Eine kleine Maßtheorie
Borelmaße auf lokalkompakten, separablen und metrisierbaren Räumen

Hellmut Baumgärtel

4. Mai 1998

Vorbemerkung

Bei der Konzeption einer Vorlesungsreihe über Maßtheorie, zumal wenn sie Teil eines Analysis-Kurses sein soll, stellt sich die Frage, ob das Schwergewicht auf der „Abstrakten Maßtheorie“ liegen soll, womit dann den Anforderungen z.B. auch aus der Wahrscheinlichkeitstheorie Rechnung getragen würde, oder ob man eher den Schwerpunkt auf die sogenannten „Topologischen Maße“ legen, also die Verknüpfung von Maß und Topologie in den Vordergrund stellen sollte.

Denn während es z.B. in den Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie wichtig ist, Maße zu betrachten, deren zugehöriger Borelkörper vom Maß abhängen kann, kommt es für die Anwendungen in der Analysis eher darauf an, sehr unterschiedliche Maße zu betrachten, die aber einunddenselben Borelkörper besitzen, und zwar den, der mit der Topologie des Grundraumes kanonisch verknüpft ist.

Ein weiterer Gesichtspunkt ist natürlich der, eine solche „erste Annäherung“ an die Maßtheorie aus der Perspektive der Analysis nicht durch zu viele Besonderheiten und Komplikationen zu unübersichtlich werden zu lassen.

Des weiteren soll im Rahmen eines solchen „essentiellen Bestands“ der Maßtheorie die Lebesgue'sche Integrationstheorie entwickelt werden, unter anderem um Vorbereitungen für die Zwecke der Funktionalanalysis zu treffen.

Bekanntlich können diese Wünsche bzw. Bedingungen erfüllt werden, wenn man sich auf die Maßtheorie auf lokalkompakten separablen metrisierbaren Räumen beschränkt, wobei der Borelkörper kanonisch durch die Topologie gegeben ist. Da dann Borel- und Baire-Maße zusammenfallen, wird die Theorie aus maßtheoretischer Sicht schon einfacher, auf der anderen Seite bereichern die topologischen Eigenschaften der Maße die Theorie.

Dieser Standpunkt wird z.B. in dem Standardwerk von J.Dieudonné [2, p. 111 ff.] eingenommen, während das klassische und unübertroffene Lehrbuch von P.Halmos [3] die „Abstrakte Maßtheorie“ zum Hauptgegenstand hat.

Allerdings stellt Dieudonné die Definition des Maßes als *Linearform* auf einem Raum (stetiger) Funktionen auf dem Grundraum an die Spitze. Diese Definition braucht sozusagen als „Medium“ den Funktionsbegriff, was nicht ganz natürlich erscheint, wenn man von der intuitiven Vorstellung des „Ausmessens einer Menge“ ausgeht. Der Zusammenhang mit der intuitiven Maßvorstellung wird bei dieser Definition erst durch die nachfolgende Entwicklung hergestellt.

Einen kurzen Abriß der historischen Entwicklung von Maß– und Integrationstheorie findet man in J. Dieudonné [1, p. 698-707].

Die folgende Darstellung versucht, den o.g. Wünschen bzw. Bedingungen Rechnung zu tragen, aber indem von der intuitiven Vorstellung des Maßes ausgegangen wird. M.a.W. das Ziel diese Kurses kann so beschrieben werden:

- Maßtheorie auf der Klasse der lokalkompakten, separablen und metrisierbaren Räume, also auf einer Klasse von topologischen Räumen, die sehr häufig in den Anwendungen in der Analysis vorkommen, die eine „einfache“ Darstellung der Theorie zulassen, aber bereits die wesentliche Struktur - auch einer Maßtheorie ohne Topologie - erkennen lassen.

- Maßtheorie, die die intuitive Vorstellung des „Ausmessens einer Menge“ als Ausgangspunkt nimmt.
- Maßtheorie zur Vorbereitung eines Kurses in Funktionalanalysis.
- Maßtheorie ohne besondere Berücksichtigung der speziellen Erfordernisse der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Es scheint, daß an Darstellungen der Maßtheorie unter den genannten Randbedingungen ein gewisser Mangel besteht. Aus diesem Grunde wird die folgende Niederschrift einer einsemestrigen Vorlesung im WS 95/96 an der Universität Potsdam vorgelegt, bei der Material aus den Büchern von P.Halmos [3] und I.P.Natanson [4] benutzt wurde, gelegentlich auch aus dem umfassenden Werk von N.Dunford and J.T.Schwartz [5], und zwar aus Chap.III: Integration and Set Functions (p. 95 ff.).

Potsdam, im Februar 1997 H.Baumgärtel

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Abstrakte Maßtheorie **7**
2.1 Borel-Struktur, Borel-Raum, Maß 7

3 Borel-Maße **11**
3.1 Die „natürliche“ Borel-Struktur in $\mathfrak{X}$, Borel-Maße 11
3.2 Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$, erster Teil 12
3.3 Konstruktion von Borel-Maßen; das Lebesgue-Maß, zweiter Teil 18
3.4 Jedes Borel–Maß ist regulär 23
3.5 Beispiele: Stieltjes–Maße, Dirac–Maß, Cantor–Maß; einige Definitionen 27
3.6 μ-meßbare Mengen 30
3.7 Borel–Funktionen, μ-meßbare Funktionen 31

4 Integrationstheorie **35**
4.1 Das Integral finiter Treppenfunktionen 35
4.2 Ein zentrales Lemma 38
4.3 Integrable Funktionen, Integral 41
4.4 Maßkonvergenz, Fastüberallkonvergenz, Mittelkonvergenz 43
4.5 Hauptsatz über die Cauchyfolgen bez. der μ-Mittelkonvergenz 46
4.6 Die Sätze von B. Levi, Lebesgue und Fatou. Folgerungen 48
4.7 Die Räume $L^1(\mathfrak{X},\mu)$ und $L^\infty(\mathfrak{X},\mu)$ 53

5 Reellwertige Borel–Maße, Theorem von Radon–Nikodym **57**
5.1 Reellwertige Borel–Maße, Hahnsche Zerlegung 58
5.2 Jordansche Zerlegung eines reellwertigen Maßes 60
5.3 Das Theorem von Radon–Nikodym 62
5.4 Radon-Nikodym-Ableitung, Kettenregel, Substitutionsregel 66

6 Produktmaße **69**
6.1 Cartesisches Produkt und Produktmaße 69
6.2 Fubini's Theorem 74

7 Das Haarsche Maß **77**
7.1 Haarsches Maß, Definition und einfache Eigenschaften 78
7.2 Das Verhältnis $K : F$ und die Funktionen $\lambda_U(K) := K : U/A_0 : U$ 79
7.3 Kompaktheit und Cantorsche Durchschnittseigenschaft 81
7.4 Cartesische Produkte, Tychonoff-Topologie und das Theorem von Tychonoff 82

7.5 Konstruktion eines „Inhalts“ für Kompakta und seine Regularität 84
7.6 Der innere Inhalt offener Mengen; Konstruktion eines Haarschen Maßes 86
7.7 Die Einzigkeit des Haarschen Maßes 88
7.8 Beispiele 90

Literaturverzeichnis **91**

Kapitel 1

Einleitung

Nicht alle Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ können „vernünftig ausgemessen“ werden. Für eine „vernünftige“ Maßvorschrift $\mu(\cdot)$ verlangen wir

(I) $\mu(A) \geq 0, \quad A \subseteq \mathbb{R}$.

(II) $\mu([a,b]) = b - a$, (Länge des Intervalls).

(III) Wenn $A \subseteq B$, so $\mu(A) \leq \mu(B)$, (Monotonie).

(IV) $\mu(A + x) = \mu(A)$, für alle $A \subseteq \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$, wobei $A + x := \{y \in \mathbb{R} : y = a + x,\, a \in A\}$, (Translationsinvarianz).

(V) Wenn $A_1, A_2, A_3, \dots$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen ist, d.h. $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \ , \quad \text{(Additivität)} \ .$$

Es darf $\mu(A) = \infty$ werden, z.B. wäre $\mu(\mathbb{R}) = \infty$ und für $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ gibt es genau zwei Möglichkeiten: Konvergenz der Reihe, d.h. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$ oder Divergenz, d.h. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \infty$.

Die erste Komplikation der Maßtheorie besteht eben darin, daß man Mengen „konstruieren“ kann, die nicht konsistent mit den Vorschriften (I) - (V) ausgemessen werden können. Das bedeutet, daß man sich um (möglichst umfassende) Teilsysteme von Teilmengen von $\mathbb{R}$ kümmern muß, für die eine Maßvorschrift μ definiert werden kann.

Ein Beispiel:

Wir betrachten das Intervall $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}$. für Punkte x, y aus diesem Intervall betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y := x - y \in Q \ , \quad (Q \text{ die Gesamtheit der rationalen Zahlen}).$$

Mit $K(x)$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse des Punktes x, $K(x) \subset [-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}]$.

Wir bilden jetzt eine Menge $A \subset [-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}]$, indem wir wir aus jeder Äquivalenzklasse $K(x)$ genau einen Punkt herausgreifen. A soll dann die Gesamtheit dieser Punkte sein.

Zur Erinnerung: $Q \cap [-1,1]$ ist abzählbar, wir schreiben diese Menge als Folge $r_0 = 0, r_1, r_2, r_3 \dots$, und bilden

$$A_n := A + r_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ z.B. ist } A_0 = A \ .$$

Wenn nun $\mu(A)$ die Maßzahl von A bezeichnet, so müßte wegen (IV)

$$\mu(A_n) = \mu(A), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gelten.

Wir stellen zuerst mal fest, daß

$$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \tag{1.1}$$

gilt und daß die A_n paarweise disjunkt sind:

$$A_n \cap A_m = \emptyset \quad \text{für} \quad n \neq m \ . \tag{1.2}$$

Beweise: Sei $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Dann gehört x zu einer der Klassen, $x \in K = K(x)$. Sei nun $\xi \in A$ der in A enthaltene Repräsentant von K, dann ist

$$x - \xi =: r \in Q \ ,$$

aber

$$|r| \leq |x| + |\xi| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

d.h. $r = r_n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, also

$$x = \xi + r_n,$$

das bedeutet aber $x \in A_n$, womit (1.1) bewiesen ist. Weiter sei $y \in A_n \cap A_m$, also

$$y = \xi + r_n = \eta + r_m, \quad n \neq m, \quad \text{d.h. aber} \quad r_n \neq r_m$$

und das bedeutet: die Punkte $\xi, \eta \in A$ sind verschieden, $\xi \neq \eta$. Andererseits ist $\xi - \eta = r_m - r_n \in Q$, d.h. ξ und η gehören zu einundderselben Klasse, das ist ein Widerspruch. Damit ist (1.2) bewiesen.

Wegen der Monotonie (III) und der Additivität (V), erhält man aus (1.1) und (1.2)

$$\mu([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \subseteq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Setzt man nun $\mu(A) =: \beta \geq 0$, so erhält man wegen (II) und (IV) sofort

$$1 \leq \beta + \beta + \beta + \ldots,$$

d.h. aber, es müßte notwendigerweise $\beta > 0$ sein. Andererseits wissen wir aber, daß

$$A_n \subseteq [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

also auch

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$$

gilt. Wiederum wegen (II), (III), (IV) und (V) würde man erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq 3 \ ,$$

d.h. also

$$\beta + \beta + \beta + \ldots \leq 3 \ .$$

Hieraus ergibt sich aber mit Notwendigkeit $\beta = 0$ und damit hat die Annahme der Existenz einer Maßzahl $\mu(A)$ zum Widerspruch geführt.

Kapitel 2

Abstrakte Maßtheorie

2.1 Borel-Struktur, Borel-Raum, Maß

$\mathfrak{X}$ sei eine beliebige Menge, $M \subseteq \mathfrak{X}$ eine Teilmenge. Wir wollen *möglichst viele* Teilmengen M „vernünftig ausmessen" (nach Vorgabe eines Maßprinzips). Wir wissen schon, daß i.a. nicht jede Teilmenge vernünftig ausgemessen werden kann (siehe das Beispiel $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$ im Abschnitt 1).

Wir stellen deshalb zuerst mal Eigenschaften zusammen, die vernünftig ausmeßbare Teilmengen M haben sollten:

$B, B_1, B_2, B_3, \dots$ seien bereits vernünftig ausmeßbar. Dann sollten auch

$$\mathfrak{X} \setminus B \ , \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \ , \qquad \emptyset \ \text{(die leere Menge)}$$

ausmeßbar sein. Wegen $\mathfrak{X} \setminus \emptyset = \mathfrak{X}$ und

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \mathfrak{X} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathfrak{X} \setminus B_j)$$

müßten dann auch $\mathfrak{X}$ und $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$ ausmeßbar sein. Wir fassen das in eine Definition.

Definition. 2.1.1 *Eine Borel-Struktur $\mathcal{B}$ auf $\mathfrak{X}$ ist ein System von Teilmengen von $\mathfrak{X}$, das abgeschlossen ist in bezug auf die Bildung des Komplements und abzählbarer Vereinigungen, und das die leere Menge enthält, also: $B, B_1, B_2, B_3, \dots \in \mathcal{B}$ impliziert $\mathfrak{X} \setminus B \in \mathcal{B}$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{B}$, $\emptyset \in \mathcal{B}$.*

Wie oben bemerkt, *folgt* dann, daß auch $\mathfrak{X} \in \mathcal{B}$ und $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{B}$.

Ein solches System $\mathcal{B}$ heißt, wie gesagt, eine *Borel-Struktur* auf $\mathfrak{X}$, die Mengen $B \in \mathcal{B}$ heißen *Borel-Mengen* und $\mathfrak{X}$, zusammen mit der Borel-Struktur $\mathcal{B}$, heißt ein *Borel-Raum* $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$.

Beispiel: Sei $\mathcal{B}$ die Potenzmenge von $\mathfrak{X}, \mathcal{B} := \mathcal{P}(\mathfrak{X})$, das System aller Teilmengen. Dann ist $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ ein Borel-Raum, $\mathcal{B}$ eine Borel-Struktur.

Jede Borel-Struktur $\mathcal{B}$ auf $\mathfrak{X}$ ist ein Teilsystem von $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{X})$.

Lemma. 2.1.2 *Der Durchschnitt $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha$ eines beliebigen Systems $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (A irgendeine Indexmenge) von Borel-Strukturen auf $\mathfrak{X}$ ist wieder eine Borel-Struktur.*

Beweis: nachrechnen! ∎

Diese Tatsache führt zu dem Begriff der „*kleinsten*" Borel-Struktur, die ein gegebenes System $\mathcal{F}$ von Teilmengen von $\mathfrak{X}$ enthält:

Sei $\mathcal{F}$ ein solches System, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{X})$. Dann betrachten wir das System aller Borel-Strukturen $\mathcal{B}$ die $\mathcal{F}$ enthalten: $\{\mathcal{B} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}\}$. Dieses System ist nicht leer, weil ja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{X})$ und $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ eine Borel-Struktur ist. Dann bilden wir

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \\ \mathcal{B} \supseteq \mathcal{F}}} \mathcal{B} \ .$$

Lemma. 2.1.3 *$\mathcal{B}(\mathcal{F}$ ist die kleinste Borel-Struktur, die $\mathcal{F}$ enthält.*

Beweis: Zum einen ist ja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{F})$ und zum anderen gilt: wenn $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, so ist sofort $\mathcal{B}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}$. ∎
Die Borel-Struktur $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ heißt die durch $\mathcal{F}$ *erzeugte* Borel-Struktur.

Beispiel: Sei $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$ und $\mathcal{F} := \{(a,b), a < b\}$, also $\mathcal{F}$ die Gesamtheit aller offenen Intervalle. Dann ist eben $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ die durch alle offenen Intervalle erzeugte Borel-Struktur.

Es folgen einige Begriffe und Definitionen, die mit einem Borel-Raum $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ zusammenhängen:

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, d.h. $\mathcal{F}$ irgendein System von Borel-Mengen.

Definition. 2.1.4 *$\mathcal{F}$ heißt separierend, wenn zu allen $x, y \in \mathfrak{X}$ mit $x \neq y$ ein $B \in \mathcal{F}$ existiert mit $x \in B$ aber $y \notin B$.*

Definition. 2.1.5 *$\mathcal{F}$ heißt erzeugend (für $\mathcal{B}$), wenn $\mathcal{B}$ durch $\mathcal{F}$ erzeugt wird, d.h. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{F})$.*

Definition. 2.1.6 *$\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ heißt separiert, wenn $\mathcal{B}$ ein separierendes System ist.*

Definition. 2.1.7 *$\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ heißt abzählbar separiert := es existiert ein abzählbares Teilsystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, das separierend ist.*

Definition. 2.1.8 *$\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ heißt abzählbar erzeugt := existiert ein abzählbares Teilsystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, das erzeugend ist.*

Beispiel: $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_0 :=$ Gesamtheit aller offenen Intervalle (a,b) mit a, b rational $(a, b \in Q)$; $\mathcal{F} :=$ Gesamtheit aller offenen Intervalle (a,b). Klar: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Betrachte $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{F})$. Es ist

- $\mathcal{F}_0$ erzeugend für $\mathcal{B}$, denn $(a,b) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (r_j, s_j)$; $\quad r_j, s_j \in Q, \quad a < r_j < s_j < b, \quad \lim_j r_j = a, \ \lim_j s_j = b.$
- $\mathcal{F}_0$ ist separierend, denn zu $x \neq y$ gibt es $r, s \in Q$ mit $r < x < s < y$.

Fazit: der Borel-Raum $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}\}$ ist abzählbar separiert und abzählbar erzeugt.

Lemma. 2.1.9 *Wenn $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ separiert und abzählbar erzeugt ist, so ist $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ auch abzählbar separiert.*

Beweis: Fingerübung für den Leser. ∎

Ist $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ ein Borel-Raum und $M \subseteq \mathfrak{X}$, so ist trivialerweise auch $\{M, \mathcal{B}_M\}$ mit $\mathcal{B}_M := \{B \cap M; B \in \mathcal{B}\}$ ein Borel-Raum, ein sogenannter *Teil-Borel-Raum.*

Sind $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ und $\{\mathfrak{X}', \mathcal{B}'\}$ zwei Borel-Räume und φ eine Abbildung von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{X}' : \mathfrak{X} \ni x \to \varphi(x) \in \mathfrak{X}'$, so heißt φ eine *Borel-Abbildung* (Borel-Funktion), wenn für alle $B' \in \mathcal{B}'$ gilt $\varphi^{-1}(B') \in \mathcal{B}$, d.h. die Urbilder von Borel-Mengen sind Borel-Mengen.

Definition. 2.1.10 *φ heißt Borel-Isomorphismus von $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ auf $\{\mathfrak{X}', \mathcal{B}'\}$, wenn φ eine Bijektion von $\mathfrak{X}$ auf $\mathfrak{X}'$ ist und wenn sowohl φ als auch φ^{-1} Borelfunktionen sind.*

In diesem Fall nennt man $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ und $\{\mathfrak{X}', \mathcal{B}'\}$ *Borel-isomorph.* Also: Zwei Borel-Räume sind Borel-isomorph, wenn es zwischen ihnen einen Borel-Isomorphismus gibt.

Bedingt durch die negative Erfahrung aus 1. schränken wir den Begriff des „vernünftigen Ausmessens" von Teilmengen von $\mathfrak{X}$ von vornherein auf die Borel-Mengen einer Borel-Struktur auf $\mathfrak{X}$ ein und definieren den Begriff des *Maßes* auf einem Borel-Raum $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$.

Definition. 2.1.11 *Sei $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ ein Borel-Raum. Ein Maß auf $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{B} &\mapsto [0, \infty) \cup \{\infty\} \ , \qquad \textit{also} \\ \mathcal{B} \ni A &\mapsto \mu(A) \in [0, \infty) \cup \{\infty\} \ , \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

(I) $\mu(\emptyset) = 0$.

(II) Falls das abzählbare System $B_1, B_2, B_3, \ldots$ von Borel-Mengen disjunkt ist ($B_j \cap B_k = \emptyset$ für $j \neq k$), so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \ .$$

Diese Eigenschaft nennt man abzählbare Additivität oder auch $\sigma-$Additivität.

Die genannten Eigenschaften implizieren weitere, z.B. gilt

(III) Wenn $A \subseteq B$, so $\mu(A) \leq \mu(B)$, denn es ist ja $B = A \cup (B \setminus A)$ und A und $B \setminus A$ sind disjunkt, also gilt nach (II) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$,aber $\mu(B \setminus A) \geq 0$, also folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Zwei weitere, oft gebrauchte Begriffe: ein Maß μ heißt *$\sigma-$finit*, wenn der Gesamtraum $\mathfrak{X}$ sich als abzählbare Vereinigung von Borel-Mengen endlichen Maßes darstellen läßt, wenn also ein System $B_1, B_2, B_3, \ldots$ existiert mit $\mathfrak{X} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ und $\mu(B_j) < \infty$. Ein Maß μ heißt *finit*, wenn $\mu(\mathfrak{X}) < \infty$.

Beispiel: $\mathfrak{X}$ sei eine endliche Menge, z.B. $\mathfrak{X} = \{1, 2, \ldots, N\}$ und $\mathcal{B} := \mathcal{P}(\mathfrak{X})$, alle Teilmengen sind Borel-Mengen. Setze $\mu(n) := \mu_n \geq 0$ mit $\sum\limits_{n=1}^{N} \mu_n = 1$ und

$$\mu(B) := \sum_{n \in B} \mu_n \ .$$

μ ist ein finites Maß auf $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$, $\mu(\mathfrak{X}) = 1$. Die Punkte n werden mit den „Wahrscheinlichkeiten" μ_n gewichtet.

Kapitel 3

Borel-Maße

3.1 Die „natürliche“ Borel-Struktur in $\mathfrak{X}$, Borel-Maße

Die für die Analysis weitaus wichtigsten Borel-Räume sind solche, die mit einer vorgegebenen topologischen Struktur verknüpft sind.

Deshalb sei in Zukunft immer, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, $\mathfrak{X}$ ein *lokalkompakter, separabler* und *metrisierbarer* Raum.

Beispiel: $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$ mit der durch $|x|$ gegebenen Topologie. Ein solcher Raum $\mathfrak{X}$ hat a priori verschiedene ausgezeichnete Mengensysteme, die jeweils zu von ihnen erzeugten Borel-Strukturen führen:

- System $\{\mathcal{O}\}$ der offenen Mengen von $\mathfrak{X}$: Borel-Struktur $\mathcal{B}(\{\mathcal{O}\})$.
- System $\{K\}$ der kompakten Mengen von $\mathfrak{X}$: Borel-Struktur $\mathcal{B}(\{K\})$.
- System $\{A\}$ der abgeschlossenen Mengen von $\mathfrak{X}$: Borel-Struktur $\mathcal{B}(\{A\})$.

Aber:

Lemma. 3.1.1 *Die drei eben genannten Borel-Strukturen sind alle identisch, d.h.* $\mathcal{B}(\{\mathcal{O}\}) = \mathcal{B}(\{K\}) = \mathcal{B}(\{A\})$.

Beweis: $\mathcal{B}(\{\mathcal{O}\}) = \mathcal{B}(\{A\})$ ist trivial, weil $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{O}$ abgeschlossen und $\mathfrak{X} \setminus A$ offen. Jetzt behaupte ich

$$\mathcal{B}(\{\mathcal{O}\}) = \mathcal{B}(\{K\}) \ .$$

Erstens ist $\mathcal{B}(\{K\}) \subseteq \mathcal{B}(\{\mathcal{O}\})$, denn jede kompakte Menge K ist abgeschlossen, also $K \in \mathcal{B}(\{\mathcal{O}\})$, d.h. es folgt $\mathcal{B}(\{K\}) \subseteq \mathcal{B}(\{\mathcal{O}\})$.
Zum zweiten sei $\mathcal{O}$ offen. Behauptet wird $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(\{K\})$. Zum Beweis nehme ich ein $x \in \mathcal{O} : x$ hat eine präkompakte Umgebung U_x, die ich so wählen kann, daß $K_x := \operatorname{clo} U_x \subset \mathcal{O}$. Dann ist also $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{O}} U_x = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{O}} K_x$. Weil $\mathfrak{X}$ separabel ist, gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung $\{U_{x_j}\}_{j=1}^{\infty}$, also $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} U_{x_j} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_{x_j}$. Aber die K_{x_j} sind ja kompakt, also ist $K_{x_j} \in \mathcal{B}(\{K\})$ und demzufolge auch $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_{x_j} \in \mathcal{B}(\{K\})$, d.h. aber $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(\{K\})$. ■

Definition. 3.1.2 *Die Borel-Struktur* $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\{\mathcal{O}\}) = \mathcal{B}(\{K\}) = \mathcal{B}(\{A\})$ *heißt die durch die Topologie von* $\mathfrak{X}$ *erzeugte Borel-Struktur* $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathfrak{X})$.

Die Borel-Mengen $B \in \mathcal{B}$ sind *die* (ausgezeichneten) Borel-Mengen des topologischen Raumes $\mathfrak{X}$. Alle offenen und alle abgeschlossenen (darunter die kompakten) Mengen sind Borel-Mengen.

In diesem Zusammenhang spielen die abzählbaren Durchschnitte offener Mengen gelegentlich eine besondere Rolle. Sie werden in der Literatur oftmals als $G_\delta-$Mengen bezeichnet:

Definition. 3.1.3 *Eine Menge $M \subset \mathfrak{X}$ heißt $G_\delta-$Menge, wenn eine Folge $U_1, U_2, U_3, \ldots$ offener Mengen existiert, so daß*

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \ .$$

Selbstverständlich ist jede $G_\delta-$Menge M eine Borel-Menge: $M \in \mathcal{B}$.

Aufgabe: Die Menge der $G_\delta-$Mengen ist abgeschlossen, bez. der Bildung *endlicher* Vereinigungen und *abzählbarer* Durchschnitte.

Lemma. 3.1.4 *Jede kompakte Menge K ist eine $G_\delta-$Menge.*

Beweis. Zur Erinnerung: $\mathfrak{X}$ ist ja separabel und lokalkompakt, demzufolge ist $\mathfrak{X}$ die Vereinigung einer abzählbaren aufsteigenden Folge $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \ldots$ kompakter Mengen, $\mathfrak{X} = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Jede offene Menge $\mathcal{O} \in \mathfrak{X}$ ist ebenfalls separabel und lokalkompakt, die eben gemachte Aussage gilt also auch für $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \ , \quad K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ , \quad K_n \text{ kompakt} \ .$$

Jetzt sei K kompakt. Dann ist $\mathfrak{X} \setminus K$ offen, also $\mathfrak{X} \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \ldots$, C_n kompakt, dann ist $K = \mathfrak{X} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{X} \setminus C_n)$, $\mathfrak{X} \setminus C_n$ offen. ∎

Der Beweis zeigt, daß die Folge der offenen Mengen, deren Durchschnitt K ist, *absteigend* gewählt werden kann.

Aufgabe: $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ ist abzählbar erzeugt und auch abzählbar separiert.

Wir wollen nun genau die *kanonischen* Borel-Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ von $\mathfrak{X}$ „vernünftig ausmessen“ und schränken dazu den oben eingeführten Maßbegriff noch etwas ein:

Definition. 3.1.5 *Die Abbildung $\mu : \mathcal{B}(\mathfrak{X}) \ni B \mapsto \mu(B) \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ heißt ein Borel-Maß auf $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$, wenn μ ein Maß ist mit den Eigenschaften (I) und (II) und mit der Eigenschaft*

(III) $\mu(K) < \infty$, falls K kompakt ist.

Lemma. 3.1.6 *Ein Borel-Maß μ ist notwendig $\sigma-$finit.*

Beweis: Wir wissen, $\mathfrak{X}$ ist separabel, lokalkompakt, also gilt $\mathfrak{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n kompakt. Aber $\mu(K_n) < \infty$, also ist $\mu \quad \sigma-$finit. ∎

3.2 Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$, erster Teil

Wir stellen jetzt die Frage nach der Konstruktion von Borel-Maßen μ auf lokalkompakten, separablen, metrisierbaren Räumen $\mathfrak{X}$ mit der „natürlichen“ Borel-Struktur.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{U}$ die Gesamtheit der offenen Mengen, mit $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit der kompakten Mengen und wir wissen

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathfrak{U}) = \mathcal{B}(\mathfrak{K}) \ ,$$

die $B \in \mathcal{B}$, das sind *die* Borelmengen von $\mathfrak{X}$ und gerade diese Mengen wollen wir ausmessen. Zum Anfang betrachten wir das Problem auf der reellen Achse $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}$ wissen wir einiges über $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{K}$, das wird hier noch einmal zusammengestellt:

Theorem. 3.2.1 *Jede nichtleere offene Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ läßt sich schreiben als*

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \ . \tag{3.2.1}$$

Dabei sind die (a_n, b_n) paarweise disjunkte offene Intervalle. Sie sind eindeutig durch $\mathcal{O}$ bestimmt und heißen die Komponenten von $\mathcal{O}$.

Theorem. 3.2.2 *Eine nichtleere kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist entweder*

(I) ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, $a \leq b$, oder

(II) von der Form $K = [a, b] \setminus \mathcal{O}$, wo $\mathcal{O} \subset (a, b)$ offen.

Dabei ist $[a, b]$ das kleinste abgeschlossene Intervall, das K umfaßt, also $a = \inf K$, $b = \sup K$, a und b gehören beide zu K.
Aus der Gleichung (3.2.1) erkennen wir bereits, daß $\mathcal{B}$ schon durch die offenen Intervalle (a, b) erzeugt wird. Mit $\mathcal{J} := \{(a, b),\ a < b\}$ ist also $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{J})$. Nun wollen wir ja die Borel-Mengen „vernünftig" ausmessen, wir würden also für (a, b)

$$\mu((a, b)) := b - a \qquad \text{(Intervallänge)}$$

setzen müssen und das führt zwangsläufig zu folgender Definition von μ für die offenen Mengen:

Definition. 3.2.3 *Sei $U \in \mathfrak{U}$. Damit ist $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Wir setzen*

$$\mu(U) := \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \ , \quad \mu(\emptyset) = 0 \ .$$

Achtung: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ braucht nicht zu konvergieren, aber es gibt nur die Alternative Konvergenz, d.h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \infty$ oder $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \infty$. Bei Nichtkonvergenz ordnen wir also der offenen Menge U den Wert ∞ zu, z.B. $\mu(\mathbb{R}) = \infty$. Die Frage ist jetzt, ob wir unter Beachtung der Rahmenbedingungen „$\sigma-$Additivität" und „$\mu(K) < \infty$ für Kompakta" aus dem Ansatz für $\mathfrak{U}$ alle Borel-Mengen ausmessen können.

Lemma. 3.2.4 $\mu(U) \geq 0$.

Beweis. Klar. ■

Lemma. 3.2.5 *Wenn $U_1 \subset U_2$, so $\mu(U_1) \leq \mu(U_2)$.*

Beweis. Die Komponenten von U_1 bezeichnen wir mit δ_j, die von U_2 mit Δ_k. Dann hat man für jedes δ_j eine Inklusion $\delta_j \subset \Delta_k$, wobei das Δ_k eindeutig bestimmt ist. Jetzt halte ich Δ_k fest und sammle alle δ_j mit $\delta_j \subset \Delta_k$. Die Vereinigung $\mathcal{O}_k := \bigcup_j \delta_j$ aller solcher δ_j ist eine offene Menge und $\mathcal{O}_k \subset U_1$ mit $\mathcal{O}_k \subseteq \Delta_k$. Trivialerweise ist $\mu(\mathcal{O}_k) \leq \mu(\Delta_k)$, also hat man $\mu(U_1) = \sum\limits_j \mu(\delta_j) = \sum\limits_k \mu(\mathcal{O}_k) \leq \mu(\Delta_k) = \mu(U_2)$.
■

Lemma. 3.2.6 $\mu(U) = \inf\limits_{U \subseteq U' \in \mathfrak{U}} \mu(U')$.

Beweis. Klar, weil $U' := U$ selbst eine „Konkurrenzmenge“ ist. ∎

Lemma. 3.2.7 *$\mu(\cdot)$ ist auf $\mathfrak{U}$ abzählbar additiv ($\sigma-$additiv), d.h. wenn $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n \in \mathfrak{U}$, $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ disjunkt, dann gilt*

$$\mu(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \ .$$

Beweis: U_n habe die Komponenten δ_n^k, klar: $\delta_n^k \subset U$. Wir behaupten aber sogar, daß die Endpunkte der Komponenten δ_n^k *nicht* zu U gehören können: sei μ ein Endpunkt von δ_n^k. Entgegen der Behauptung nehmen wir an: $\mu \in U$. Dann folgt: es gibt ein $n' \neq n$ mit $\mu \in U_{n'}$, also gehört μ zu einer Komponente $\delta_{n'}^{k'}$ von $U_{n'}$: $\mu \in \delta_{n'}^{k'}$. Dann gehört aber eine ganze Umgebung von μ zu $\delta_{n'}^{k'}$, daraus folgt aber *sofort* $\delta_n^k \cap \delta_{n'}^{k'} \neq \emptyset$ und hieraus $U_n \cap U_{n'} \neq \emptyset$, was der Voraussetzung der Disjunktheit widerspricht.

Wir haben also als Zwischenergebnis: Jedes δ_n^k ist eine Komponente von U, aber: jeder Punkt von U gehört zu einem gewissen δ_n^k und alle δ_n^k sind paarweise disjunkt. Hieraus folgt

$$\mu(U) = \sum_{n,k} \mu(\delta_n^k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k} \mu(\delta_n^k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \ .$$ ∎

Für spätere Zwecke beweisen wir noch eine Eigenschaft, diesmal für abzählbare Systeme offener Mengen, die sich aber *„überlappen“* können. Diese Eigenschaft nennt man *Subadditivität.*

Zuvor formulieren wir ein Lemma aus der Theorie reeller Zahlen $\mathbb{R}$:

Lemma. 3.2.8 *Wenn $[A, B] \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} (\lambda_j, \mu_j)$, so ist*

$$B - A \leq \sum_{j=1}^{n} (\mu_j - \lambda_j) \ .$$

Beweis: Zum Nachrechnen für den Leser. ∎

Lemma. 3.2.9 *Wenn $\Delta := (A, B) = \bigcup\limits_{j} \mathcal{O}_j$, $\mathcal{O}_j \in \mathfrak{U}$, so ist $\mu(\Delta) \leq \sum\limits_{j} \mu(\mathcal{O}_j)$.*

Beweis. Wir bilden mal mit einem $\varepsilon > 0$ das abgeschlossene Intervall $[A+\varepsilon, B-\varepsilon]$. Dann ist ja

$$[A+\varepsilon, B-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{j,k} \delta_j^k \ ,$$

wobei wir mit δ_j^k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, die Komponenten von $\mathcal{O}_j$ bezeichnen. Weil $[A+\varepsilon, B-\varepsilon]$ kompakt ist, gibt es schon eine *endliche* Vereinigung der Komponenten δ_j^k, so daß

$$[A+\varepsilon, B-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{\substack{\text{endliche}\\ \text{Vereinigung}}} \delta_j^k$$

gilt. Dann ist wegen Lemma 3.2.8

$$B - A - 2\varepsilon \leq \sum_{\text{endlich}} \mu(\delta_j^k) \leq \sum_{j,k} \mu(\delta_j^k) = \sum_{j} \mu(\mathcal{O}_j) \ .$$ ∎

Mit dem Lemma 3.2.9 können wir nun beweisen

Theorem. 3.2.10 *(Subadditivität) Sind $\mathcal{O}, \mathcal{O}_j \in \mathfrak{U}$ und gilt $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$, so ist $\mu(\mathcal{O}) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(\mathcal{O}_j)$.*

Beweis. Seien Δ_k die Komponenten von $\mathcal{O}$, also dann:

$$\mu(\mathcal{O}) = \sum_k \mu(\Delta_k) .$$

Es ist ja $\Delta_k = \Delta_k \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Delta_k \cap \mathcal{O}_j)$. Dann folgt, mit Benutzung von Lemma 3.2.9,

$$\mu(\Delta_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\Delta_k \cap \mathcal{O}_j)$$

und hieraus

$$\mu(\mathcal{O}) = \sum_k \mu(\Delta_k) \leq \sum_k \left(\sum_j \mu(\Delta_k \cap \mathcal{O}_j) \right) = \sum_j \left(\sum_k \mu(\Delta_k \cap \mathcal{O}_j) \right) = \sum_j \mu(\mathcal{O}_j) ,$$

denn $\mathcal{O}_j = \mathcal{O}_j \cap (\bigcup_k = \Delta_k) = \bigcup_k (\mathcal{O}_j \cap \Delta_k)$ und das ist ja eine disjunkte Vereinigung. ■

Nachdem wir wissen, daß unsere Definition von μ auf $\mathfrak{U}$ erst mal „konsistent“ ist, könnten wir „rein theoretisch“ schon für eine beliebige Borel-Menge $B \in \mathcal{B}$ *definieren*:

$$\mu(B) := \inf_{\substack{U \\ B \subseteq U \in \mathfrak{U}}} \mu(U) ,$$

insbesondere für ein Kompaktum $K \in \mathfrak{K}$

$$\mu(K) = \inf_{\substack{U \\ K \subset U}} \mu(U) . \tag{3.2.2}$$

Das wird zwar schließlich die „gültige“ Definition sein, das ist aber jetzt noch etwas voreilig.
Wir wollen deshalb für Kompakta zunächst eine andere ganz anschauliche Definition geben und erst nachher zeigen, daß diese (neue) Definition mit (3.2.2) äquivalent ist.

Ich erinnere an Theorem 3.2.2. Danach kann $K \in \mathfrak{K}$ geschrieben werden als

$$K = [a, b] \setminus \mathcal{O} \ , \quad \mathcal{O} \subset [a, b] \text{ offen}, \ a, b \in K, \mathcal{O} \text{ kann leer sein.}$$

Wir definieren

Definition. 3.2.11 $\nu(K) := b - a - \mu(\mathcal{O})$.

Bemerkung: Wenn $\mathcal{O} = \emptyset$, so ist $\nu(K) = b - a = \inf_{[a,b] \subset U} \mu(U)$, d.h. in diesem Fall erhalten wir sofort die Gleichung $\nu(K) = \mu(K)$, also die Äquivalenz mit (3.2.2). Im Fall $\mathcal{O} \neq \emptyset$ müssen wir ein paar Hilfssätze dazwischen schieben:

Lemma. 3.2.12 *Sei $K \subset (A, B)$. Dann ist*

$$\nu(K) = B - A - \mu((A, B) \setminus K) .$$

Bemerkung: $(A, B) \setminus K$ ist ja offen, also ist μ definiert.

Beweis. Weil $K = [a, b] \setminus \mathcal{O}$, so ist

$$(A, B) \setminus K = (A, a) \cup (b, B) \cup \mathcal{O}$$

und das ist eine disjunkte Vereinigung offener Mengen, also gilt

$$\begin{aligned}\mu((A,B)\setminus K) &= \mu(A,a)+\mu(b,B)+\mu(\mathcal{O})\\ &= a-A+B-b+\mu(\mathcal{O})\ ,\end{aligned}$$

also ist
$B-A-\{a-A+B-b+\mu(\mathcal{O})\} = b-a-\mu(\mathcal{O}) = \nu(K)$. ■

Lemma. 3.2.13 *Wenn $K_1 \subset K_2$, so ist $\nu(K_1) \leq \nu(K_2)$.*

Beweis. Sei $K_2 \subset (A,B))$. Dann ist

$$\underbrace{(A,B)\setminus}_{\text{offen}} K_1 \supset \underbrace{(A,B)\setminus}_{\text{offen}} K_2$$

also

$$\mu((A,B)\setminus K_1) \geq \mu((A,B)\setminus K_2)\ ,$$

also (wegen Lemma 3.2.12 $\nu(K_1) \leq \nu(K_2)$. ■

Lemma. 3.2.14 $\nu(K) = \sup\limits_{\substack{F\subseteq K\\ F\in\mathfrak{K}}} \nu(F)$.

Beweis: Klar, weil ja K selbst zur Konkurrenzmenge gehört und wegen Lemma 3.2.13 ■

Jetzt beweisen wir den ersten Zusammenhang zwischen $\mu \restriction \mathfrak{U}$ und $\nu \restriction \mathfrak{K}$. Zur Terminologie: „Eine Menge U ist beschränkt“ meint (wie üblich): es gibt ein Kompaktum K_0 mit $U \subset K_0$.

Theorem. 3.2.15 *Sei $U \in \mathfrak{U}$ und U beschränkt. Dann gilt*

$$\mu(U) = \sup_{\substack{K\in\mathfrak{K}\\ K\subset U}} \nu(K)\ .$$

Beweis: Sei also $K \subset U$. Dann beweisen wir erst mal, daß

$$\nu(K) \leq \mu(U)$$

gilt. Nach Voraussetzung gibt es ein Intervall (A,B) mit $U \subset (A,B)$. Dann ist $(A,B) = U \cup \{(A,B)\setminus K\}$, aber diese Vereinigung ist nicht disjunkt, deshalb haben wir „nur“

$$B-A \leq \mu(U) + \mu((A,B)\setminus K)$$

also (nach Lemma 3.2.12)

$$\nu(K) \leq \mu(U)\ .$$

Hieraus folgt

$$\sup_{\substack{K\subset U\\ K\in\mathfrak{K}}} \nu(K) \leq \mu(U)$$

und wir haben jetzt zu beweisen, daß das Gleichheitszeichen gilt:
Es ist ja U offen und beschränkt, $U = \bigcup\limits_{\rho=1}^{\infty}(a_\rho,b_\rho)$, $(a_\rho,b_\rho) =: \delta_\rho$ die Komponenten von U. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Zahl n, so daß

$$\sum_{\rho=1}^{n} \mu(\delta_\rho) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Sodann bilden wir Segmente (d.h. abgeschlossene Teilintervalle) $[\alpha_\rho, \beta_\rho] \subset (a_\rho, b_\rho)$ mit

$$\beta_\rho - \alpha_\rho > b_\rho - a_\rho - \frac{\varepsilon}{2n}, \quad \rho = 1, 2, \ldots, n$$

und setzen

$$K_1 := \bigcup_{\rho=1}^{n} [\alpha_\rho, \beta_\rho] .$$

Dann ist K_1 abgeschlossen, $K_1 \subset U$ und $\nu(K_1) = \sum_{\rho=1}^{n} (\beta_\rho - \alpha_\rho) > \sum_{\rho=1}^{n} (b_\rho - a_\rho) - \frac{\varepsilon}{2} > \mu(U) - \varepsilon$. ■

Anmerkung: Der Leser verifiziere selbst noch einmal an Hand der Definition von ν, daß ν für endliche Vereinigungen disjunkter (abgeschlossener endlicher) Intervalle additiv ist.

Jetzt kommt die angekündigte Verbindung zur Gleichung (3.2.2):

Theorem. 3.2.16 *Sei $K \in \mathfrak{K}$. Dann ist $\nu(K) = \inf\limits_{\substack{U \\ K \subset U \in \mathfrak{U}}} \mu(U)$ und damit ist $\nu(K) = \mu(K)$.*

Beweis: Wegen Theorem 3.2.15 haben wir für $K \subset U$ sofort $\nu(K) \leq \mu(U)$, also

$$\nu(K) \leq \inf_{K \subset U} \mu(U)$$

und wir haben zu beweisen, daß das Gleichheitszeichen gilt.

Wir wählen ein großes Intervall (A, B) mit $K \subset (A, B)$ und betrachten die offene Menge $(A, B) \setminus K$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine abgeschlossene Menge F_ε mit

$$F_\varepsilon \subset (A, B) \setminus K \quad \text{und} \quad \nu(F_\varepsilon) > \mu((A, B) \setminus K) - \varepsilon .$$

So ein F_ε gibt es wegen Theorem 3.2.15. Nun setze ich $\mathcal{O}_\varepsilon := (A, B) \setminus F_\varepsilon$. $\mathcal{O}_\varepsilon$ ist offen und $\mathcal{O}_\varepsilon \supset K$. Weiter erhalten wir

$$\mu(\mathcal{O}_\varepsilon) = B - A - \nu(F_\varepsilon) < B - A - \mu((A, B) \setminus K) + \varepsilon = \nu(K) + \varepsilon$$

und damit ist Theorem 3.2.16 bewiesen. ■

Verwenden wir die Schreibweise von (3.2.2) *und* die ursprüngliche Definition von $\nu(\cdot)$, so haben wir $\mu(K) = b - a - \mu(\mathcal{O})$, wobei $K = [a, b) \setminus \mathcal{O}$, d.h. $K \cup \mathcal{O} = [a, b]$ und $K \cap \mathcal{O} = \emptyset$ und damit gilt

$$\mu([a, b]) = \mu(K \cup \mathcal{O}) = \mu(K) + \mu(\mathcal{O}) .$$

Wir merken noch einmal ausdrücklich an, was der augenblickliche Stand der Dinge ist:

Wir haben auf der Gesamtheit $\mathfrak{U}$ der offenen Mengen von $\mathbb{R}$ ein Maß μ definiert, das monoton, abzählbar additiv und abzählbar subadditiv ist. Setzen wir für $K \in \mathfrak{K}$

$$\mu(K) := \inf_{\substack{U \in \mathfrak{U} \\ U \supset K}} \mu(U) ,$$

so hat sich ergeben, daß stets $\mu(K) < \infty$ ist und daß wir umgekehrt μ auf $\mathfrak{U}$ reproduzieren können durch die Formel

$$\mu(U) = \sup_{\substack{k \in \mathfrak{K} \\ K \subset U}} \mu(K) .$$

Mit diesem Zwischenresultat stellen wir erneut die Frage, ob mittels

$$\mu(B) := \inf_{\substack{U \in \mathfrak{U} \\ U \supseteq B}} \mu(U) , \quad B \in \mathcal{B} ,$$

ein Borel–Maß auf $\mathcal{B}$ definiert werden kann.

Da die Beantwortung dieser Frage nicht mehr von den speziellen Gegebenheiten auf $\mathbb{R}$ abhängt, betrachten wir im folgenden diese Frage wieder für einen beliebigen Raum $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ mit seiner natürlichen Borel-Struktur $\mathcal{B}$.

3.3 Konstruktion von Borel-Maßen; das Lebesgue-Maß, zweiter Teil

Sei $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ gegeben. μ sei auf $\mathfrak{U}$ ein monotones, abzählbar additives und abzählbar subadditives Maß. Für $K \in \mathfrak{K}$ sei mit $\mu(K) := \inf\limits_{U \supset K} \mu(U)$ stets $\mu(K) < \infty$ und es sei für alle $U \in \mathfrak{U}$ umgekehrt $\mu(U) = \sup\limits_{K \subset U} \mu(K)$. Dann gilt

Theorem. 3.3.1 *Unter den eben genannten Voraussetzungen wird durch*

$$\mu(B) := \inf_{\substack{U \in \mathfrak{U} \\ U \supseteq B}} \mu(U) \ , \quad B \in \mathcal{B} \ , \tag{3.3.3}$$

ein Borel-Maß definiert.

Beweis: Der Beweis ergibt sich in mehreren Schritten, die als Lemmas bzw. Sätze ausgewiesen werden.

Lemma. 3.3.2 *Mit der Definition (3.3.3) erhält man*

(I) $\mu(\emptyset) = 0$,

(II) $B_1 \subset B_2$ *impliziert* $\mu(B_1) \leq \mu(B_2)$, *(Monotonie),*

(III) Ist $B_1, B_2, B_3, \ldots$ *eine Folge von Borel-Mengen, so gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \ , \qquad \textit{(Subadditivität).}$$

Beweis: (I) ist klar, weil $\emptyset$ selbst offen ist. (II) Aus $B_2 \subseteq U$ folgt $B_1 \subseteq U$, d.h. für B_1 ist die Konkurrenzmenge umfassender, also ist das Infimum kleiner.
(III) Sei $B_n \subseteq U_n \in \mathfrak{U}$ mit $\mu(U_n) \leq \mu(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, $\varepsilon > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dann ist

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{wegen (II)}}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{weil wir die Subadditivität} \\ \text{für die offenen Mengen} \\ \text{schon haben}}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \varepsilon \ .$$

■

Satz 3.3.3 *Für alle* $U \in \mathfrak{U}$ *und alle* $K \in \mathfrak{K}$ *gilt die folgende Gleichung:*

$$\mu(U) = \mu(U \cap K) + \mu(U \cap K') \ .$$

Bemerkung: Wir verwenden die Bezeichnung M' für das Komplement von $M : M' = \mathfrak{X} \setminus M$.
Beweis: Seien C und D kompakte Mengen mit

$$C \subset U \cap K' \in \mathfrak{U} \ , \quad D \subset U \cap C' \in \mathfrak{U} \ .$$

Dann ist jedenfalls $K \subset C'$. Es ist weiter

$$C \cap D = \emptyset \quad \text{und} \quad C \cup D \subseteq U \ ,$$

also

$$\mu(U) \geq \mu(C) + \mu(D)$$

also auch

$$\mu(U) \geq \mu(C) + \underbrace{\sup_D \mu(D)}_{=\ \mu(U \cap C')} ,$$

also

$$\mu(U) \geq \mu(C) + \mu(U \cap C') \geq \mu(C) + \mu(U \cap K) ,$$

letzteres, weil ja $U \cap K \subseteq U \cap C'$.

Dann erhalten wir aber auch

$$\mu(U) \geq \underbrace{\sup_C \mu(C)}_{=\ \mu(U \cap K')} + \mu(U \cap K)$$

also

$$\mu(U) \geq \mu(U \cap K') + \mu(U \cap K) .$$

Außerdem gilt (wegen der Subadditivität)

$$\mu(U) \leq \mu(U \cap K) + \mu(U \cap K') .$$

Zusammen ist das die Behauptung. ■

Folgerung 3.3.4 *Sei $B \in \mathcal{B}$ eine beliebige Borel-Menge. Dann gilt*

$$\mu(B) = \mu(B \cap K) + \mu(B \cap K') , \quad B \in \mathcal{B} , \tag{3.3.4}$$

für alle $K \in \mathfrak{K}$.

Beweis: Sei $B \in \mathcal{B}$ und $B \subseteq U \in \mathfrak{U}$. Dann ist

$$\mu(U) = \mu(U \cap K) + \mu(U \cap K') \geq \mu(B \cap K) + \mu(B \cap K')$$

wegen der Monotonie von μ. Also gilt auch

$$\inf_{U \supseteq B} \mu(U) \geq \mu(B \cap K) + \mu(B \cap K') ,$$

d.h. aber

$$\mu(B) \geq \mu(B \cap K) + \mu(B \cap K') .$$

Umgekehrt gilt

$$\mu(B) = \mu((B \cap K) \cup (B \cap K')) \leq \mu(B \cap K) + \mu(B \cap K') ,$$

wegen der Subadditivität, also haben wir die Behauptung. ■

Die Gleichung (3.3.4) ist eine ganz bestimmte Eigenschaft, die K in bezug auf μ hat. In der Literatur wird die Eigenschaft (3.3.4) als μ-Meßbarkeit (der kompakten Menge K) bezeichnet. Wir wollen diesen Terminus hier *nicht* verwenden und sprechen einfach von der „μ-Eigenschaft“, d.h. wir haben: Jedes Kompaktum $K \in \mathfrak{K}$ hat die μ-Eigenschaft.

Im folgenden fragen wir, wie sich und ob sich die μ-Eigenschaft bei den „üblichen“ mengentheoretischen Operationen vererbt.

Lemma. 3.3.5 *Wenn die Borel-Mengen $E, F \in \mathcal{B}$ die μ-Eigenschaft haben, dann auch die (Borel-)Mengen $E \cup F$ und $E \setminus F$.*

Beweis: *Sei jetzt A eine beliebige Borel-Menge. Dann haben wir*

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E')$$

und die entsprechende Gleichung für F. Nun sind auch $A \cap E$ und $A \cap E'$ Borel-Mengen, so daß wir auch folgende Gleichungen hinschreiben können:

$$\begin{aligned} \mu(A \cap E) &= \mu(A \cap E \cap F) + \mu(A \cap E \cap F') \ , \\ \mu(A \cap E') &= \mu(A \cap E' \cap F) + \mu(A \cap E' \cap F') \ , \end{aligned}$$

durch Addition erhalten wir

$$\mu(A) = \mu(A \cap E \cap F) + \mu(A \cap E \cap F') + \mu(A \cap E' \cap F) + \mu(A \cap E' \cap F') \ . \tag{3.3.5}$$

Beachte, daß $E' \cap F' = (E \cup F)'$. Jetzt ersetze ich A durch $A \cap (E \cup F)$. Dann fällt der letzte Summand weg und die übrigen bleiben unverändert, d.h. wir kriegen

$$\mu(A \cap (E \cup F)) = \mu(A \cap E \cap F) + \mu(A \cap E \cap F') + \mu(A \cap E' \cap F) \ . \tag{3.3.6}$$

Vergleichen wir (3.3.6) mit (3.3.5), so ergibt sich

$$\mu(A) = \mu(A \cap (E \cup F)) + \mu(A \cap (E \cup F)') \ .$$

Zum zweiten ersetzen wir A durch $A \cap (E \setminus F)' = A \cap (E' \cup F)$, d.h. wir haben in den vorigen Relationen nur E durch E' zu ersetzen, während das F bleibt. Dann erhalten wir

$$\mu(A \cap (E \setminus F)') = \mu(A \cap E' \cap F) + \mu(A \cap E' \cap F') + \mu(A \cap E \cap F) \ .$$

Wiederum durch Vergleich mit (3.3.5) erhalten wir

$$\mu(A) = \mu(A \cap (E \setminus F)') + \mu(A \cap E \cap F') \ ,$$

es ist aber $E \cap F' = E \setminus F$, so daß schließlich die Formel

$$\mu(A) = \mu(A \cap (E \setminus F)') + \mu(A \cap (E \setminus F))$$

entsteht, womit Lemma 3.3.5 bewiesen ist. ■

Wir machen jetzt einen ganz kurzen Abstecher zur Struktur von $\mathcal{B}$. Es ist ja $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathfrak{K})$, wobei wir – zur Erinnerung – bei der Bildung von $\mathcal{B}$ abzählbare Vereinigungen zulassen.

Betrachten wir – etwas eingeschränkter – nur „Prä-Borel-Strukturen“, die nur bezüglich *endlicher* Vereinigungen abgeschlossen sein sollen, so erhält man aus $\mathfrak{K}$ heraus die von $\mathfrak{K}$ erzeugte Prä-Borel-Struktur $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(\mathfrak{K})$. Da jede abzählbare Vereinigung $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ als abzählbare Vereinigung einer monoton wachsenden Folge $B'_n := \bigcup\limits_{\rho=1}^{n} B_\rho \ , \quad B'_1 \subseteq B'_2 \subseteq B'_3 \subseteq \ldots$, geschrieben werden kann, ist dann $\mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathcal{B}_0)$, wenn wir mit $\mathcal{M}(\cdot)$ die „*monotone Hülle*“, in unserem Fall von $\mathcal{B}_0$ betrachten. Beweistechnisch bedeutet das, daß wir uns beim Nachweis einer Eigenschaft von Borel-Mengen nur um monoton aufsteigende Folgen aus $\mathcal{B}_0$ kümmern müssen, wenn wir die besagte Eigenschaft bereits für die Mengen aus $\mathcal{B}_0$ wissen.

Jetzt ziehen wir erst einmal eine Folgerung aus Lemma 3.3.5.

Folgerung 3.3.6 *Sei $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(\mathfrak{K})$ die kleinste „Prä-Borel-Struktur“, die $\mathfrak{K}$ enthält. Dann hat jede Borel-Menge $B_0 \in \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ die μ-Eigenschaft.*

Beweis: Die kompakten Mengen K haben die μ-Eigenschaft. Außerdem vererbt sich die μ-Eigenschaft bei Bildung endlicher Vereinigungen und von Differenzen. Damit hat jedes $B_0 \in \mathcal{B}_0$ die μ-Eigenschaft. ■

Nach den Vorbemerkungen zu Folgerung 3.3.6 können wir jetzt beweisen:

Satz 3.3.7 *Jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}$ hat die μ-Eigenschaft.*

Beweis: Es ist $\mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathcal{B}_0)$. Für die Mengen aus $\mathcal{B}_0$ wissen wir nach Folgerung 3.3.6, daß sie die μ-Eigenschaft haben. Wir müssen also lediglich noch zeigen, daß sich die μ-Eigenschaft auf die Vereinigung monoton wachsender Folgen vererbt. Sei also

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$$

eine Folge aus $\mathcal{B}_0$. Dann behaupten wir: $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ hat die μ-Eigenschaft. Es ist ja

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{n+1} \setminus B_n) \cup B_1 \ .$$

Deshalb genügt es, folgenden Fall zu betrachten:

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \ ,$$

wobei die E_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, ein disjunktes System von Mengen aus $\mathcal{B}_0$ bilden.

Ich betrachte jetzt noch einmal die Gleichung (3.3.6) und zwar ersetze ich E durch E_1 und F durch E_2. Dann erhalte ich

$$\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2) \ .$$

Durch Induktion erhalte ich die analoge Gleichung für endlich viele Summanden, also

$$\mu(A \cap \bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A \cap E_j) \ .$$

Jetzt setze ich $F_n := \bigcup_{j=1}^{n} E_j$. Dann ist $F_n \in \mathcal{B}_0$ und außerdem $F_n \subseteq B$, also $F_n' \supseteq B'$. Ich erhalte also

$$\mu(A) = \mu(A \cap F_n) + \mu(A \cap F_n') \geq \sum_{j=1}^{n} \mu(A \cap E_j) + \mu(A \cap B') \ .$$

Das gilt aber für jedes n, also wird

$$\mu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap E_j) + \mu(A \cap B') \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B') \ ,$$

wobei die letzte Abschätzung wegen der Subadditivität gilt.

Die andere Ungleichung, nämlich $\mu(A) \leq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B')$ folgt wieder wegen der Subadditivität.

■

Ergänzung 3.3.8 *Mit denselben Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 3.3.7, also $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ein disjunktes System von Borel-Mengen $E_n \in \mathcal{B}$, gilt für alle $A \in \mathcal{B}$,*

$$\mu(A \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) \ . \tag{3.3.7}$$

Beweis: Wir haben ja (nach derselben Schlußweise wie in Satz 3.3.7)

$$\mu(A \cap B) + \mu(A \cap B') = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap E_j) + \mu(A \cap B') \ .$$

(Achtung: Wir können nicht einfach $\mu(A \cap B')$ „subtrahieren“, denn es ist ja $\mu(A \cap B') = \infty$ nicht ausgeschlossen.) Aber wir können A durch $A \cap B$ ersetzen, dann ist der „zweite Summand“ gleich 0 und es entsteht die Gleichung (3.3.7). ■

Jetzt können wir den Beweis von Theorem 3.3.1 zu Ende führen, denn es fehlt ja nur der Nachweis der abzählbaren Additivität:

Lemma. 3.3.9 *μ ist auf $\mathcal{B}$ abzählbar additiv.*

Beweis: Sei $B_1, B_2, B_3, \ldots$ eine disjunkte Folge von Borel-Mengen. Dann haben die B_n und $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n =: B$ die μ-Eigenschaft und es gilt (3.3.7). Setze ich in (3.3.7) speziell $A := B$, so entsteht $\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$. ■

Es folgen einige kommentierende Bemerkungen. Sei $B \in \mathcal{B}$ und $K \subseteq B \subseteq U$. Dann ist $\mu(K) \leq \mu(B) \leq \mu(U)$ und demzufolge

$$\sup_{K \leq B} \mu(K) \leq \mu(B) \leq \inf_{B \subseteq U} \mu(U) \ . \tag{3.3.8}$$

Bei der von uns vorgeführten Konstruktion wissen wir (und zwar auf Grund einer der Voraussetzungen der ganzen Konstruktion), daß für $B := K_0$ oder $B := U_0$ in (3.3.8) überall das Gleichheitszeichen gilt. Man sagt: die kompakten und die offenen Mengen sind regulär.

Es ist nun eine überraschende Tatsache, daß für ein Borel-Maß *jede* Borel-Menge in diesem Sinn regulär ist. Wir diskutieren dies im nächsten Abschnitt.

Zuvor jedoch schlagen wir den Bogen zurück zum Fall $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$ und zu dem Ansatz von Abschnitt 3.2 Wir können nämlich jetzt das Theorem 3.3.1 auch auf die Situation von Abschnitt 3.2 anwenden und erhalten:
Durch die Definition

$$\mu(B) := \inf_{B \subseteq U} \mu(U) \ , \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

erhalten wir ein Borel-Maß, das leltztlich durch den Ansatz $\mu((a,b)) := b - a$ in eindeutiger Weise (gemäß der Konstruktion) bestimmt ist. Dieses Maß heißt das *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}$. Das Lebesgue-Maß von A wird oft durch $|A|$ bezeichnet, also $|(a,b)| = b - a$. Es hat noch eine weitere ganz charakteristische Eigenschaft, die es aus der Fülle möglicher Borel-Maße auf $\mathbb{R}$ heraushebt, nämlich seine *Invarianz gegenüber Verschiebungen.*

$\mathbb{R}$ ist ja eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition und unter der „Verschiebung“ einer Borel-Menge B um x versteht man die Borel-Menge $B + x := \{b + x, b \in \mathcal{B}\}$. Es ist nun trivialerweise

$$|(a,b) + x| = |(a,b)|$$

und man kann sich sofort überzeugen (der Leser tue das), daß sich diese Verschiebungsinvarianz durch alle Stufen der Bildung des „Gesamtmaßes“ durchzieht.

3.4 Jedes Borel–Maß ist regulär

$\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ sei gegeben, μ ein Borel-Maß. Weil $\mathcal{B}$ kanonisch zu $\mathfrak{X}$ gehört, schreiben wir $\{\mathfrak{X}, \mu\}$. Zunächst brauchen wir ein paar Definitionen.

Definition. 3.4.1 *Sei $B \in \mathcal{B}$:*

- *B heißt innenregulär, wenn* $\mu(B) = \sup\limits_{K \subseteq B} \mu(K)$,
- *B heißt außenregulär, wenn* $\mu(B) = \inf\limits_{U \supseteq B} \mu(U)$,
- *B heißt regulär, wenn B innenregulär und außenregulär ist.*

Offensichtlich ist jedes $K_0 \in \mathfrak{K}$ innenregulär und jedes $U_0 \in \mathfrak{U}$ außenregulär. Das bedeutet also: $\mathfrak{K} \ni K_0$ ist regulär g.d.w. K_0 außenregulär ist, und $\mathfrak{U} \ni U_0$ ist regulär g.d.w. U_0 innenregulär ist.

Definition. 3.4.2 *Ein Maß μ auf $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ heißt regulär, wenn jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}$ regulär ist.*

Es ergibt sich folgendes

Theorem. 3.4.3 *Jedes Borel-Maß ist regulär.*

Beweis: Der Beweis geschieht in mehreren Schritten, die durch Lemmas etc. herausgehoben werden.
Zunächst etwas zur Beweistechnik: Wegen

$$\sup_{K \subseteq B} \mu(K) \leq \mu(B) \leq \inf_{B \subseteq U} \mu(U)$$

ist klar: Um eine Gleichung der Form $\sup\limits_{K \subseteq B} \mu(K) = \mu(B)$ zu beweisen, genügt es zu beweisen, daß

$$\sup_{K \subseteq B} \mu(K) \geq \mu(B) \tag{3.4.9}$$

gilt, d.h. es genügt zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K_\varepsilon \subseteq B$ mit

$$\mu(B) - \varepsilon \leq \mu(K_\varepsilon) \quad \text{oder} \quad \mu(B) \leq \mu(K_\varepsilon) + \varepsilon\ , \tag{3.4.10}$$

denn wäre entgegen (3.4.9), $\sup\limits_{K \subseteq B} \mu(K) < \mu(B)$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $\sup\limits_{K \subseteq B} \mu(K) + \varepsilon < \mu(B)$ und man hätte mit dem entsprechenden K_ε daß $\mu(K_\varepsilon) + \varepsilon \leq \sup\limits_{K \subseteq K} \mu(B) + \varepsilon < \mu(B)$ im Widerspruch zu (3.4.10).

Ganz analog: Um $\mu(B) = \inf\limits_{B \subseteq U} \mu(U)$ zu zeigen, genügt es,

$$\mu(B) \geq \inf_{B \subseteq U} \mu(U) \tag{3.4.11}$$

zu zeigen, d.h. es genügt zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $U_\varepsilon \supseteq B$ mit

$$\mu(B) + \varepsilon \geq \mu(U_\varepsilon)\ , \tag{3.4.12}$$

denn wäre, entgegen (3.4.11), $\mu(B) < \inf\limits_{B \subseteq U} \mu(U)$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $\mu(B) + \varepsilon < \inf\limits_{B \subseteq U} \mu(U) \leq \mu(U_\varepsilon)$, im Widerspruch zu (3.4.12).

Lemma. 3.4.4 *Jedes beschränkte $U \in \mathfrak{U}$ ist innenregulär.*

Beweis: Wir wissen, jede offene Menge ist abzählbare Vereinigung aufsteigender kompakter Mengen: Sei $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \ldots$ Beachte, daß U beschränkt zur Folge hat: $\mu(U) < \infty$. Es ist $U = K_1 \cup (K_2 \setminus K_1) \cup (K_3 \setminus K_2) \cup \ldots$, die Differenzen $K_{n+1} \setminus K_n$ sind eigentlich und die Vereinigung ist disjunkt, also $\mu(U) = \mu(K_1) + \underbrace{\mu(K_2 \setminus K_1)}_{\mu(K_2)-\mu(K_1)} + \underbrace{\mu(K_3 \setminus K_2)}_{\mu(K_3)-\mu(K_2)} + \ldots$ und $\mu(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \sup_n \mu(K_n)$, weil $\mu(K_1) \leq \mu(K_2) \leq \ldots \leq \mu(U)$. Hieraus ergibt sich aber $\mu(U) = \sup_{K\subset U} \mu(K)$, denn $\mu(U) \geq \sup_{K\subset U} \mu(K) \geq \sup_n \mu(K_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \mu(U)$. ■

Damit haben wir schon: Jedes beschränkte $U \in \mathfrak{U}$ ist regulär. Weiter gilt

Lemma. 3.4.5 *Wenn jedes beschränkte $U \in \mathfrak{U}$ innenregulär ist, so ist jedes $K \in \mathfrak{K}$ außenregulär.*

Beweis: Sei $K \in \mathfrak{K}$ und $U \in \mathfrak{U}$ beschränkt mit $K \subset U$. Dann ist $U \setminus K \in \mathfrak{U}$ und beschränkt. Also: Weil jedes beschränkte U innenregulär sein soll, ist also auch $U \setminus K$ innenregulär, also folgt: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $C_\varepsilon \in \mathfrak{K}$ mit $C_\varepsilon \subset U \setminus K$ und $\mu(U \setminus K) - \varepsilon \leq \mu(C_\varepsilon)$ oder $\mu(U \setminus K) \leq \mu(C_\varepsilon) + \varepsilon$. Nun ist $K = U \setminus (U \setminus K) \subseteq U \setminus C_\varepsilon \in \mathfrak{U}$, also $\mu(U \setminus C_\varepsilon) - \mu(K) = \mu((U \setminus C_\varepsilon) \setminus K) = \mu((U \setminus K) \setminus C_\varepsilon) = \mu(U \setminus K) - \mu(C_\varepsilon) \leq \varepsilon$, also $\mu(U \setminus C_\varepsilon) - \mu(K) \leq \varepsilon$, wobei $K \subset U \setminus C_\varepsilon$, d.h. aber K ist außenregulär. ■

Aus Lemma 3.4.4 und Lemma 3.4.5 ziehe ich den Schluß: Jedes beschränkte $U \in \mathfrak{U}$ und jedes $K \in \mathfrak{K}$ ist regulär.

Bemerkung: Von Lemma 3.4.5 gilt auch die Umkehrung, den Beweis mag der Leser führen, wir brauchen diesen Teil nicht.

Wir gehen jetzt analog vor, wie bei der Konstruktion eines Borel-Maßes in Abschnitt 3.3 und steigen von Borel-Mengen, die bereits regulär sind, auf zu ihren Differenzen und endlichen Vereinigungen. Zuerst nehmen wir uns die Differenzen vor.

Lemma. 3.4.6 *Wenn $E, F \in \mathcal{B}$ und beide sind regulär, so ist auch $E \setminus F$ regulär.*

Beweis: Zu beweisen ist: $E \setminus F$ ist außenregulär und innenregulär.

(I) Außenregularität: Es ist E außenregulär und F innenregulär, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existieren $U_\varepsilon, K_\varepsilon$ mit

$$\begin{aligned} E \subset U_\varepsilon &\;:\; \mu(U_\varepsilon) \leq \mu(E) + \varepsilon, \\ K_\varepsilon \subset F &\;:\; \mu(F) \leq \mu(K_\varepsilon) + \varepsilon, \end{aligned}$$

und es ist $E \setminus F \subset U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon \in \mathfrak{U}$. Weiter erhält man

$$\begin{aligned} \mu(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) - \mu(E \setminus F) &= \mu((U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) \setminus (E \setminus F)) = \mu(U_\varepsilon \cap K_\varepsilon' \cap (E \cap F')') \\ &= \mu(U_\varepsilon \cap K_\varepsilon' \cap (E' \cup F)) = \mu(U_\varepsilon \cap K_\varepsilon' \cap E') \cup (U_\varepsilon \cap K_\varepsilon' \cap F) \\ &= \mu((U_\varepsilon \setminus E) \cap K_\varepsilon' \cup (F \setminus K_\varepsilon) \cap U_\varepsilon), \end{aligned}$$

also, mit Subadditivität und Monotonie,

$$\begin{aligned} \mu(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) - \mu(E \setminus F) &\leq \mu(U_\varepsilon \setminus E) + \mu(F \setminus K_\varepsilon) \\ &= \mu(U_\varepsilon) - \mu(E) + \mu(F) - \mu(K_\varepsilon) \leq 2\,\varepsilon \;. \end{aligned}$$

(II) Innenregularität: E ist innenregulär und F ist außenregulär, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existieren $C_\varepsilon \subset E$ und $F \subset V_\varepsilon$ mit

$$\mu(E) - \varepsilon \leq \mu(C_\varepsilon) \;\text{ und }\; \mu(V_\varepsilon) \leq \mu(F) + \varepsilon \;.$$

Es ist $C_\varepsilon \setminus V_\varepsilon$ kompakt und $C_\varepsilon \setminus V_\varepsilon \subset E \setminus F$. Man erhält

$$\begin{aligned}\mu(E \setminus F) - \mu(C_\varepsilon \setminus V_\varepsilon) &= \mu((E \setminus F) \setminus (C_\varepsilon \setminus V_\varepsilon)) = \mu(E \cap F' \cap (C_\varepsilon \cap V_\varepsilon')') \\ &= \mu(E \cap F' \cap (C_\varepsilon' \cup V_\varepsilon)) = \mu(E \cap F' \cap C_\varepsilon') \cup (E \cap F' \cap V_\varepsilon)) \\ &= \mu((E \setminus C_\varepsilon) \cap F' \cup (V_\varepsilon \setminus F) \cap E)\ ,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\mu(E \setminus F) - \mu(C_\varepsilon \setminus V_\varepsilon) &\leq \mu(E \setminus C_\varepsilon) + \mu(V_\varepsilon \setminus F) \\ &= \mu(E) - \mu(C_\varepsilon) + \mu(V_\varepsilon) - \mu(F) \leq 2\,\varepsilon\ .\end{aligned}$$

■

Jetzt wenden wir uns den endlichen Vereinigungen zu. Zu dem Zweck notieren wir zuvor einige Lemmas:

Lemma. 3.4.7 *Sei $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{B}$ eine endliche disjunkte Menge innenregulärer Borel-Mengen. Dann ist auch $\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{B}$ innenregulär.*

Beweis: E_j innenregulär bedeutet: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $K_j^\varepsilon \in \mathfrak{K}$ mit $K_j^\varepsilon \subseteq E_j$ und $\mu(E_j) \leq \mu(K_j^\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{n}$. Ich setze $E := \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$ und $K_\varepsilon := \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j^\varepsilon$; die K_j^ε sind auch disjunkt und es ist $K_\varepsilon \subseteq E,\quad K_\varepsilon \in \mathfrak{K}$. Es ergibt sich

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(K_j^\varepsilon) + \varepsilon = \mu(K_\varepsilon) + \varepsilon$$

und das heißt: E ist innenregulär. ■

Lemma. 3.4.8 *Die Vereinigung einer Folge $E_1, E_2, E_3, \ldots$ von außenregulären Borel-Mengen ist außenregulär.*

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ und $j = 1, 2, 3, \ldots$ existieren $U_j^\varepsilon \in \mathfrak{U}$ mit $E_j \subseteq U_j^\varepsilon$ und $\mu(U_j^\varepsilon) \leq \mu(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Wir definieren

$$U_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j^\varepsilon\ , \quad E := \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\ .$$

Dann ist $E \subseteq U_\varepsilon$.
Wenn nun $\mu(E) = \infty$, so ist E trivialerweise außenregulär, ist aber $\mu(E) < \infty$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mu(U_\varepsilon) - \mu(E) &= \mu(U_\varepsilon \setminus E) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j^\varepsilon \setminus E_j)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j^\varepsilon \setminus E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu(U_j^\varepsilon) - \mu(E_j)) \leq \varepsilon\end{aligned}\ ,$$

also $\mu(E) + \varepsilon \geq \mu(U_\varepsilon)$, d.h. aber E ist außenregulär. ■

Lemma. 3.4.9 *Die Vereinigung einer monoton wachsenden Folge $E_1, E_2, E_3, \ldots$ von innenregulären Borelmengen ist innenregulär.*

Beweis: Sei also $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$. Wir setzen $E := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. Dann ist erst einmal $\mu(E) = \lim\limits_{j \to \infty} \mu(E_j)$. Nun heißt ja „innenregulär" folgendes: Wenn $c < \mu(E)$, so gibt es ein $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \subseteq E$ und $c < \mu(K)$. Das zeigen wir nun so: Wir wählen einen Index j_0 so, daß $c < \mu(E_{j_0})$; E_{j_0} ist aber innenregulär, d.h. es existiert $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \subseteq E_j$ und $c < \mu(K)$. ■

Nun kehren wir zum eigentlichen Problem zurück (Betrachtung endlicher Vereinigungen hinsichtlich Regularität).

Lemma. 3.4.10 *Wenn die Borel-Mengen $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{B}$ regulär sind, so auch ihre Vereinigung $\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$.*

Beweis: Die Außenregularität folgt sofort aus Lemma 3.4.8. Zur Innenregularität: Wir schreiben $E := \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$ als

$$E = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \ldots \cup (E_n \setminus E_{n-1}) \ .$$

Dies ist eine disjunkte Vereinigung und alle Borelmengen $E_j \setminus E_{j-1}$ sind regulär (siehe Lemma 3.4.6). Dann liefert die Anwendung von Lemma 3.4.7 die Behauptung. ■

Jetzt können wir bereits folgende Folgerung notieren:

Folgerung 3.4.11 *Alle Borel-Mengen $B \in \mathcal{B}_0(\mathfrak{K})$ sind regulär.*

Beweis: Wegen Lemma 3.4.4 und Lemma 3.4.5 wissen wir, daß jedes $K \in \mathfrak{K}$ regulär ist. Die Lemmas 3.4.6 und 3.4.10 ergeben dann die Behauptung. ■

Jetzt gehen wir den Schritt von $\mathcal{B}_0(\mathfrak{K})$ zu $\mathcal{B}(\mathfrak{K})$.

Lemma. 3.4.12 *Sei $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$ eine monoton aufsteigende Folge regulärer Borel-Mengen. Dann ist auch $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ regulär.*

Beweis: Der Beweis ergibt sich sofort aus Lemma 3.4.8 und Lemma 3.4.9. ■

Lemma 3.4.12 ist der Schlußstein des Beweises des Theorems 3.4.3, da ja $\mathcal{B}(\mathfrak{K}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}_0(\mathfrak{K}))$. ■

Wir notieren noch einmal eine „Quintessenz“ aus den Abschnitten 3.3 und 3.4:

Sobald man in $\mathcal{B}$ für die offenen Mengen $U \in \mathfrak{U}$ eine nichtnegative Mengenfunktion $\mu(\cdot)$ einführen kann, die subadditiv, monoton ist und für die gilt, daß mit

$$\mu(K) := \inf_{U \supset K} \mu(U)$$

im Gegenzug gilt

$$\mu(U) = \sup_{K \subset U} \mu(K) \ ,$$

dann entsteht durch die Definition

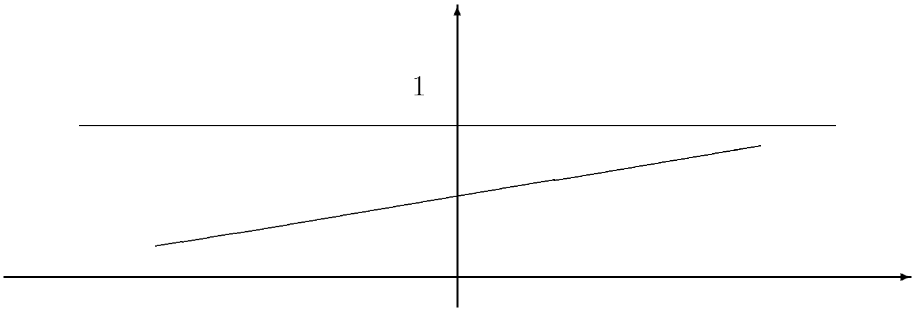
$$\mu(B) := \inf_{B \subseteq U} \mu(U)$$

ein Borel–Maß, was sich dann als regulär erweist.

Bemerkung: Wir haben das am Fall des Lebesgue–Maßes auf $\mathbb{R}$ durchexerziert. In diesem konkreten Fall hatten wir auch die Additivität von μ auf $\mathfrak{U}$ von vornherein zur Verfügung. Diese wurde aber beim Aufbau der Konstruktion explizit nicht gebraucht.

3.5 Beispiele: Stieltjes–Maße, Dirac–Maß, Cantor–Maß; einige Definitionen

I. Stieltjes–Maße auf $\mathbb{R}$: Sei $\alpha(\cdot)$ eine stetig differenzierbare, monoton wachsende Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha(x) \leq 1$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 1$



Wir setzen

$$\begin{aligned} \mu((a,b)) &:= \alpha(b) - \alpha(a) \quad , \qquad a < b \ , \\ &= \int\limits_a^b \alpha'(x)dx \ . \end{aligned}$$

Auch mit einem solchen Ansatz können wir die Konstruktion des Abschnittes 3.3 durchziehen und erhalten wegen

$$\mu(\mathbb{R}) = 1$$

ein *finites* Borel–Maß auf $\mathbb{R}$. Ein solches Maß ist ein (spezielles) *Lebesgue–Stieltjes–Maß.*

II. Sei wieder allgemein $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}\}$ gegeben. $\xi \in \mathfrak{X}$ sei ein fixierter Punkt von $\mathfrak{X}$. Wir setzen

$$\mu(B) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \xi \in B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Durch diese Definition entsteht ein finites Borel–Maß auf $\mathfrak{X}$. Dieses Maß heißt das *Dirac–Maß für den Punkt* ξ und wird mit δ_ξ bezeichnet.

III. Ein Cantor–Maß: Sei $\mathfrak{X} = [0,1]$. Wir entfernen sukzessive offene Mengen aus $\mathfrak{X}$: erster Schritt: [0,1] wird in 3 gleichlange Intervalale aufgeteilt, das mittlere wird entfernt. Mit den verbleibenden Intervallen verfährt man analog

1. Schritt:				$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$				
2. Schritt:		$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$				$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$		
3. Schritt:	$\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$		$\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$		$\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$		$\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$	

etc.
$\mathcal{O}$ sei die Vereinigung aller dieser offenen Intervalle. Dann ist $\mathcal{O}$ offen und

$$\begin{aligned} |\mathcal{O}| &= \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \ . \end{aligned}$$

Die abgeschlossene Menge

$$C := [0,1] \setminus \mathcal{O}$$

heißt eine *Cantor–Menge*. Es ist $|C| = 0$, C ist eine „Nullmenge".

Genaues „Nachrechnen" der Konstruktion von C liefert:

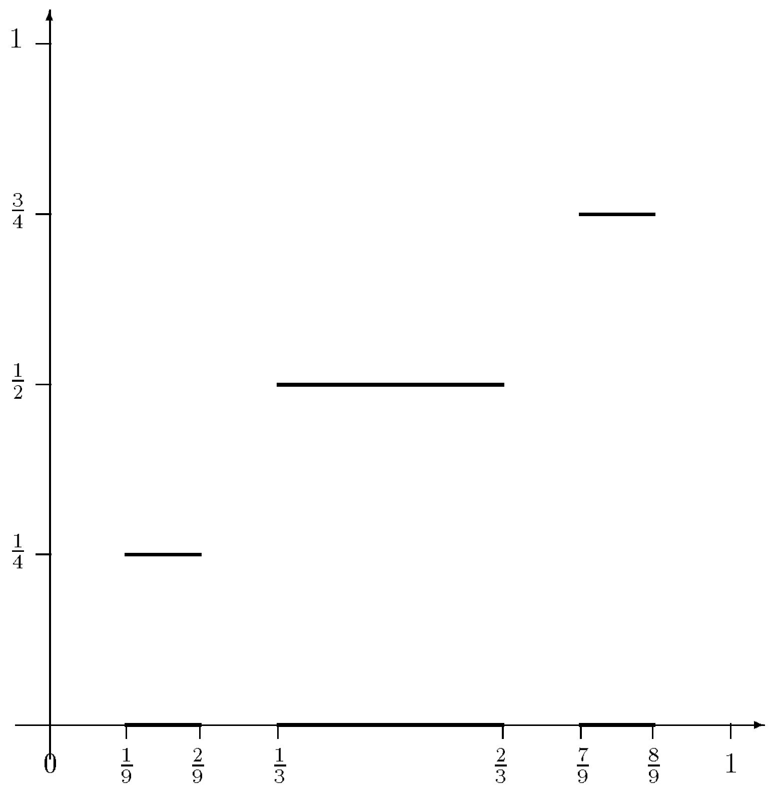
$x \in C$ genau dann, wenn $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ (im Sinne einer *Dreierentwicklung*, wobei stets $\alpha_j \neq 1$ ist, also nur $\alpha_j = 0$ oder $\alpha_j = 2$ zugelassen sind).

Man kann eine Bijektion von C auf [0,1] etablieren, indem man in der Entwicklung von x die 2en durch 1en ersetzt und den „Bruch" als eine 2er-Entwicklung (dyadische Entwicklung) auffaßt.

Da [0,1] nicht abzählbar ist, ist also auch C nicht abzählbar. C ist also ein Beispiel für eine überabzählbare Borelmenge, die aber trotzdem das Lebesgue-Maß Null hat.

C hat keine inneren Punkte. Das zugehörige Cantor-Maß wird – ganz analog zum Verfahren in I. – durch eine monoton wachsende Funktion $\alpha(\cdot)$ auf [0,1] eingeführt, deren Definition die o.g. Bijektion widerspiegelt.

Die Funktion $\alpha(\cdot)$:



Durch diesen sukzessiven Prozeß ist $\alpha(\cdot)$ auf $\mathcal{O}$ definiert. Auf C wird $\alpha(\cdot)$ durch „stetige Fortsetzung" definiert. Dann hat man

1. $\alpha(\cdot)$ ist stetig auf [0,1]

2. $\alpha(\cdot)$ ist monoton wachsend, $\alpha(0) = 0,\ \alpha(1) = 1$

3. Die Komponenten von $\mathcal{O}$ sind „Konstanzintervalle“ der Funktion $\alpha(\cdot)$, m.a.W. man hat

$$x \in \mathcal{O} \text{ impliziert } \alpha'(x) = 0\ .$$

Die Definition des Maßes erfolgt nun mit Hilfe der Funktion α:
$\mu(\{x\}) = 0$, d.h. die 1-punktigen Mengen erhalten das Maß 0,
$\mu((a,b)) = \alpha(b) - \alpha(a)$ für das offene Intervall (a,b).

Die Konstruktion von Abschnitt 5 liefert hieraus ein Borel–Maß auf [0,1], dieses Maß μ heißt ein *Cantor-Maß.*

Es ergibt sich z.B.

$$\mu([0,1] \setminus C) = \mu(\mathcal{O}) = 0\ ,$$

weil ja $\mathcal{O}$ die abzählbare Vereinigung von Konstanzintervallen ist. Man sagt, das Cantor–Maß *lebt* auf C.

Andererseits ist, wie oben bemerkt, $|C| = 0$, d.h. das Lebesgue–Maß braucht zum „Leben“ die Cantor–Menge *nicht.*

Es folgen einige Definitionen. Sei $\{\mathfrak{X}, \mu\}$ gegeben, μ Borel–Maß auf $\mathfrak{X}$.

Definition. 3.5.1 $\operatorname{supp}\mu := \bigcap\limits_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ \mu(\mathfrak{X}\setminus A)=0}} A,$ *($\operatorname{supp}\mu$ heißt Träger des Maßes).*

Wegen $\mathfrak{X} \setminus \bigcap\limits_A A = \bigcup\limits_A (\mathfrak{X} \setminus A)$ ist also $\mathfrak{X} \setminus \bigcap\limits_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ \mu(\mathfrak{X}\setminus A)=0}} A = \mathfrak{X} \setminus \operatorname{supp}\mu$ die größte offene Menge, auf der μ verschwindet. Man sagt: Das Maß μ lebt auf seinem Träger $\operatorname{supp}\mu$.

Beispiele.

I. Sei $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$. Dann ist $\operatorname{supp}|\cdot| = \mathbb{R}$, weil ja das Lebesgue–Maß auf keiner einigen offenen nichtleeren Menge verschwindet. Insbesondere ist $\operatorname{supp}(\mu \restriction [0,1]) = [0,1]$.

II. Sei μ das Cantor–Maß auf [0,1]. Dann ist $\operatorname{supp}\mu = C$, denn $\mathcal{O}$ ist die größte offene Menge, auf der μ verschwindet.

III. Sei δ_ξ das Dirac–Maß auf $\mathfrak{X}$. Dann ist $\operatorname{supp}\delta_\xi = \{\xi\}$, weil ja $\delta_\xi(\mathfrak{X} \setminus \{\xi\}) = 0$.

IV. Sei μ_α das o.g. Lebesgue–Stieltjes–Maß auf $\mathbb{R}$. $\alpha'(x) =: \rho(x)$ heißt auch die „*Dichte*“ des Maßes μ_α. Es ist $\rho(x) \geq 0$. Hier ist $\operatorname{supp}\mu_\alpha = \operatorname{supp}\rho := \operatorname{clo}\{x : \rho(x) \neq 0\}$, denn aus $\int\limits_a^b \rho(x)dx = 0$ folgt ja $\rho(x) = 0$ auf (a,b).

Es folgen ein paar weitere Definitionen:

Definition. 3.5.2 *Ein Punkt $x \in \mathfrak{X}$ heißt ein reiner Punkt, wenn $\mu(\{x\}) > 0$. Z.B. ist beim Dirac–Maß δ_ξ der Punkt ξ rein.*

Die Menge $P := \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ aller reinen Punkte ist abzählbar, weil in jeder kompakten Menge höchstens abzählbar viele reine Punkte liegen können. Dann kann man ein neues Maß definieren:

$$\mu_P(B) := \sum_{x \in B \cap P} \mu(\{x\}) = \mu(B \cap P) \; .$$

μ_P ist dann ein Borel–Maß, das *nur* reine Punkte enthält. Außerdem ist $\mu(B) - \mu_P(B) \geq 0$ für alle $B \in \mathcal{B}$ und $\mu(\{x\}) - \mu_P(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{X}$, d.h.

$$\mu_s(B) := \mu(B) - \mu_P(B) \tag{3.5.13}$$

ist wieder ein Borel–Maß, das aber überhaupt keine reinen Punkte enthält.

Definition. 3.5.3 *μ heißt ein stetiges (Borel-) Maß, wenn es keine reinen Punkte gibt.*

Definition. 3.5.4 *μ heißt ein reines Punkt–Maß, wenn*

$$\mu(B) = \sum_{x \in B} \mu(x), \quad B \in \mathcal{B} \; .$$

Jedes Borel–Maß läßt sich, das zeigt (3.5.13), in eine Summe

$$\mu = \mu_P + \mu_s$$

zerlegen, wo μ_P ein reines Punktmaß und μ_s ein stetiges Maß ist (und diese Zerlegung ist auch eindeutig, was der Leser nachrechnen könnte).

An dieser Stelle bemerken wir, daß man von Borel–Maßen endliche Linearkombinationen mit positiven Koeffizienten bilden kann:

Sind $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ Borel–Maße auf $\mathfrak{X}$ und $\alpha_1 > 0, \; \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$, so ist

$$\mu(B) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j(B) \; , \quad B \in \mathcal{B}$$

ebenfalls ein Borel–Maß auf $\mathfrak{X}$.

3.6 μ-meßbare Mengen

Wir erweitern jetzt das System $\mathcal{B}$ der Borel–Mengen, das ja von einem auf $\mathfrak{X}$ gegebenem Borel–Maß völlig unabhängig ist, zu einem etwas umfassenderen System der sog. μ-meßbaren Mengen, das – wie schon die Bezeichnung andeutet, von einem vorgegebenen Maß μ abhängt.

Lemma. 3.6.1 *Seien A, B beliebige Teilmengen von $\mathfrak{X}$, μ ein Borel–Maß, $N \in \mathcal{B}$ und $\mu(N) = 0$ (N eine Null–Borel–Menge). Dann gilt $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq N$ genau dann, wenn $A \cup M_1 = B \cup M_2$, wobei $M_1 \subseteq N$ und $M_2 \subseteq N$.*

Bemerkung. Die Menge $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ heißt die *symmetrische* Differenz der Mengen A und B.

Beweis: Sei $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq N$. Es ist ja $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ und $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$, also

$$\begin{aligned} A \cup (B \setminus A) &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \cup (A \cap B), \\ B \cup (A \setminus B) &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (B \cap A), \end{aligned}$$

d.h.

$$A \cup (B \setminus A) = B \cup (A \setminus B)$$

und wir können setzen $M_1 := B \setminus A$, $M_2 := A \setminus B$, denn $B \setminus A \subseteq N$ und $A \setminus B \subseteq N$.

Gilt andererseits $A \cup M_1 = B \cup M_2$ mit $M_1, M_2 \subseteq N$, so ist

$$(A \setminus B) \cup M_1 \subseteq M_2,\ (B \setminus A) \cup M_2 \subseteq M_1\ ,$$

also

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup M_1 \cup M_2 \quad \subseteq \quad M_2 \cup M_1\ , \quad \text{d.h. aber}$$
$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq M_1 \cup M_2 \quad \subseteq N\ .$$

■

Definition. 3.6.2 *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathfrak{X}$ heißt μ-meßbar, wenn es eine Borel-Menge $B \in \mathcal{B}$ und eine Borel–Nullmenge N gibt, so daß $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq N$ gilt.*

Das Lemma 3.6.1 besagt dann, daß die μ-meßbaren Mengen aus den Borelmengen „entstehen“, indem man von einer Borelmenge B etwas hinzufügt und/oder etwas wegläßt, was aber auf jeden Fall in einer Borel–Null–Menge enthalten ist. Anders ausgedrückt: Alle Teilmengen von Borel–Null–Mengen werden als „Nullmengen“ aufgefaßt, egal, ob sie selbst Borel–Mengen sind oder nicht.

Unter einer μ-Nullmenge versteht man dann eine Teilmenge einer μ–Null–Borel–Menge.

3.7 Borel–Funktionen, μ-meßbare Funktionen

Im folgenden halten wir ein für alle mal den Borel–Maßraum $\{\mathfrak{X}, \mu\}$ fest. $\mathbb{R}$ trägt eine kanonische Borel–Struktur. Wir betrachten reellwertige Funktionen f auf $\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{X} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

und definieren

Definition. 3.7.1 *f heißt Borelfunktion, wenn für jede Borel–Menge $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt: $f^{-1}(C)$ ist eine Borel–Menge in $\mathfrak{X}$, also $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$.*

Beispiele von Borel–Funktionen werden geliefert durch alle stetigen Funktionen:

Lemma. 3.7.2 *Jede stetige Funktion $f : \mathfrak{X} \mapsto \mathbb{R}$ ist eine Borel–Funktion.*

Beweis: Für jede offene Menge $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist $f^{-1}(U)$ offen, also Borel; $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ wird aber durch seine offenen Mengen erzeugt. ■

Für Borel–Funktionen ergeben sich folgende Rechenoperationen, die nicht aus der Gesamtheit der Borel–Funktionen herausführen:

Lemma. 3.7.3 *$f, g; f_1, f_2, f_3, \ldots$ seien Borelfunktionen, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Funktionen auch Borelfunktionen:*

1. *$f + g$, λf, d.g. alle endlichen reellen Linearkombinationen von Borelfunktionen sind Borelfunktionen,*
2. *$f \cdot g$,*

3. $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$,

4. $|f|$.

5. *Wenn die Folge* $f_1, f_2, f_3, \dots$ *punktweise konvergiert, d.h. wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ *existiert für jedes* $x \in \mathfrak{X}$, *dann ist die Grenzfunktion* $f(\cdot)$ *auch eine Borelfunktion.*

6. *Ist* $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, *so ist auch* $f \circ g$ *eine Borelfunktion.*

Bemerkung: $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$; $(\max\{f,g\})(x) := \max\{f(x), g(x)\}$; $|f|(x) := |f(x)|$, $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

Beweis: Die Beweise für 1., 2., 3., 4. und 6. werden dem Leser überlassen. Wir beweisen jetzt 5.: Zu beweisen ist ja: Wenn $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, so ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ von den offenen Intervallen erzeugt wird und die mengentheoretischen Manipulationen sich durch $f^{-1}(\cdot)$ hindurchziehen lassen, genügt es, zu zeigen: wenn $B := (a,b)$, so ist $f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{B}$. Das beweisen wir jetzt. Wir setzen

$$\Delta_m := (a + \tfrac{1}{m},\ b - \tfrac{1}{m})$$

und

$$f_k^{-1}(\Delta_m) =: A_m^k,$$

das sind jedenfalls Borelmengen.
Weiter sei

$$B_m^n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_m^k,$$

auch das sind Borelmengen.
Wir behaupten nun

$$f^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} B_m^n.$$

Sei $x_0 \in f^{-1}((a,b))$, d.h. $a < f(x_0) < b$, d.h. es existiert ein m mit

$$a + \tfrac{1}{m} < f(x_0) < b - \tfrac{1}{m}.$$

Weil nun $f_k(x_0) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$, so existiert ein $n = n(x_0)$, so daß für alle $k \geq n$ gilt

$$a + \tfrac{1}{m} < f_k(x_0) < b - \tfrac{1}{m},$$

d.h. es folgt $x_0 \in A_m^k$, also $x_0 \in B_m^{n(x_0)}$ und $x_0 \in \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_m^n$.
Nun die Umkehrung: Behauptet wird also

$$\bigcup_{n,m=1}^{\infty} B_m^n \subseteq f^{-1}((a,b)).$$

Sei $x_0 \in \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_m^n$, d.h. es existieren ein n und ein m, so daß $x_0 \in B_m^n$, also $x_0 \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_m^k$, d.h. aber: für alle $k \geq n$ gilt

$$x_0 \in A_m^k \quad \text{oder} \quad x_0 \in f_k^{-1}(\Delta_m),$$

also wir haben

$$a + \tfrac{1}{m} < f_k(x_0) < b - \tfrac{1}{m}.$$

Jetzt lassen wir $k \to \infty$ gehen und erhalten

$$a + \tfrac{1}{m} \leq f(x_0) \leq b - \tfrac{1}{m},$$

d.h. aber $f(x_0) \in (a,b)$. ∎

Wir betrachten jetzt spezielle Borelfunktionen, die sog. *Treppenfunktionen.* Die sind außerordentlich wichtig für die Integrationstheorie und auch sehr „anschaulich".
Zunächst: Sei $\Delta \in \mathcal{B}$. Die *charakteristische Funktion* χ_Δ ist definiert durch

$$\chi_\Delta(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \Delta, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist klar: χ_Δ ist eine Borelfunktion.

Definition. 3.7.4 *Eine Funktion t heißt Treppenfunktion, wenn t eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen ist.*

$$t(x) := \sum_{\rho=1}^{m} \alpha_\rho \chi_{\Delta_\rho}(x), \quad \Delta_\rho \in \mathcal{B}, \quad \alpha_\rho \in \mathbb{R} .$$

Bemerkung: O.B.d.A. können die Borelmengen Δ_ρ als paarweise disjunkt angenommen werden.

Definition. 3.7.5 *Eine Treppenfunktion t heißt finit, wenn t außerhalb eines Kompaktums K verschwindet; oder:* $\operatorname{supp} t := \{x : t(x) \neq 0\}$ *ist kompakt.*

Jetzt überzeugen wir uns davon, daß wir alle Borelfunktionen „erfassen", indem wir punktweise konvergente Folgen von finiten Treppenfunktionen betrachten:

Lemma. 3.7.6 *Sei $g : \mathfrak{X} \mapsto \mathbb{R}$ eine Borel-Funktion. Dann gibt es eine punktweise konvergente Folge finiter Treppenfunktionen $t_1, t_2, t_3, \ldots$, so daß*

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x), \quad x \in \mathfrak{X} .$$

Beweis: Es genügt zu beweisen, daß g durch finite Treppenfunktionen beliebig gut approximiert werden kann. Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es ist $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} (-m, m]$. Sei $(-m, m] = \bigcup_{\rho=1}^{k(m)} B_\rho^m$, wobei die B_ρ^m disjunkte Borelmengen sind, z.B. kleine Intervalle der Form $(a, b]$. Die Zerlegung von $(-m, m]$ wählen wir so fein, daß bei fixiertem $\xi_\rho^{(m)} \in B_\rho^m$ immer $|y - \xi_\rho^{(m)}| < \varepsilon$ gilt für alle $y \in B_\rho^m$. Ich setze $A_\rho^m := g^{-1}(B_\rho^m)$. Dann sind die A_ρ^m Borelmengen. Jetzt bilden wir die finite Treppenfunktion

$$t_m(x) := \sum_{\rho=1}^{k(m)} \xi_\rho^{(m)} \chi_{A_\rho^m}(x).$$

Dann ist für $x \in (-m, m]$

$$\begin{aligned} |t_m(x) - g(x)| &= |\sum_\rho \xi_\rho^{(m)} \chi_{A_\rho^m}(x) - g(x) \sum_\rho \chi_{A_\rho^m}(x)| \\ &= |\sum_\rho \chi_{A_\rho^m}(x)(\xi_\rho^{(m)} - g(x))| \leq \varepsilon \sum_\rho \chi_{A_\rho^m}(x) = \varepsilon \ , \end{aligned}$$

also folgt

$$t_m(x) \to g(x), \quad m \to \infty, \text{ für alle } x \in \mathfrak{X}. \qquad \blacksquare$$

Ist $\{\mathfrak{X}\}$ gegeben, und damit die aus $\mathcal{B}$ hervorgehende Menge der μ-meßbaren Mengen, so kann man – und das ist für die Integrationstheorie und darüber hinaus wichtig – in der Menge der Funktionen $f : \mathfrak{X} \mapsto \mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation definieren:
Die A_ρ^m sind nicht notwendig disjunkt. Ist $A_\rho^n \cap A_{\rho'}^{m'} \neq \emptyset$, so ist $(A_\rho^m \setminus A_{\rho'}^{m'}) \cap A_{\rho'}^{m'} = \emptyset$, so daß wir o.B.d.A. annehmen können, daß das System $\{A_\rho^m\}_{m,\rho}$ disjunkt ist. Außerdem ist $\bigcup_{\rho,m} A_\rho^m = \mathfrak{X}$.

Definition. 3.7.7 *Die Funktionen f und g heißen μ-äquivalent, $f \equiv g(\operatorname{mod}\mu)$, wenn die Menge $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ eine μ-Nullmenge ist.*

Der Leser weise nach, daß es sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt. Für zwei äquivalente Funktionen f, g ist folgende Rede– bzw. Schreibweise gebräuchlich:

$$f(x) = g(x)(\operatorname{mod}\mu),$$

d.h. die Gleichung gilt, abgesehen von einer Menge vom μ-Maß 0.

Hieraus ergibt sich konsequenterweise eine Abschwächung der punktweisen Konvergenz:

Definition. 3.7.8 *Die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ konvergiert fast überall bez. μ gegen f, wenn $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)(\operatorname{mod}\mu)$ gilt, d.h. die Menge der Punkte x, für die die Limes–Relation nicht gilt, ist eine μ-Nullmenge.*

Schließlich führen wir einen etwas allgemeineren Typ von Funktionen als die Borelfunktionen ein und durch die

Definition. 3.7.9 *Die Funktion f heißt μ-meßbar, wenn es eine Folge $t_1, t_2, t_3, \ldots$ von (finiten) Treppenfunktionen gibt, so daß*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x)(\operatorname{mod}\mu).$$

Daß diese Definition eine (kleine) Verallgemeinerung des Begriffs der Borelfunktion darstellt, die der μ-Äquivalenz Rechnung trägt, erkennt man aus dem

Lemma. 3.7.10 *f ist μ-meßbar genau dann wenn eine Borelfunktion g mit $f \equiv g(\operatorname{mod}\mu)$ esixtiert.*

Beweis: *Sei $f \equiv g(\operatorname{mod}\mu)$, g Borelfunktion. Vorhin (Lemma auf 3.7.6) wurde gezeigt, daß es eine Folge finiter Treppenfunktionen t_n gibt mit*

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Dann ist also

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x)(\operatorname{mod}\mu),$$

die Limes–Gleichung gilt für $f(\cdot)$ μ-fast überall. Also ist f μ-meßbar. Die Umkehrung: Sei f μ-meßbar, also $f(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x)(\operatorname{mod}\mu)$. Sei A die (μ-meßbare) Menge der Konvergenzpunkte, M die (μ-Nullmenge) der Nichtkonvergenzpunkte. Es ist $A \cup M = \mathfrak{X}$, $A \cap M = \emptyset$ und $M \subseteq N$, wo N eine „echte“ Borelmenge mit $\mu(N) = 0$ ist. Ich bilde $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X} \setminus N) \cup N$. Dann ist $\mathfrak{X} \setminus N \subseteq A$. Ich setze

$$t_n'(x) := \begin{cases} t_n(x) & , \quad x \in \mathfrak{X} \setminus N \\ 0 & , \quad x \in N \end{cases}.$$

Die Folge t_n' von Treppenfunktionen konvergiert überall, sei $\lim_{n\to\infty} t_n'(x) =: g(x)$. Dann ist aber $g(x)$ eine Borelfunktion und $f \equiv g(\operatorname{mod}\mu)$. ∎

Kapitel 4

Integrationstheorie

4.1 Das Integral finiter Treppenfunktionen

Sei $\{\mathfrak{X}, \mu\}$ wie üblich, also μ Borel-Maß auf $\mathfrak{X}$. Sei $t(\cdot)$ eine finite Treppenfunktion $t : \mathfrak{X} \mapsto \mathbb{R}$,

$$t(x) := \sum_{\rho=1}^{m} \alpha_\rho \chi_{B_\rho}(x) \ ,$$

wobei die $B_1, B_2, \ldots, B_m$ disjunkt sind und $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m =: K$ kompakt.

Definition. 4.1.1 *Das Integral einer Treppenfunktion t wird definiert durch*

$$\int_{\mathfrak{X}} t(x)\mu(dx) := \sum_{\rho=1}^{m} \alpha_\rho \mu(B_\rho). \tag{4.1.1}$$

Bemerkung: Wenn wir auf die Disjunktheit der B_j verzichten, so daß dann verschiedene Darstellungen von t möglich sind, so ist dennoch die Definition (4.1.1) gültig: Es ergibt sich die Unabhängigkeit der Definition von der Darstellung. Der Leser prüfe das nach.

Die finiten Treppenfunktionen bilden einen linearen Raum, mit t, t_1, t_2 sind auch $\lambda t, t_1 + t_2$ finite Treppenfunktionen. Auch $|t|$, definiert durch $|t|(x) := |t(x)|$ ist eine finite Treppenfunktion.

Neben $\int\limits_{\mathfrak{X}}$ wird auch das Integral $\int\limits_{Delta}$ über eine Borelmenge Δ definiert:

Definition. 4.1.2

$$\int_{\Delta} t(x)\mu(dx) := \int_{\mathfrak{X}} \chi_\Delta(x) t(x)\mu(dx) \ . \tag{4.1.2}$$

Klar ist, daß $\int\limits_{\mathfrak{X}} \chi_B(x)\mu(dx) = \mu(B)$ gilt.

Wir notieren erste einfache Eigenschaften des Integrals, wobei die nicht notierten Beweise dem Leser überlassen bleiben.

1. $\int\limits_{\mathfrak{X}} (\lambda_1 t_1(x) + \lambda_2 t_2(x))\mu(dx) = \lambda_1 \int\limits_{\mathfrak{X}_1} t_1(x)\mu(dx) + \lambda_2 \int\limits_{\mathfrak{X}} T_2(x)\mu(dx)$,
   d.h. die Abbildung
   $$t \mapsto \int_{\mathfrak{X}} t(x)\mu(dx) \in \mathbb{R}$$
   ist eine Linearform auf dem linearen Raum der finiten Treppenfunktionen.

2. Wenn $t(x) \geq 0$, so $\int\limits_{\mathfrak{X}} t(x)\mu(dx) \geq 0$.

3. Wenn $t_1(x) \geq t_2(x)$, so $\int\limits_{\mathfrak{X}} t_1(x)\mu(dx) \leq \int\limits_{\mathfrak{X}} t_2(x)\mu(dx)$.

4. $\int\limits_{\mathfrak{X}} |t_1(x) + t_2(x)|\mu(dx) \leq \int\limits_{\mathfrak{X}} |t_1(x)|\mu(dx) + \int\limits_{\mathfrak{X}} |t_2(x)|\mu(dx)$.

5. $|\int\limits_{\mathfrak{X}} t(x)\mu(dx)| \leq \int\limits_{\mathfrak{X}} |t(x)|\mu(dx)$.

6. Wenn $\alpha \leq t(x) \leq \beta$ gilt für alle $x \in \Delta$, wo $\Delta \in \mathcal{B}$, so ist
$$\alpha\,\mu(\Delta) \leq \int\limits_{\Delta} t(x)\mu(dx) \leq \beta\ u(\Delta)\ .$$

   Beweis: Die Voraussetzung bedeutet $\alpha\,\chi_\Delta(x) \leq \chi_\Delta(x)t(x) \leq \beta_{\chi_\Delta}(x)$. Wegen 3. folgt dann
$$\alpha \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi_\Delta(x)\mu(dx) \leq \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi_\Delta(x)t(x)\mu(dx) \leq \beta \int \chi_\Delta(x)\mu(dx)\ ,$$
   also die Behauptung. ■

7. $|\int\limits_{\Delta} t(x)\mu(dx)| \leq \max\limits_x |t(x)| \cdot \mu(\Delta)$.

8. Die Funktion $\nu(\Delta) := \int\limits_{\Delta} t(x)\mu(dx)$, ($t$ fixiert), ist endlich additiv.

9. Wenn $t(x) \geq 0$ und $\int\limits_{\mathfrak{X}} t(x)\mu(dx) = 0$, so ist $\mu(\{x : t(x) \neq 0\}) = 0$.

   Beweis: t ist ja eine Treppenfunktion. Angenommen, $t(x) = \alpha > 0$ auf einer Borelmenge B mit $\mu(B) > 0$, so ist
$$t(x) \geq \alpha\chi_B(x)$$
   also
$$\int\limits_{\mathfrak{X}} t(x)\mu(dx) \geq \int\limits_{\mathfrak{X}} \alpha\chi_B(x)\mu(dx) = \alpha\,\mu(B) > 0\ ,$$
   d.h. es folgt $t(x) = 0 \pmod{\mu}$. ■

Die Äquivalenz $t_1 \equiv t_2 \pmod{\mu}$ zweier Treppenfunktionen ist mit den linearen Operationen verträglich, d.h. ich kann den linearen Raum der finiten Treppenfunktionen faktorisieren bez. der Äquivalenzrelation, m.a.W.

Der Raum $\mathcal{L}_0$ der Äquivalenzklassen finiter Treppenfunktionen ist ein linearer Raum. In $\mathcal{L}_0$ kann eine Norm eingeführt werden:

Definition. 4.1.3 $\|t\| := \int\limits_{\mathfrak{X}} |t(x)|\mu(dx)$.

Dieser Wert hängt nur von der Äquivalenzklasse ab.
Es gilt

1. $\|t\| \geq 0$,

2. $\|t\| = 0$ gdw. $t \equiv 0 \pmod{\mu}$, also wenn t zur Nullklasse gehört (siehe 9,

3. $\|\lambda\, t\| = |\lambda| \cdot \|t\|$,

4. $\|t_1 + t_2\| \leq \|t_1\| + \|t_2\|$.

Damit wird $\mathcal{L}_0$ zu einem linearen normierten Raum und damit ist $\mathcal{L}$ automatisch ein metrischer Raum mit der Metrik

$$\rho(t_1, t_2) := \|t_1 - t_2\| = \int\limits_{\mathfrak{X}} |t_1(x) - t_2(x)|\mu(dx) \ .$$

In diesem linearen normierten Raum $\mathcal{L}_0$ haben wir eine ganz bestimmte Linearform

$$\mathcal{L}_0 \ni t \mapsto \int\limits_{\mathfrak{X}} t(x)\mu(dx) =: \ell(t)$$

und wegen

$$|\ell(t)| \leq \|t\|$$

ist diese Linearform stetig bezüglich der Norm $\|\cdot\|$.

Jetzt entsteht aber folgendes Problem: Wie verhält sich diese Linearform bei punktweiser Konvergenz einer Folge von Treppenfunktionen bzw. bei Konvergenz μ-fastüberall.

Zur Vorbereitung einer Antwort auf diese Frage betrachten wir ein Beispiel. Wir nehmen mal $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, für μ das Lebesgue-Maß und nehmen eine Folge $t_1, t_2, t_3, \ldots$ finiter Treppenfunktionen, die punktweise gegen Null konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} t_n(x) = 0 \quad \text{für jedes} \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Wir fragen jetzt: Gilt dann auch $\int\limits_{\mathbb{R}} t_n(x)\mu(dx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$?

Antwort: Im allgemeinen gilt das eben nicht und wir geben dafür folgendes Beispiel: Sei

$$t_n(x) := \frac{1}{n}\chi_{(-n,n)}(x) \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

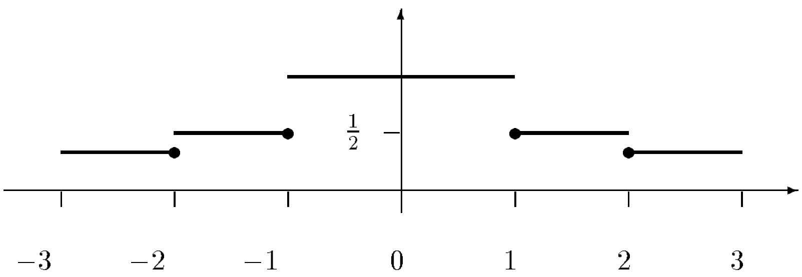
Dann ist $\lim\limits_{n\in\infty} t_n(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, aber es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} t_n(x)\mu(dx) = \frac{1}{n}\mu((-n, n)) = \frac{1}{n} \cdot 2n = 2 \ .$$

Um schon ein wenig Einsicht zu gewinnen, woran das liegt und um einen wichtigen Satz vorzubereiten (Lebesguesches Majorantenkriterium), rechnen wir mal $\sup\limits_n t_n(x)$ aus: Es ist

$$\sup_n t_n(x) = \frac{1}{[|x|] + 1} \ , \tag{4.1.3}$$

denn es ist $|x| \geq [|x|]$, also $x \notin (-[|x|], [|x|])$, aber $x \in (-\{[|x|] + 1\}, [|x|] + 1)$, d.h. dieses Intervall ist „das erste Intervall, in dem x enthalten ist“. Die Funktion (4.1.3) sieht also so aus:



Das ist also eine nichtfinite Treppenfunktion t und – wenn wir mal ausnahmsweise diese nichtfinite Treppenfunktion genau so integrieren wie wir es für die finiten getan haben, so ist

$$\int_{\mathbb{R}} t(x)\mu(dx) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \ .$$

Dieses Beispiel zeigt, daß die Eigenschaft der punktweisen Konvergenz gegen Null einer Folge von Treppenfunktionen *nicht ausreicht*, um die Folge der Integrale zu einer Nullfolge zu machen.

4.2 Ein zentrales Lemma

Das letzte Beispiel in 4.1 zeigt, daß man zusätzliche Eigenschaften von fastüberall gegen Null konvergenten Folgen von finiten Treppenfunktionen suchen muß, um zu sichern, daß die Integrale eine Nullfolge bilden. In diesem Abschnitt geben wir eine Antwort, nämlich: Die Eigenschaft, daß die t_n eine Cauchyfolge bez. der Norm $\|\cdot\|$ bilden, sichert (als Zusatzeigenschaft) das gewünschte Ergebnis.

Lemma. 4.2.1 *Sei* t_n, $n = 1, 2, \ldots$, *eine Folge finiter Treppenfunktionen mit*

(I) $t_n(x) \to 0$, *für* $n \to \infty$, mod μ.

(II) $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ist eine Cauchyfolge bez.* $\|\cdot\|$, *d.h.* $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|t_n - t_m\| = 0$.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|t_n\| = 0 \quad \textit{oder} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} |t_n(x)|\mu(dx) = 0$$

und damit gilt dann speziell auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} t_n(x)\mu(dx) = 0 \ .$$

Beweis: Der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} \|t_n\|$ existiert, weil $\Big|\|t_n\| - \|t_m\|\Big| \leq \|t_n - t_m\|$. Daß dieser Limes Null ist, erfordert einige Schritte, die wir durch Hilfslemmas bezeichnen.

H1. Bei fester Treppenfunktion t ist

$$\lim_{\mu(\Delta)\to 0} \int_{\Delta} t(x)\mu(dx) = 0$$

Das folgt sofort aus Eigenschaft 7 (p. 36).

H2. Der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx)$ existiert für jede Borelmenge Δ und zwar sogar *gleichmäßig* bez. Δ, d.h.

$$\sup_{\Delta} \Big| \int_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx) - \int_{\Delta} |t_m(x)|\mu(dx) \Big| \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty \ .$$

Beweis: Die Existenz des Limes folgt aufgrund der Bemerkung am Anfang des Beweises. Darüber hinaus haben wir

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx) - \int_{\Delta} |t_m(x)|\mu(dx) \Big| \ &\leq \ \int_{\Delta} \Big| |t_n(x)| - |t_m(x)| \Big| \\ &\leq \ \int_{\Delta} |t_n(x) - t_m(x)|\mu(dx) \leq \int_{\mathfrak{X}} |t_n(x) - t_m(x)|\mu(dx) \end{aligned}$$

und diese letzte Schranke ist bereits unabhängig von Δ.

Zur Abkürzung setzen wir jetzt

$$c(\Delta) := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx) \ , \quad c_n(\Delta) := \int\limits_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx) \ .$$

Für $c(\Delta)$ bekommt man

H3. Es ist $\lim\limits_{\mu(\Delta\to)0} c(\Delta) = 0$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} |c(\Delta)| &= \left| c(\Delta) - \int\limits_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx) + \int\limits_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx) \right| \\ &\leq \left| c(\Delta) - \int\limits_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx) \right| + \int\limits_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx) \ . \end{aligned}$$

Der erste Summand

$$\left| c(\Delta) - \int\limits_{\Delta} |t_n(x)|\mu(dx) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n > N(\varepsilon) \quad \text{gleichmäßig in} \quad \Delta \ ,$$

nach H2. Ich wähle $n = n_0 > N(\varepsilon)$ fest, dann ist der zweite Summand

$$\int\limits_{\Delta} |t_{n_0}(x)|\mu(dx) < \frac{\varepsilon}{2} \ , \quad \text{falls} \quad \mu(\Delta) > \delta(\varepsilon)$$

nach H1.

Zusammengefaßt weiß ich jetzt

(I) $0 \leq c(\Delta) < \varepsilon$, falls $\mu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$, (H3.),

(II) $|c(\Delta) - c_n(\Delta)| < \varepsilon$, für alle $n \geq N_0(\varepsilon)$, gleichmäßig in Δ, (H3).

Zur Erinnerung: Unsere Treppenfunktionen t_n sind finit, d.h. es existiert ein Kompaktum K_n mit $t_n(x) = 0$ auf $\mathfrak{X} \setminus K_n$.

H4. Es gibt eine Borelmenge B mit $0 < \mu(B) < \infty$, so daß $0 \leq c(\mathfrak{X} \setminus B) < \varepsilon$.

Beweis: Man nehme in der Relation (II) ein festes $n_0 \geq N_0(\varepsilon)$ und setze $B := K_{n_0}$, so daß $t_{n_0}(x) = 0$ auf $x \in \mathfrak{X} \setminus B$. Dann ist

$$c_{n_0}(\mathfrak{X} \setminus B) = \int\limits_{\mathfrak{X}\setminus B} |t_{n_0}(x)|\mu(dx) = 0$$

und wegen (II) also

$$|c(\mathfrak{X} \setminus B)| < \varepsilon \ .$$

H5. Aus der μ-Fastüberallkonvergenz der Folge $t_1, t_2, t_3, \ldots$ gegen Null folgt: Für jedes (feste) $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mu(M_{n,\varepsilon}) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \ ,$$

wobei

$$M_{n,\varepsilon} := \{x : |t_n(x)| \geq \varepsilon\} \ , \quad \varepsilon > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Bemerkung: Die in H5 ausgedrückte Eigenschaft werden wir später die μ-Maßkonvergenz der Folge $t_1, t_2, t_3, \ldots$ gegen Null nennen.

Beweis von H5.: Sei

$$R_{n,\varepsilon} := \bigcup_{k=n}^{\infty} M_{n,\varepsilon} \ ,$$

dann ist

$$R_{1,\varepsilon} \supseteq R_{2,\varepsilon} \supseteq R_{3,\varepsilon} \supseteq \ldots \ .$$

Ich setze

$$M := \bigcap_{n=1}^{\infty} R_{n,\varepsilon} \ .$$

Aus der abzählbaren Additivität des Maßes μ folgt dann

$$\mu(R_{n,\varepsilon}) \to \mu(M) \ , \quad \text{für} \quad n \to \infty \ .$$

Sei weiter $Q := \{x : t_n(x) \text{ nicht konvergent gegen Null}\}$, also Q die bewußte Ausnahmemenge. Dann ist nach Voraussetzung $\mu(Q) = 0$. Es ist aber

$$M \subseteq Q \ ,$$

denn aus $x \notin Q$ folgt ja $|t_n(x)| \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert $n = n(\varepsilon)$ mit $|t_k(x)| < \varepsilon$ für $k \geq n$, d.h. $x \notin R_{n,\varepsilon}$, also erst recht $x \notin M$. Hieraus folgt aber, wegen der Monotonie des Maßes

$$\mu(M) = 0$$

und

$$\mu(M_{n,\varepsilon}) \leq \mu(R_{n,\varepsilon}) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \ .$$

Zum Schluß kann man nun die gewonnenen Abschätzungen gemütlich zusammensetzen. Es ist ja $\int_{\mathfrak{X}} |t_n(x)| \mu(dx) = c(\mathfrak{X})$.

Zuerst beziehe ich mich auf H4: Ich nehme das B mit $0 < \mu(B) < \infty$ und das feste $n_0 \geq N_0(\varepsilon)$ bezüglich Eigenschaft (II). Außerdem nehme ich das $\delta(\varepsilon)$ bezüglich Eigenschaft (I). Dann kann ich gemäß H5 sagen: es existiert ein $n_1 > n_0$ und eine Borelmenge A mit $\mu(\mathfrak{X} \setminus A) < \delta(\varepsilon)$, so daß

$$|t_{n_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(B)} \ , \quad \text{für} \quad x \in A \ .$$

Dann wird

$$c(\mathfrak{X}) = c(\mathfrak{X} \setminus B) + c(B \cap A) + c(B \cap (\mathfrak{X} \setminus A)) \ .$$

Der erste Summand

$$c(\mathfrak{X} \setminus B) < \varepsilon, \quad \text{wegen H4} \ .$$

Der dritte Summand wird *so* behandelt: Es ist ja

$$\mu(B \cap (\mathfrak{X} \setminus A)) \leq \mu(\mathfrak{X} \setminus A) < \delta(\varepsilon) \ ,$$

also ist wegen Eigenschaft (I)

$$c(B \cap (\mathfrak{X} \setminus A)) \leq c(\mathfrak{X} \setminus A) < \varepsilon \ .$$

Den zweiten Summanden verarzten wir *so*: Es ist

$$c(B \cap A) = \lim_{n \to \infty} \int_{B \cap A} |t_n(x)| \mu(dx) \leq |c(A \cap B) - c_{n_1}(A \cap B)| + |c_{n_1}(A \cap B)| \ .$$

Für den ersten Summanden erhalten wir

$$|c(A\cap B) - c_{n_1}(A\cap B)| < \varepsilon \ , \quad \text{wegen Eigenschaft (II)} \ .$$

Schließlich wird

$$c_{n_1}(A\cap B)| = \int\limits_{A\cap B} |t_{n_1}(x)|\mu(dx) < \frac{\varepsilon}{\mu(B)} \cdot \mu(A\cap B) < \varepsilon \ .$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

4.3 Integrable Funktionen, Integral

Auf Grund des Lemmas 4.2.1 kann ich jetzt für „gewisse" meßbare Funktionen das Integral definieren. Im folgenden ist also immer $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, $\mu-$meßbar, d.h. es gibt eine Folge $t_1, t_2, t_3, \ldots$ finiter Treppenfunktionen mit

(4.3.4)
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x)(\mathrm{mod}\mu) \ .$$

Definition. 4.3.1 *Eine μ-meßbare Funktion f heißt integrabel := es existiert eine solche Folge $t_1, t_2, t_3, \ldots$ mit (1), so daß*

(4.3.5)
$$\int\limits_{\mathfrak{X}} |t_n(x) - t_m(x)|\mu(dx) = \|t_n - t_m\| \to 0 \ , \quad n, m \to \infty \ .$$

Die Folge t_n soll also eine Cauchyfolge bez. der Norm $\|\cdot\|$ sein.

In diesem Fall wird das Integral über f definiert durch

(4.3.6)
$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{X}} t_n(x)\mu(dx) \ .$$

Rechtfertigung 1: Der Limes 4.3.6 existiert, denn es ist

$$\Big|\int\limits_{\mathfrak{X}} t_n(x)\mu(dx) - \int\limits_{\mathfrak{X}} t_m(x)\mu(dx)\Big| \leq \int\limits_{\mathfrak{X}} |t_n(x) - t_m(x)|\mu(dx) = \|t_n - t_m\| \to 0 \ ,$$

für $n, m \to \infty$.

Rechtfertigung 2: Der Limes (4.3.6) ist unabhängig von der gewählten Folge t_n mit (4.3.4) und (4.3.5) . Denn sei $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} t'_n(x)$ modulo μ. Dann ist

(4.3.7)
$$0 = \lim_{n\to\infty} (t_n(x) - t'_n(x))(\mathrm{mod}\mu)$$

und

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathfrak{X}} |(t_n(x) - t'_n(x)) - (t_m(x) - t'_m(x))|\mu(dx) &= \int\limits_{\mathfrak{X}} |((t_n(x) - t_m)) - (t'_n(x) - t'_m(x))|\mu(dx) \\
&\leq \int\limits_{\mathfrak{X}} |t_n(x) - t_m(x)|\mu(dx) + \int\limits_{\mathfrak{X}} |t'_n(x) - t'_m(x)|\mu(dx) \ ,
\end{aligned}$$

d.h. die Differenzfunktion $t_n - t'_n$ hat auch die Eigenschaft (4.3.5). Außerdem gilt (4.3.7), so daß man auf die Differenzfunktion $t_n - t'_n$ das Lemma 4.2.1 anwenden kann. Danach ist

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} |t_n(x) - t'_n(x)|\mu(dx) \to 0 \ , \quad n \to \infty,$$

und also

$$\Big|\int\limits_{\mathfrak{X}} t_n(x)\mu(dx) - \int\limits_{\mathfrak{X}} t'_n(x)\mu(dx)\Big| \le \int\limits_{\mathfrak{X}} |t_n(x) - t'_n(x)|\mu(dx) \to 0 \ ,$$

d.h., es ergibt sich der gleiche Grenzwert.

Bemerkung: Eine gemäß Definition 4.3.1 zu einer integrablen Funktion f gehörende Folge finiter Treppenfunktionen heißt oft einfach eine *„zugehörige“* Folge.

Wir notieren zwei Folgerungen:

Folgerung 4.3.2 *Wenn $f(\cdot)$ integrabel ist, so ist auch $|f(\cdot)|$ integrabel und es gilt*

$$\Big|\int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx)\Big| \le \int\limits_{\mathfrak{X}} |f(x)|\mu(dx) \ .$$

Beweis: Wenn $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n(x)(\bmod \mu)$, so ist $|f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |t_n(x)|(\bmod \mu)$ und es ist
$\int\limits_{\mathfrak{X}} \Big||t_n(x)| - |t_m(x)|\Big|\mu(dx) \le \int\limits_{\mathfrak{X}} |t_n(x) - t_m(x)|\mu(dx)$. ■

Achtung: Wir können im Moment noch nicht beweisen, daß auch die Umkehrung gilt.

Folgerung 4.3.3 *Ist f integrabel und t_n eine „zugehörige“ Folge von Treppenfunktionen, so ist*

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} |f(x) - t_n(x)|\mu(dx) \to 0 \ , \quad n \to \infty \ .$$

Beweis: Sei m fest. Dann ist $|f(x) - t_m(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |t_n(x) - t_m(x)|$ (mod μ) und

$$\Big|\ |t_n(x) - t_m(x)| - |t_{n'}(x) - t_m(x)|\ \Big| \le \Big|(t_n(x) - t_m(x)) - (t_{n'}(x) - t_m(x))\Big| = \Big|t_n(x) - t_{n'}(x)\Big| \ ,$$

d.h. die Folge der finiten Treppenfunktionen $|t_n(x) - t_m(x)|$ (n ist der laufende Index) hat die bewußte Lemma-Eigenschaft (Cauchyfolge bez. $\|\cdot\|$), also gilt

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} |f(x) - t_m(x)|\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{X}} |t_n(x) - t_m(x)|\mu(dx)$$

und das gilt für jedes m. Und jetzt lasse ich $m \to \infty$ gehen. ■

Im Lemma 4.2.1, der Integraldefinition und den anschließenden Folgerungen wird deutlich ein gewisses „Zusammenspiel“ von μ-Fastüberallkonvergenz von Folgen f_n (μ-meßbarer Funktionen) und der Eigenschaft der Folge, eine Cauchyfolge bez. der Norm $\|\cdot\|$ zu sein: $\|f_n - f_m\| \to 0$ für $n, m \to \infty$. Auf den ersten Blick wirkt (bei der Integraldefinition) das Hinzuziehen der Norm $\|\cdot\|$ etwas künstlich. Deshalb ist eine genauere Analyse der beiden eben genannten Eigenschaften angezeigt.

Zum Beispiel betrachte man (retrospektiv) die Integraldefinition und die Folgerung

4.3.3: Wir wissen also bereits: Wenn $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n(x)$ (mod μ) und $\|t_n - t_m\| \to 0$, dann ist f integrabel und auch $f - t_n$ integrabel und $\|f - t_n\| \to 0$ für $n \to \infty$. Diese letztere Eigenschaft nennt man auch die Konvergenz der Folge t_n gegen f im μ-Mittel.

Also: Sobald ich weiß, daß eine Cauchyfolge t_n bez. $\|\cdot\|$ auch μ-fastüberall gegen f konvergiert, dann ist t_n auch bez. $\|\cdot\|$, also im μ-Mittel, gegen f konvergent.

Was ist aber, wenn ich *nur* eine Cauchyfolge t_n bez. $\|\cdot\|$ vor mir habe? Also $\|t_n - t_m\| \to 0$ weiß und sonst nichts.

Diese Frage ist nichts anderes als die Frage nach der *Charakterisierung der idealen Elemente*, die bei der Vervollständigung des metrischen Raumes $\mathcal{L}_0$ entstehen. Kann man diese „idealen Elemente", die ja nach dem Cantorschen Vervollständigungsverfahren existieren und die einfach „die Cauchyfolgen $\{t_n\}$ selbst" sind, in eindeutiger Weise durch Funktionen charakterisieren und, wenn ja, was haben diese Funktionen dann für Eigenschaften?

Die Antwort wird sein: Ja! Die „idealen Elemente" sind genau die „Klassen μ-äquivalenter integrabler Funktionen". Der Herleitung dieser Antwort wenden wir uns jetzt zu.

Dabei brauchen wir die o.g. Frage nicht nur für finite Treppenfunktionen zu stellen, sondern fragen ganz allgemein: Was ist los mit Cauchyfolge bez. $\|\cdot\|$ von Folgen integrabler Funktionen f_n, für die also $\|f_n - f_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty$, gilt.

Es ist ziemlich klar, daß wir dabei etwas ausholen müssen, denn wir müssen uns z.B. vergegenwärtigen, daß wir im Moment noch nicht einmal in der Lage sind, folgendes zu beweisen:

Sei $f(x) \geq 0 \pmod{\mu}$ und f integrabel und $\int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = 0$. Dann ist $f(x) = 0 \pmod{\mu}$.

Die umgekehrte Richtung ist sofort klar. Woran scheitert das im Moment?

f integrabel heißt ja: Es existiert eine Cauchyfolge im μ-Mittel von finiten Treppenfunktionen, $\|t_n - t_m\| \to 0$, und $f(x) = \lim\limits_{n\to 0} t_n(x) \pmod{\mu}$, also können wir o.B.d.A. annehmen, daß $t_n(x) \geq 0 \pmod{\mu}$. Nach Voraussetzung ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{X}} t_n(x)\mu(dx) = 0$, oder, anders geschrieben, $\lim\limits_{n\to\infty} \|t_n\| = 0$. Die Folge t_n konvergiert im μ-Mittel gegen 0. Aber:

Leider können wir nicht daraus schließen, daß t_n auch μ-fastüberall gegen Null konvergiert. Das gilt im allgemeinen auch gar nicht. Uns würde allerdings eine Teilfolge mit dieser Eigenschaft genügen. Das gilt zwar, bloß wir können das noch nicht beweisen.

Beachte: Man hat hier praktisch die umgekehrte Fragestellung wie im Lemma 4.2.1.

Wir notieren noch folgende einfache Tatsachen:

Lemma. 4.3.4 *Sind f, g integrabel und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha\, f + \beta\, g$ integrabel und $\int\limits_{\mathfrak{X}} (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\mu(dx) = \alpha \int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) + \beta \int\limits_{\mathfrak{X}} g(x)\mu(dx)$. Ist $f(x) \geq 0 \pmod{\mu}$, so ist $\int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) \geq 0$. Ist also $f(x) \geq g(x) \pmod{\mu}$, so ist $\int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) \geq \int\limits_{\mathfrak{X}} g(x)\mu(dx)$.*

Beweis: Wird dem Leser überlassen. ■

4.4 Maßkonvergenz, Fastüberallkonvergenz, Mittelkonvergenz

Wir führen jetzt noch eine neue Konvergenzart, die μ-Maßkonvergenz ein und untersuchen die gegenseitigen Beziehungen der drei Konvergenzarten.

$f_1, f_2, f_3, \ldots$ sei stets eine Folge μ-meßbarer Funktionen auf $\mathfrak{X}$, f eine μ-meßbare Funktion auf $\mathfrak{X}$.

Definition. 4.4.1 *Die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ heißt μ-maßkonvergent gegen f, $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f, f := f$ jedes $\varepsilon > 0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon) = 0$.*

Entsprechend definiert man Cauchyfolgen bez. der Maßkonvergenz.

Definition. 4.4.2 *Die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ heißt Cauchyfolge bez. der μ-Maßkonvergenz, wenn $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon) = 0$ gilt.*

Wir fügen gleich zwei einfache Tatsachen an:

Lemma. 4.4.3 *Wenn $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, so ist die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge bez. der Maßkonvergenz. Wenn außerdem $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} g$ gilt, so ist $f \equiv g \pmod \mu$, d.h. der Grenzwert bez. der Maßkonvergenz ist eindeutig mod μ, d.h. die Äquivalenzklasse ist eindeutig.*

Beweis: Wird dem Leser überlassen. ■

Wir starten nun mit

Theorem. 4.4.4 *Wenn die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ μ-fastüberall gegen f konvergiert, so ist sie auch μ-maßkonvergent gegen f.*

Beweis: Der Beweis ist eine einfache Übertragung der Argumente in (p. 39). Zu zeigen ist ja, daß für jedes feste $\varepsilon > 0$

$$\mu(M_{n,\varepsilon}) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

gilt, wobei

$$M_{n\varepsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \ , \quad \varepsilon > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gesetzt ist. Sei

$$R_{n,\varepsilon} := \bigcup_{k=n}^{\infty} M_{n,\varepsilon} \ ,$$

dann ist

$$R_{1,\varepsilon} \supseteq R_{2,\varepsilon} \supseteq R_{3,\varepsilon} \supseteq \ldots .$$

Wir setzen

$$M := \bigcap_{n=1}^{\infty} R_{n,\varepsilon} \ .$$

Dann folgt, weil μ abzählbar additiv ist,

$$\mu(R_{n,\varepsilon}) \to \mu(M) \ , \quad \text{für} \quad n \to \infty \ .$$

Sei weiter $Q \subset \mathfrak{X}$ die Menge derjenigen Punkte $x \in \mathfrak{X}$, für die $f_n(x)$ *nicht* gegen $f(x)$ konvergiert. Dann ist nach Voraussetzung $\mu(Q) = 0$. Es ist aber

$$M \subseteq Q \ ,$$

denn aus $x \notin Q$ folgt ja $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n = n(\varepsilon)$ mit $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $k \geq n$, d.h. $x \notin R_{n,\varepsilon}$, also erst recht $x \notin M$. Hieraus folgt aber, wegen der Monotonie des Maßes μ

$$\mu(M) = 0$$

und $\mu(M_{n,\varepsilon}) \leq \mu(R_{n,\varepsilon}) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$. ■

Wir nehmen jetzt die Mittelkonvergenz aufs Korn. Wir vergleichen noch einmal Theorem 4.4.4 und H5: In H5 hatten wir Folgen $t_n(x) \to 0$ fastüberall mit $\|t_n - t_m\| \to 0$ für $n, m \to \infty$. Es folgte $t_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} 0$. Theorem 4.4.4 macht noch einmal explizit deutlich, daß man, um diesen Schluß zu ziehen, die Cauchyfolgenbedingung gar nicht brauchte. Diese diente ja auch nur dazu, um anschließend $\|t_n\| \to 0$ zu beweisen.

Jetzt fragen wir: Welche Eigenschaften hat die Mittelkonvergenz. Zunächst einmal stellen wir einen Bezug zur Maßkonvergenz her:

Theorem. 4.4.5 *Sei $f_1, f_2, f_3, \dots$ eine Folge integrabler Funktionen, sei weiter die Funktion f integrabel und es gelte $f_n \underset{m}{\longrightarrow} f$ (Konvergenz im μ-Mittel), also*

$$\|f_n - f\| \to 0, \quad n \to \infty .$$

Dann gilt $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, d.h. die Folge f_n ist auch μ-maßkonvergent gegen f.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und

$$E_n := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} .$$

Dann ist

$$\int_{\mathfrak{X}} |f_n(x) - f(x)|\mu(dx) \geq \int_{E_n} |f_n(x) - f(x)|\mu(dx) \geq \varepsilon\, \mu(E_n) ,$$

hieraus folgt sofort $\mu(E_n) \to 0$ für $n \to \infty$. ∎

Wir sehen: Sowohl die Fastüberallkonvergenz als auch die Mittelkonvergenz implizieren die Maßkonvergenz.

Die Maßkonvergenz hat aber im Allgemeinen *nicht* die Fastüberallkonvergenz zur Folge, die ja für die „Interpretation" der idealen Grenzwerte (der Mittelkonvergenz) so wichtig wäre. Entscheidend ist

Theorem. 4.4.6 *Wenn $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge bez. der μ-Maßkonvergenz ist, dann gibt es eine Teilfolge, die eine Cauchyfolge bez. der μ-Fastüberallkonvergenz ist.*

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$ eine beliebige, aber zunächst feste natürliche Zahl. Nach Voraussetzung gibt es eine Zahl $N(k)$, so daß für alle $n, m \geq N(k)$ gilt

$$\mu(\{|x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \tfrac{1}{2^k}\}) < \tfrac{1}{2^k} .$$

Wir setzen jetzt

$$n_1 := N(1),\ n_2 := \max\{n_1 + 1, N(2)\},\ n_3 := \max\{n_2 + 1, N(3)\}, \dots .$$

Dadurch bekommen wir eine Folge $n_1, n_2, n_3, \dots$ mit

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots \quad \text{und} \quad n_j \to \infty \ \text{ für } \ j \to \infty .$$

Wir setzen weiter

$$\begin{aligned} E_k &:= x : |f_{n_k}(x) - f_{n_{n+k}}(x)| \geq \frac{1}{2^k} ; \\ A_k &:= \bigcup_{\rho=k}^{\infty} E_\rho \ , \quad M := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k . \end{aligned}$$

Es ist $N(k) \leq n_k < n_{k+1}$, also

$$\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$$

und

$$\mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{\rho=k}^{\infty} E_\rho\right) \leq \sum_{\rho=k}^{\infty} \mu(E_\rho) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots = \frac{1}{2^{k-1}} .$$

Es ist ferner $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, also $\mu(M) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$.

Nun sei $x \notin M$. Dann existiert ein A_k, so daß $x \notin A_k$, d.h. $x \notin E_k \cup E_{k+1} \cup E_{k+2} \cup \ldots$. Jetzt nehmen wir $k \leq i \leq j$ und erhalte

$$\left|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)\right| \leq \sum_{m=i}^{\infty}\left|f_{n_m}(x) - f_{n_{m+1}}(x)\right| < \frac{1}{2^{i-1}}$$

und in dieser Abschätzung „kommt j nicht mehr vor". D.h. für den Punkt x ist die Folge $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge. Das gilt aber für jeden Punkt $x \notin M$: Die Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ ist ja von Anfang an fest gewählt! Es ist aber $\mu(M) = 0$, d.h. die Folge $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3}, \ldots$ ist μ-fastüberall konvergent. ∎

Die etwas unschöne Tatsache, daß man nur eine Teilfolge mit der gewünschten Fastüberallkonvergenz erhält, läßt sich aber in vieler Hinsicht nachträglich wieder abmildern bzw. ganz aufheben. So erhalten wir z.B. als wichtige Ergänzung zu Theorem 4.4.6 folgende Aussage:

Theorem. 4.4.7 *Wenn $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge bez. der μ-Maßkonvergenz ist, dann gibt es eine μ-meßbare Funktion f, die der Grenzwert der Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bez. der μ-Maßkonvergenz ist, d.h. es gilt $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$ für $n \to \infty$.*

Achtung: Diese Aussage gilt wieder *für die ganze Folge*!

Beweis: Nach Theorem 4.4.6 existiert eine Teilfolge $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3} \ldots$, die eine Cauchyfolge bez. der μ-Fastüberallkonvergenz ist. Wir können dementsprechend definieren

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

und diese Definition ist möglich für alle x, für die der Limes existiert und das ist μ-fastüberall (wie auf der verbleibenden Menge vom μ-Maß 0 die Funktion f definiert wird, ist völlig egal, z.B. $f(x) = 0$. Jetzt nehmen wir folgende Menge

$$\{x : |f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} .$$

Die aufgeschriebene Inklusion ist sicher richtig, denn wegen

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$$

und $\varepsilon \leq |a - b|$ können nicht *beide* Terme auf der rechten Seite $< \frac{\varepsilon}{2}$ sein. Nun gilt aber

$$\mu(\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \to 0, \quad \text{für} \quad k \to \infty,$$

da nach Theorem 4.4.4 aus der μ-Fastüberallkonvergenz die μ-Maßkonvergenz folgt. Andererseits wird

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geq \varepsilon\})$$

beliebig klein, wenn nur beide Indizes, n und n_k, hinreichend groß gewählt werden. Damit wird $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\})$ beliebig klein für hinreichend hohes n d.h. $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ und das ist die μ-Maßkonvergenz $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$. ∎

4.5 Hauptsatz über die Cauchyfolgen bez. der μ-Mittelkonvergenz

Wir erwähnen zunächst noch eine kleine „Feinheit". Man kann nämlich die „Folgerung 4.3.3" (p. 42) noch etwas verschärfen. Dort hatte man eine integrable Funktion f und eine „zugehörige" Folge t_n finiter Treppenfunktionen, das bedeutete $t_n(x) \to f(x) \pmod{\mu}$, also μ-Fastüberallkonvergenz und $\|t_n - t_m\| \to 0$ für $n, m \to \infty$, also Cauchyfolgeneigenschaft im μ-Mittel.

Jetzt betrachten wir nur Cauchyfolgen $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ finiter Treppenfunktionen im μ-Mittel, die gegen f μ-maßkonvergent konvergieren, also $t_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$. Dann bleibt sozusagen alles beim alten, wir erhalten

Lemma. 4.5.1 *Sei $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge finiter Treppenfunktionen mit $\|t_n - t_m\| \to 0$ für $n, m \to \infty$, also eine Cauchyfolge im μ-Mittel und es sei $t_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$ (nach Theorem 4.4.7 ist dann f μ-meßbar). Dann ist f sogar integrabel und es gilt*

$$\|f - t_n\| = \int_{\mathfrak{X}} |f(x) - t_n(x)|\mu(dx) \to 0 \quad \textit{für} \quad n \to \infty \ .$$

Beweis: Wenn $t_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$ gilt, dann gibt es nach Theorem 4.4.6 eine Teilfolge t_{n_k}, die μ-fastüberall konvergiert (natürlich gegen f, denn der Grenzwert bez. Maßkonvergent ist ja mod μ eindeutig und aus der μ-Fastüberallkonvergenz folgt die μ-Maßkonvergenz), also wir haben $t_{n_k}(x) \to f(x)$ (mod μ). Dann ist aber laut Definition der Integrabilität das f integrabel (weil ja auch die Teilfolge t_{n_k} eine Cauchyfolge in der Mittelkonvergenz ist) und gemäß der Folgerung 4.3.3 (p. 42) gilt dann

$$\int_{\mathfrak{X}} |f(x) - t_{n_k}(x)|\mu(dx) \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty \ .$$

Dann ist aber

$$\|f - t_n\| \leq \|f - t_{n_k}\| + \|t_{n_k} - t_n\|$$

und wir haben $\|f - t_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k > N_1((\varepsilon)$ und $\|t_{n_k} - t_n\| < \varepsilon$ für $n_k, n > N_2(\varepsilon)$. ∎

Jetzt können wir einen langersehnten Satz beweisen, der gleichzeitig das o.g. Problem der Charakterisierung der idealen Elemente bei der Vervollständigung des Raumes $\mathcal{L}_0$ löst.

Theorem. 4.5.2 *Wenn die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ integrabler Funktionen eine Cauchyfolge im μ-Mittel ist, also $\|f_n - f_m\| \to 0$ für $n, m \to \infty$ gilt, dann gibt es eine integrable Funktion f, so daß*

$$\|f_n - f\| \to 0, \quad \textit{für} \quad n \to \infty$$

gilt und also auch

$$\int_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) \to \int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) \ , \quad n \to \infty.$$

Beweis: Wir haben die Cauchyfolgeneigenschaft $\|f_n - f_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty$. Da die f_n nach Voraussetzung alle integrabel sind, so gibt es (wegen Folgerung 4.3.3 auf p. 42) finite Treppenfunktionen t_n mit

$$\|f_n - t_n\| < \frac{1}{n} \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Weil die f_n eine Cauchyfolge bilden, so bilden auch die Treppenfunktionen t_n eine Cauchyfolge im Mittel, dann sind nach Theorem 4.4.5 die t_n auch eine Cauchyfolge bez. der μ-Maßkonvergenz und somit existiert nach Theorem 4.4.7 eine μ-meßbare Funktion f, die Grenzwert der Folge t_n ist bez. der μ-Maßkonvergenz. Dann folgt aber nach Lemma 4.5.1, daß f integrabel ist und daß $\|t_n - f\| \to 0, \quad n \to \infty$, gilt. Dann erhalten wir

$$0 \leq \left| \int_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) - \int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) \right| \leq \int_{\mathfrak{X}} |f_n(x) - f(x)|\mu(dx) = \|f_n - f\| \leq \|f_n - t_n\| + \|t_n - f\| \ ,$$

woraus die Behauptung folgt. ∎

4.6 Die Sätze von B. Levi, Lebesgue und Fatou. Folgerungen

Theorem. 4.6.1 *(B. Levi) $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sei eine Folge μ-meßbarer, monoton wachsender Funktionen, $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots$ für alle x. Sie sei μ-fastüberall konvergent gegen f : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (mod μ) (dann ist ja auch f μ-meßbar, außerdem hat man $f_n(x) \leq f(x)$(mod μ). Weiter seien alle f_n integrabel und es gebe eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) < C \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

die Integralwerte seien also nach oben beschränkt. Dann ist f integrabel und

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) = \sup_n \int\limits_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) \ .$$

Beweis: Wir zeigen sofort, daß die f_n eine Cauchyfolge in der Mittelkonvergenz sind. Sei z.B. $n > m$. Dann ist

$$0 \leq \int\limits_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) - \int\limits_{\mathfrak{X}} f_m(x)\mu(dx) = \int\limits_{\mathfrak{X}} (f_n(x) - f_m(x))\mu(dx) < \varepsilon$$

für $m > N(\varepsilon)$, weil ja die Integralwerte $\int\limits_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx)$ eine Cauchyfolge reeller Zahlen bilden. Dann erhalten wir sofort: f ist integrabel und für das Integral den o.g. Wert. ∎

Wir steuern jetzt das sog. *Lebesgue'sche Majorantenkriterium* an (Lebesgue dominated convergence theorem, LDCT). Vorher beweisen wir noch folgendes Hilfsresultat:

Lemma. 4.6.2 *Wenn eine Funktion f integrabel ist, so ist das „unbestimmte Integral" $\int\limits_{\Delta} f(x)\mu(dx)$, wo Δ eine beliebige Borelmenge ist, absolut stetig und das bedeutet: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß aus $\mu(\Delta) < \delta$ sofort*

$$\left|\int\limits_{\Delta} f(x)\mu(dx)\right| < \varepsilon$$

*folgt (*Achtung: Ganz egal, ob die Funktion f beschränkt ist oder nicht).

Beweis: Da f integrabel ist, so gibt es eine Cauchyfolge (im Mittel) finiter Treppenfunktionen t_n mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n(x)$ (mod μ) und

$$\|f - t_n\| = \int\limits_{\mathfrak{X}} |f(x) - t_n(x)|\mu(dx) \to 0 \ , \quad n \to \infty \ .$$

Dann ist

$$\left|\int\limits_{\Delta} f(x)\mu(dx)\right| \leq \left|\int\limits_{\Delta} t_n(x)\mu(dx)\right| + \underbrace{\left|\int\limits_{\Delta} t_n(x)\mu(dx) - \int\limits_{\Delta} f(x)\mu(dx)\right|}_{\leq \int\limits_{\mathfrak{X}} |t_n(x) - f(x)|\mu(dx) < \frac{\varepsilon}{2}} ,$$

falls $n > N(\varepsilon)$. So ein n halte ich jetzt fest, $n = n_0 > N(\varepsilon)$. Dann ist $t_{n_0}(x)$ eine finite Treppenfunktion und es gibt natürlich eine Konstante $c > 0$ mit $|t_n(x)| < c$ für alle x. Also ist

$$\left|\int\limits_{\Delta} t_{n_0}(x)\mu(dx)\right| \leq \int\limits_{\Delta} |t_{n_0}(x)|\mu(dx) \leq c \cdot \mu(\Delta) < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

falls nur $\mu(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2c}$. ∎

Jetzt beweisen wir das LDCT, allerdings nicht in der allgemeinsten Form (man kann die „μ-Fastüberallkonvergenz" im Theorem durch „μ-Maßkonvergenz" ersetzen).

Theorem. 4.6.3 *(Lebesgue) Sei $f_1, f_2, f_3, \ldots$ eine Folge integrabler Funktionen, die μ-fastüberall gegen eine Funktion f konvergieren:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ (\text{mod } \mu).$$

Weiter möge eine integrable Funktion g existieren, mit

$$|f_n(x)| \leq g(x) \ (mod\ \mu).$$

Dann ist f integrabel und die Folge $\{f_n\}$ ist μ-mittelkonvergent gegen f – und hieraus folgt als „Bonus", wie schon gehabt – $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx)$ oder so geschrieben: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) = \int\limits_{\mathfrak{X}} (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\mu(dx)$, d.h. unter den genannten Umständen sind Fastüberall–Limes und Integral vertauschbar.

Beweis: Wir wissen schon: Aus f_n integrabel folgt $|f_n(\cdot)|$ ist integrabel *und* wegen der Ungleichung $|f_n(x) \leq g(x)$ haben wir

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} |f_n(x)|\mu(dx) \leq \int\limits_{\mathfrak{X}} g(x)\mu(dx)$$

und natürlich auch

$$\int\limits_{\Delta} |f_n(x)|\mu(dx) \leq \int\limits_{\Delta} g(x)\mu(dx), \quad \Delta \text{ Borelmenge.}$$

Wir beweisen nun zuerst mal folgendes: Zu jedem $\delta > 0$ existiert ein Kompaktum K_δ, so daß mit $F_\delta := \mathfrak{X} \setminus K_\delta$

$$\int\limits_{F_\delta} g(x)\mu(dx) < \frac{\delta}{2} \tag{4.6.8}$$

folgt. Wir nehmen eine aufsteigende Folge $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ von Kompakta mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \mathfrak{X}$. Dann ist

$$0 \leq \chi_{K_1}(x)g(x) \leq \chi_{K_2}(x)g(x) \leq \chi_{K_3}(x)g(x) \leq \ldots \leq g(x)$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{K_n}(x) = g(x)$. Außerdem ist

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} \chi_{K_n}(x)g(x)\mu(dx) \leq \int\limits_{\mathfrak{X}} g(x)\mu(dx) < \infty.$$

Also können wir den Satz von B.L. Levi anwenden und erhalten

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} g(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{K_n} g(x)\mu(dx).$$

Aus (4.6.8) folgt unmittelbar

$$\int\limits_{F_\delta} |f_n(x)|\mu(dx) < \tfrac{\delta}{2} \quad \text{für alle} \quad n.$$

Jetzt bilden wir

$$\int\limits_{F_\delta} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) \leq \int\limits_{F_\delta} |f_m(x)|\mu(dx) + \int\limits_{F_\delta} |f_n(x)|\mu(dx) < \delta. \tag{4.6.9}$$

Weiter wählen wir $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest und setze

$$G_{mn} := \{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Beachte: Da $\{f_m\}$ μ-fastüberallkonvergent, so ist $\{f_m\}$ auch μ-maßkonvergent, d.h. die f_m bilden eine Cauchyfolge bez. der Maßkonvergenz und deshalb ist

$$\mu(G_{mn}) \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty.$$

Wir bilden jetzt

$$\int\limits_{K_\delta} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) = \int\limits_{K_\delta \setminus G_{mn}} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) + \int\limits_{G_{mn}} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx). \tag{4.6.10}$$

Für den zweiten Summanden haben wir

$$\int_{G_{mn}} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) \leq \int_{G_{mn}} |f_m(x)|\mu(dx) + \int_{G_{mn}} |f_n(x)|\mu(dx) \leq 2 \int_{G_{mn}} g(x)\mu(dx)$$

Mit dem vorhergehenden Lemma erhalten wir also

$$\limsup_{m,n} \int_{G_{mn}} g(x)\mu(dx) = 0,$$

und es erbibt sich aus (4.6.10)

$$\limsup_{m,n} \int_{K_\delta} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) = \limsup_{m,n} \int_{K_\delta \setminus G_{mn}} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) \leq \varepsilon \cdot \mu(K_\delta).$$

Weil aber $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_{K_\delta} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) = 0.$$

Und jetzt bilden wir

$$\int_{\mathfrak{X}} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) = \int_{F_\delta} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) + \int_{K_\delta} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx)\ ,$$

also ist

$$\limsup_{m,n} \int_{\mathfrak{X}} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) \leq \limsup_{m,n} \int_{K_\delta} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx)\ .$$

Jetzt benutzen wir (4.6.9) und erhalten

$$\limsup_{m,n} \int_{\mathfrak{X}} |f_m(x) - f_n(x)|\mu(dx) < \delta\ ,$$

aber auch $\delta > 0$ war beliebig und deshalb ergibt sich

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} |f_n(x) - f_m(x)|\mu(dx) = 0\ .$$

Die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ist also μ-mittelkonvergent. Nach Voraussetzung ist $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (mod μ), also ist f integrabel und $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$, also auch $\int_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) \to \int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx)$. ■

Bemerkung: Man vergleiche das eben bewiesene Theorem mit dem Beispiel auf p. 37. Dieses Beispiel zeigt, daß die Voraussetzung der Existenz einer integrablen Majorante für die Vertauschbarkeit von Limes und Integral unverzichtbar ist, denn in diesem Beispiel gibt es *keine* integrable Majorante und Limes und Integral sind *nicht* vertauschbar.

Es folgen einige unmittelbare Konsequenzen aus dem LDCT. Zum Beispiel können wir jetzt einsehen, daß f meßbar und $|f(\cdot)|$ integrabel impliziert, daß auch f integrabel ist. Auch können wir jetzt beweisen, daß aus $f(x) \geq 0$ (mod μ) und $\int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = 0$ folgt, daß $f(x) = 0$ (mod μ) gilt (vergleiche p. 43).

Lemma. 4.6.4 *Sei f integrabel und $f(x) \geq 0$ (mod μ) und $\int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = 0$. Dann ist $f(x) = 0$ (mod μ).*

Beweis: f integrabel bedeutet: Es gibt eine Folge finiter Treppenfunktionen t_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(x) = f(x)$ (mod μ) und die t_n bilden eine Cauchyfolge im μ-Mittel. O.B.d.A. kann $t_n(x) \geq 0$ angenommen werden (sonst ersetze man $t_n(x)$ durch $|t_n(x)|$). Nach Voraussetzung gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} t_n(x)\mu(dx) = 0$ oder, anders geschrieben, $\lim\limits_{n\to\infty} \|t_n(x)\| = 0$. Dann folgt aber sofort $t_n \Rightarrow 0$ und es existiert eine Teilfolge t_{n_k}, die μ-fastüberall gegen 0 konvergiert, $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k}(x) = 0$ (mod μ). Hieraus folgt sofort $f(x) = 0$ (mod μ). ■

Lemma. 4.6.5 *Wenn f meßbar und g integrabel und $|f(x)| \leq |g(x)|$, so ist f integrabel.*

Beweis: Setze $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, wobei $f_+(x) := \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) := \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) = \max\{-f(x), 0\}$. Dann sind f_+ und f_- meßbar und $f_+(x) \geq 0$, $f_-(x) \geq 0$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $f(x) \geq 0$ und $f(x) \leq |g(x)|$. Dann gibt es eine Folge finiter Treppenfunktionen t_n mit $t_n(x) \geq 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} t_n(x) = f(x) \pmod{\mu} . \tag{4.6.11}$$

Die Folge t_n kann sogar monoton wachsend gewählt werden. Wir geben einmal eine solche Folge explizit an: Sei erst einmal

$$t_n(x) := \begin{cases} \frac{j-1}{2^n} & , \text{ falls } \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n} , \quad j = 1, 2, \ldots, 2^n \cdot n , \\ n & , \text{ falls } f(x) \geq n \end{cases}$$

Die t_n sind Treppenfunktionen und auch monoton wachsend.

(I) Sei $f(x) < \infty$. Dann ist für ein gewisses n auf jedem Fall $f(x) < n$, d.h. der zweite Fall bei der Definition von $t_n(x)$ kann nicht mehr eintreten, also gilt der erste Fall und es ergibt sich

$$0 \leq f(x) - t_n(x) = f(x) - \frac{j-1}{2^n} \leq \frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} .$$

(II) Ist aber $f(x) = \infty$, so ist $t_n(x) = n$ für alle n. Die $t_n(x)$ erfüllen also auch dann $\lim_{n\to\infty} t_n(x) = f(x)$.

Die Treppenfunktionen t_n können nachträglich finit gemacht werden, indem man von t_n zu $\chi_{(-n,n)} t_n$ übergeht. Wir haben also

$$t_1(x) \leq t_2(x) \leq t_3(x) \leq \ldots$$

und wegen (4.6.8) auch

$$t_n(x) \leq |g(x)| .$$

Die t_n sind integrabel und besitzen eine integrable Majorante, nämlich $|g(\cdot)|$. Also können wir das LDCT anwenden und erhalten: f ist integrabel. ■

Lemma. 4.6.6 *Ist f meßbar und $|f(\cdot)|$ integrabel, so ist auch f integrabel.*

Beweis: Setze im vorigen Lemma $g := |f(\cdot)|$. ■

Zusammen mit der Folgerung 4.3.2 (p. 42) erhalten wir also

Folgerung 4.6.7 *Eine meßbare Funktion f ist integrabel genau dann wenn, wenn ihr Absolutbetrag $|f(\cdot)|$ ist integrabel ist.*

Theorem. 4.6.8 *(Fatou) $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sei eine Folge integrabler Funktionen, $f_n(x) \geq 0$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ und*

$$\liminf_n \int_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) < \infty.$$

Dann ist

$$f(x) := \liminf_n f_n(x)$$

integrabel und

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) \leq \liminf_n \int_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx).$$

Beweis: Setze

$$g_n(x) := \inf\{f_j(x) : n \leq j\}.$$

Dann ist

$$g_n(x) \leq f_n(x)\ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und die g_n sind monoton wachsend,

$$g_1(x) \leq g_2(x) \leq g_3(x) \leq \ldots .$$

Demnach ist

$$\int_{\mathfrak{X}} g_n(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx),$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} g_n(x)\mu(dx) \leq \liminf_n \int_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx) < \infty,$$

aber andererseits ist

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf_n f_n(x) = f(x),$$

also folgt mit dem Satz von B. Levi, daß f integrabel ist und

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} g_n(x)\mu(dx) \leq \liminf_n \int_{\mathfrak{X}} f_n(x)\mu(dx)$$

gilt. ∎

Bemerkung: zur „Einbeziehung“ von ∞. Eine μ-meßbare Funktion f ist stets *„fastüberall endlich“*, denn, abgesehen von einer Ausnahmemenge A mit $\mu(A) = 0$ gilt ja $f(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x)$, $x \in \mathfrak{X} \setminus A$. Sei $f(\cdot)$ meßbar und $f(x) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathfrak{X}$ ein Kompaktum. Setze

$$f_{N,K}(x) := \begin{cases} f(x) & , \text{ falls } x \in K \text{ und } f(x) \leq N \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f_{N,K}$ integrabel, weil $N \cdot \chi_K$ integrabel ist und $f_{N,K}(x) \leq N \cdot_K (x)$ gilt. Das Integral $\int_{\mathfrak{X}} f_{N,K}(x)\mu(dx)$ ist monoton wachsend für $N_1 \subset N_2$ und $K_1 \subset K_2$, also gibt es genau zwei Fälle: Entweder

$$\sup_{N,K} \int_{\mathfrak{X}} f_{N,K}(x)\mu(dx) < \infty \quad \text{oder} \quad \int_{\mathfrak{X}} f_{N,K}(x)\mu(dx) \quad \text{ist unbeschränkt.}$$

Im ersten Fall erhalten wir mit B. Levi: f ist integrabel und

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = \sup_{N,K} \int_{\mathfrak{X}} f_{N,K}(x)\mu(x).$$

Im zweiten Fall sagt man: Das Integral der nichtnegativen meßbaren Funktion f ist ∞, $\int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = \infty$.

Da eine meßbare Funktion f integrabel ist genau dann wenn $|f(\cdot)|$ integrabel ist die Integrabilität von f äquivalent zu der Bedingung

$$\int_{\mathfrak{X}} |f(x)|\mu(dx) < \infty.$$

Würde man, z.B. für nichtnegative Funktionen $f(x) \geq 0$, für die Definition der μ-Meßbarkeit mittels finiter Treppenfunktionen zulassen, daß für $t_n(x) \to \infty$ der Punkt x ein „Konvergenzpunkt“ ist, so entstehen Funktionen $f(x) := \lim_{n\to\infty} t_n(x)$, die auch auf Mengen positiven Maßes ∞ sein können, z.B.

wäre für die Folge $t_n(x) := n \cdot \chi_{(0,1)}(x) + \frac{1}{n}\chi_{\mathbb{R}\setminus(0,1)}(x)$ die Grenzfunktion $f(x) = \begin{cases} \infty & , \quad 0 < x < 1, \\ 0 & , \quad \text{sonst} . \end{cases}$

Ist jedoch eine solche Funktion integrabel, so folgt sofort: f ist fastüberall endlich, denn wenn es ein A mit $\mu(A) > 0$ gibt und $f(x) > n$ für $x \in A$ und jedes n gilt, so folgt

$$\infty > \int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) \geq \int_A f(x)\mu(dx) > n \int_A \mu(dx) = n\mu(A) ,$$

ein Widerspruch.

4.7 Die Räume $L^1(\mathfrak{X},\mu)$ und $L^\infty(\mathfrak{X},\mu)$

Wir knüpfen an den linearen normierten Raum $\mathcal{L}_0$ der finiten Treppenfunktionen mit der Norm $\|t\| := \int_{\mathfrak{X}} |t(x)|\mu(dx)$ an sowie an das Problem der Charakterisierung der durch die Vervollständigung bezüglich der Metrik dieses Raumes entstehenden idealen Elemente und an das Theorem von Abschnitt 4.5 (p. 47). Danach gibt es zu einer Cauchyfolge t_n genau eine Äquivalenzklasse einer integrablen Funktion f mit $\|t_n - f\| \to 0$ und es ist dann $\|f\| = \int_{\mathfrak{X}} |f(x)|\mu(dx)$. Das bedeutet:

$\mathrm{clo}_{\|\cdot\|}\mathcal{L}_0$ ist der Raum der (Äquivalenzklassen) integrabler Funktionen f, für die die Norm durch

$$\|f\| := \int_{\mathfrak{X}} |f(x)|\mu(dx)$$

gegeben ist. Die bloße Existenz der vollständigen Erweiterung des metrischen Raumes $\mathcal{L}_0$ ist bereits durch den Cantorschen Vervollständigungssatz gegeben. Neu ist, daß die Elemente dieses Raumes jetzt genau identifiziert sind.

$\mathrm{clo}_{\|\cdot\|}\mathcal{L}_0$ ist also ein vollständiger linearer normierter Raum. Solche Räume heißen Banachräume, also $\mathrm{clo}_{\|\cdot\|}\mathcal{L}_0$ ist ein *Banachraum*, er wird mit $L^1(\mathfrak{X},\mu)$ bezeichnet.

M.a.W. $L^1(\mathfrak{X},\mu)$ ist der Raum aller (Äquivalenzklassen) μ-meßbarer Funktionen f, für die

$$\int_{\mathfrak{X}} |f(x)|\mu(dx) < \infty$$

ist.

Beispiele:

(I) Sei $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, μ das Lebesgue-Maß $|(a,b)| := b - a$. Dann besteht $L^1(\mathbb{R}, |\cdot|)$ aus allen (Äquivalenzklassen) Lebesgue-meßbarer Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, für die

$$\|f\| := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$$

gilt.

(II) Sei $\mathfrak{X} := \mathbb{Z}$ (mit der „üblichen“ Metrik), also ein „diskreter“ Raum (alle Mengen sind offen). $\mathbb{Z}$ ist lokalkompakt, die kompakten Mengen sind genau die endlichen Mengen. Das Maß μ sei „die Summe aller Dirac-Maße“, d.h.

$$\mu(\{n\}) := 1, \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z} ,$$

jeder Punkt erhält das Maß (das Gewicht) 1. Dann besteht $L^1(\mathbb{Z},\mu)$ aus allen Folgen $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ reeller Zahlen $f(n) \in \mathbb{R}$, so daß

$$\int_{\mathbb{Z}} |f(n)|\mu(dn) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| < \infty .$$

Das ist der Raum der „summierbaren" Folgen und er wird in der Regel mit $\ell^1(\mathbb{Z})$ bezeichnet. Er ist ein Beispiel eines *Folgenraumes.*

(III) Sei $\mathfrak{X} := R_+ = (0,\infty)$, μ das Maß $\mu((a,b)) := \int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \log\frac{b}{a}$, $0 < a < b$. Dann besteht $L^1(\mathbb{R}_+, \frac{dx}{x})$ aus allen (Äquivalenzklassen) μ-meßbarer Funktionen $f : R_+ \mapsto R$ mit

$$\int\limits_0^\infty |f(x)|\frac{dx}{x} < \infty \ .$$

Zu diesem Raum gehört z.B. die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & , \quad 1 \le x < \infty \end{cases}$, während die Funktion $g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad 0 < x < \infty \\ 0 & , \quad -\infty < x \le 0 \end{cases}$ *nicht* zu $L^1(\mathbb{R}, |\cdot|)$ gehört.

Gewisse Unbequemlichkeiten entstehen aus der Tatsache, daß man es – streng genommen – nicht mit Einzelfunktionen, sondern mit Klassen äquivalenter Funktionen $f_1 \equiv f_2 \pmod{\mu}$ zu tun hat.

Zum Beispiel hat für eine Einzelfunktion der Begriff „f ist beschränkt" Sinn und Bedeutung, nämlich

$$|f(x)| < C \text{ für ein } C > 0, \text{ für alle } x \in \mathfrak{X}; \text{ oder } \sup_{x\in\mathfrak{X}} |f(x)| < \infty \ .$$

Für eine Klasse $\{f\}$ hat dieser Begriff keinen Sinn, denn eine Äquivalenzklasse enthält gleichzeitig beschränkte und unbeschränkte Funktionen (wenn es eine beschränkte enthält). Sei z.B. $f(\cdot)$ beschränkt, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine Folge von Punkten, $A := \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, mit $\mu(A) = 0$. Setze

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \notin A \\ n & , \quad x = x_n \end{cases} \ .$$

Dann ist $g \equiv f \pmod{\mu}$, aber g unbeschränkt.
Deshalb ändert man den Beschränktheitsbegriff folgendermaßen ab: Sei f μ-meßbar und $\{f\}$ seine Äquivalenzklasse.

Definition. 4.7.1 *f heißt wesentlich beschränkt, wenn*

$$|f| := \inf_{g\in\{f\}} \sup_{x\in\mathfrak{X}} |g(x)| < \infty$$

gilt.

Die Zahl $|f|$ heißt das *wesentliche Supremum* von f. Die Zahl $|f|$ kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

Lemma. $|f| = \inf\limits_{\substack{A \\ \mu(A)=0}} \sup\limits_{\mathfrak{X}\setminus A} |f(x)| = \inf\limits_{\mu(\{x:|f(x)|>c\})=0} c$.

Beweis: Wird dem Leser überlassen. ■

Wenn $f \equiv g \pmod{\mu}$, so ist $|f| = |g|$. Wenn $f \in \{g\}$ und f ist beschränkt, so ist $|f| \le \sup\limits_{x\in\mathfrak{X}} |f(x)|$.

Auch die Bezeichnung $|f| = \operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in\mathfrak{X}} |f(x)|$ ist üblich.

Lemma. 4.7.2
Die Gesamtheit aller (Äquivalenzklassen) wesentlich beschränkter μ-meßbarer Funktionen $f : \mathfrak{X} \mapsto \mathbb{R}$ ist bezüglich der Norm $|f| := \operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in\mathfrak{X}} |f(x)|$ ein Banachraum:

Beweis: für den Leser. ■

Dieser Banachraum wird mit $L^\infty(\mathfrak{X},\mu)$ bezeichnet.

Ist z.B. $\mathfrak{X}$ kompakt und bezeichnet $C(\mathfrak{X})$ die Gesamtheit der stetigen Funktionen $f:\mathfrak{X}\mapsto\mathbb{R}$, so hat man die Inklusionskette

$$C(\mathfrak{X})\subset L^\infty(\mathfrak{X},\mu)\subset L^1(\mathfrak{X},\mu)$$

für jedes Borel-Maß μ (der Leser verifiziere es).

Lemma. 4.7.3 *Wenn $f:\mathfrak{X}\mapsto\mathbb{R}$ integrabel und g wesentlich beschränkt, so ist $f\cdot g$ integrabel.*

Beweis: g wesentlich beschränkt bedeutet ja: Es gibt eine Konstante $c>0$ und $|g(x)|\le c \pmod{\mu}$. Dann ist

$$|g(x)f(x)|\le c|f(x)| \pmod{\mu},$$

und die Funktion $c|f(\cdot)|$ ist integrabel, also ist auch $|g(\cdot)f(\cdot)|$ und damit $g\,f$ integrabel. ■

Lemma. 4.7.4 *Wenn f wesentlich beschränkt ist und E ist eine meßbare Menge mit $\mu(E)<\infty$, so ist f auf E integrabel, d.h. $\chi_E(\cdot)f(\cdot)$ ist integrabel.*

Beweis: χ_E ist integrabel. Dann ist $f(\cdot)\chi_E(\cdot)$ integrabel nach dem vorhergehenden Lemma. ■

Beispiel: Sei $\mathfrak{X}:=\mathbb{Z}$, μ wie oben (p. 53). Dann besteht $L^\infty(\mathfrak{X},\mu)$ aus der Gesamtheit aller beschränkten Folgen $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|<\infty$. Dieser Raum wird meist mit $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ bezeichnet.

Kapitel 5

Reellwertige Borel–Maße, Theorem von Radon–Nikodym

Sei $\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mu$ wie üblich. Sei f μ-meßbar und $f(x) \geq 0$ (mod μ). f heißt *lokal integrabel*, wenn

$$\int_K f(x)\mu(dx) < \infty \quad \text{für jedes Kompaktum} \quad K \subset \mathfrak{X} \ .$$

Für eine lokal integrable nichtnegative Funktion f betrachten wir

$$\nu(\Delta) := \int_\Delta f(x)\mu(dx) \ . \tag{5.1}$$

Dann ist ν ein Borel-Maß auf $\mathfrak{X}$, denn es ist $\nu(B) \geq 0$ für alle $B \in \mathcal{B}$, ν ist abzählbar additiv (ergibt sich aus der endlichen Additivität und dem Satz von B. Levi) und $\nu(K) < \infty$ für jedes Kompaktum K.

ν hat noch eine weitere Eigenschaft, nämlich:

Wenn $\nu(\Delta) = 0$, so ist auch $\nu(\Delta) = 0$ (benutze das Lemma auf p. 48 und den Satz von B. Levi).

Diese Eigenschaft heißt: ν ist *absolutstetig bez.* μ und man schreibt $\nu \ll \mu$.

Dann taucht natürlich folgendes Problem auf: Wenn nun ν absolutstetig ist bez. ν, $\nu \ll \mu$, gibt es dann eine nichtnegative lokal integrable Funktion f, so daß (5.1) gilt.

Die Antwort lautet „ja“ und das ist das Radon–Nikodym–Theorem.

Der Beweis erfordert einige Vorbereitungen, z.B. die Betrachtung von sog. *„reellwertigen Borel–Maßen“*, ihrer Hahnschen und Jordanschen Zerlegung.

Auf die Betrachtung von reellwertigen Borel–Maßen wird man geführt, wenn man (beliebige) endliche Linearkombinationen von Borel–Maßen betrachtet: μ_1, μ_2 seien Borel–Maße und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (nicht mehr notwendig positiv). Setzt man

$$\nu(\Delta) := \alpha_1\mu_1(\Delta) + \alpha_2\mu_2(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{B} \ ,$$

z.B. $\nu(\Delta) = \mu_1(\Delta) - \mu_2(\Delta)$ für $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$, so erhält man eine Funktion auf (einem Teil von) $\mathcal{B}$. Auf jeden Fall ist $\nu(\Delta) \in \mathbb{R}$ endlich für alle $\Delta \in \mathcal{B}$, die in einem Kompaktum K liegen und innerhalb eines (beliebigen, aber festen) Kompaktums ist ν abzählbar additiv. Außerdem gibt es zu jedem Kompaktum K eine Zahl $C_K > 0$, so daß $|\nu(\Delta)| < C_K$ gilt für alle $\Delta \subseteq K$.

Bevor wir (mittels diesen Eigenschaften) reellwertige Borel–Maße definieren, erwähnen wir noch das

Lemma. 5.1 *Wenn f integrabel ist und $\int_\Delta f(x)\mu(dx) = 0$ für alle Borelmengen $\Delta \in \mathcal{B}$, dann ist $f(x) = 0$ (mod μ).*

Beweis: Wir erinnern zunächst einmal daran, daß für eine feste Borelmenge $\Delta_0 \in \mathcal{B}$ gilt: Ist $f(x) \geq 0$ (mod μ) für $x \in \Delta_0$ und $\int\limits_{\Delta_0} f(x)\mu(dx) = 0$, dann ist $f(x) = 0$ (mod μ) für $x \in \Delta_0$. Wir können uns davon auch auf folgende Art überzeugen: Sei

$$A := \{x \in \Delta_0 : f(x) > 0\}, \quad A_n := \{x \in \Delta_0 : f(x) > \frac{1}{n}\} .$$

Dann ist ja $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, weil: wenn $x \in A$, also $f(x) > 0$, so gibt es ein n mit $f(x) > \frac{1}{n}$, also $x \in A_n$. Dann ist $\int\limits_{\Delta_0} = \int\limits_{A} + \int\limits_{\Delta_0 \setminus A} = \int\limits_{A} = 0$. Wäre nun $\mu(A) > 0$, so müßte es ein n geben mit $\mu(A_n) > 0$ und dann wäre

$$\begin{aligned}
\int\limits_{A} f(x)\mu(dx) &= \int\limits_{A \setminus A_n} f(x)\mu(dx) + \int\limits_{A_n} f(x)\mu(dx) \geq \int\limits_{A_n} f(x)\mu(dx) \\
&\geq \frac{1}{n} \int\limits_{A_n} \mu(dx) = \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0 ,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Der Beweis des Lemmas ergibt sich nun so: Sei $\Delta_+ := \{x \in \mathfrak{X} : f(x) \geq 0\}$, $\Delta_- := \{x \in \mathfrak{X} : f(x) \leq 0\}$, Δ_+ und Δ_- sind im allgemeinen nicht disjunkt.
Nach Voraussetzung ist speziell $\int\limits_{\Delta_+} f(x)\mu(dx) = 0$, aber auf Δ_+ ist $f(x) \geq 0$, also folgt $f(x) = 0$ (mod μ) auf Δ_+ und ganz analog folgt $f(x) = 0$ (mod μ) auf Δ_-, also insgesamt $f(x) = 0$ (mod μ). ∎

5.1 Reellwertige Borel–Maße, Hahnsche Zerlegung

Definition. 5.1.1 *$\nu(\cdot)$ heißt reellwertiges Borel-Maß auf $\mathfrak{X}$, wenn $\nu(\cdot)$ definiert ist auf allen Borelmengen $B \in \mathcal{B}$, die in einem gewissen (von B abhängigen) Kompaktum K_B liegen, $B \subset K_B$ und $\nu(B) \in \mathbb{R}$; innerhalb jedes festen Kompaktums K ist ν abzählbar additiv; zu jedem Kompaktum $K \in \mathfrak{K}$ existiert eine Konstante C_K mit $|\nu(B)| < C_K$ für alle $B \subseteq K$, $B \in \mathcal{B}$.*

Damit haben wir in der Definition die oben für beliebige endliche Linearkombinationen von (positiven) Borel–Maßen abgeleiteten Eigenschaften als „konstitutiv“ für den Begriff „reellwertiges Borel-Maß“ genommen.

Die Einschränkung auf Borelmengen, die in Kompakta enthalten sind, haben wir vorgenommen, um sinnlose Ausdrücke $\infty - \infty$ zu vermeiden, die z.B. entstehen würden, wenn man bei $\nu(B) := \mu_1(B) - \mu_2(B)$ eine Borelmenge $B \in \mathcal{B}$ als Argument einsetzen würde, für die sowohl $\mu_1(B) = \infty$ als auch $\mu_2(B) = \infty$ gilt.

Definition. 5.1.2 *Sei ν ein reellwertiges Borel-Maß. Eine Borelmenge $B \in \mathcal{B}$ heißt negativ, wenn für alle Borelmengen Δ (für die wir ν definiert haben, die also in einem großen, von Δ abhängigen Kompaktum K_Δ liegen) $\nu(\Delta \cap B) \leq 0$ gilt.*

Insbesondere ist also für alle Kompakta $K \subseteq B$ $\nu(K) \leq 0$. Ganz entsprechend definiert man die *Positivität* einer Borelmenge B. Es muß dann $\nu(\Delta \cap B) \geq 0$ sein.

Theorem. 5.1.3 *(Hahnsche Zerlegung). Sei ν ein reellwertiges Borel-Maß. Dann existieren zwei disjunkte Borelmengen A_+ und A_-, $A_+ \cap A_- = \emptyset$ mit $A_+ \cup A_- = \mathfrak{X}$, so daß A_+ positiv und A_- negativ für ν ist.*

Beweis: Wir halten erst einmal fest:

1. Wenn B negativ, so ist auch jede Borelmenge $B' \subset B$ negativ, denn mit $\Delta \subset K$ ist auch $\Delta' := \Delta \cap B' \subset K$ und

$$\nu(\Delta \cap B') = \nu(\Delta \cap B' \cap B) = \nu(\Delta' \cap B) \leq 0 \ ,$$

insbesondere ist mit B_1, B_2 negativ auch $B_1 \setminus B_2$ negativ.

2. Wenn die Borelmengen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ paarweise disjunkt und negativ sind, so ist auch $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ negativ.

Aus 1. und 2. folgt (wie üblich): Jede abzählbare Vereinigung negativer Mengen ist negativ.

Die Konstruktion wird zunächst für ein fixiertes (aber beliebiges) Kompaktum K vorgenommen. Alle im folgenden auftretenden Borelmengen B seien in K enthalten, $B \subseteq K$.

Wir definieren jetzt folgende Zahl β:

$$\beta := \inf_{\substack{B \ negativ \\ B \subseteq K}} \nu(B)$$

Aufgrund der Definition von ν ist β eine endliche Zahl $-\infty < \beta < \infty$. Sei nun $B_1, B_2, B_3, \ldots$ eine Folge negativer Borelmengen mit

$$\beta = \lim_{n \to \infty} \nu(B_n) \ .$$

Wir setzen

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \ ,$$

dann ist B eine negative Borelmenge und $\nu(B) = \beta$ ist minimal. Wir setzen jetzt $A := K \setminus B$ und behaupten: A ist positiv.

Angenommen, es gebe (im Widerspruch zu unserer Behauptung) eine Borelmenge $E_0 \subseteq A$ mit $\nu(E_0) < 0$. Auf keinen Fall kann E_0 negativ sein: denn dann wäre nämlich $B \cup E_0$ negativ und

$$\nu(B \cup E_0) < \nu(B),$$

weil ja ν additiv und $B \cap E_0 = \emptyset$ ist; das ist aber unmöglich, weil $\nu(B)$ minimal ist.

Sei nun k_1 die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft: Es existiert eine Borelmenge $E_1 \subset E_0$ mit $\nu(E_1) \geq \frac{1}{k_1}$. Dann haben wir

$$\nu(E_0 \setminus E_1) = \nu(E_0) - \nu(E_1) \leq \nu(E_0) - \frac{1}{k_1} < 0 \ ,$$

d.h. aber: Dieselbe Prozedur, die wir auf E_0 angewandt hatten, läßt sich jetzt auf $E_0 \setminus E_1$ anwenden, also es existiert $E_2 \subset E_0 \setminus E_1$ mit $\nu(E_2) \geq \frac{1}{k_1}$, wobei k_2 die kleinste solche natürliche Zahl ist. Dann ist

$$\nu((E_0 \setminus E_1) \setminus E_2) = \nu(E_0 \setminus E_1) - \nu(E_2) \leq \nu(E_0 \setminus E_1) - \frac{1}{k_2} < 0$$

und man kann fortsetzen:
Es existiert $E_3 \subset (E_0 \setminus E_1) \setminus E_2$ mit $\nu(E_3) \geq \frac{1}{k_3}$, usw.
also: Wir erhalten ein disjunktes System $E_1, E_2, E_3, \ldots$ mit $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \subseteq E_0$ und

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_j} \ .$$

Da aber auf jeden Fall $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$ endlich sein muß, weil $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subseteq E_0 \subseteq A \subset K$, so ist notwendig

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} = 0 \; . \tag{5.1.2}$$

Wir setzen jetzt

$$F_0 := E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

und nehmen ein $F \subseteq F_0$. Die Annahme $\nu(F) > 0$ führt dann sofort zum Widerspruch zu (5.1.2), weil es dann eben ein k geben würde mit $\nu(F) \geq \frac{1}{k}$ und das widerspricht der Minimalität der Zahlen k_n.

Also bleibt nur $\nu(F) \leq 0$, d.h. aber: F_0 ist eine negative Borelmenge, es ist aber $F_0 \cap B = \emptyset$ und

$$\nu(F_0) = \nu(E_0) - \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) \leq \nu(E_0) < 0$$

und das widerspricht nun der „Minimalität" der Borelmenge B, also gilt $\nu(E_0) \geq 0$ und damit ist A positiv.

Zum Schluß merken wir an: Ist A_+ positiv bez. K, so ist wegen $A_+ \subseteq K$ das A_+ generell positiv für ν, weil für beliebiges $\Delta \subset K'$ jedenfalls gilt

$$\nu(\Delta \cap A_+) = \nu(\Delta \cap A_+ \cap K) = \nu(\Delta \cap K \cap A_+) \geq 0 \; ,$$

entsprechend für A_-. Wenn also $\mathfrak{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ und wenn $K_n = A_n \cup B_n$ eine Hahnsche Zerlegung von K_n ist, so ist mit $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, $\mathfrak{X} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ und A ist positiv für ν (siehe die Folgerung aus 1. und 2. am Anfang des Beweises) und B ist negativ für ν. Somit bilden A und B eine Hahnsche Zerlegung von $\mathfrak{X}$ für ν. ■

5.2 Jordansche Zerlegung eines reellwertigen Maßes

Wir knüpfen an die Hahnsche Zerlegung (von $\mathfrak{X}$) in bezug auf ein reellwertiges Borelmaß an. Danach gibt es zu einem solchen Maß ν zwei disjunkte Borelmengen A_+, A_- mit $A_+ \cup A_- = \mathfrak{X}$, so daß A_+ positiv und A_- negativ ist für ν.

Eine solche Hahnsche Zerlegung von $\mathfrak{X}$ braucht allerdings nicht eindeutig zu sein. Aber es gilt:

Lemma. 5.2.1 *Sei ν ein reellwertiges Borelmaß und seien A_+, A_- und B_+, B_- zwei Hahnsche Zerlegungen $\mathfrak{X} = A_+ \cup A_- = B_+ \cup B_-$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \nu(\Delta \cap A_+) &= \nu(\Delta \cap B_+) \; , \\ \nu(\Delta \cap A_-) &= \nu(\Delta \cap B_-) \end{aligned}$$

für alle Borelmengen Δ (mit der üblichen Einschränkung: Δ liegt in einem gewissen großen Kompaktum).

Beweis: Es ist$\Delta \cap (A_+ \setminus B_+) \subseteq \Delta \cap A_+$, also ist auf jeden Fall

$$\nu(\Delta \cap (A_+ \setminus B_+)) \geq 0 \ .$$

Außerdem ist $\Delta \cap (A_+ \setminus B_+) \subseteq \Delta \cap B_-$, denn wenn $x \in A_+ \setminus B_+$, also $x \notin B_+$ und das heißt $x \in B_-$, weil B_+, B_- disjunkt sind und zusammen $\mathfrak{X}$ ausfüllen. Somit gilt auch

$$\nu(\Delta \cap (A_+ \setminus B_+)) \leq 0 \ ,$$

also ist

$$\nu(\Delta \cap (A_+ \setminus B_+)) = 0 \ .$$

Vertauscht man nun die Rollen von A_+ und B_+, so erhält man auch

$$\nu(\Delta \cap (B_+ \setminus A_+)) = 0 \ ,$$

also folgt

$$\nu(\Delta \cap A_+) = \nu(\Delta \cap (A_+ \cup B_+)) = \nu(\Delta \cap B_+) \ . \qquad \blacksquare$$

Deshalb sind trotz der Nichteindeutigkeit der Hahnschen Zerlegung folgende Definitionen unzweideutig:

$$\nu_+(\Delta) := \nu(\Delta \cap A_+) \ , \tag{5.2.3}$$

$$\nu_-(\Delta) := -\ \nu(\Delta \cap A_-) \ , \tag{5.2.4}$$

wobei die „Nebenbedingung“ (Enthaltensein in einem gewissen Kompaktum) für die Borelmenge Δ zu beachten ist.

Diese Nebenbedingung beseitigen wir mittels folgenden Hilfslemmas:

Lemma. 5.2.2 *Sei μ ein reellwertiges Maß, das ausschließlich nichtnegative Werte annimmt: $\mu(\Delta) \geq 0$, Δ Borelmenge, $\Delta \subset K_\Delta$, K_Δ kompakt. Sei $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Kompakta mit $\mathfrak{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Dann ist*

$$\mu(\Delta) := \lim_{n\to\infty} \mu(\Delta \cap K_n), \quad \Delta \in \mathcal{B} \ ,$$

ein (positives) Borel-Maß.

Beweis: Sei $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ disjunkt und $\Delta = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Delta_j$. Wir zeigen: μ ist abzählbar additiv (das ist die einzige noch nachzuprüfende Bedingung). Es ist

$$\Delta \cap K_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Delta_j \cap K_n) \ ,$$

also

$$\mu(\Delta \cap K_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\Delta_j \cap K_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

also folgt

$$\mu(\Delta \cap K_n) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(\Delta_j \cap K_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\Delta_j)$$

und

$$\mu(\Delta) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\Delta_j) \ .$$

Falls $\mu(\Delta) = \infty$, so sind wir schon fertig. Ist $\mu(\Delta) < \infty$, so haben wir

$$s_{n,N} := \sum_{j=1}^{N} \mu(\Delta_j \cap K_n) \leq \mu(\Delta)$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} s_{n,N} = \sum_{j=1}^{N} \mu(\Delta_j) \leq \mu(\Delta) \ .$$

Das gilt für jedes N, also folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(\Delta_j) \leq \mu(\Delta) \ .$$

■

Damit können wir beweisen

Theorem. 5.2.3 *$\nu_+(\cdot)$, $\nu_-(\cdot)$ und $|\nu|(\Delta) := \nu_+(\Delta) + \nu_-(\Delta)$ sind (bei vorgegebenem reellwertigen Maß ν) stets Borel-Maße und es gilt*

$$\nu(\Delta) = \nu_+(\Delta) - \nu_-(\Delta) \tag{5.2.5}$$

für alle Borelmengen Δ, die in einem gewissen Kompaktum liegen.

Beweis: Durch die in (5.2.3) und (5.2.4) gegebenen Definitionen von ν_+, ν_- werden reellwertige Maße mit nichtnegativen Werten definiert, auf die das vorhergehende Lemma angewandt werden kann, so daß ν_+, ν_- Borel-Maße, auf *allen* Borelmengen definiert, sind. Dann ist auch $\nu_+(\cdot) + \nu_-(\cdot)$ ein Borelmaß. Schließlich sei Δ eine Borelmenge und $\Delta \subset K$ für ein Kompaktum K. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \nu_+(\Delta) - \nu_-(\Delta) &= \nu(\Delta \cap A_+) + \nu(\Delta \cap A_-) = \nu((\Delta \cap A_+) \cup (\Delta \cap A_-)) \\ &= \nu(\Delta \cap (A_+ \cup A_-)) = \nu(\Delta) \ . \end{aligned}$$

■

Das Borel-Maß ν_+ heißt die *obere Variation* von ν, das Borel-Maß ν_- heißt die *untere Variation* von ν. $|\nu|$ heißt die *Totalvariation* von ν.

Die Zerlegung (5.2.5) von ν in die Differenz zweier (positiver) Borel-Maße heißt die *Jordansche Zerlegung* von ν.

Die Formel (5.2.5) erlaubt es, nachträglich ν für alle solchen, jetzt *beliebigen* Borelmengen Δ zu definieren, für die mindestens eine der Zahlen $\nu_+(\Delta)$, $\nu_-(\Delta)$ endlich ist.

Man beachte die Unterschiede in den Bezeichnungen: $|\nu|(\Delta)$ ist etwas ganz anderes als $|\nu(\Delta)|$.

5.3 Das Theorem von Radon–Nikodym

Zuerst erinnern wir an die Definition der *Absolutstetigkeit* zweier (positiver) Borel-Maße ν und $\mu : \nu \ll \mu$, das bedeutet: wenn $\mu(\Delta) = 0$, so folgt auch $\nu(\Delta) = 0$.

Bevor wir zum eigentlichen Theorem kommen, brauchen wir noch einen Hilfssatz.

Lemma. 5.3.1 *Seien ν, μ (positive) Borel-Maße mit $\nu \ll \mu$ und sei $\nu \neq 0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A) > 0$, so daß A positiv ist für das reellwertige Maß $\nu - \varepsilon\mu$.*

Beweis: Sei $\nu_n := \nu - \frac{1}{n}\,\mu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. Ferner sei $\mathfrak{X} = A_n \cup B_n$ eine Hahnsche Zerlegung für ν_n. Wir setzen

$$A_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ , \quad B_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \ .$$

Es ist $B_\infty \subseteq B_n$ für alle n. Deshalb ist $\nu_n(B_\infty) \leq 0$ (die $B's$ sollen die negativen Mengen der Hahnschen Zerlegungen sein) und das heißt ja

$$(\nu - \frac{1}{n}\,\mu)(B_\infty) \leq 0 \quad \text{0der} \quad 0 \leq \nu(B_\infty) \leq \frac{1}{n}\,\mu(B_\infty) \ ,$$

das bedeutet aber $\nu(B_\infty) = 0$.

Auf der anderen Seite ist aber $A_\infty \cap B_\infty = \emptyset$, denn wäre $x \in A_\infty$ und $x \in B_\infty$, d.h. $x \in B_n$ für alle n, so hätte man wegen $A_n \cap B_n = \emptyset$ sofort $x \neq A_n$ für alle n, also $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_\infty$.
Dann folgt notwendig

$$\nu(A_\infty) > 0 \ ,$$

denn wäre $\nu(A_\infty) = 0$, so folgte $\nu(\mathfrak{X}) = \nu(A_\infty) + \nu(B_\infty) = 0$, weil ja $\mathfrak{X} = A_\infty \cup B_\infty$; ist nämlich $x \in \mathfrak{X}$, so gilt $x \in A_n \cup B_n$ für alle n. Ist dann $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, so ist alles klar, im anderen Fall gibt es ein n mit $x \in A_n$ und es ist auch alles klar.

Wenn aber, wie wir jetzt wissen, $\nu(A_\infty) > 0$ ist, so muß es ein n geben, so daß

$$\nu(A_n) > 0 \ ,$$

hieraus folgt aber wegen $\nu \ll \mu$ *sofort* $\mu(A_n) > 0$ und nun setzen wir

$$A := A_n \ , \quad \varepsilon = \tfrac{1}{n}$$

und rekapitulieren, daß ja A_n positiv ist für $\nu_n = \nu - \frac{1}{n}\,\mu$. ∎

Jetzt können wir das Radon-Nikodym-Theorem beweisen:

Theorem. 5.3.2 *(Radon-Nikodym) $\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mu$ sei wie bisher (μ positives Borelmaß). Sei weiter ν ein (positives) Borelmaß auf $\mathfrak{X}$ mit $\nu \ll \mu$. Dann gibt es eine μ-meßbare, nichtnegative, lokal integrable Funktion f, so daß*

$$\nu(\Delta) = \int_\Delta f(x)\mu(dx) \ , \qquad \Delta \in \mathcal{B}$$

gilt. f ist eindeutig mod μ.

Beweis: Sei $\mathfrak{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Kompakta. Wir beweisen den Satz zunächst für ein (beliebiges, festes) Kompaktum K. Es ist dann $\mu(K) < \infty$, d.h. auf K ist das Maß μ *finit*. Wir setzen
$\mathcal{F} := \{f \geq 0,\ f\ \mu\text{-meßbar: } \int_\Delta f(x)\mu(dx) \leq \nu(\Delta), \text{ für alle Borelmengen } \Delta \subseteq K\}$,
und setzen

$$\alpha := \sup_{f \in \mathcal{F}} \{\int_K f(x)\mu(dx)\} \ .$$

Dann ist notwendig $\alpha < \infty$. Sei $f_1, f_2, f_3, \ldots \in \mathcal{F}$ eine Folge aus $\mathcal{F}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n(x)\mu(dx) = \alpha \ .$$

Die jetzt folgenden Betrachtungen dienen dem Zweck, eine Funktion *in* $\mathcal{F}$ zu finden, die den Wert α liefert. Wir setzen

$$g_n(x) := \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}.$$

Sei jetzt Δ beliebig, aber fest. Dann existiert eine disjunkte Zerlegung

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_n \ ,$$

so daß

$$g_n(x) = f_j(x) \ , \quad x \in \Delta_j \ .$$

Hieraus folgt

$$\int\limits_{\Delta} g_n(x)\mu(dx) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{j=1}^{n} f_j(x)\mu(dx) \leq \sum_{j=1}^{n} \nu(\Delta_j) = \nu(\Delta) \ ,$$

also ist auch $g_n \in \mathcal{F}$. Wir setzen jetzt

$$f_\infty(x) := \sup_n\{f_n(x)\} \ .$$

Dann ist

$$f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \ ,$$

außerdem ist ja

$$g_1(x) \leq g_2(x) \leq g_3(x) \leq \ldots \ ,$$

also folgt nach dem Satz von B. Levi

$$f_\infty \in \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \int_K f_\infty(x)\mu(dx) = \alpha \ .$$

Wir vermerken vorsichtshalber, daß (o.B.d.A.)

$$f_\infty(x) < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in K \ .$$

Jetzt setze ich

$$\nu_0(\Delta) := \nu(\Delta) - \int_\Delta f_\infty(x)\mu(dx) \ , \quad \Delta \subset K \ .$$

ν_0 ist auf K ein (positives) Maß, weil ja $f_\infty \in \mathcal{F}$, d.h. ja gerade $\nu_0(\Delta) \geq 0$.

Außerdem wissen wir: Aus $\mu(\Delta) = 0$ folgt $\int_\Delta f_\infty(x)\mu(dx) = 0$ *und* auch $\nu(\Delta) = 0$ (nämlich wegen der Absolutstetigkeit), also auch

$$\nu_0(\Delta) = 0 \ ,$$

d.h. ν_0 ist absolutstetig bez. μ, $\nu_0 \ll \mu$. Wir behaupten jetzt: Das Borel-Maß ν_0 verschwindet identisch, $\nu_0(\Delta) = 0$ für alle Δ. Zum Beweis nehme ich an, es sei $\nu_0 \neq 0$. Und damit kann ich auf die vorliegende Situation das vorhergehende Lemma (p. 63) anwenden. Also: Es existiert ein $A \subset K$ mit $\mu(A) > 0$ und der Eigenschaft: A ist positiv für $\nu_0 - \varepsilon\mu$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$. Das bedeutet also:

$$\varepsilon\mu(\Delta \cap A) \leq \nu_0(\Delta \cap A) = \nu(\Delta \cap A) - \int_{\Delta\cap A} f_\infty(x)\mu(dx) \ ,$$

für alle Borelmengen $\Delta \subset K$. Wir setzen jetzt

$$g(x) := f_\infty(x) + \varepsilon\, \chi_A(x)$$

und rechnen aus:

$$\begin{aligned}\int\limits_\Delta g(x)\mu(dx) &= \int\limits_\Delta f_\infty(x)\mu(dx) + \varepsilon \int\limits_\Delta \chi_A(x)\mu(dx) \\ &= \int\limits_{\Delta\setminus A} f_\infty(x)\mu(dx) + \int\limits_{\Delta\cap A} f_\infty(x)\mu(dx) + \varepsilon\,\mu(\Delta \cap A)\end{aligned}$$

$$\leq \int\limits_{\Delta \setminus A} f_\infty(x)\mu(dx) + \int\limits_{\Delta \cap A} f_\infty(x)\mu(dx) + \nu_0(\Delta \cap A)$$

$$= \int\limits_{\Delta \setminus A} f_\infty(x)\mu(dx) + \nu(\Delta \cap A) \leq \nu(\Delta \setminus A) + \nu(\Delta \cap A) = \nu(\Delta) ,$$

also folgt jetzt $g \in \mathcal{F}$, aber $\int\limits_K g(x)\mu(dx) = \int\limits_K f_\infty(x)\mu(dx) + \varepsilon\,\mu(A) = \alpha + \varepsilon\,\mu(A) > \alpha$ und das ist ein Widerspruch zur Maximalität von α bezüglich $\mathcal{F}$. Die gesuchte Funktion f auf K ist also gerade unser f_∞. Daß f auf K eindeutig ist mod μ, das folgt jetzt nachträglich sofort aus dem Lemma auf p. 57.

Zum Schluß dehnen wir das Ergebnis auf ganz $\mathfrak{X}$ aus: Wir haben $\mathfrak{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ Nach dem bisher bewiesenen bekommen wir für jedes n eine Funktion f_n mit den Eigenschaften des Theorems. Wegen der Eindeutigkeit dieser Funktionen erhalten wir

$$f_{n+k}(x) = f_n(x) \pmod{\mu} , \quad x \in K_n, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

d.h. durch die Definition

$$f(x) := f_n(x) , \quad x \in K_n ,$$

bekommen wir eine mod μ eindeutige, nichtnegative, μ-meßbare und lokal integrable Funktion, die alles gewünschte leistet. ■

Es folgt jetzt die Erweiterung des Satzes von Radon-Nikodym auf den Fall beliebiger reellwertiger Maße. Zunächst eine dafür notwendige Bemerkung zur Absolutstetigkeit: Seien ν und μ reellwertige (Borel-)Maße.

Definition. 5.3.3 *ν heißt absolutstetig bez. μ, $\nu \ll \mu$, wenn folgendes gilt: Falls $|\mu|(\Delta) = 0$, so folgt auch $\nu(\Delta) = 0$.*

Diese Definition sieht etwas „unsymmetrisch“ aus, aber es ergibt sich sofort:

Lemma. 5.3.4 *Die Bedingungen*

(I) $\nu \ll \mu$,

(II) $\nu_+ \ll \mu$ *und* $\nu_- \ll \mu$,

(III) $|\nu| \ll |\mu|$

sind alle äquivalent.

Beweis: Sei (I) richtig, d.h. $|\mu|(\Delta) = 0$ impliziere $\nu(\Delta) = 0$. Sei $\mathfrak{X} = A_+ \cup A_-$ eine Hahn-Zerlegung bez. ν. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\mu|(\Delta \cap A_+) \leq |\mu|(\Delta) = 0, \\ 0 &\leq |\mu|(\Delta \cap A_-) \leq |\mu|(\Delta) = 0, \end{aligned}$$

also

$$\nu_+(\Delta) = \nu(\Delta \cap A_+) = 0$$

und

$$\nu_-(\Delta) = \nu(\Delta \cap A_-) = 0,$$

also gilt (II). Sei nun (II) richtig, dann impliziert das (III), denn

$$|\nu|(\Delta) = \nu_+(\Delta) + \nu_-(\Delta) \ .$$

Ist schließlich (III) richtig, so impliziert das (I), weil

$$0 \leq |\nu(\Delta)| \leq |\nu|(\Delta) \ .$$

■

Die Relation $\nu \ll \mu$ ist reflexiv und transitiv (das möge der Leser nachrechnen). Dann ist durch folgende Definition eine Äquivalenzrelation gegeben:

Definition. 5.3.5 *$\mu \approx \nu$, wenn $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$.*
Die zu μ gehörende Äquivalenzklasse $\{\mu\}$ heißt die Maßklasse von μ.

Als Gegenstück zur Absolutstetigkeit erwähnen wir den Begriff der Disjunktheit zweier Maße:

Definition. 5.3.6 *ν ist singulär bez. μ oder: ν und μ sind disjunkt, $\nu \perp \mu$, wenn es zwei disjunkte Borelmengen $A, B, A \cup B = \mathfrak{X}$ gibt, so daß für alle Borelmengen Δ gilt:*

$$|\mu|(A \cap \Delta) = 0 = |\nu|(B \cap \Delta).$$

Das einfachste Beispiel für diesen Sachverhalt kennen wir schon: Sei $|\cdot|$ das Lebesgue-Maß auf [0,1] und μ_c das Cantor-Maß auf [0,1] (siehe p. 27) (siehe p. 53), C die Cantor-Menge. Dann ist

$$|C| = 0, \text{ aber } \mu_c([0,1] \setminus C) = 0,$$

d.h. die beiden disjunkten Borelmengen der Definition sind C und $[0,1] \setminus C$. Dann ist stets $\mu_c(\Delta \cap ([0,1] \setminus C)) = 0$ und $|\Delta \cap C| = 0$. D.h. das Cantor-Maß lebt auf C, während C für das Lebesgue-Maß „unwichtig“ ist.

Das Radon-Nikodym-Theorem läßt sich sofort auf reell-wertige Maße erweitern:

Theorem. 5.3.7 *Sei wie bisher $\mathfrak{X}, \mathcal{B}$ gegeben und μ ein (positives) Borelmaß auf $\mathfrak{X}$. Sei ν ein reellwertiges Borelmaß und $\nu \ll \mu$. Dann existiert eine reellwertige μ-meßbare lokal integrable Funktion f auf $\mathfrak{X}$, so daß*

$$\nu(\Delta) = \int_\Delta f(x)\mu(dx), \quad \Delta \in \mathcal{B}, \quad \Delta \subset K_\Delta$$

gilt. f ist eindeutig mod μ.

Beweis: $\nu \ll \mu$ ist äquivalent mit $\nu_+ \ll \mu$ und $\nu_- \ll \mu$, also existieren reellwertige nichtnegative lokal integrable Funktionen f_+, f_- mit

$$\nu_\pm(\Delta) = \int_\Delta f_\pm(x)\mu(dx) \ .$$

Hieraus folgt

$$\nu(\Delta) = \int_\Delta (f_+(x) - f_-(x))\mu(dx) \ ,$$

so daß $f(x) := f_+(x) - f_-(x)$ gesetzt werden kann. Die Eindeutigkeit mod μ folgt wie früher. ■

Der Leser rechne nach, daß dann

$$|\nu|(\Delta) = \int_\Delta |f(x)|\mu(dx) \ , \quad \Delta \in \mathcal{B}$$

gilt.

5.4 Radon-Nikodym-Ableitung, Kettenregel, Substitutionsregel

Sei wie bisher $\{\mathfrak{X}, \mu\}$ gegeben, μ positives Borel-Maß. ν sei ein reellwertiges Maß, $\nu \ll \mu$. Dann gilt $\nu(\Delta) = \int_\Delta f(x)\mu(dx)$ mit einer mod μ eindeutigen μ-meßbaren lokal integrablen Funktion. Diese Funktion heißt die *Radon-Nikodym-Ableitung* von ν nach μ und man schreibt

$$f = \frac{d\nu}{d\mu} \quad \text{oder} \quad d\nu = f d\mu \quad \text{oder} \quad \nu(dx) = f(x)\mu(dx) \; .$$

Wir notieren einige Eigenschaften der Radon-Nikodym-Ableitung. Trivial ist

$$\frac{d}{d\mu}(\nu_1 + \nu_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} \tag{5.4.6}$$

Weniger trivial ist, daß eine *Kettenregel* gilt:

Theorem. 5.4.1 *λ und μ seien positive Borel-Maße auf $\mathfrak{X}$, $\lambda \ll \mu$ und ν sei ein reellwertiges Borelmaß mit $\nu \ll \lambda$. Dann gilt*

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\mu} \quad (mod\ \mu) \; .$$

Beweis: O.B.d.A. können wir annehmen, daß auch ν ein positives Borelmaß ist (weil es genügt, wegen der Regel (5.4.6), die Behauptung für die obere und untere Variation zu beweisen).

Wir bezeichnen

$$\frac{d\nu}{d\lambda} =: f \; , \quad \frac{d\lambda}{d\mu} =: g,$$

so daß $f \geq 0$ (mod μ), also o.B.d.A. $f(x) \geq 0$ für alle x gilt.

Wir wählen eine monoton wachsende Folge t_n nichtnegativer Treppenfunktionen, die in jedem Punkt x gegen f konvergiert, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(x) = f(x)$, (siehe p. 51). Wir behaupten nun: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Delta t_n(x)\lambda(dx) = \int_\Delta f(x)\lambda(dx) \; . \tag{5.4.7}$$

Ist nämlich der Limes auf der linken Seite *endlich*, dann folgt (5.4.7) aufgrund des Satzes von B. Levi (f ist dann auf Δ integrabel). Ist aber der Limes ∞, so muß auch die rechte Seite ∞ sein, denn wäre *diese* endlich: $\int_\Delta f(x)\lambda(dx) < \infty$, so wäre f auf Δ integrabel und es ist ja $t_n(x) \leq f(x)$, also aufgrund von Theorem 4.6.3 würde auch $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Delta t_n(x)\lambda(dx) = \int_\Delta f(x)\lambda(dx)$ gelten, also der Limes endlich sein müssen.

Genau so schließt man auf die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Delta t_n(x)g(x)\mu(dx) = \int_\Delta f(x)g(x)\mu(dx) \; .$$

Andererseits: Ist B eine beliebige Borelmenge, so ist

$$\int_\Delta \chi_B(x)\lambda(dx) = \lambda(\Delta \cap B) = \int_{\Delta\cap B} g(x)\mu(dx) = \int_\Delta \chi_B(x)g(x)\mu(dx)$$

und hieraus ergibt sich, weil ja die t_n Treppenfunktionen sind,

$$\int_\Delta t_n(x)\lambda(dx) = \int_\Delta t_n(x)g(x)\mu(dx) \; , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \; .$$

Gehen wir nun zum $\lim\limits_{n\to\infty}$ über, so erhalten wir

$$\int_\Delta f(x)\lambda(dx) = \int_\Delta f(x)g(x)\mu(dx) = \nu(\Delta) \; ,$$

die letzte Gleichung besagt aber gerade, daß $f(x) \cdot g(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x)$ (mod μ) gilt, was zu beweisen war. ■

Lemma. 5.4.2 *(Substitutionsregel) Seien λ und μ (positive) Borelmaße und $\lambda \ll \mu$. Weiter sei f integrabel bezüglich λ; dann gilt*

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\lambda(dx) = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\frac{d\lambda}{d\mu}(x)\mu(dx) \; .$$

Beweis: Wir setzen

$$\nu(\Delta) := \int_\Delta f(x)\lambda(dx) \ ,$$

dann ist ν ein reellwertiges Maß auf $\mathfrak{X}$ und aufgrund der Kettenregel erhalten wir

$$\nu(\Delta) = \int_\Delta f(x)\frac{d\lambda}{d\mu}(x)\mu(dx)$$

schließlich setzen wir $\Delta := \mathfrak{X}$. ∎

Kapitel 6

Produktmaße

6.1 Cartesisches Produkt und Produktmaße

$\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ seien zwei lokalkompakte, separable metrisierbare Räume. Bekanntlich ist das *Cartesische Produkt* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ die Gesamtheit der geordneten Paare (x, y) mit $x \in \mathfrak{X},\ y \in \mathfrak{Y}$.

Ist $A \subset \mathfrak{X},\ B \subset \mathfrak{Y}$, so heißt $A \times B \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ das *Rechteck* mit den *Seiten* A und B. Es folgen einige triviale Angaben über Rechtecke:

Lemma. 6.1.1 *$R := A \times B$ sei ein Rechteck.*

(I) $R = \emptyset$ gdw. eine der Seiten ist leer.

(II) Sei $R_1 = A_1 \times B_1,\ R_2 = A_2 \times B_2$. Dann gilt: $R_1 \subseteq R_2$ gdw. $A_1 \subseteq A_2$ und $B_1 \subseteq B_2$.

(III) $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2$ impliziert $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$

(IV) R ist disjunkte Vereinigung von R_1 und R_2: $R = R_1 \cup R_2$ mit $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ genau dann wenn $A = A_1 \cup A_2$ (disjunkte Vereinigung) und $B_1 = B_1 = B_2$ oder $B = B_1 \cup B_2$ (disjunkte Vereinigung) und $A = A_1 = A_2$.

(V) Der Durchschnitt $R_1 \cap R_2$ zweier Rechtecke ist wieder ein Rechteck.

$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ ist *wiederum* ein lokalkompakter, separabler, metrisierbarer Raum.
$\mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}),\ \mathcal{B}(\mathfrak{X}),\ \mathcal{B}(\mathfrak{Y})$ seien die zugehörigen Systeme der Borelmengen. Dann gilt

$$\mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) = \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y})),$$

wobei

$$\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y}) = \{A \times B : A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}),\ B \in \mathcal{B}(\mathfrak{Y})\}$$

die Gesamtheit aller Rechtecke bezeichnet, deren Seiten Borelmengen sind, m.a.W.

die Borelmengen von $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ werden erzeugt durch die Rechtecke $A \times B$, wo A und B jeweils Borelmengen sind.

Sei $M \subseteq \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ eine beliebige Teilmenge. Wichtig sind die sog. $\mathfrak{X}$-*Schnitte* bzw. $\mathfrak{Y}$-*Schritte* von M.

Definition. 6.1.2 *Die Menge $M_x := \{y : (x, y) \in M\} \subseteq \mathfrak{Y}$ heißt $\mathfrak{X}$-Schnitt von M im Punkt x oder x-Schritt. Entsprechend heißt $M^y := \{x : (x, y) \in M\} \subseteq \mathfrak{X}$ der $\mathfrak{Y}$-Schnitt von M im Punkt y oder einfach y-Schritt.*

Es gilt

Lemma. 6.1.3 *Sei $M, N \subseteq \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Es ist $M \cap N = \emptyset$ gdw für alle x gilt $M_x \cap N_x = \emptyset$ und für alle y gilt $M^y \cap N^y = \emptyset$.*

Beweis: wird dem Leser überlassen. ∎

Lemma. 6.1.4 *Sei $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$. Dann sind alle $\mathfrak{X}$-Schnitte B_x von B sowie alle $\mathfrak{Y}$-Schritte B^y von B Borelmengen, d.h. $B_x \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, $B^y \in \mathcal{B}(\mathfrak{Y})$.*

Beweis: Die Behauptung gilt für alle Rechtecke $A \times B$, wo A und B Borelmengen sind. Dann zieht sich das durch alle zulässigen mengentheoretischen Operationen durch. ∎

Auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ gibt es zwei ausgezeichnete Abbildungen, die *Projektionen* nach $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$:

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \ni (x, y) \mapsto P(x, y) := x \in \mathfrak{X},$$
$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \ni (x, y) \mapsto Q(x, y) := y \in \mathfrak{Y} .$$

P und Q sind stetige Abbildungen. Ist also $K \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ kompakt, so sind PK und QK kompakt und man hat

$$K \subseteq PK \times QK ,$$

d.h. jedes Kompaktum K ist in einem Rechteck mit kompakten Seiten enthalten.

Sei $f : M \mapsto \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Dann ist für alle $x \in \mathfrak{X}$ mit $M_x \neq \emptyset$ die Funktion

$$f_x(y) := f(x, y) , \quad y \in M_x$$

definiert, analog für $y \in \mathfrak{Y}$ mit $M^y \neq \emptyset$ die Funktion

$$f^y(x) := f(x, y) .$$

Die Funktion f_x heißt der $\mathfrak{X}$-Schnitt von f im Punkt x oder einfach der x-Schnitt, f^y heißt der $\mathfrak{Y}$-Schnitt von f im Punkt y oder einfach der y-Schnitt.

Lemma. 6.1.5 *Ist $f : \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \mapsto \mathbb{R}$ eine Borelfunktion, so sind alle x- und y-Schnitte, d.h. alle Funktionen f_x und f_y Borelfunktionen auf $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$.*

Beispiele: Sei $M \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ und $\chi := \chi_M$ die charakteristische Funktion von M. Dann ist χ_x die charakteristische Funktion von M_x, $\chi_x = \chi_{M_x}$ und χ^y ist die charakteristische Funktion von M^y, $\chi^y = \chi_{M^y}$.

Ist z.B. $M = A \times B$, so ist $\chi_M(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$. Ist t eine Treppenfunktion, so sind t_x und t^y auch Treppenfunktionen.

Es folgt die Konstruktion von Maßen auf kartesischen Produkten. Seien $\{\mathfrak{X}, \mu\}$ und $\{\mathfrak{Y}, \nu\}$ gegeben, μ Borelmaß auf $\mathfrak{X}$, ν Borelmaß auf $\mathfrak{Y}$. Wir konstruieren im folgenden aus μ und ν ein Borelmaß auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Zur Vorbereitung benötigen wir folgendes

Lemma. 6.1.6 *Sei $\Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$ eine Borelmenge von $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Sei weiter*

$$f(x) := \nu(\Delta_x) , \quad g(y) := \mu(\Delta^y) , \quad x \in \mathfrak{X}, \ y \in \mathfrak{Y} .$$

Dann sind f und g (nichtnegative) Borelfunktionen auf $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$ und es gilt

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = \int\limits_{\mathfrak{Y}} g(y)\nu(dx) . \tag{6.1.1}$$

Beweis: erfolgt in mehreren Schritten.

1. Wir beweisen das erst einmal für Rechtecke $\Delta := A \times B$, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{Y})$, mit $\mu(A) < \infty$, $\mu(B) < \infty$. Dann ergibt sich sofort z.B. $\Delta_x = \begin{cases} B & , \quad x \in A \\ \emptyset & , \quad x \notin A \end{cases}$ also folgt

$$f(x) = \nu(B)\chi_A(x) \; ; \quad g(y) = \mu(A)\chi_B(y) \; ,$$

also sind $f(\cdot)$ und $g(\cdot)$ Borelfunktionen, weil $\mu(A) < \infty$, $\nu(B) < \infty$ und es ist

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) = \nu(B)\mu(A) \; , \quad \int_{\mathfrak{Y}} g(x)\nu(dy) = \mu(A)\nu(B) \; ,$$

also die behauptete Gleichheit.

2. Jetzt sei $\mathfrak{S} = \{\Delta\}$ das System aller derjenigen Borelmengen $\Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$, für die die Behauptung bereits gilt, für die also $f =: f_\Delta$ und $g = g_\Delta$ Borelfunktionen sind und für die (6.1.1) gilt. Dann zeigen wir zwei Eigenschaften der Menge $\mathfrak{S}$:

   (I) $\mathfrak{S}$ ist abgeschlossen bez. abzählbarer disjunkter Vereinigungen, also: Wenn $\Delta_j \in \mathfrak{S}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, paarweise disjunkt, so gilt auch $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Delta_j =: \Delta \in \mathfrak{S}$. Das zeigen wir so: Sei

$$f_{\Delta_j}(x) := \nu((\Delta_j)_x) \; , \quad g_{\Delta_j}(y) := \mu((\Delta_j)^y) \; .$$

   Das sind Borelfunktionen und wegen Lemma (p. 6.1.3 ist

$$f_\Delta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{\Delta_j}(x) \; , \quad g_\Delta(y) = \sum_{j=1}^{\infty} g_{\Delta_j}(y) \; ,$$

   wobei die „Träger" supp f_{Δ_j} der Funktion f_{Δ_j} ein disjunktes System bilden (analog für die g_{Δ_j}). Wegen $\Delta_j \in \mathfrak{S}$ erhalten wir (6.1.1) für Δ_j, also

$$\int_{\mathfrak{X}} f_{\Delta_j}(x)\mu(dx) = \int_{\mathfrak{Y}} g_{\Delta_j}(y)\nu(dx) \; , \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

   hieraus durch *endliche* Aufsummation

$$\int_{\mathfrak{X}} \Big(\sum_{j=1}^{n} f_{\Delta_j}(x) \Big) \mu(dx) = \int_{\mathfrak{Y}} \Big(\sum_{j=1}^{n} g_{\Delta_j}(y) \Big) \nu(dy)$$

   Nun ist $\sum\limits_{j=1}^{n} f_{\Delta_j}(x)$ für wachsendes n eine monoton wachsende Funktionenfolge mit $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{\Delta_j}(x) = f_\Delta(x)$, analog für die g_{Δ_j}. Hieraus erhalten wir wegen des Satzes von B. Levi (in Verbindung mit LDCT) das Resultat

$$\int_{\mathfrak{X}} f_\Delta(x)\mu(dx) = \int_{\mathfrak{Y}} g_\Delta(y)\nu(dy) \; . \tag{6.1.2}$$

   (II) $\mathfrak{S}$ ist abgeschlossen bez. der Vereinigung monoton wachsender Mengen, also: Wenn $\Delta_j \in \mathfrak{S}$, $\; j = 1, 2, 3, \ldots . \; \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta_3 \subseteq \ldots$, so gilt auch $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Delta_j \in \mathfrak{S}$. Dies folgt ganz analog: Wir bilden wie oben die f_{Δ_j} und die g_{Δ_j}. Das sind Borelfunktionen und wir erhalten hier monotones Wachstum

$$f_{\Delta_1}(x) \le f_{\Delta_2}(x) \le f_{\Delta_3}(x) \le \ldots ; \quad g_{\Delta_1}(y) \le g_{\Delta_2}(y) \le g_{\Delta_3}(y) \le \ldots$$

   und es ist

$$f_\Delta(x) = \lim_{j\to\infty} f_{\Delta_j}(x)\ , \quad g_\Delta(x) = \lim_{j\to\infty} g_{\Delta_j}(y)\ ,$$

die f_Δ und g_Δ sind also auch Borelfunktionen. Wiederum erhalten wir aufgrund des Satzes von B. Levi (in Verbindung mit LDCT) die Gleichung (6.1.2).

Jetzt bilden wir das System $\mathcal{B}^{\text{dis}}_{\text{fin}}(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y}))$ aller *endlichen* und *disjunkten* Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y})$.
Dann ist erst einmal $\mathcal{B}^{\text{dis}}_{\text{fin}} \subseteq \mathfrak{S}$ wegen 1. und 2. (I). $\mathcal{B}^{\text{dis}}_{\text{fin}}$ ist abgeschlossen bez. der Durchschnittsbildung, denn mit $\Delta_1 := \bigcup\limits_{\rho=1}^{m} (A_\rho \times B_\rho)$, $\Delta_2. = \bigcup\limits_{\sigma=1}^{n} (C_\sigma \times D_\sigma)$ folgt $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \bigcup\limits_{\rho,\sigma=1}^{m,n} (A_\rho \times B_\rho) \cap (C_\sigma \times D_\sigma)$ und dies ist eine disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Weiter ist $\mathcal{B}^{\text{dis}}_{\text{fin}}$ abgeschlossen bez. der Differenzbildung: Erst einmal ist

$$(A \times B)' = (A' \times B') \cup (A \times B') \cup (A' \times B)$$

und diese Vereinigung ist disjunkt, deshalb $(A \times B)' \in \mathcal{B}^{\text{dis}}_{\text{fin}}$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}
\Delta_1 \setminus \Delta_2 &= \Big(\bigcup_{\rho=1}^{m} (A_\rho \times B_\rho)\Big) \cap \Big(\bigcup_{\sigma=1}^{n} C_\sigma \times D_\sigma\Big)' = \Big(\bigcup_{\rho=1}^{m} (A_\rho \times B_\rho)\Big) \cap \bigcap_{\sigma=1}^{n} (C_\sigma \times D_\sigma)' \\
&= \Big(\bigcup_{\rho=1}^{m} A_\rho \times B_\rho) \cap \bigcup_{K} R_K = \bigcup_{\rho,K} (A_\rho \times B_\rho) \cap R_K\ ,
\end{aligned}$$

wobei die R_K gewisse Rechtecke sind und die Vereinigung ist wieder disjunkt.

Deshalb ist $\mathcal{B}^{\text{dis}}_{\text{fin}}$ auch bez. beliebiger endlicher Vereinigungen abgeschlossen, denn $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta_1 \cup (\Delta_1 \setminus \Delta_2)$ und diese Vereinigung ist disjunkt. D.h. wir erhalten jetzt

$$\mathcal{B}^{\text{dis}}_{\text{fin}}(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y})) = \mathcal{B}_0(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y}))\ ,$$

wobei $\mathcal{B}_0$ (wie früher) die von $\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y})$ erzeugte Prä-Borelstruktur (endliche Vereinigungen, Differenzen) bezeichnet. Wir wissen aber, daß $\mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}_0(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y}))$ gilt, wo $\mathcal{M}$ (wie früher) die „monotone Hülle“ bezeichnet. Wegen 2. (II) haben wir aber $\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y}))) \subseteq \mathfrak{S}$, also insgesamt

$$\mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) \supseteq \mathfrak{S} \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{B}_0(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y})))$$

woraus sich $\mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) = \mathfrak{S}$ ergibt. Das wollten wir gerade beweisen. ∎

Nachdem wir nun Lemma 6.1.6 zur Verfügung haben, können wir das *Produktmaß* einführen:

Theorem. 6.1.7 *$\{\mathfrak{X}, \mu\}$ und $\{\mathfrak{Y}, \nu\}$ seien wie üblich, also μ und ν Borel-Maße. Für $\Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$ definiere man*

$$\lambda(\Delta) := \int_{\mathfrak{X}} \nu(\Delta_x)\mu(dx) = \int_{\mathfrak{Y}} \mu(\Delta^y)\nu(dx)\ . \tag{6.1.3}$$

Dann ist λ ein Borelmaß auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ mit der Eigenschaft

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)\ , \quad A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}),\ B \in \mathcal{B}(\mathfrak{Y}) \tag{6.1.4}$$

und diese Bedingung (6.1.4) charakterisiert das Maß λ eindeutig.

Beweis: Wir zeigen zuerst einmal, daß λ ein Maß auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ ist: Erstens ist $\lambda(\Delta) \geq 0$ für alle Δ. Zweitens sei $\Delta = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Delta_j$ und die $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ seien disjunkt. Dann ist $\Delta_x = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (\Delta_j)_x$ und das ist wieder eine disjunkte Vereinigung, für alle $x \in \mathfrak{X}$. Deshalb erhält man

$$\nu(\Delta_x) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu((\Delta_j)_x) \ ,$$

also aus (6.1.3)

$$\lambda(\Delta) = \int_{\mathfrak{X}} \nu((\Delta_j)_x)\mu(dx) \ .$$

Hieraus erhält man aber, wie gewöhnlich durch Anwendung des Satzes von B. Levi, in Verbindung mit dem LDCT,

$$\lambda(\Delta) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{X}} \nu((\Delta_j)_x)\mu(dx) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(\Delta_j) \ .$$

Zweitens zeigen wir, daß Λ ein Borelmaß ist: D.h. zu zeigen ist: für ein Kompaktum $K \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ erhält man $\lambda(K) < \infty$. Nun ist aber (siehe p. 70) $K \subseteq K_1 \times K_2$, wo K_1, K_2 Kompakta in $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$ sind. Wegen der Monotonie von λ ist $\lambda(K) \leq \lambda(K_1 \times K_2)$, aber im Punkt 1 des Beweises von Lemma 6.1.6 haben wir gezeigt, daß $\lambda(K_1 \times K_2) = \mu(K_1)\nu(K_2) < \infty$ gilt.

Zur Eindeutigkeit: Durch die Bedingung (6.1.4) ist λ auf $\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y})$ eindeutig und damit eindeutig auf $\mathcal{B}_0(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y})) = \mathcal{B}^{\text{dis}}_{\text{fin}}(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y}))$ und damit auch eindeutig auf $\mathcal{M}(\mathcal{B}_0(\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{Y}))) = \mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$. ■

Achtung: Für die Gültigkeit von Lemma 6.1.6, das zur Definition des Produktmaßes führte, ist die Voraussetzung, daß es sich bei μ und ν um Borelmaße handelt, unverzichtbar.

Beispiel: Sei $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = [0,1]$ mit den Borelmengen $\mathcal{B}$. μ sei das Lebesgue-Maß auf [0,1], ein Borelmaß, und ν sei folgendermaßen definiert:

$$\nu(\Delta) := \begin{cases} \text{card } \Delta & , \text{ falls } \Delta \text{ eine endliche Menge,} \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$\nu(\cdot)$ ist ein Maß, definiert auf $\mathcal{B}$, aber kein Borelmaß (ν ist die „Summe aller Dirac-Maße“: $\nu = \sum_{x \in [0,1]} \delta_x$).

Sei nun $D \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ die Diagonale $D = \{(x,y) : x = y\}$. Es ist D eine Borelmenge von $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ und $D_x = \{(x,x)\}$, $D^y = \{(y,y)\}$, also D_x und D^y sind immer 1-elementige Mengen. Deshalb ist $\nu(D_x) = 1$ für alle x und $\mu(D^y) = 0$ für alle y und deshalb

$$\int_0^1 \nu(D_x)\mu(dx) = \int_0^1 1\, \mu(dx) = 1,$$

aber

$$\int_0^1 \mu(D^y)\nu(dy) = \int_0^1 0\, \nu(dy) = 0.$$

Das Produktmaß λ auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ bez. μ und ν wird meist mit $\lambda = \mu \times \nu$ bezeichnet.

Wir merken an, ohne Beweis, daß man das Theorem über die Bildung des Produktmaßes selbstverständlich auf endlich viele Faktoren $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots \times \mathfrak{X}_n$ im Cartesischen Produkt erweitern kann. Sind $\mu_1, \mu_2, \ldots, \ldots, \mu_n$ die entsprechenden Borelmaße, so erhält man ein eindeutiges Maß

$$\mu := \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n,$$

weil die Produktbildung assoziativ ist, also es ist stets

$$(\nu_1 \times \nu_2) \times \nu_3 = \nu_1 \times (\nu_2 \times \nu_3).$$

Der Beweis wird dem Leser überlassen.

Zum Beispiel bekommt man aus dem Lebesgue-Maß μ auf $\mathbb{R}$ für $\mathbb{R}^n := \underbrace{R \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}}$ das Borelmaß

$$\mu^n := \underbrace{\mu \times \mu \times \ldots \times \mu}_{n-\text{mal}}.$$

Dieses Maß hat für „Intervalle" $(a,b) := \{x : a_j < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$ den Wert

$$\mu^n((a,b)) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Das Maß μ^n heißt das Lebesgue-Maß des Raumes $\mathbb{R}^n$.

6.2 Fubini's Theorem

Dieses Theorem verknüpft das Integral im Produktraum mit den Integralen der Komponentenräume.

$\{\mathfrak{X}, \mu\}$, $\{\mathfrak{Y}, \nu\}$ seien wie üblich, $\lambda := \mu \times \nu$ sei das Produktmaß auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Wir schreiben im Integral $\lambda(d(x,y))$, gelegentlich auch $\lambda(dx, dy)$. Ist f integrabel auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, so existiert

$$\int_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} f(x,y)(\mu \times \nu)(dx, dy).$$

Dieses Integral nennt man auch ein *Doppelintegral.* Wir betrachten einmal die Schnitte $f_x(\cdot)$ und $f^y(\cdot)$ und nehmen für den Moment an, daß $f_x(\cdot)$ integrabel ist für jedes x, also

$$\int_{\mathfrak{Y}} f_x(y)\nu(dy) =: g(x)$$

existiert. Weiter nehmen wir an, daß g integrabel ist, also

$$\int_{\mathfrak{X}} g(x)\mu(dx)$$

existiert. Wir schreiben dann

$$\int_{\mathfrak{X}} g(x)\mu(dx) = \int_{\mathfrak{X}} \Big\{ \int_{\mathfrak{Y}} f(x,y)\nu(dy) \Big\} \mu(dx) = \int_{\mathfrak{X}} \int_{\mathfrak{Y}} f(x,y)\nu(dy)\mu(dx)$$

(lassen also die Klammer weg). Natürlich gibt es auch die andere Möglichkeit, nämlich die Reihenfolge der Integrationen zu vertauschen, dann entsteht

$$\int_{\mathfrak{Y}} \int_{\mathfrak{X}} f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)\ .$$

Diese Integrale heißen *iterierte Integrale* und das Theorem liefert die Gleichheit von Doppelintegral und den beiden iterierten Integralen unter einer gewissen Voraussetzung.

Zur Erinnerung: Ist Δ eine Borelmenge, so haben wir die $\mathfrak{X}$-Schnitte Δ_x für jedes $x \in \mathfrak{X}$ und die $\mathfrak{Y}$-Schnitte Δ^y für jedes $y \in \mathfrak{Y}$. Für eine Funktion $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ haben wir die $\mathfrak{X}$-Schnitte f_x sowie die $\mathfrak{Y}$-Schnitte f^y.

Die Terminologie „mod μ" bzw. „mod ν" übernehmen wir jetzt generell für Aussagen, in denen x bzw. y als Parameter vorkommen: Eine Aussage ist richtig mod μ, wenn sie eben richtig ist für μ-fast alle $x \in \mathfrak{X}$ usw., also z.B. für μ-fast alle $\mathfrak{X}$-Schnitte f_x einer Funktion f etc.

Entscheidend für das Theorem von Fubini ist folgendes

Lemma. 6.2.1 *Ist f $(\mu \times \nu)$-meßbar auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ und $f(x,y) \geq 0$, so sind μ-fast alle $\mathfrak{X}$-Schnitte von f ν-meßbar und ν-fast alle $\mathfrak{Y}$-Schnitte von f μ-meßbar; die Integrale $\int_{\mathfrak{X}} f(x,y)\mu(dx)$ und $\int_{\mathfrak{Y}} f(x,y)\nu(dy)$ sind ν- bzw. μ-meßbar und es gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} f(x,y)(\mu \times \nu)(dx, dy) &= \int_{\mathfrak{X}} \int_{\mathfrak{Y}} f(x,y)\nu(dy)\mu(dx) \\ &= \int_{\mathfrak{Y}} \int_{\mathfrak{X}} f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)\ . \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Beweis: wird in mehreren Schritten geführt.

1. Sei $f(x,y) := \chi_\Delta(x,y)$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{Y}} f(x,y)\nu(dy) = \nu(\Delta_x) \ , \quad \int_{\mathfrak{X}} f(x,y)\mu(dx) = \mu(\Delta^y)$$

und wegen (6.2.5) (auf p. 74) folgt die Behauptung. Damit gilt die Behauptung bereits für alle Treppenfunktionen $\sum_{\rho=1}^{n} \alpha_\rho \chi_{\Delta_\rho}(\cdot) = t(\cdot)$, d.h.

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}} t(x,y)(\mu\times\nu)(dx,dy) &= \int_{\mathfrak{X}}\int_{\mathfrak{Y}} t(x,y)\nu(dy)\mu(dx) \\ &= \int_{\mathfrak{Y}}\int_{\mathfrak{X}} t(x,y)\mu(dx)\nu(dy)\ . \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Nun sei, wie üblich, t_n eine *monoton wachsende* Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen, die für alle (x,y) gegen f konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} t_n(x,y) = f(x,y) \ , \quad (x,y) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}.$$

Wie üblich (B. Levi kombiniert mit LDCT) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}} t_n(x,y)(\mu\times\nu)(dx,dy) = \int_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}} f(x,y)(\mu\times\nu)(dx,dy)\ . \tag{6.2.7}$$

Wir setzen jetzt

$$g_n(x) := \int_{\mathfrak{Y}} t_n(x,y)\nu(dy) \ , \quad x\in\mathfrak{X} \ , \quad n = 1,2,3,\ldots .$$

Dann sind die g_n μ-meßbar, $g_n(x) \geq 0$, und sie bilden eine monoton wachsende Folge. Wiederum folgt (B. Levi kombiniert mit LDCT)

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \int_{\mathfrak{Y}} f(x,y)\nu(dy) \ , \quad x \in \mathfrak{X}\ .$$

Wir setzen $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Dann ist g μ-meßbar und $g(x)\geq 0$. Wir wenden noch einmal den Satz von B. Levi, kombiniert mit LDCT, an und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} g_n(x)\mu(dx) = \int_{\mathfrak{X}} g(x)\mu(dx)\ ,$$

also zusammengefaßt

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{X}}\int_{\mathfrak{Y}} f(x,y)\nu(dy)\mu(dx) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}}\int_{\mathfrak{Y}} t_n(x,y)\nu(dy)\mu(dx) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}} t_n(x,y)(\mu\times\nu)(dx,dy)\ , \quad \text{(wegen (6.2.6))} \\ &= \int_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}} f(x,y)(\mu\times\nu)(dx,dy)\ , \quad \text{wegen (6.2.7)}\ . \end{aligned}$$

Für das zweite iterierte Integral verfährt man ganz analog. Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Damit ergibt sich schließlich folgendes

Theorem. 6.2.2 *(Fubini) Sei f integrabel auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Dann sind fast alle $\mathfrak{X}$- bzw. $\mathfrak{Y}$-Schnitte von f auf $\mathfrak{Y}$ bzw. $\mathfrak{X}$ integrabel. Setzt man*

$$g(x) := \int_{\mathfrak{Y}} f/x, y)\nu(dy) \ , \quad h(y) := \int_{\mathfrak{X}} f(x, y)\mu(dx),$$

so sind g und h integrabel und es gilt

$$\int_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}} f(x, y)(\mu \times \nu)(dx, dy) = \int_{\mathfrak{X}} g(x)\mu(dx) = \int_{\mathfrak{Y}} h(y)\nu(dy) \ .$$

Beweis: f ist integrabel gdw f_+ und f_- integrabel sind. Wir können uns also auf die Betrachtung nichtnegativer Funktionen beschränken. Sei also $f(x) \geq 0$. Damit können wir das vorige Lemma anwenden. Dann müssen aber die Funktionen $g(\cdot)$ und $h(\cdot)$ fastüberall (bez. μ bzw. ν) endlich sein, d.h. fast alle $\mathfrak{X}$- bzw. $\mathfrak{Y}$-Schritte von f sind integrabel, es ist $g(x) \geq 0$, $h(y) \geq 0$ und, wiederum wegen (6.2.5), müssen die Integrale von g und h endlich sein, d.h. g und h sind integrabel und es gilt (6.2.5). Das ist aber die Behauptung. ∎

Als Anwendung erhält man z.B. sofort:

Ist f integrabel auf $\mathfrak{X}$ bez. μ und g integrabel auf $\mathfrak{Y}$ bez. ν, so ist $h(x, y) := f(x)g(y)$ integrabel auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ bez. $\mu \times \nu$ und es gilt

$$\int_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}} f(x)g(y)(\mu \times \nu)(dx, dy) = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\mu(dx) \cdot \int_{\mathfrak{Y}} g(y)\nu(dy) \ .$$

Kapitel 7

Das Haarsche Maß

$\mathfrak{X}$ sei wie üblich ein lokalkompakter, separabler, metrisierbarer Raum. Im folgenden soll $\mathfrak{X}$ außerdem auch eine *Gruppe* sein, d.h. in $\mathfrak{X}$ ist die Bildung eines *Produkts* $x \cdot y$ oder einfach $xy \in \mathfrak{X}$ möglich mit folgenden Eigenschaften:

- $(x_1 x_2)x_3 = x_1(x_2 x_3)$, (Assoziativität),
- es existiert (genau ein) Element e mit $ex = xe = x$, für alle $x \in \mathfrak{X}$, (Einselement),
- zu jedem $x \in \mathfrak{X}$ existiert (genau ein) Element x^{-1} mit $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ (inverses Element).

Beispiele sind: $\mathbb{R}$ mit „+“, $\mathbb{C}$ mit „+“, $R_+ := (0, \infty)$ mit „ $\cdot$ “, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit „ $\cdot$ “, $\mathbb{R}^n$ mit „+“. Die genannten Beispiele sind *abelsche Gruppen*, d.h. es gilt stets

- $x \cdot y = y \cdot x$, (Kommutativität).

Die einfachsten Beispiele nichtkommutativer Gruppen sind Matrixgruppen, z.B. $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$, $m \geq 2$.
$M_n(\mathbb{R})$ ist die Gesamtheit aller $n \times n$-Matrizen mit reellwertigen Matrixelementen. Wie bekannt, ist im allgemeinen $AB \neq BA$.

Die bisher genannten Beispiele haben die Eigenschaft, daß sie auch lokalkompakte, separable, metrisierbare Räume sind *und* daß die Operationen (Abbildungen) $x \cdot y$ und x^{-1} stetig sind.

Wir betrachten im folgenden ausschließlich solche Gruppen $\mathcal{G} := \mathfrak{X}$, die (als Raum) lokalkompakt, separabel und metrisierbar sind und für die die Abbildungen

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathfrak{X},$$
$$\mathfrak{X} \ni x \mapsto x^{-1} \in \mathfrak{X}$$

stetig sind. Das sind dann (spezielle) *topologische Gruppen.*

In solchen Räumen $\mathfrak{X}$ gibt es ausgezeichnete Homöomorphismen (Bijektionen, die beiderseits stetig sind), nämlich die sog. *Linksverschiebung*

$$\mathfrak{X} \ni x \to gx \in \mathfrak{X}\ , \quad g \in \mathfrak{X} \quad \text{ein festes Element}$$

und die *Rechtsverschiebung*

$$\mathfrak{X} \ni x \to x\,g \in \mathfrak{X}\ .$$

Ist $U \subset \mathfrak{X}$ eine Umgebung von e (offene Menge, die e enthält), so läßt sich jede Umgebung V eines Punktes g_0 in der Form $V = g\,U$ oder $V = U'g$ schreiben. Man braucht sich also nur mit den Umgebungen von e zu befassen.

Wir erwähnen (Beweise seien dem Leser überlassen): Jede Umgebung U von e enthält eine symmetrische Umgebung V (von e) mit $V^{-1} = V$ (V^{-1} ist die Gesamtheit der Punkte x^{-1} mit $x \in V$).

Jede Umgebung U von e enthält eine Umgebung V von e mit $V^2 \subset U$ bzw. mit $V^n \subset U$ für jedes $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Ist K kompakt und U offen mit $K \subset U$, so gibt es stets eine Umgebung W von e mit $WK \subset U$ bzw. $KW \subset U$.

Sind K_1, K_2 kompakt, so auch $K_1 K_2$.

Betrachten wir einmal die Gruppe $\mathcal{G} := \mathbb{R}^n$ mit „+ “ , also $a + b := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ für $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Auf $\mathcal{G}$ haben wir das Lebesgue-Maß μ, was durch

$$\mu((a,b)) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)\ , \quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j < b_j\ , \quad j = 1, \ldots, n\}$$

eindeutig festgelegt ist. Wegen $\mu((a,b) + x) = \mu((a,b))$ erhalten wir

$$\mu(\Delta + x) = \mu(\Delta)\ , \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

d.h. das Lebesgue-Maß hat eine ganz bestimmte Invarianzeigenschaft gegenüber der *Verschiebung* (bei abelschen Gruppen fallen ja Links- und Rechtsverschiebung zusammen).
Außerdem erinnern wir daran, daß $\mu(U) > 0$ ist für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$.

Ist die Existenz eines solchen Maßes „Zufall“? Nein. Wir „konstruieren“ im folgenden auf jeder topologischen Gruppe $\mathfrak{X}$ ein solches Maß und dieses Maß wird sogar bis auf einen konstanten Faktor eindeutig sein (der konstante Faktor repräsentiert sozusagen das (willkürlich festzulegende) Maß einer ausgezeichneten Referenzmenge (Urmeter, Einheitskubus): Im $\mathbb{R}^n$ z.B. erhält eben der Einheitskubus $0 \leq x_j \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ das Maß 1.

7.1 Haarsches Maß, Definition und einfache Eigenschaften

Wir bleiben im folgenden zunächst bei der Linksinvarianz und definieren

Definition. 7.1.1 $\mathcal{G} := \mathfrak{X}$ *sei eine topologische Gruppe. Ein Borel-Maß* μ *auf* $\mathfrak{X}$ *heißt ein Haar-Maß, wenn folgendes gilt: für jede nichtleere offene Menge* $U \subset \mathfrak{X}$ *ist* $\mu(U) > 0$ *und es gilt*

$$\mu(x\,\Delta) = \mu(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}),\ x \in \mathfrak{X} \qquad \textit{(Linksinvarianz).}$$

Wir beweisen sofort

Lemma. 7.1.2 *Sei* μ *auf* $\mathfrak{X}$ *ein linksinvariantes Borelmaß. Dann ist* $\mu(U) > 0$ *für jede offene Menge* $U \neq \emptyset$ *gdw* $\mu \neq 0$ *(also wenn das Maß nicht das Nullmaß ist).*

Beweis: Die eine Richtung ist trivial. Sei also nun $\mu(U_0) = 0$ für eine nichtleere offene Menge U_0. Sei weiter K irgendein beliebiges Kompaktum. Dann ist

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} x\,V_0,$$

wo $U_0 = g_0 V_0$ und $e \in V_0$, V_0 offen. Dann ist auch $\mu(V_0) = 0$ und wegen Heine/Borel gibt es endlich viele Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so daß $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} x_j V_0$. μ ist ein Borelmaß, also gilt

$$\mu(K) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j V_0) = \sum_{j=1}^{n} \mu(V_0) = 0,$$

weil ja μ linksinvariant ist. Also ist $\mu(K) = 0$ für jedes Kompaktum K und damit $\mu = 0$. ■

Wir streben jetzt das Theorem an:

Theorem. 7.1.3 *„Auf* $\mathfrak{X}$ *gibt es ein Haar-Maß“.*

Diesem Theorem nähern wir uns in mehreren Schritten an. Der erste Schritt besteht darin, in relativ primitiver Form nach Vorgabe einer festen Referenzmenge $F \subset \mathfrak{X}$ mit $\operatorname{int} F \neq 0$ (mit $F :=$ innerer Kern von $F :=$ Gesamtheit der inneren Punkte von F) die „Größe" eines Kompaktums K in bezug auf F abzuschätzen.

7.2 Das Verhältnis $K : F$ und die Funktionen $\lambda_U(K) := K : U/A_0 : U$

Sei also $F \subset \mathfrak{X}$ mit $\operatorname{int} F \neq \emptyset$. Dann ist jedenfalls $\bigcup\limits_{g\in\mathfrak{X}} g\,F = \mathfrak{X}$, also $K \subseteq \bigcup\limits_{g\in\mathfrak{X}} g\,F$, wo K ein beliebiges Kompaktum ist. Dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} g_j F$. Wir definieren jetzt

Definition. 7.2.1 $K : F := \min\{n \in \mathbb{N} : K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} g_j F\}$.

Dann ist

$$1 \leq K : F < \infty.$$

Lemma. 7.2.2 *Wenn A kompakt und* $\operatorname{int} A \neq \emptyset$*, so ist*

$$K : F \leq (K : F) \cdot (A : F).$$

Beweis: Es ist jedenfalls (mit gewissen endlich vielen Punkten g_k und h_j

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} g_k A\ , \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} h_j F$$

also

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} g_k \left(\bigcup_{j=1}^{n} h_j F\right) = \bigcup_{k=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} g_k h_j F,$$

hieraus ergibt sich sofort

$$K : F \leq m \cdot n$$

und die Behauptung. ■

Wir lassen uns jetzt leiten von den (inneren) Eigenschaften eines Borel-Maßes, was ja automatisch regulär ist. Wir leiten erst einmal ein „Maß" für die Kompakta her (Inhalt $\lambda(K)$), so daß man $\mu(B) := \sup\limits_{K\subseteq B} \lambda(K)$ definieren kann. Wenn *dann* $\lambda(K) = \inf\limits_{K\subset U} \mu(U)$ nachgewiesen werden kann, so ist dadurch ein Borelmaß definiert.

Sei also jetzt U offen, $U \ni e$ und K kompakt. $K : U$ representiert annähernd den Größenvergleich zwischen K und U. Heuristisch: U soll sich auf den Punkt e zusammenziehen; dann soll „im Limes $U \mapsto \{e\}$" $(K : U)\cdot\ell(U)$, wo $\ell(U)$ eine Art „Normmaß" der Umgebungen U ist, gegen $\mu(K)$ konvergieren.

Ist z.B. $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, $K = [a, b]$, $b - a = c > 0$ und $U = (-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ mit Länge von U gleich r sowie $K : U = n(r)$, also $n(r) \cdot r \geq c$, aber $(n(r) - 1)r < c$ d.h. $c \leq n(r) \cdot r < c + r$, so ist $\lim\limits_{r\to 0} r\, n(r) = c$.

In anderen Fällen ergibt sich beim Grenzübergang ein Faktor, der zu einer anderen „Maßnormierung" führt. Aus diesem Grunde, da wir U „beweglich halten wollen", führen wir eine kompakte Referenzmenge A_0 ein, die in jedem Fall das Maß 1 erhalten soll. Also, im folgenden sei U offen, $U \ni e$, und A_0 fixiert, A_0 kompakt mit $\operatorname{int} A_0 \neq \emptyset$. Dann definieren wir

Definition. 7.2.3 $\lambda_U(K) := \frac{K:U}{A_0:U}\ , \quad K \in \mathfrak{K}\ .$

Man beachte, daß immer $A_0 : U > 0$ ist, weil wegen $\operatorname{int} A_0 \neq \emptyset$ *mindestens ein* $g\,U$ gebraucht wird, um A_0 zu überdecken. Wir beweisen

Theorem. 7.2.4 *Es gilt*

(I) $0 \le \lambda_U(K) < \infty$,

(II) $K_1 \subset K_2$ *impliziert* $\lambda_U(K_1) \le \lambda_U(K_2)$, *(Monotonie),*

(III) $\lambda_U(K_1 \cup K_2) \le \lambda_U(K_1) + \lambda_U(K_2)$, *(endliche Subadditivität),*

(IV) $\lambda_U(x\,K) = \lambda_U(K)$, *(Linksinvarianz),*

(V) Sei K_1, K_2 *kompakt und* $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$, *dann gilt*
$\lambda_U(K_1 \cup K_2) = \lambda_U(K_1) + \lambda_U(K_2)$, *(eingeschränkte Additivität).*

Beweis: (I): $\lambda_U(K) \ge 0$, weil $K : U \ge 0$. $\lambda_U(K) < \infty$, weil $K : U < \infty$, denn K ist kompakt. (II): Sei $K_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} g_jU$ mit $n_0 = K_2 : U$, dann ist $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} g_jU$, also $K_1 : U \le n_0$. (III) Sei $K_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_1} g_jU$, $K_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_2} h_kU$, dann ist $K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_1} g_jU \cup \bigcup_{k=1}^{n_2} h_kU$. Die Anzahl der Terme ist $n_1 + n_2$, also ist $(K_1 \cup K_2) : U \le n_1 + n_2$, damit $(K_1 \cup K_2); U \le K_1U + K_2 : U$ und nach Division durch $A_0 : U$ ergibt sich die Behauptung. (IV): Sei $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} g_jU$, $n_0 = K : U$. Dann ist $x\,K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} x\,g_jU$, also $(x\,K) : U \le K : U$ und natürlich auch $(x^{-1}K) : U \le K : U$, oder, wenn man K durch $x\,K$ ersetzt, $K : U \le (x\,K) : U$, also $(x\,K) : U = K : U$. (V): Sei K_1, K_2 kompakt und $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$. Sei weiter

$$K_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_1} g_jU,\ K_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_2} h_kU,\quad n_1 = K_1 : U,\ n_2 = K_2 : U\ .$$

Wir müssen sicherstellen, daß ein $g\,U$, was z.B. „zu K_1 gehört" (also $K_1 \cap g\,U \ne \emptyset$) auf keinen Fall einen nichtleeren Durchschnitt mit K_2 haben kann (und umgekehrt). Dann nämlich sind die $g\,U$ für K_1 bzw. K_2 „völlig separat" und man darf die $K_j : U$ addieren. Sei also z.B.

$$g\,U \cap K_1 \ne \emptyset.$$

Dann ist die Behauptung: $g\,U \cap K_2 = \emptyset$, denn wäre $g\,U \cap K_2 \ne \emptyset$, so gäbe es also $x_1 \in K_1$ mit $x_1 = g\,u_1, u_1 \in U$ und $x_2 \in K_2$ mit $x_2 = g\,u_2,\ u_2 \in U$, also

$$g = x_1z_1^{-1} = x_2u_2^{-1}\ , \text{ d.h. } g \in K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1},$$

ein Widerspruch. ■

Die Strategie der „Konstruktion" ist nun folgende: Man beseitige, ausgehend von den $\lambda_U(\cdot)$, den „Defekt" wegen der nur „eingeschränkten Additivität", und versuche, eine Funktion $\lambda(\cdot)$ auf $\mathfrak{K}$ zu gewinnen mit den Eigenschaften

(I) $0 \le \lambda(K) < \infty$,

(II) $K_1 \subseteq K_2$ impliziert $\lambda(K_1) \le \lambda(K_2)$,

(III) $\lambda(K_1 \cup K_2) \le \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$,

(IV) $\lambda(g\,K) = \lambda(K)$,

(V) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ impliziert $\lambda(K_1 \cup K_2) = \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$.

Eine solche Funktion heißt ein *Inhalt* (hier auf der Gesamtheit $\mathfrak{K}$ der kompakten Mengen K) mit Linksinvarianz.

Übrigens *folgt* dann bereits, daß $\lambda(\emptyset) = 0$ ist. Weil $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, also $\lambda(\emptyset) = \lambda(\emptyset \cup \emptyset) = \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) < \infty$ also $\lambda(\emptyset) = 0$. Der Prozeß der Bildung eines solchen Inhalts aus den Funktionen $\lambda_U(\cdot)$ heraus erfordert einige Vorbereitungen.

7.3 Kompaktheit und Cantorsche Durchschnittseigenschaft

Wir betrachten zwar nur lokalkompakte, separable und *metrisierbare* Räume, erinnern aber daran, daß die (bzw. eine) Topologie auf $\mathfrak{X}$ durch Vorgabe des Systems der offenen Mengen $\{\mathcal{G}\}$ gegeben ist, was (nur) den Bedingungen

- $\mathfrak{X}$ und $\emptyset$ sind offene Mengen,
- endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen,
- beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen,

genügt.
$\mathfrak{X}$ heißt dann ein topologischer Raum. Zur Erinnerung: $\mathfrak{X}$ heißt *Hausdorff*sch := wenn $x_1 \neq x_2$, so gibt es offene Mengen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ mit $x_1 \in \mathcal{G}_1,\ x_2 \in \mathcal{G}_2,\ \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \emptyset$. Zur weiteren Erinnerung: Die (HB-)Kompaktheit (HB meint Heine-Borel) eines Hausdorffschen Raumes $\mathfrak{X}$ ist unter Benutzung des Begriffs der „offenen Menge“ definiert.

Nützlich ist nun eine Umformulierung der (HB-)Kompaktheit unter Benutzung des Begriffs der „abgeschlossenen Menge“.

Zur Vorbereitung führen wir folgende Definition ein: $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sei irgendein System von Teilmengen von $\mathfrak{X}$.

Definition. 7.3.1 *Das System $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ hat die finite Durchschnittseigenschaft (FD-Eigenschaft), wenn: für jedes endliche Teilsystem $\{M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, \ldots, M_{\alpha_n}\}$ ist $\bigcap\limits_{j=1}^{n} M_{\alpha_j} \neq \emptyset$.*

Jetzt zeigen wir

Lemma. 7.3.2 *$\mathfrak{X}$ ist (HB-)kompakt genau dann wenn für jedes System $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ abgeschlossener Mengen mit der FD-Eigenschaft gilt*

$$\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha \neq \emptyset\ .$$

Beweis: (I) $\mathfrak{X}$ sei kompakt und $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sei ein System abgeschlossener Mengen mit der FD-Eigenschaft. Dann müssen wir zeigen $\bigcap\limits_{\alpha} C_\alpha \neq \emptyset$. Der Beweis erfolgt durch Kontraposition: Also wir nehmen an, es gelte $\bigcap\limits_{\alpha} C_\alpha = \emptyset$. Dann folgt $(\bigcap\limits_{\alpha} C_\alpha)' = \bigcup\limits_{\alpha} C'_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha}(\mathfrak{X} \setminus C_\alpha) = \mathfrak{X}$, die $\mathfrak{X} \setminus C_\alpha$ sind aber offen, wegen der HB-Eigenschaft folgt: es gibt endlich viele Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mit $\bigcup\limits_{j=1}^{n}(\mathfrak{X} \setminus C_\alpha) = \mathfrak{X}$, d.h. $\emptyset = \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n}(\mathfrak{X} \setminus C_\alpha)\right)' = \bigcap\limits_{j=1}^{n} C_{\alpha_j}$ im Widerspruch zur FD-Eigenschaft.

(II) Für jedes System $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ abgeschlossener Mengen mit der FD-Eigenschaft gelte $\bigcap\limits_{\alpha\in A} C_\alpha \neq \emptyset$. Dann müssen wir zeigen: $\mathfrak{X}$ ist (HB-)kompakt. Sei also $\mathfrak{X} = \bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{G}_\alpha$ eine offene Überdeckung von $\mathfrak{X}$. Dann müssen wir zeigen: Es gibt ein endliches Index-Teilsystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so daß $\mathfrak{X} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathcal{G}_{\alpha_j}$. Der Beweis erfolgt wieder durch Kontraposition: Also wir nehmen an, für *alle* endlichen Systeme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sei $\mathfrak{X} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathcal{G}_{\alpha_j} \neq \emptyset$, d.h.

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{G}_{\alpha_j}\right)' \neq \emptyset \quad \text{oder} \quad \bigcap_{j=1}^{n}(\mathfrak{X} \setminus \mathcal{G}_{\alpha_j}) \neq \emptyset\ .$$

Die Mengen $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{G}_{\alpha_j}$ sind abgeschlossen, d.h. $\{\mathfrak{X} \setminus \mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist ein System abgeschlossener Mengen mit der FD-Eigenschaft. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{X} \setminus \mathcal{G}_\alpha) \neq \emptyset \ , \quad \text{d.h.} \quad (\bigcup_\alpha \mathcal{G}_\alpha)' \neq \emptyset \ ,$$

also $\mathfrak{X} \setminus \bigcup_\alpha \mathcal{G}_\alpha \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Überdeckungseigenschaft.

7.4 Cartesische Produkte, Tychonoff-Topologie und das Theorem von Tychonoff

Wir betrachten jetzt ein beliebiges System $\{\mathfrak{X}\}_{\alpha \in A}$ von topologischen Räumen (bei uns lokalkompakt, separabel, metrisierbar), wobei A eine beliebige Indexmenge ist, die insbesondere überabzählbar sein kann (z.B. könnte $A := \mathbb{R}$ sein).

Definition. 7.4.1 *Das Cartesische Produkt* $\prod_{\alpha \in A} \mathfrak{X}_\alpha$ *ist die Gesamtheit aller Funktionen* $A \ni \alpha \mapsto x(\alpha) \in \mathfrak{X}_\alpha$ *(α-tupel mit Werten je in $\mathfrak{X}_\alpha$, man schreibt auch $x(\alpha) = x_\alpha$)*

In $\prod_{\alpha \in A} \mathfrak{X}_\alpha$ kann man die *Tychonoff-Topologie* einführen, z.B. indem man eine Basis ϑ der Gesamtheit der offenen Mengen angibt:

$\vartheta := \{\mathcal{G} \subseteq \prod_{\alpha \in A} \mathfrak{X}_\alpha : \mathcal{G} = \prod_\alpha \mathcal{G}_\alpha$, wobei $\mathcal{G}_\alpha$ offen in $\mathfrak{X}_\alpha$ und $\mathcal{G}_\alpha = \mathfrak{X}_\alpha$ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Indizes $\alpha\}$.

Definition. 7.4.2 *Die offenen Mengen der Tychonoff–Topologie sind definiert durch*
$U_\mathcal{S} = \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}$, *wo $\mathcal{S} \subseteq \vartheta$ irgendein Teilsystem von ϑ ist*

Der Beweis, daß die $\{U_\mathcal{S}\}_\mathcal{S}$ die Eigenschaften für offene Mengen erfüllen, wird dem Leser überlassen. Die Tychonoff-Topologie hängt mit der „punktweisen Konvergenz" von Funktionenfolgen zusammen: Sei $x_n \in \prod_\alpha \mathfrak{X}_\alpha$ eine Funktionenfolge aus dem Cartesischen Produkt und x_0 eine Funktion. Dann gilt

Die Folge x_n konvergiert gegen x_0 (im Sinne der Tychonoff-Topologie) genau dann wenn für jeden Index α gilt $x_n(\alpha) \mapsto x_0(\alpha)$ im Sinne der Topologie in $\mathfrak{X}_\alpha$. Auch das möge der Leser zeigen.

Es gilt nun folgendes, nicht ganz auf der Hand liegendes

Theorem. 7.4.3 *(Tychonoff) Wenn alle $\mathfrak{X}_\alpha$ des System $\{\mathfrak{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kompakt sind, so ist das Cartesische Produkt $\prod_\alpha \mathfrak{X}_\alpha$ kompakt in der Tychonoff-Topologie.*

Beweis: Zu beweisen ist z.B.: Wenn $\mathcal{S} := \{S\}$ ein System abgeschlossener Mengen mit der FD-Eigenschaft ist, so ist $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \neq \emptyset$.

Gleich am Anfang des Beweises verwenden wir das

Lemma. 7.4.4 *(Zorn) Hat in einer Partialordnung jede Kette eine obere Schranke, so gibt es maximale Elemente.*

Dieses Lemma von Zorn erlaubt es uns, das System $\mathcal{S}$ zu einem *maximalen* System $\mathcal{S}_{\max} \supset \mathcal{S}$ mit der FD-Eigenschaft zu erweitern. Dabei besteht $\mathcal{S}_{\max}$ nicht mehr notwendig aus abgeschlossenen Mengen. Kurz: Es gibt ein System $\mathcal{S}_{\max}$ von Teilmengen von $\prod_\alpha \mathfrak{X}_\alpha$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{\max}$,

2. $\mathcal{S}_{\max}$ hat die FD-Eigenschaft,

3. Es gibt *kein* (echt) umfassenderes System $\mathcal{S}' \supset \mathcal{S}_{\max}$ mit der FD-Eigenschaft.

Die Mengen aus $\mathcal{S}_{\max}$ bezeichnen wir mit C, $C \in \mathcal{S}_{\max}$. Mit P_{α_0} bezeichnen wir die *Projektion* von $\prod\limits_{\alpha} \mathfrak{X}_\alpha$ auf $\mathfrak{X}_{\alpha_0}$, also $P_{\alpha_0} : \prod\limits_{\alpha} \mathfrak{X}_\alpha \mapsto \mathfrak{X}_{\alpha_0}$, $P_{\alpha_0}(x(\cdot)) := x(\alpha_0)$, das ist einfach die „Evaluation" der Funktion $x(\cdot)$ im Punkt α_0. Sei $C_\alpha := P_\alpha C \subseteq \mathfrak{X}_\alpha$. Es gilt

$$P_\alpha \left(\bigcap_{j=1}^{n} C_j \right) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} P_\alpha C_j \ .$$

Weil aber $\mathcal{S}_{\max}$ die FD-Eigenschaft hat, so ist $P_\alpha \left(\bigcap\limits_{j=1}^{n} C_j \right) \neq \emptyset$, demzufolge hat auch $\{P_\alpha C\}_{C \in \mathcal{S}_{\max}}$ die FD-Eigenschaft (übrigens müssen wegen der Maximalitätseigenschaft alle endlichen Durchschnitte $\bigcap\limits_{j=1}^{n} C_j \in \mathcal{S}_{\max}$ sein).

Wenn aber $\{P_\alpha C\}_{C \in \mathcal{S}_{\max}}$ die FD-Eigenschaft hat, dann natürlich auch $\{\operatorname{clo} P_\alpha C\}_{C \in \mathcal{S}_{\max}}$ (wobei der Abschluß im Raum $\mathfrak{X}_\alpha$ zu verstehen ist). Weil aber nach Voraussetzung die $\mathfrak{X}_\alpha$ alle kompakt sind, haben wir $\bigcap\limits_{C \in \mathcal{S}_{\max}} \operatorname{clo} P_\alpha C \neq \emptyset$, so daß wir einen Punkt $p_\alpha \in \mathfrak{X}_\alpha$ notieren können mit $p_\alpha \in \bigcap\limits_{C \in \mathcal{S}_{\max}} \operatorname{clo} P_\alpha C$. Jetzt setzen wir $p := \prod\limits_{\alpha \in A} p_\alpha \in \mathfrak{X} := \prod\limits_{\alpha \in A} \mathfrak{X}_\alpha$ und müssen (bzw. wollen) zeigen, daß $p \in \bigcap\limits_{S \in \mathcal{S}} S$. Wir bilden zuerst einmal eine (beliebige) offene Menge $G_{\alpha_0} \ni p_{\alpha_0}$, $G_{\alpha_0} \subseteq \mathfrak{X}_{\alpha_0}$. Weil nun $p_{\alpha_0} \in \operatorname{clo} P_{\alpha_0} C$ gilt für jedes $C \in \mathcal{S}_{\max}$ und $p_{\alpha_0} \in G_{\alpha_0}$, so erhalten wir

$$G_{\alpha_0} \cap P_{\alpha_0} C \neq \emptyset \quad \text{für alle } \alpha_0 \text{ und für alle } C \in \mathcal{S}_{\max} \ .$$

Das bedeutet aber: Es gibt eine Funktion $f \in C$ mit $P_{\alpha_0} f \in G_{\alpha_0}$. Wiederum stelle man sich vor: f hat die Funktionswerte $f(\alpha)$ und $P_\alpha f$ ist die Zuordnung dieses Wertes.

Jetzt setzen wir

$$\mathfrak{X} \supset G^{\alpha_0} := \{x \in \mathfrak{X} : x = \prod_{\alpha \in A} x_\alpha \text{ mit } x_{\alpha_0} \in G_{\alpha_0},$$
$$\text{die übrigen } x_\beta \text{ können völlig beliebig sein } \}.$$

Dann ist natürlich

$$G^{\alpha_0} \cap C \neq \emptyset$$

für alle α_0 und für alle $C \in \mathcal{S}_{\max}$, denn eine Funktion $f \in C$ mit $P_{\alpha_0} f \in G_{\alpha_0}$ (und die gibt es ja nach obigem!) liegt ja auch in G^{α_0}, weil die übrigen Funktionswerte $P_\beta f$ überhaupt keine Rolle spielen, so daß $f \in G^{\alpha_0}$ heraus kommt. Weil aber $\mathcal{S}_{\max}$ maximal ist, so muß jetzt automatisch $G^{\alpha_0} \in \mathcal{S}_{\max}$ sein; das gilt für jedes α_0.

Dann müssen aber auch alle endlichen Durchschnitte (gebildet aus den G^α) zu $\mathcal{S}_{\max}$ gehören, weil ja

$$G^{\alpha_1} \cap G^{\alpha_2} \cap \ldots \cap G^{\alpha_n} \cap C \neq \emptyset \ , \quad \text{für alle } C \in \mathcal{S}_{\max},$$

und zwar für jedes endliche System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Eine offene Menge der Form $G^{\alpha_1} \cap G^{\alpha_2} \cap \ldots G^{\alpha_n}$ (man bedenke, daß ja $p_{\alpha_j} \in G_{\alpha_j}$ gilt) ist aber bereits die allgemeine Form einer Basis für die offenen Mengen in $\mathfrak{X}$, die p enthalten (Umgebungsbasis für den Punkt p). Wenn $\mathcal{G}$ offen ist in $\mathfrak{X}$ und $p \in \mathcal{G}$, so bedeutet das $\mathcal{S} : \mathcal{G}$ enthält eine offene Menge der Struktur $G^{\alpha_1} \cap G^{\alpha_2} \cap \ldots \cap G^{\alpha_n}$, d.h. wir haben jetzt:

Wenn $p \in \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{X}$ offen, so ist $\mathcal{G} \cap C \neq \emptyset$ für alle $C \in \mathcal{S}_{\max}$, insbesondere ist

$$\mathcal{G} \cap S \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad S \in \mathcal{S}.$$

Das bedeutet also $p \in$ clo C (dieser Abschluß bezieht sich auf $\mathfrak{X}$) und für die S wegen $S =$ clo S auch $p \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}$, also

$$p \in \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \ ,$$

d.h. $\mathfrak{X}$ ist kompakt aufgrund des Lemmas 7.4.4 in Abschnitt 7.4. ∎

7.5 Konstruktion eines „Inhalts" für Kompakta und seine Regularität

Wir knüpfen jetzt an den Schluß von Abschnitt 7.3 an, wo der Begriff des *Inhalts* auf $\mathfrak{K}$ definiert wurde (durch die 5 Eigenschaften, I.-V., (p. 86).

Wir können jetzt die Existenz eines Inhalts auf $\mathfrak{K}$ beweisen. Dazu gehen wir von der Gesamtheit $\{\lambda_U\}$ der Funktionen λ_U auf $\mathfrak{K}$ aus (79), wobei U offen und $e \in U$ gilt.

Der Anschaulichkeit halber wählen wir eine absteigende Folge $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ solcher Umgebungen von e, die sich auf e zusammenziehen, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \{e\}$. Wir setzen jetzt

$$\Lambda_n := \{\lambda_V : V \subseteq U_n\}.$$

Aus Lemma 7.2.2 (p. 79) folgt ja $0 \leq \lambda_V(K) \leq K : A_0$. Wir nehmen also jetzt $\mathfrak{K}$ als Indexmenge und zu jedem $K \in \mathfrak{K}$ bilden wir das abgeschlossene Intervall $[0, K : A_0] \subset \mathbb{R}$. $[0, K : A_0]$ ist kompakt. Wir setzen nun

$$\mathfrak{Y} := \prod_{K \in \mathfrak{K}} [0, K : A_0] \ ,$$

m.a.W. wir betrachten die Gesamtheit aller Funktionen f auf $\mathfrak{K}$, deren Funktionswert im Punkt K im Intervall $[0, K : A_0]$ liegt, $0 \leq f(K) \leq K : A_0$. Wir wissen: $\mathfrak{Y}$ ist kompakt in der Tychonoff-Topologie. Außerdem haben wir

$$\Lambda_n \subseteq \mathfrak{Y} \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und die Λ_n bilden eine absteigende Folge

$$\Lambda_1 \supseteq \Lambda_2 \supseteq \Lambda_3 \supseteq \ldots .$$

Deshalb ist auch

$$\operatorname{clo} \Lambda_1 \supseteq \operatorname{clo} \Lambda_2 \supseteq \operatorname{clo} \Lambda_3 \supseteq \ldots .$$

Das System $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ hat die FD-Eigenschaft, weil ja jedes $\Lambda_n \neq \emptyset$. Dann hat natürlich auch das System $\{\operatorname{clo} \Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ die FD-Eigenschaft und, weil $\mathfrak{Y}$ kompakt ist, ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{clo} \Lambda_n \neq \emptyset$, m.a.W. es gibt eine Funktion μ mit

$$\mu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{clo} \Lambda_n \ . \tag{7.5.1}$$

Wir zeigen nun, daß μ die Eigenschaften (I) - (V) (p. 80) erfüllt, m.a.W. daß μ ein Inhalt auf $\mathfrak{K}$ ist.

Theorem. 7.5.1 *Die Funktion μ ist ein Inhalt auf $\mathfrak{K}$ mit Linksinvarianz.*

Beweis: (I) Wir haben $0 \leq \lambda_U(K) \leq K : A_0$. Das muß dann auch für μ gelten. (II) Sei $\Delta := \{\chi \in \mathfrak{Y} : K_1 \subseteq K_2 \text{ impliziert } \chi(K_1) \leq \chi(K_2)\}$. Δ ist abgeschlossen in $\mathfrak{Y}$. Wir wissen schon, daß $\Lambda_n \subseteq \Delta$ gilt für alle $n = 1, 2, \ldots$. Dann gilt auch $\operatorname{clo} \Lambda_n \subseteq \Delta$, also $\mu \in \Delta$, d.h. μ ist monoton. (III) Sei $\Delta := \{\chi \in \mathfrak{Y} : \chi(K_1 \cup K_2) \leq \chi(K_1) + \chi(K_2)\}$.
Wieder ist Δ abgeschlossen in $\mathfrak{Y}$. Wir wissen schon, daß $\Lambda_n \subseteq \Delta$ gilt für alle $n = 1, 2, \ldots$, also gilt auch $\operatorname{clo} \Lambda_n \subseteq \Delta$ und damit $\mu \in \Delta$, d.h. μ ist subadditiv. (IV) Sei $\Delta := \{\chi \in \mathfrak{Y} : \chi(g\, K) = \chi(K)$ für alle

$g \in \mathfrak{X}\}$. Δ ist abgeschlossen in $\mathfrak{Y}$. Wir wissen schon: $\Lambda_n \subseteq \Delta$ für alle n, also clo $\Lambda_n \subseteq \Delta$ und $\mu \in \Delta$, d.h. μ ist linksinvariant. (V) Jetzt zeigen wir: μ ist (endlich) additiv. Sei $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $\Delta(K_1, K_2) = \{\chi \in \mathfrak{Y} : \chi(K_1 \cup K_2) = \chi(K_1) + \chi(K_2)\}$, und $\Delta := \{\chi \in \mathfrak{Y} : K_1 \cap K_2 = \emptyset$ impliziert $\chi(K_1 \cup K_2) = \chi(K_1) + \chi(K_2)\}$. Dann ist $\Delta(K_1, K_2)$ abgeschlossen für jedes Paar K_1, K_2 und

$$\Delta = \bigcap_{\substack{K_1, K_2 \\ K_1 \cap K_2 = \emptyset}} \Delta(K_1, K_2) \ ,$$

Δ ist abgeschlossen. Zu gegebenem K_1, K_2 mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ existiert ein U_{n_0} mit $K_1 U_{n_0}^{-1} \cap K_2 U_{n_0}^{-1} = \emptyset$, beachte, daß $n_0 = n_0(K_1, K_2)$. Wenn nun $V \subseteq U_{n_0}$, so ist λ_V additiv für K_1, K_2 (wegen Theorem 7.2.4, (V) p. 86), also

$$\Lambda_{n_0} \subseteq \Delta(K_1, K_2)$$

und

$$\text{clo}\, \Lambda_{n_0} \subseteq \Delta(K_1, K_2) \ .$$

Also ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{clo}\, \Lambda_n \subseteq \bigcap_{\substack{K_1, K_2 \\ K_1 \cap K_2 = \emptyset}} \Delta(K_1, K_2) = \Delta \ ,$$

also $\mu \in \Delta$ und das heißt: μ ist (endlich) additiv. Damit ist Theorem 7.5.1 bewiesen. ∎

Die Regularität des Inhalts μ: Nachdem wir für unser μ gezeigt haben, daß μ ein Inhalt mit Linksinvarianz ist, zeigen wir jetzt eine Regularitätseigenschaft, nämlich

Lemma. 7.5.2 *μ sei wie in Theorem 7.5.1 gewählt (Relation* (7.5.1)*). Dann gilt*

$$\mu(K) = \inf_{K' \supset\ int\ K' \supset K} \mu(K') \ , \quad K \in \mathfrak{K} \ .$$

Man nennt dann μ einen regulären Inhalt. Dem Beweis dieses Lemmas schicken wir ein zweites voraus:

Lemma. 7.5.3 *Für jedes $U \ni e$ und jedes $K \in \mathfrak{K}$ gilt*

$$K : U = \inf_{K' \supset\ int\ K' \supset K} K' : U \ .$$

Beweis: Wegen $K : U \leq K' : U$ folgt $K : U \leq \inf_{K'} K' : U$, wo $K' \supset int K' \supset K$. Sei nun $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} g_j U$ mit $n := K : U$. Setze $\mathcal{G} := \bigcup_{j=1}^{n} g_j U$. Dann existiert eine offene Umgebung $\mathcal{G}'$ von K, so daß

$$K \subset \mathcal{G}' \subseteq \text{clo}\, \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$$

gilt, d.h. der Abschluß von $\mathcal{G}'$ liegt immer noch in $\mathcal{G}$. Dann ist $\mathcal{G}$ eine offene Überdeckung von clo $\mathcal{G}'$ mit $K : U$ Elementen gU, clo $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{n} g_j U$, d.h. aber clo $\mathcal{G}' : U \leq K : U$, also

$$\inf_{K' \supset\ int\ K' \supset K} K' : U \leq (\text{clo}\, \mathcal{G}') : U \leq K : U,$$

clo $\mathcal{G}'$ ist ja ein solches zur Konkurrenz zugelassenes K', weil $K \subset \mathcal{G}' \subseteq int\ (\text{clo}\, \mathcal{G}') \subset \text{clo}\, \mathcal{G}'$. ∎

Beweis: von Lemma 7.5.2: Als Folgerung erhalten wir aus Lemma 7.5.3

$$\frac{K:U}{A_0:U} = \inf_{K' \supset\ int\ K' \supset K} \frac{K':U}{A_0:U} \ ,$$

also

$$\lambda_U(K) = \inf_{K' \supset\ int\ K' \supset K} \lambda_U(K'),$$

d.h. alle $\lambda_V \in \Lambda_n$ haben diese Eigkenschaft, also auch μ und das ist die Behauptung. ∎

Fazit: Unser μ ist ein *regulärer Inhalt auf $\mathfrak{K}$ mit Linksinvarianz.*

Es empfiehlt sich, diese Konstruktion eines regulären Inhalts mit Linksinvarianz für eine beliebige lokalkompakte, separable, metrisierbare topologische Gruppe $\mathfrak{G}(= \mathfrak{X})$ einmal in Korrespondenz zu sehen zur Konstruktion im Spezialfall $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, wo wir $\lambda(K)$, wo $K = [a,b] \setminus \mathcal{G}$, definiert hatten durch Rückgriff auf schon definiertes $\mu(\mathcal{G})$. Jedenfalls: dieses damalige $\lambda(K)$ war und ist auch ein regulärer Inhalt mit der Verschiebungsinvarianz.

7.6 Der innere Inhalt offener Mengen; Konstruktion eines Haarschen Maßes

Wir verfahren jetzt in ständiger Analogie zu früheren Überlegungen. $\mathcal{G} := \mathfrak{X}$ sei unsere Gruppe, $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit der kompakten, $\mathfrak{U}$ die Gesamtheit der offenen Mengen μ sei unserer regulärer Inhalt auf $\mathfrak{K}$ mit Linksinvarianz. Für $U \in \mathfrak{U}$ definieren wir jetzt einen *inneren Inhalt* durch

Definition. 7.6.1 $\mu_*(U) := \sup\limits_{K \subset U} \mu(K), \quad U \in \mathfrak{U}$

und zeigen erst einmal

Theorem. 7.6.2 *Der innere Inhalt μ_* auf $\mathfrak{U}$ hat folgende Eigenschaften:*

I. $\mu_*(\emptyset) = \emptyset$,

II. μ_* ist monoton,

III. μ_* ist abzählbar subadditiv,

IV. μ_* ist abzählbar additiv,

V. μ_* ist linksinvariant.

Beweis: I. ist klar. II. Sei $U_1 \subseteq U_2$ und $K \subset U_1 \subseteq U_2$. Dann ist $\mu_*(U_1) = \sup\limits_{K \subset U_1} \mu(K) \leq \mu_*(U_2)$. III. Sei $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ und $K \subset U_1 \cup U_2$. Dann existieren Kompakta $K_1 \subset U_1,\ K_2 \subset U_2$ und $K = K_1 \cup K_2$. Denn: Bilde $K \setminus U_1,\ K \setminus U_2$, die sind disjunkt, also existieren offene Umgebungen V_1, V_2 mit $K \setminus U_1 \subset V_1,\ K \setminus U_2 \subset V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Bilde $K \setminus V_1 \subset U_1,\ K \setminus V_2 \subset U_2$, dann ist $(K \setminus V_1) \cup (K \setminus V_2) = K$.

Für den Inhalt μ gilt aber bereits die Subadditivität, d.h. wir haben

$$\mu(K) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mu_*(U_1) + \mu_*(U_2),$$

also ist

$$\mu_*(U_1 \cup U_2) \leq \mu_*(U_1) + \mu_*(U_2).$$

Das erweitert man durch Induktion und erhält: μ_* ist endlich subadditiv.

Nun sei $\{U_1, U_2, U_3, \ldots\} \subset \mathfrak{U}$. Sei weiter $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} U_j$. Wegen der Kompaktheit von K gibt es ein n mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j\ .$$

Dann folgt

$$\mu(K) \leq \mu_*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} U_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu_*(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(U_j) \ ,$$

also

$$\sup_{K \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j} \mu(K) = \mu_*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(U_j) \ .$$

IV. Sei $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Sei weiter $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$. Dann folgt $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ und $K_1 \cup K_2 \subset U_1 \cup U_2$. Für den Inhalt haben wir bereits die Additivität, also folgt

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) = \mu(K_1 \cup K_2) \leq \mu_*(U_1 \cup U_2)$$

und hieraus

$$\mu_*(U_1) + \mu_*(U_2) = \sup_{K_1 \subset U_1} \mu(K_1) + \sup_{K_2 \subset U_2} \mu(K_2) \leq \mu_*(U_1 \cup U_2) \ .$$

Außerdem haben wir bereits die Subadditivität für μ_*. Deshalb erhalten wir jetzt die Additivität und durch Induktion wieder die endliche Additivität. Sei jetzt $\{U_1, U_2, U_3, \ldots\} \subset \mathfrak{U}$ und die U_j paarweise disjunkt. Dann ist

$$\mu_*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\Big) \underbrace{\geq}_{\substack{\text{wegen der} \\ \text{Monotonie!}}} \mu_*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} U_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu_*(U_j)$$

und das gilt für alle n, also auch

$$\mu_*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\Big) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(U_j) \ .$$

Zusammen mit der abzählbaren Subadditivität erhalten wir damit die abzählbare Additivität. Die Eigenschaft V. (Linksinvarianz) ist klar. ■

Ein erster (und immer gültiger) Zusammenhang zwischen μ und μ_* ist folgendermaßen gegeben:

Lemma. 7.6.3 *Es ist*

$$\mu_*(int\ K) \leq \mu(K) \leq \inf_{U \supset K} \mu_*(U), \quad K \in \mathfrak{K} \ .$$

Beweis: Sei $K \in \mathfrak{K}$, $U \in \mathfrak{U}$ und $K \subset U$. Dann ist $\mu(K) \leq \mu_*(U)$, also auch

$$\mu(K) \leq \inf_{U \supset K} \mu_*(U) \ .$$

Das wäre die rechte Seite der Ungleichung. Weiter sei $C \in \mathfrak{K}$ mit $C \subset\ int\ K \subset K$. Dann folgt erst einmal $\mu(C) \leq \mu(K)$, und hieraus

$$\mu_*(int\ K) = \sup_{C \subset int\ K} \mu(C) \leq \mu(K)$$

und das ist die linke Seite. ■

Weil nun aber unser Inhalt μ regulär ist, erhalten wir sogar

Theorem. 7.6.4 *Es ist*

$$\mu(K) = \inf_{U \supset K} \mu_*(U) \ , \quad K \in \mathfrak{K} \ .$$

Beweis: Sei $K \in \mathfrak{K}$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon \in \mathfrak{K}$ mit $K \subset int\ C_\varepsilon$ und

$$\mu(C_\varepsilon) \leq \mu(K) + \varepsilon \ .$$

Das kommt von der Regularität von μ. Dann erhalten wir aber mit Lemma 7.6.3:

$$\mu(K) \leq \inf_{U \supset K} \mu_*(U) \leq \inf_{\substack{V \\ V \supseteq int\ C_\varepsilon}} \mu_*(V) \leq \mu_*(\int C_\varepsilon) \leq \mu(C_\varepsilon) \leq \mu(K) + \varepsilon \ ,$$

wobei die dritte Abschätzung gilt, weil $int\ C_\varepsilon$ ja eine der möglichen Konkurrenzmengen V ist.
Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, muß in der ersten Ungleichung ganz am Anfang das Gleichheitszeichen stehen. ■

Beweis: von Theorem 7.1.3 Mit dem Theorem 7.6.4 haben wir nun den Anschluß gewonnen an unsere frühere Theorie der Konstruktion eines Borel-Maßes (siehe Abschnitt 5). Das bedeutet in unserem Fall: Durch

$$\mu^*(\Delta) := \inf_{U \supseteq \Delta} \mu_*(U) \ , \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$$

ist ein Borel-Maß auf $\mathfrak{X}$ gegeben mit der Eigenschaft

$$\mu^*(K) = \mu(K) \ , \quad K \in \mathfrak{K},$$

d.h. der „Inhalt" μ auf den kompakten Mengen wird durch das Borelmaß μ^* reproduziert.

Außerdem: Weil μ_* linksinvariant ist, ergibt sich

$$\mu^*(g\,\Delta) = \mu^*(\Delta) \ , \quad g \in \mathfrak{X},\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}),$$

d.h. das Borelmaß μ^* ist linksinvariant. Wegen $\mu(A_0) = 1$ ist also $\mu^*(A_0) = 1$, d.h. $\mu^* \neq 0$. D.h. A_0 ist die „Maßstabsmenge" für μ^*, sie liefert eine Normierung. Wir verwenden im folgenden für μ^* die Bezeichnung μ. Damit ist das Theorem 7.1.3 bewiesen. ■

7.7 Die Einzigkeit des Haarschen Maßes

Theorem. 7.7.1 *Sei $\mathcal{G} := \mathfrak{X}$ wie bisher. μ sei ein Haarsches Maß. Dann ist μ bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt, d.h. ist ν ein zweites Haarsches Maß auf $\mathfrak{G}$, so ist $\nu(\Delta) = c\,\mu(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, mit einer festen positiven Konstanten $c > 0$.*

Beweis: Seien also μ und ν zwei Haarsche Maße (also auch beide linksinvariant). Dann betrachten wir auf $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ das Produktmaß $\mu \times \nu$ und führen zunächst einmal spezielle *maßerhaltende* Homöomorphismen von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ ein: Sei

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \ni (x, y) \mapsto S(x, y) := (x, xy) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G},$$

S ist stetig und

$$S^{-1}(x, y) = (x, x^{-1}y),$$

S^{-1} stetig, S ist ein Homöomorphismus und es ist

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(S(dx, dy)) &= (\mu \times \nu)(dx, xdx) \\ &= \mu(dx) \cdot \nu(xdy) = \mu(dx) \cdot \nu(dy) = (\mu \times \nu)(dx, dy) \ , \end{aligned}$$

also $(\mu \times \nu) \circ S = \mu \times \nu$ oder: S ist maßerhaltend. Sei weiter

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \ni (x, y) \to T(x, y) := (yx, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}.$$

Ganz analog ergibt sich

$$(\mu \times \nu) \circ T = \mu \times \nu,$$

T ist auch ein maßerhaltender Homöomorphismus. Dann ist auch $S^{-1} \circ T$ ein maßerhaltender Homöomorphismus und

$$(S^{-1} \circ T)(x, y) = S^{-1}(yx, y) = (yx, (yx)^{-1}y) = (yx, x^{-1}) \ .$$

Nun sei Δ_0 eine fixierte kompakte Borelmenge in $\mathcal{G}$ mit $int\,\Delta_0 \neq \emptyset$, so daß also $0 < \mu(\Delta_0) < \infty$. Weiter sei g eine auf $\mathcal{G}$ ν-integrable Funktion. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mu(\Delta_0)\int_{\mathfrak{G}} g(y)\nu(dy) &= \int_{\mathfrak{G}} \chi_{\Delta_0}(x)\mu(dx)\int_{\mathfrak{G}} g(y)\nu(dy)\\
&= \int_{\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}} \chi_{\Delta_0}(x)g(y)(\mu\times\nu)(dx,dy)\\
&= \int_{\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}} \chi_{\Delta_0}(yx)g(x^{-1})(\mu\times\nu)(dx,dy)\\
&= \int_{\mathfrak{G}}\left\{\int_{\mathfrak{G}} \chi_{\Delta_0}(yx)g(x^{-1})\nu(dy)\right\}\mu(dx)\\
&= \int_{\mathfrak{G}} g(x^{-1})\nu(\Delta_0 x^{-1})\mu(dx)\ .
\end{aligned}$$

Wir setzen jetzt

$$f(x) := g(x^{-1})\nu(\Delta_0\, x^{-1}),$$

dann ist

$$g(y) = \frac{f(y^{-1})}{\nu(\Delta_0 y)}\ .$$

Jedenfalls ist f μ-integrabel und wir können schreiben

$$\int_{\mathfrak{G}} f(x)\mu(dx) = \mu(\Delta_0)\int_{\mathfrak{G}} \frac{f(y^{-1})}{\nu(\Delta_0 y)}\nu(dy)\ . \tag{7.7.2}$$

Diese Formel muß natürlich auch für $\mu = \nu$ gelten:

$$\int_{\mathfrak{G}} f(x)\nu(dx) = \nu(\Delta_0)\int_{\mathfrak{G}} \frac{f(y^{-1})}{\nu(\Delta_0 y)}\nu(dy)$$

Diese letzte Gleichung multiplizieren wir mit $\mu(\Delta_0)$:

$$\mu(\Delta_0)\int_{\mathfrak{G}} f(x)\nu(dx) = \nu(\Delta_0)\cdot\underbrace{\mu(\Delta_0)\int_{\mathfrak{G}} \frac{f(y^{-1})}{\nu(\Delta_0 y)}\nu(dy)}_{\text{das ist aber das Integral}}$$

$$\int_{\mathcal{G}} f(x)\mu(dx) \quad \text{((siehe 7.7.2))}$$

also erhalten wir $\mu(\Delta_0)\int_{\mathfrak{G}} f(x)\nu(dx) = \nu(\Delta_0)\int_{\mathfrak{G}} f(x)\mu(dx)$.

Jetzt sei Δ eine beliebige Borelmenge in $\mathfrak{G}$ und wir setzen $f(x) := \chi_\Delta(x)$. Dann ergibt sich $\mu(\Delta_0)\nu(\Delta) = \nu(\Delta_0)\mu(\Delta)$ oder $\nu(\Delta) = \frac{\nu(\Delta_0)}{\mu(\Delta_0)} \cdot \mu(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, $\frac{\nu(\Delta_0)}{\mu(\Delta_0)} =: c > 0$ ist eine feste Konstante. ∎

Wir machen eine kleine Anwendung des Einzigkeitssatzes. $\mathfrak{G}$ sei wie üblich und μ das Haarsche Maß. Wir setzen

$$\mu_x(B) := \underbrace{\mu(Bx)}_{\substack{\text{das ist wieder ein}\\ \text{linksvariantes Borelmaß,}\\ \text{also ein Haar–Maß,}}}, \quad B \in \mathcal{B},$$

deshalb folgt

$$\mu(Bx) = \Delta(x)\mu(B)$$

und $\mathfrak{G} \ni x \mapsto \Delta(x) > 0$ ist eine positive Funktion auf $\mathcal{G}$, die sog. *Modularfunktion.*

Der Leser zeige:

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) \ , \quad x, y \in \mathcal{G} \ ,$$

und:

wenn x aus dem Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist $\Delta(x) = 1$.

Anmerkung: Die Theorie des Haarschen Maßes läßt sich natürlich völlig analog mit der Bedingung „rechtsinvariant“ durchziehen.

Der Leser zeige: Ist μ linksinvariantes Haar–Maß, so ist $\nu(\Delta) := \mu(\Delta^{-1})$ ein rechtsinvariantes Haar–Maß.

Es kann vorkommen, daß $\mu(\Delta) < \infty$, aber $\mu(\Delta^{-1}) = \infty$ ist.

7.8 Beispiele

1. Zunächst sei $\mathfrak{G} := \mathbb{R}^n$ (mit „+ “) und μ_0 das Haarmaß (Lebesgue–Maß), was

   $$\mu_0(I) = 1 \ , \quad I = \{x : 0 \le x_j \le 1 \ , \ \ j = 1, 2, \dots, n\}$$

   liefert.

   Sei $x' = Ax + b$ eine nichtsinguläre lineare Transformation des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mu(\Delta) := \mu_0(A\,\Delta + b)$ ein invariantes Borelmaß, also ein Haar–Maß und demzufolge ist

   $$\mu(\Delta) = c(A)\mu_0(\Delta) \ , \quad \Delta \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ . \tag{7.8.3}$$

   Von b kann die Konstante $c(A) > 0$ nicht abhängen wegen der Invarianz von μ_0. Es ist

   $$c(A) = \mu_0(AI) \ .$$

   Ohne Beweis merken wir an, daß

   $$c(A) = |\det A|$$

   gilt. Die Beziehung (7.8.3) kann trivialerweise auch so gedeutet werden, daß $c(A)$ die Radon-Nikodym-Ableitung von μ nach μ_0 ist

   $$\frac{\mu(dx)}{\mu_0(dx)} = |\det A| \ .$$

2. Sei $\mathfrak{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \ x > 0, \ y \in \mathbb{R} \right\}$. Die Gruppenoperation sei die Matrixmultiplikation. Es ist

   $$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 x & x_0 y + y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

   die Linksmultiplikation entspricht der Transformation

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} \ .$$

Wir behaupten: das linksinvariante Haarmaß von $\mathfrak{G}$ ist gegeben durch

$$\mu(\Delta) = \int_\Delta \frac{1}{x^2} dx dy \ ,$$

denn es ist

$$\int_{g_0 \Delta} \frac{1}{x'^2} dx'dy' = \int_\Delta \frac{1}{(x_0 x)^2} \frac{dx'dy'}{dx\,dy}\, dx\,dy = \int_\Delta \frac{1}{x_0^2 x^2}\, x_0^2\, dxdy = \int_\Delta \frac{1}{x^2}\, dxdy \ ,$$

wo $g_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\frac{dx'dy'}{dxdy}$ die Radon-Nikodym-Ableitung bedeutet, es ist $\det \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix} = x_0^2$.

Weiter ist

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,x_0 & x\,y_0 + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

die Rechtsmultiplikation entspricht der Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \ .$$

Das rechtsinvariante Haarmaß auf $\mathfrak{G}$ ist gegeben durch

$$\nu(\Delta) = \int_\Delta \frac{1}{x} dxdy$$

denn es ist

$$\int_{\Delta g_0} \frac{1}{x'} dx'dy' = \int_\Delta \frac{1}{x_0 x} \cdot \frac{dx'dy'}{dxdy}\, dxdy = \int_\Delta \frac{1}{x_0 x}\, x_0\, dxdy = \int_\Delta \frac{1}{x}\, dxdy \ ,$$

wo wieder $\frac{dx'dy'}{dxdy}$ die Radon-Nikodym-Ableitung bedeutet. Diesmal ist $\det \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ y_0 & 1 \end{pmatrix} = x_0 > 0$.

Nimmt man z.B. als Borelmenge in $\mathfrak{G}$

$$B := \{(x,y) : 1 \leq x < \infty \ , \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

so ergibt sich

$$\mu(B) = \int_B \frac{1}{x^2}\, dxdy = \int_0^1 dy \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = [-\ \frac{1}{x}]_0^\infty = 1$$

aber

$$\nu(B) = \int_B \frac{1}{x}\, dxdy = \int_0^1 dx \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty \ .$$

Literaturverzeichnis

[1] J. Dieudonné, Geschichte der Mathematik 1700-1900, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1985.

[2] J. Dieudonné, Grundzüge der modernen Analysis, Band 2, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[3] P.R. Halmos, Measure Theory, Springer-Verlag, New York, 1974.

[4] I.P. Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Akademie-Verlag, Berlin, 1981.

[5] N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience Publ. Inc., New York, 1958.