, \delta)$ zu einem Zeitpunkt verläßt.

(iii) Asymptotisch stabile Trajektorie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Kugel $K(x^0, \delta)$ mit der Eigenschaft, daß jede Trajektorie, deren Anfangswert innerhalb der δ-Kugel liegt, in der Kugel $K(x^0, \varepsilon)$ verbleibt und für $t \to \infty$ gegen den Zustand x^0 strebt.

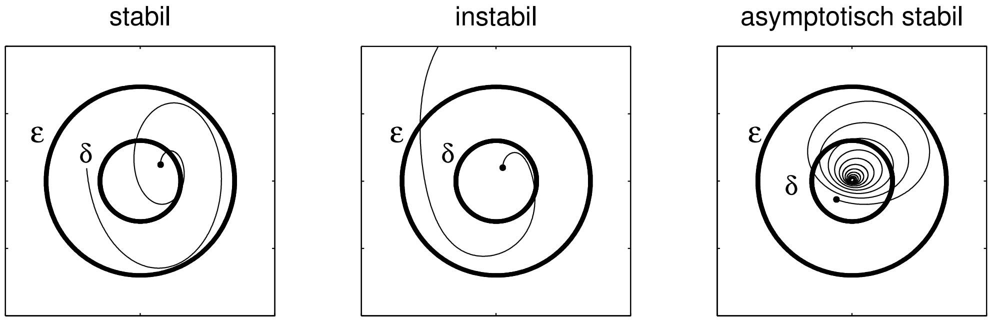


Abbildung 2: *Dieselbe Situation wie in Abbildung 1 allerdings im Phasenraum.*

Von besonderer Bedeutung ist die Stabilität von Trajektorien $\varphi(t, t_0, \overline{x}) \equiv \overline{x}$, die sich in einem Gleichgewichtszustand befinden. Denn es ist immer möglich, die Stabilitätseigenschaften einer Trajektorie auf die einer Gleichgewichtslage zurückzuführen:

[4] domain of attraction

Seien dazu $\tilde{z}(t) := z(t, t_0, x^0)$ und $z(t) := z(t, t_0, x)$ Lösungen der allgemeinen Differentialgleichung $\dot{z}(t) = f(t, z(t))$ mit den Anfangswerten $z_0, \tilde{z}_0$. Dann ist $x(t) := z(t) - \tilde{z}(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(*) \qquad \dot{x}(r) = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = z_0 - \tilde{z}_0,$$

wobei $g(t, x(t)) := f(t, x(t) + \tilde{z}(t)) - f(t, \tilde{z}(t))$ ist. Wählt man speziell $z(\cdot) = \tilde{z}(\cdot)$, so erhält man wegen $x(t) \equiv 0$ und $\dot{x}(t) = f(t, 0 + \tilde{z}(t)) - f(t, \tilde{z}(t)) = 0$ eine Gleichgewichtslage des Anfangswertproblems $(*)$. Also stellt $z(\cdot)$ genau dann eine (asymptotisch) stabile Trajektorie von $\dot{z}(t) = f(t, z(t))$ dar, wenn $x(t) \equiv 0$ eine (asymptotisch) stabile Gleichgewichtslage von $\dot{x}(t) = g(t, x(t))$ ist. Denn ist $\tilde{z}(\cdot)$ stabil, so existieren $\varepsilon, \delta > 0$, so daß

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta \, \forall \, x \in K(x^0, \delta) : \quad \|x(t)\| =: \|z(t) - \tilde{z}(t)\| < \varepsilon$$

Sei umgekehrt $x(\cdot)$ stabil, so existieren $\varepsilon, \delta > 0$, so daß

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta \, \forall \, x \in K(x^0, \delta) : \quad \|z(t) - \tilde{z}(t)\| =: \|x(t)\| < \varepsilon$$

Man spricht daher auch von der Stabilität einer Gleichgewichtslage $\overline{x}$ und meint die Stabilität der zugehörigen Trajektorie $\varphi(\cdot; t_0, \overline{x})$. Da die Differenz zweier beliebiger Trajektorien einer linearen Differentialgleichung stets Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung sind, erhalten wir als Spezialfall der obigen Transformation das folgende Lemma:

Lemma 6.1.6
Gegeben sei die zeitvariante lineare Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$. Eine beliebige Trajektorie $\varphi(\cdot, t_0, x^0)$ ist genau dann (asymptotisch) stabil, wenn der Gleichgewichtszustand $\overline{x}(t) \equiv 0$ des zugehörigen homogenen Systems $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ (asymptotisch) stabil ist. □

Ist daher die triviale Lösung des zugehörigen freien Systems (asymptotisch) stabil, so sind dies alle Trajektorien einer linearen Differentialgleichung oder anders ausgedrückt: Ist ein Gleichgewichtszustand (asymptotisch) stabil, so sind auch alle weiteren (asymptotisch) stabil. Dies trifft im allgemeinen nicht auf nicht-lineare Differentialgleichungen zu.

6.2 Ljapunovs direkte Methode

Zunächst führen wir die sogenannten *Ljapunov-Funktionen* $V(\cdot)$ ein. Dies sind spezielle skalarwertige Funktionen, von deren besonderen Eigenschaften man auf das Stabilitätsverhalten von Trajektorien schließen kann, ohne diese selbst angeben und daher die Differentialgleichung lösen zu müssen. Um die Beweise einfach zu halten, beschränken wir uns in Zukunft auf die Betrachtung zeitinvarianter Differentialgleichungen mit einem nach rechts unbeschränkten maximalen Existenzintervall $I := [t^-, \infty[$.

Wir untersuchen also Differentialgleichungen des Typs

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

und setzen voraus, daß $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ und Lipschitz-stetig bezüglich x auf einer offenen Umgebung $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ des Nullpunkts ist. Ferner sei $f(0) = 0$. Dies läßt sich gegebenenfalls durch die im Zusammenhang von Lemma 6.1.6 besprochenen Transformation erreichen.

Sei D_0 eine offene Umgebung von 0 und $\overline{D}_0 \subset D$ und $V(\cdot) : \overline{D}_0 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Man definiert dann

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &:= V_x(x)\, f(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k(x) \\ &= \langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle \end{aligned}$$

für alle $x \in D_0$. Daher ist $\dot{V}(x)$ die Richtungsableitung von $V(\cdot)$ im Punkt x in Richtung $f(x)$. Aufgrund der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\varphi(t, x^0)) &= V_x(\varphi(t, x^0))\, \dot{\varphi}(t, x^0) \\ &= V_x(\varphi(t, x^0))\, f(\varphi(t, x^0)) \\ &= \dot{V}(\varphi(t, x^0)) \end{aligned}$$

Demzufolge beschreibt $\dot{V}(\cdot)$ bei Wahl von $x = \varphi(t, x^0)$ gerade die Änderungsrate von $V(\cdot)$ entlang der Trajektorie $\varphi(t, x^0)$.

Definition 6.2.1 (Ljapunov-Funktion)
Eine Funktion $V(\cdot) : \overline{D}_0 \to \mathbb{R}$ heißt Ljapunov-Funktion für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ auf D_0, wenn $V(\cdot) = \langle \operatorname{grad} V(\cdot), f(\cdot) \rangle$ gilt und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $V(0) = 0$ *und* $V(x) > 0$ *für* $x \in \overline{D}_0 \setminus \{0\}$.

(ii) $\dot{V}(x) \leq 0$ *für* $x \in D_0$.

□

Die folgenden zwei Theoreme von Ljapunov liefern ein hinreichendes Kriterium für die (asymptotische) Stabilität von Trajektorien.

Satz 6.2.2 (Ljapunovs erstes Stabilitätstheorem)
Sei $V(\cdot)$ eine Ljapunov-Funktion für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ auf einer Umgebung D_0 von $\overline{x} = 0$. Dann ist $\overline{x} = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage. □

Beweis
Sei $V(\cdot)$ eine Ljapunov-Funktion zu der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Wähle nun

(i) ein $\varepsilon > 0$, so daß die Kugel $K(0, \varepsilon)$ in D_0 liegt,

(ii) ein $\gamma > 0$, so daß auf dem Rand von $K(0, \varepsilon)$ $\quad V(x) \geq \gamma$ gilt und

(iii) ein $\delta > 0$ mit $0 < \delta < \varepsilon$, so daß für $\|x\| \leq \delta$ gilt: $V(x) < \delta$.

Man betrachte nun eine Trajektorie, deren Anfangswert x^0 in $K(0, \delta)$ liegt. Nach Voraussetzung hat die Funktion $V(\cdot)$ auf D_0 eine Ableitung $\dot{V}(x) \leq 0$. Daher kann der Wert von $V(\cdot)$ auf D_0 nicht wachsen und es gilt:

$$V(\varphi(t, x^0)) \leq V(x^0) < \gamma$$

Aufgrund von (ii) muß die Trajektorie für alle $t \in I$ in der Kugel $K(0, \varepsilon)$ verbleiben. ■

Satz 6.2.3 (Ljapunovs zweites Stabilitätstheorem)
Sei V eine Ljapunov-Funktion für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ auf einer Umgebung D_0 von $\overline{x} = 0$. Die Funktion $\dot{V}(\cdot)$ sei positiv definit, d.h. $\dot{V}(x) < 0$ für $x \in D_0 \setminus \{0\}$ und $\dot{V}(0) = 0$ für $x = 0$. Dann ist $\overline{x} = 0$ eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslage. □

Beweis
Es ist zu zeigen, daß $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x^0) = 0$ für $x \in K(0, \delta)$. Dazu reicht der Nachweis von $\lim_{t\to\infty} V(\varphi(t, x^0)) = 0$, so daß wir tatsächlich ohne die Kenntnis der Lösung $\varphi(t, x^0)$ auskommen.
Angenommen, es gilt $\lim_{t\to\infty} V(\varphi(t, x^0)) = \beta$. Ist $\beta \neq 0$, so ist die Menge $M := \{x \in D_0 : \beta \leq V(x) \leq V(x^0)\}$ eine kompakte Teilmenge von $\overline{K}(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$. Da $\dot{V}(x) < 0$ für $x \in D_0$ ist, verläuft die Trajektorie ganz in M. Setze $\max\{\dot{V}(x) : x \in M\} = -\alpha, \quad \alpha > 0$. ↯ Dies steht im Widerspruch zur Annahme, denn es gilt:

$$\lim_{t\to\infty} V(\varphi(t, x^0)) = \beta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \dot{V}(\varphi(t, x^0)) = 0$$

■

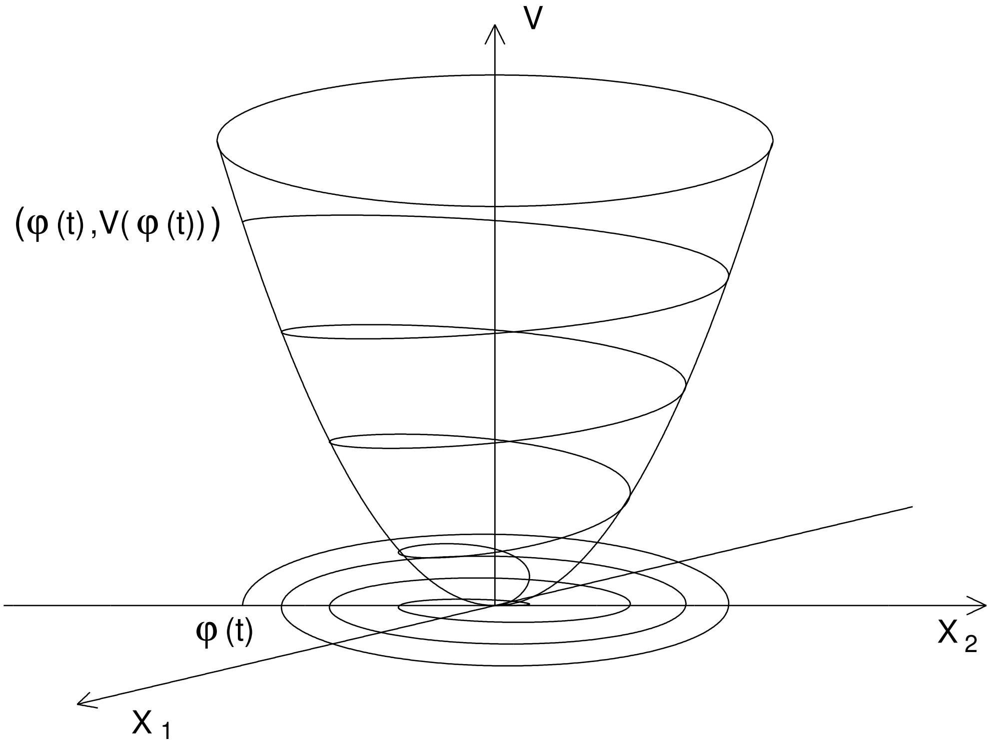


Abbildung 3: *Ljapunovfunktion zu einer asymptotischen Gleichgewichtslage.*

Bei Existenz einer passenden Ljapunov-Funktion ist es also möglich, die (asymptotische) Stabilität einer Trajektorie nachzuweisen, ohne die Differentialgleichung selbst lösen zu müssen.

6.3 Linearisierung und Stabilität

Bislang fehlen uns effektive Methoden zur Behandlung nicht-linearer Differentialgleichungen. Betrachtet man allerdings ein System der allgemeinen Form $\dot{x}(t) = f(x(t))$, so ist es möglich, aus der Untersuchung des zugehörigen linearisierten Systems auf das Stabilitätsverhalten eines nicht-linearen Systems zu schließen. Dazu gehen wir von einem System

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{2}$$

aus, das die Gleichgewichtslage $x(t) \equiv 0$ als Lösung aufweist. Dies läßt sich durch die im Zusammenhang von Lemma 6.1.6 besprochenen Transformation stets erreichen. Ferner sei $f : D_0 \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig auf einer Umgebung $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ des Nullpunkts und dort stetig partiell differenzierbar. In einer Umgebung des Nullpunktes erhalten wir dann mit Hilfe der Jacobi-Matrix $A = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für das System (2) die Darstellung

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + h(x). \tag{3}$$

Aufgrund der Definition für differenzierbare Abbildungen genügt $h(x)$ als Restglied der Bedingung $\lim_{x\to\infty} \frac{\|h(x)\|}{\|x\|} = 0$. Der Übergang von der Differentialgleichung (3) zu der homogenen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ bezeichnet man als Linearisierung der Differentialgleichung (2) in einer Umgebung des Nullpunkts.

Im Zusammenhang mit der Untersuchung linearisierter Systeme benötigen wir im weiteren Verlauf einen neuen Stabilitätsbegriff, den der exponentiellen Stabilität. Hierzu betrachtet man Systeme der Form

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \tag{4}$$

für $t \in [0, \infty[$. Ist $\Phi(t)$ eine beliebige Fundamentalmatrix zu (4), so definiert man:

Definition 6.3.1 (EXPONENTIELLE STABILITÄT)
Die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ heißt exponentiell stabil, wenn sich Konstanten $M, \omega > 0$ finden lassen, so daß

$$\|\Phi(t)\| \leq M\,e^{-\omega\,t}$$

für $t \in [0, \infty[$. □

Zunächst entwickeln wir ein Kriterium zur Überprüfung der exponentiellen Stabilität linearisierter Systeme vom Typ (4). Zur Herleitung des entsprechenden Satzes benötigt man eine Ljapunov-Funktion zur Differentialgleichung (4).

Für linearisierte Systeme verwendet man meist quadratische Ljapunov-Funktionen der Form $V(x) = \langle\, x, P\,x \,\rangle = x^T P\,x$, wobei $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ und $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix bezeichne.

Definition 6.3.2 (POSITIV DEFINIT)
Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

(i) positiv definit ($P \succ 0$), falls $\langle\, x, P\,x \,\rangle \;>\; 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\langle\, x, P\,x \,\rangle = 0$ für $x = 0$.

(ii) positiv semi-definit ($P < 0$), falls $\langle\, x, P\,x \,\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

□

Analog definiert man die Begriffe *negativ definit* und *negativ semi-definit*. Für die Herleitung der Ljapunov-Funktion $V(x) = \langle\, x, P\,x \,\rangle$ gilt demzufolge mit der Produktregel:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \langle\, \dot{x}, P\,x \,\rangle + \langle\, x, P\,\dot{x} \,\rangle \\
&= \langle\, A\,x, P\,x \,\rangle + \langle\, x, P\,A\,x \,\rangle \\
&= x^T\,A^T\,P\,x + x^T\,P\,A\,x \\
&= x^T\,(A^T\,P + P\,A)\,x \\
&= \langle\, x, (A^T\,P + P\,A)\,x \,\rangle
\end{aligned}
\tag{5}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Mit der Differentialgleichung (4) ist die folgende Halbgruppe von Evolutionsoperatoren assoziiert:

$$(e^{A\,t})_{t \geq 0} = (\Phi(t))_{t \geq 0}$$

Satz 6.3.3

(i) Erzeugt A eine exponentiell stabile Halbgruppe [5] $(\Phi(t))_{t \geq 0}$, so existiert für jede positiv definite Matrix $Q \succ 0$ genau eine Matrix $P < 0$ mit

$$A^T\,P + P\,A = -Q.$$

(ii) Existiert zu einer positiv definiten Matrix $Q \succ 0$ eine Matrix $P \succ 0$ mit $A^T\,P + P\,A = -Q$, so ist die zu $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ assoziierte Halbgruppe $(\Phi(t))_{t \geq 0}$ exponentiell stabil.

□

(5) exponentially stable semigroup

Beweis

(i) : Sei (4) exponentiell stabil und $Q \prec 0$ gegeben. Setze $P := \int_0^\infty e^{A^T t}\, Q\, e^{A\,t}\, dt$. Aufgrund unserer Voraussetzung ist P wohldefiniert, da $\|e^{A\,t}\| \leq M\, e^{-\omega\, t}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} A^T P + P\, A &= \int_0^\infty (A^T e^{A^T t}\, Q\, e^{A\,t} + e^{A^T t}\, Q\, e^{A\,t}\, A)\, dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\,(e^{A^T t}\, Q\, e^{A\,t})\, dt \\ &= 0 - e^{A^T t}\, Q\, e^{A\,t}\Big|_{t=0} \\ &= -Q \end{aligned}$$

Die Matrix P ist wie gewünscht positiv semi-definit, denn da $Q \prec 0$, folgt:

$$\begin{aligned} \langle\, x, P\, x\,\rangle &= x^T\, P\, x \\ &= \int_0^\infty x^T e^{A^T t}\, Q\, e^{A\,t}\, x\, dt \\ &= \int_0^\infty \langle\, e^{A\,t}, Q\, e^{A\,t}\, x\,\rangle\, dt \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Matrix P besitzt die oben gewählte Form, denn ist zusätzlich $\widetilde{P} \prec 0$ mit $A^T\, \widetilde{P} + \widetilde{P}\, A = -Q$ gegeben, so folgt

$$\begin{aligned} -\widetilde{P} &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\,(e^{A^T t}\, \widetilde{P}\, e^{A\,t})\, dt \\ &= \int_0^\infty A^T\, e^{A^T t}\, \widetilde{P}\, e^{A\,t} + e^{A^T t}\, \widetilde{P}\, A\, e^{A\,t}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{A^T t}\,(A^T\, \widetilde{P} + \widetilde{P}\, A)\, e^{A\,t}\, dt \\ &= -\int_0^\infty e^{A^T t}\, Q\, e^{A\,t}\, dt \\ &= -P \end{aligned}$$

Also ist P eindeutig bestimmt.

(ii) : Seien $P, Q \succ 0$ mit $A^T\, P + P\, A = -Q$. Setze $V(x) := \langle\, x, P\, x\,\rangle$. Die so definierte Funktion ist eine Ljapunov-Funktion, da ihre Ableitung (5) stetig und $V(\cdot)$ aufgrund der Voraussetzung $P \succ 0$ positiv definit ist. Außerdem gilt $\dot{V}(x) = -\langle\, x, Q\, x\,\rangle \leq 0$ stets. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, kann man mit Hilfe der Hauptachsentransformation für symmetrische Bilinearformen folgern, daß Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$ existieren, so daß

$$\begin{array}{lrcl} (*) & \alpha\,\|x\|^2 \leq \langle\, x, P\, x\,\rangle & \leq & \beta\,\|x\|^2 \\ \text{und} & -\langle\, x, Q\, x\,\rangle & \leq & -\gamma\,\|x\|^2 \end{array}$$

Man wähle zum Beispiel für α, β den kleinsten, beziehungsweise größten Eigenwert von P und für γ den kleinsten Eigenwert von Q. Dann gilt aufgrund der Eigenschaften der Ljapunov-Funktion $V(\cdot)$ die folgende Beziehung:

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma \, \|x\|^2 \leq \alpha \, \|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta \, \|x\|^2.$$

Setzen wir nun $x(t) := e^{A\,t}\, x^0, x^0 \neq 0$, so folgt mit den Ungleichungen $\frac{V(x)}{\beta} \leq \|x\|^2$ und $\|x\|^2 \leq \frac{\dot{V}(x)}{-\gamma}$ aus $(*)$:

$$\begin{array}{rrcl}
 & \dot{V}(e^{A\,t}\, x^0) & \leq & \dfrac{-\gamma}{\beta} V(e^{A\,t}\, x^0) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\dot{V}(e^{A\,t}\, x^0)}{v(e^{A\,t}\, x^0} & \leq & -\dfrac{\gamma}{\beta} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{d}{dt} \ln |V(e^{A\,t}\, x^0)| & \leq & -\dfrac{\gamma}{\beta} \\
\Leftrightarrow & \ln(V(e^{A\,t}\, x^0)) - \ln(V(x^0)) & \leq & -\displaystyle\int_0^t \dfrac{\gamma}{\beta}\, dt \\
\Leftrightarrow & \ln\left(\dfrac{V(e^{A\,t}\, x^0)}{V(x^0)}\right) & \leq & -\dfrac{\gamma}{\beta}\, t \\
\Leftrightarrow & V(e^{A\,t}\, x^0) & \leq & e^{-\frac{\gamma}{\beta}\, t}\, V(x^0)
\end{array}$$

Somit folgt aus $(*)$:

$$\begin{array}{rrcl}
 & \alpha \, \|e^{A\,t}\, x^0\|^2 & \leq & \beta \, \|x^0\|^2 \, e^{-\frac{\gamma}{\beta}\, t} \\
(\dagger) \quad \Rightarrow & \left\| e^{A\,t} \dfrac{x^0}{\|x^0\|} \right\| & \leq & \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\, e^{\frac{-\gamma}{2\,\beta}\, t}
\end{array}$$

Die Ungleichung $(\dagger)$ gilt für alle $x^0 \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, in diesem Fall insbesondere auch für $\sup\{e^{A\,t} \frac{x^0}{\|x^0\|} : x^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$, so daß aus der Definition der Matrixnorm folgt:

$$\|e^{A\,t}\| \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, e^{-\frac{\gamma}{2\,\beta}\, t}$$

■

Nun ist es möglich, von den Stabilitätseigenschaften des linearisierten Systems $\dot{x}(t) = A\, x(t)$ auf die Stabilitätseigenschaften des allgemeinen Ausgangssystems $\dot{x}(t) = f(x(t))$ zu schließen.

Satz 6.3.4 (Linearisierungstheorem)
Sei $A = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)]_{i,j=1,\ldots,n}$ *und* $\dot{x}(t) = A\, x(t)$ *exponentiell stabil. Dann ist die Gleichgewichtslage* $\overline{x} = 0$ *der Differentialgleichung* $\dot{x}(t) = f(x(t))$ *asymptotisch stabil.* □

Beweis
Sei $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ exponentiell stabil. Dann existiert nach Satz 6.3.3 eine Matrix $P \succ 0$, so daß $A^T P + P A = -I_n$. Die Funktion $V(x) := \langle x, P x \rangle$ ist dann eine Ljapunov-Funktion für die allgemeine Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$, denn man erhält mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \langle \dot{x}, P x \rangle + \langle x, P \dot{x} \rangle \\
&= \langle A x + h(x), P x \rangle + \langle x, P A x + P h(x) \rangle \\
&= \langle A x, P x \rangle + \langle h(x), P x \rangle + \langle x, P A x \rangle + \langle x, P h(x) \rangle \\
&= \langle x, A^T P x \rangle + \langle x, P A x \rangle + \langle h(x), P x \rangle + \langle x, P h(x) \rangle \\
&= \langle x, (A^t P + P A)\, x \rangle + \langle h(x), P x \rangle + \langle x, P h(x) \rangle \\
&\leq -\langle x, I_n x \rangle + 2\,\|h(x)\|\,\|P\|\,\|x\| \\
&= -\|x\|\,(\|x\| - 2\,\|h(x)\|\,\|P\|)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Restgliedeigenschaft existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|h(x)\| < \frac{1}{2\,\|P\|}\,\|x\|$$

für $x \in K(\overline{x}, \delta)$, d.h. $\|x\| < \delta$. Daher gilt:

$$\dot{V}(x) < -\|x\|\,(\|x\| - \frac{2\,\|P\|}{2\,\|P\|}\,\|x\|) = 0$$

Damit ist $V(\cdot)$ eine Ljapunovfunktion mit negativ definiter Ableitung $\dot{V}(\cdot)$. Nach Satz 6.2.3 ist damit $\overline{x} = 0$ eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslage der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$. ■

Insgesamt lassen sich unsere Resultate über das Stabilitätsverhalten beliebiger Trajektorien wie folgt zusammenfassen:
Interessieren wir uns für das Stabilitätsverhalten einer bestimmten Trajektorie, so ist es mit Hilfe der zu Beginn des Kapitels besprochenen Transformation stets möglich, das Geschwindigkeitsvektorfeld f so zu transformieren, daß das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtslage $\overline{x} = 0$ des transformierten Systems $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$ gerade dem der zu untersuchenden Trajektorie entspricht. Gelingt es, zu der Funktion $\tilde{f}(\cdot)$ eine Ljapunov-Funktion anzugeben, so erhält man die Stabilitätseigenschaften der Trajektorie aus beiden Theoremen von Ljapunov. Die Schwierigkeit besteht bei nicht-linearen Systemen in der Konstruktion der zugehörigen Ljapunov-Funktion. Dieses Problem ist vermeidbar, wenn $\tilde{f}(\cdot)$ in einer Umgebung des Nullpunktes stetige partielle Ableitungen bezüglich x besitzt. In diesem Fall läßt sich das Stabilitätsverhalten der Trajektorie durch Anwendung des Linearisierungssatzes auf das Stabilitätsverhalten einer homogenen zeitinvarianten linearen Differentialgleichung zurückführen. Hierfür können wir auf die in Kapitel 3 entwickelten spektralen Stabilitätskriterien zurückgreifen.

(i) Stabilität:
Die Systemmatrix A erzeugt genau dann eine beschränkte Halbgruppe $(e^{At})_{t\geq 0}$, d.h.

$$\exists\, M > 0 : \|e^{At}\| \leq M$$

für alle $t \geq 0$, wenn $\overline{x} = 0$ stabile Gleichgewichtslage von $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt:

(i) $\mathsf{Re}(\lambda) \leq 0$

(ii) Für $\mathsf{Re}(\lambda) = 0$ stimmt die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen überein.

(ii) Asymptotische Stabilität:
Die Systemmatrix A erzeugt genau dann eine exponentiell stabile Halbgruppe $(e^{At})_{t\geq 0}$, wenn $\overline{x} = 0$ eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslösung für $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $\lambda \in \sigma(A)$ $\mathsf{Re}(\lambda) < 0$ gilt.

Beispiel:
Im folgenden sollen für die beiden Systeme

1) $\dot{x}(t) = x^2(t) - x(t), \qquad x(t) \in \mathbb{R}$

2) $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2$

die Stabilitätseigenschaften instabil, stabil, asymptotisch stabil der Gleichgewichtspunkte, lokale Ljapunov-Funktionen für die stabilen Gleichgewichtspunkte, sowie Abschätzungen der Attraktionsgebiete angegeben werden.

1): Die Gleichgewichtspunkte von $\dot{x}(t) = x^2(t) - x(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}$ sind $\overline{x}_1 = 0$ und $\overline{x}_2 = 1$.

(i) $\overline{x}_1 = 0$:
$A = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)] = 2\,x - 1|_{x=0} = -1$. A ist exponentiell stabil, da für den Eigenwert $\lambda = -1$ $\mathsf{Re}(\lambda) \leq 0$ gilt. Also ist $\overline{x}_1 = 0$ asymptotisch stabile Gleichgewichtslage.
Wähle als Ljapunov-Funktion

$$V(x) = \alpha\, x^4 + \beta\, x^4 \quad \text{mit } \alpha, \beta > 0$$

$V(x)$ ist positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}$. Für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \langle\, \operatorname{grad} V(x), f(x)\, \rangle \\ &= \langle\, 4\,\alpha\, x^3 + 4\,\beta\, x^3, x^2 - x\, \rangle \\ &= 4\,(\alpha\, x^5 - \alpha\, x^4 + \beta\, x^5 - \beta\, x^4) \end{aligned}$$

Wir setzen nun $\alpha = \beta = 1/8$ und erhalten $\dot{V}(x) = x^5 - x^4 \leq 0$ für alle $x \in \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$. Somit ist $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ eine Abschätzung des Attraktionsgebietes.

(ii) $\overline{x}_2 = 1$ ist eine instabile Gleichgewichtslage, da $\overline{x}_2$ selbst zum Attraktionsgebiet von $\overline{x}_1$gehört.

2): Die einzige Gleichgewichtslage zu $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2$ ist $\overline{x} = \binom{0}{0}$. Die Eigenwerte von f sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Der Nullpunkt ist stabile Gleichgewichtslage, da $\mathsf{Re}(\lambda_i) \leq 0$ für $i = 1, 2$ und die algebraische Vielfachheit ist gleich der geometrischen.
Wähle als Ljapunov-Funktion

$$V(x) = \alpha\, x_1^2 + \beta\, x_2^2, \quad \alpha, \beta > 0$$

$V(X)$ ist positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left\langle \begin{pmatrix} 2\,\alpha\, x_1 \\ 2\,\beta\, x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2\, x_1 - x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2\,\alpha\, x_1^2 + 2\,\alpha\, x_1\, x_2 - 4\,\beta\, x_1\, x_2 - 2\,\beta\, x_2^2 \end{aligned}$$

Setze nun $\alpha = 2$ und $\beta = 1$. Dann erhalten wir $\dot{V}(x) = 4\, x_1^2 - 2\, x_2^2 \leq 0$ für $x \in \{x \in \mathbb{R}^2 : \, x_2^2 \geq 2\, x_1^2\}$. Dies ist gleichzeitig die Abschätzung des Attraktionsgebietes.

$\square$

Symbolverzeichnis

Definitionsbereiche:

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$\mathbb{R}^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbb{C}_-$	$:= \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}(z) < 0\}$
$\mathbb{K}$	Körper der reellen oder komplexen Zahlen
$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$	Raum der n–mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$

Mengenbezeichnungen:

$\mathrm{Ker}(A)$	Kern einer Matrix A
$\mathrm{Im}(A)$	Bild einer Matrix A
$\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$	Gruppe der invertierbaren $n \times n$–Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$
$\sigma(A)$	Spektrum einer Matrix A
$\langle A \| V \rangle$	$:= V + A\,V + \cdots + A^{\,n-1}\,V$, kleinster A–invarianter Unterraum, der V enthält.
	$= \{v^1 + A\,v^2 + \cdots + A^{n-1} v^n : v^j \in V\}$

Topologische Symbole:

S^n	n-dimensionale Einheitssphäre
$\overline{U}$	abgeschlossene Hülle einer Menge U
∂U	Rand einer Meng U
U^C	Komplement einer Meng U
$\overset{o}{U}$	Inneres einer Menge U
$K(x^0, \delta)$	offene Kugel vom Radius δ um x^0
$\overline{K}(x^0, \delta)$	abgeschlossene Kugel vom Radius δ um x^0

Operatoren:

$\mathsf{Re}(z)$	Realteil einer komplexen Zahl z
$\mathsf{Im}(z)$	Imaginärteil einer komplexen Zahl z
$\mathrm{dist}(x, y)$	Abstand zweier Punkte x und y
$\Vert \cdot \Vert$	Norm (allgemein)
$\Vert x \Vert_2$	$:= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$\langle x, y \rangle$	$:= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, Standardskalarprodukt
$\deg(P)$	Grad eines Polynoms P
$\mathrm{grad}(f)$	Gradient einer Funktion f
$\mathrm{rg}(A)$	Rang einer Matrix A
A^T	Transponierte einer Matrix A
$\overline{A}$	$:= [\overline{a}_{ij}]$, die zu A konjugiert komplexe Matrix
A^*	$:= (\overline{A})^T$
$\mathrm{diag}(A)$	$:= (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, Diagonale von A
$\mathrm{Sp}(A)$	$:= \sum_{i=1}^n a_{ii}$, Spur einer Matrix A

Literaturverzeichnis

[1] V.I. Arnold, Ordinary Differential Equations, MIT Press 1973.

[2] M. Braun, Differential Equations and their Applications, Springer 1978.

[3] H.W. Knobloch / F. Kappel, Gewöhnliche Differentialgleichungen, B.G. Teubner 1974.

[4] W. Fischer / H. Grauert, Differential- und Integralrechnung II, Springer 1968.

[5] W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 1976

[6] F.R. Gantmacher, Matrizentheorie, Springer 1986

Die folgende Kurzbeschreibung der von uns verwendeten Lehrbücher soll als Orientierungshilfe dienen und spiegelt lediglich einen subjektiven Eindruck wieder, der sich bei der Arbeit mit den einzelnen Werken ergab. Für die Ausarbeitung des Stoffes wurden von uns neben dem Vorlesungsmanusskript in erster Linie die Bücher *gewöhnliche Differentialgleichungen* von den Autoren W. Walter, H.W. Knobloch/F. Kappel, beziehungsweise M. Braun benutzt.

- Das Lehrbuch von Braun fand besonders in den ersten beiden Kapiteln Verwendung. Es beinhaltet eine sehr originelle Sammlung von Anwendungsbeispielen – allein die „Kunstfälschungen des Van Meegeren“ und das „Brückenunglück von Tacoma“ sind schon einen Gang zur Bibliothek wert. Diese Stärke ist jedoch zugleich auch die größte Schwäche dieses Buches: Die zahlreichen Beispiele, die extrem ausführliche Beweisführung und die Wiederholung weiter Teile der linearen Algebra machen es gelegentlich schwer, dem roten Faden der Theorie zu folgen. Dieses Buch eignet sich besonders als Ergänzung zu anderen Lehrbüchern.
- Dem Werk von Knobloch/Kappel verdanken wir während der gesamten Arbeit am Skript immer wieder wertvolle Anregungen. Es ist stark

analytisch angelegt und verzichtet daher weitgehend auf jede geometrische Anschauung, dringt jedoch tief in den Stoff ein. Der Sprachstil ist präzise, knapp und sehr trocken. Bei häufigerem Gebrauch lernt man allerdings seine Zuverlässigkeit und die bis ins Detail sorgfältigen Beweise schätzen.

- Das Buch von Walter ist uns leider erst während der Bearbeitung des vierten Kapitels aufgefallen, gab jedoch den Anstoß zu zahlreichen Verbesserungen im gesamten Skript. Die geometrische Betrachtungsweise, ein vergleichbarer Aufbau, sowie eine ähnliche Terminologie erleichtern den Übergang vom Skript zum Buch und visa vie. Es ist übersichtlich, kompetent und angenehmen zu lesen, obwohl der Autor gelegentlich dazu neigt, einzelne Stellen und Beweise nur anzudeuten.

Index