Nichtlineare Funktionalanalysis

Roland Lemmert

WS 1998/99

1 Literatur

Deimling, Klaus: *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag 1980.
Cronin, Jane: *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, AMS 1964.
Ortega, J.M. und W.C. Rheinboldt: *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press 1970.

2 Der Brouwersche Abbildungsgrad

Es sei stets $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer, beschränkt und offen. Der Brouwersche Abbildungsgrad ordnet jeder stetigen Funktion $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ und jedem $y \notin f(\partial\Omega)$ eine ganze Zahl

$$d(f, \Omega, y) \in \mathbb{Z}$$

zu, so daß (mindestens) gilt:

1. Ist $f(x) = x$ für alle $x \in \Omega$, so ist
$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y) &= 1 \qquad \text{für } y \in \Omega \ , \\ d(f, \Omega, y) &= 0 \qquad \text{für } y \notin \overline{\Omega} \ . \end{aligned}$$

2. Ist $d(f, \Omega, y) \neq 0$, so existiert $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$.

3. Ist $\Omega \supseteq \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (i \neq j)$,
$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Omega}_k$, so ist
$d(f, \Omega, y) = \sum_{j=1}^{k} d(f, \Omega_j, y)$
(wenn alle Abbildungsgrade definiert sind).

4. Ist $H(t, x)$ stetig auf $[0, 1] \times \overline{\Omega},\ y(t) :\ [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $y(t) \notin H(t, \partial\Omega), 0 \leq t \leq 1$, so ist $d(H(t, \cdot), \Omega, y(t))$ konstant auf $[0, 1]$.

Die Frage, ob ein solcher Abbildungsgrad existiert und welche weiteren Eigenschaften und Konsequenzen er hat, soll im folgenden geklärt werden.

Der Sonderfall $n = 1$:
Man wäre versucht,

$$d(f, \Omega, y) = \text{Anzahl der Lösungen von } f(x) = y$$

zu setzen. Abgesehen von der Tatsache, daß dieser Ansatz im allgemeinen keine ganze Zahl liefert, wäre auch die Eigenschaft 4. (die wohl einschneidenste) verletzt:
Für

$$\begin{aligned} H(t,x) &= 1 - t + tx^2,\ x \in [-1,1] = \overline{\Omega}\ , \\ y(t) &\equiv \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ist die Anzahl der Lösungen von $H(t,x) = y(t)$

$$= \begin{cases} 0 & ,0 \le t < \frac{1}{2} \\ 1 & ,t = \frac{1}{2} \\ 2 & ,\frac{1}{2} < t \le 1\ . \end{cases}$$

Ist allgemeiner $f(-1) = f(1)$ und $y \neq f(1)$, so ist offensichtlich $H(t,x) = (1-t)f(1) + tf(x)$ stetig in (t,x), und für $y \neq f(1)$ $\big($ d. h. $y \notin f(\partial(-1,1))\big)$ ist $H(t, \pm 1) \neq y$ so daß nach 4.

$$d(H(t,\cdot), (-1,1), y)$$

unabhängig von t ist, also $d(f, (-1,1), y) = 0$ sein muß wegen 2. und 4..

$d(f, (-1,1), y)$ verschwindet also für alle $f \in C([-1,1])$ mit $f(-1) = f(1)$ und $y \neq f(1)$.

Ist dagegen $f(-1) \neq f(1)$, so zeigen ähnliche Überlegungen

$$\begin{aligned} d(f,(-1,1),y) = 0 \quad &\text{für} \quad y > \max\{f(1), f(-1)\} \\ &\text{und} \quad y < \min\{f(1), f(-1)\}\ . \end{aligned}$$

Für (es sei etwa $f(-1) < f(1)$) $y_0 \in (f(-1), f(1))$ erhalten wir mit

$$\begin{aligned} H(t,x) &= (1-t)\left(\frac{x+1}{2}(f(1) - f(-1)) + f(-1)\right) + tx\ , \\ y(t) &= (1-t)y_0 + t\frac{2y_0 - f(1) - f(-1)}{f(1) - f(-1)}\ , \\ l(x) &= \frac{x+1}{2}\,(f(1) - f(-1)) + f(-1)\ . \end{aligned}$$

(Es ist für $0 \le t \le 1$

$$\begin{aligned} H(t,1) &= (1-t)f(1)+t\ , \\ H(t,-1) &= (1-t)f(-1)-t \\ \text{und} \qquad y(t) &\neq H(t,1)\ , \\ y(t) &\neq H(t,-1)\ ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\,(l,(-1,1),y_0) &= d\left(Id,(-1,1),\ \frac{2y_0-f(1)-f(-1)}{f(1)-f(-1)}\right) = 1 \\ \text{wegen } -1 &< \frac{2y_0-f(1)-f(-1)}{f(1)-f(-1)} < 1\ . \end{aligned}$$

Für den Fall $f(-1) > y_0 > f(1)$ zeigt man entsprechend (unter wesentlicher Benutzung von 3.)

$$d(f,(-1,1),y_0) = -1\ .$$

Es sei bemerkt, daß wir mit den obigen Überlegungen nachgewiesen haben, daß im Fall $n = 1$ höchstens ein Abbildungsgrad mit den Eigenschaften 1. bis 4. existiert. Man überlegt sich leicht, daß umgekehrt durch die oben bestimmten Werte tatsächlich ein Abbildungsgrad definiert ist.
Für $n > 1$ sind die Verhältnisse verwickelter.

Wir werden zunächst den Abbildungsgrad für eine spezielle Klasse von Funktionen $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ und (in Abhängigkeit von den Funktionen) für gewisse $y \in \mathbb{R}^n$ erklären und uns dann Schritt für Schritt durch Approximationsprozesse von den genannten Einschränkungen wieder befreien.

Für $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ sei $N_f(\Omega)$ die Menge der *kritischen Punkte* von f, d. h. der Punkte $x \in \Omega$, wo $f'(x)$ nicht regulär (also $\det f'(x) = 0$) ist.

Hilfssatz. *Ist Ω offen und beschränkt, $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und $y \notin f(N_f(\Omega)) \cup f(\partial\Omega)$ so gibt es höchstens endlich viele $x_1, \ldots, x_k \in \Omega$ mit $f(x_k) = y$.*

Beweis. Gibt es unendlich viele solcher Punkte, so gibt es eine konvergente Folge (x_n) von paarweise verschiedenen solcher Punkte mit $\overline{x} = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \in \Omega$, da wegen $f(\overline{x}) = y$ die Beziehung $\overline{x} \in \partial\Omega$ nicht gelten kann. Wegen $y \notin f(N_f(\Omega))$ ist $f'(\overline{x})$ regulär, also f in einer Umgebung $U(\overline{x})$ injektiv. Dies widerspricht $x_k \in U(\overline{x})$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$.

Definition 1. *Für $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und $y \notin f(\partial\Omega) \cup f(N_f(\Omega))$ sei*

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{f(x)=y} \operatorname{sign} \det f'(x)\ .$$

(Die Summe ist nach dem Hilfssatz endlich, $\sum\limits_{\emptyset} := 0$.)

Satz 1. (Integraldarstellung von E. Heinz.)
Es sei $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega) \cup f(N_f(\Omega))$. *Dann gibt es* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y) > 0$ *mit*

$$d(f, \Omega, y) = \int\limits_{\Omega} \varphi(f(x) - y) \det f'(x) dx$$

für jede stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *mit*

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{K(0, \varepsilon_0)} \qquad (\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1 \; .$$

Beweis. Gibt es kein $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$, also keines in $\overline{\Omega}$, so ist $\|f(x) - y\| \geq \varepsilon_0 > 0$, also

$$\varphi(f(x) - y) \equiv 0 \quad \text{falls} \;\; \operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{K(0, \varepsilon_0)} \; ,$$

und damit ist die Behauptung offensichtlich richtig.

Nun sei $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, alle x_k verschieden. Da $f'(x_k)$ regulär ist, existieren nach dem Satz über die Existenz der Umkehrfunktion Umgebungen $U(x_j)$, die homöomorph auf eine Kugel $K(y, r)$ abgebildet werden. OBdA seien die $U(x_j)$ paarweise disjunkt und so klein, daß sign $\det f'(x) =$ sign $\det f'(x_j)$ auf $U(x_j)$ gilt.

Da auf $\overline{\Omega} \;\setminus\; \bigcup\limits_{j=1}^{k} U(x_j) \;\; f(x) \neq y$ ist, existiert $\varepsilon_0 \in (0, r]$ mit $\|f(x) - y\| \geq \varepsilon_0 > 0$ auf dieser Menge. Damit ist für φ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{K(0, \varepsilon_0)}$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \varphi(f(x) - y) \det f'(x) dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{U(x_j)} \varphi(f(x) - y) \det f'(x) dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sign} \det f'(x_j) \int\limits_{U(x_j)} \varphi(f(x) - y) \, |\det f'(x)| dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sign} \det f'(x_j) \underbrace{\int\limits_{\overline{K(0,r)}} \varphi(\xi) d\xi}_{=1}
\end{aligned}$$

nach der Substitutionsregel für Integrale im $\mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \xi &= f(x) - y \quad : x \in U(x_j), \quad \xi \in K(0,r) , \\ d\xi &= |\det f'(x)| dx . \end{aligned}$$

Für das Folgende werden noch einige Hilfssätze benötigt.

Hilfssatz 1. *Ist $A(t) = (a_{ij}(t))_1^n$ eine Matrix von nach t differenzierbaren Funktionen, so ist*

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \sum_{i=1}^n \det A^{(i)}(t) ,$$

wobei $A^i(t)$ aus $A(t)$ durch Differentiation der i-ten Spalte entsteht.

Beweis. Nach der Leibnizschen Formel für Determinanten ist (S_n Permutationsgruppe, $v(\pi)$ Vorzeichen von π)

$$\det A(t) \quad = \quad \sum_{\pi \in S_n} v(\pi) \prod_{i=1}^n a_{\pi(i),i} ,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \sum_{\pi \in S_n} v(\pi) \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^n a_{\pi(i),i} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} v(\pi) \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^n a_{\pi(i),i}^{(j)} , \end{aligned}$$

wobei $a_{\pi(i),i}^{(j)}$ bedeutet, daß im Fall $j = i$ nach t differenziert wird, andernfalls nicht.

Hieraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ aus $C^2(\Omega)$ und d_{ij} der i-j-te Kofaktor von $f'(x)$, also $d_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ Determinante der $\frac{\partial}{\partial x_k} f_l$, $l \neq j$, $k \neq i$ (d. h. in $f'(x)$ werden i-te Spalte und j-te Zeile gestrichen). Dann ist für jedes $j = 1, \ldots, n$*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij}(x) = 0, \qquad x \in \Omega .$$

Beweis. Es sei j fest und jeweils $\frac{\partial}{\partial x_i} f^0$ diejenige Spaltenvektor, der durch Weglassen des j-ten Elementes der entsprechenden Spalte von f' entsteht. Läßt man noch die i-te Spalte von f' weg, so ist nach dem Hilfssatz

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_n & \dots & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij} = (-1)^{i+j} \sum_{k \neq i} \det\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \dots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}}_{k-\text{te Spalte}} f^0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\Big)^{(i)},$$

(wobei $(\,\cdot\,)^{(i)}$ bedeutet, daß die i-te Spalte fehlt), also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij} &= (-1)^j \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{k \neq i} \det\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\Big)^{(i)} \\ &= (-1)^j \sum_{i=1}^n (-1)^j \Big\{ \sum_{k<i} (-1)^{k-1} \det\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0}_{k-\text{te Spalte fehlt}}\Big)^{(i)} \\ &\quad + \sum_{k>i} (-1)^{k-2} \det\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0}_{k-\text{te Spalte fehlt}}\Big)^{(i)} \Big\} \end{aligned}$$

(Da die i-te Spalte fehlt, muß in der zweiten Summe einmal weniger vertauscht werden!)

$$= (-1)^j \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{k+i-1} \det\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\right)^{(i,k)} \right\}$$

$$-(-1)^j \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{k+i-1} \det\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i} f^0, \frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\right)^{(i,k)} \right\}.$$

Mit $c_{ik} = \det\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} f^0, \frac{\partial}{\partial x_1} f^0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f^0\right)^{(i,k)} \overset{!}{=} c_{ki}$ schreibt sich dies ausführlich

$$
\begin{aligned}
(-1)^j \{ \quad & (-1)^{1+2} c_{21} \\
& +(-1)^{1+3} c_{31} + (-1)^{2+3} c_{32} \\
& + \dots \\
& \vdots \\
& +(-1)^{1+n} c_{n1} + (-1)^{2+n} c_{n2} + \cdots + (-1)^{n-1+n} c_{n,n-1} \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(-1)^j \{ \quad & (-1)^{2+1} c_{21} + (-1)^{3+1} c_{31} + \cdots + (-1)^{n+1} c_{n1} \\
& +(-1)^{3+2} c_{32} + \cdots + (-1)^{n+2} c_{n2} \\
& + \dots \\
& \vdots \\
& +(-1)^{n+n-1} c_{n,n-1} \} \ ,
\end{aligned}
$$

sodaß die Behauptung folgt.

$\Big($ Es ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} c_{ik} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+k} c_{ik} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{k+i} c_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{i+k} c_{ik} \ . \quad \Big)
\end{aligned}
$$

Hilfssatz 3. *Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $z \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann ist*

$$
\varphi(x+z) - \varphi(x) = \operatorname{div}_{(x)} \Big(z \cdot \int_0^1 \varphi(x+sz) ds \Big) \ .
$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned}
&\varphi(x+z)-\varphi(x) \\
&\quad = \int_0^1 \frac{d}{ds}\ (\varphi(x+sz))ds \\
&\qquad = \int_0^1 \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x+sz)ds \\
&\qquad = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \varphi(x+sz)ds,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Hilfssatz 4. *Es sei* $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\mathrm{supp} u = K$ *kompakt,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen, beschränkt,* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *aus* $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *und* $K \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$*. Dann existiert* $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $\quad v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *mit* $\mathrm{supp} v \subseteq \Omega$ *und*

$$\mathrm{div} v(x) = (\mathrm{div} u)(f(x))\ \det f'(x)\ .$$

Beweis. O.B.d.A. sei $n > 1$. Wir setzen für $x \in \Omega$ ($d_{ij}(x)$ seien die Kofaktoren von $f'(x)$)

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^n u_j(f(x))d_{ij}(x)\ , i = 1, \dots, n.$$

Wegen $K \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$ existiert ein $\delta > 0$, so daß aus $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$ sicher $f(x) \notin K$ folgt. Insbesondere ist $v = 0$ für $x \in \Omega$, $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$. Da v stetig in Ω ist, kann v durch $v(x) = 0$ stetig auf $\overline{\Omega}$ (sogar auf ganz $\mathbb{R}^n$) fortgesetzt werden, und es ist $\mathrm{supp} v \subseteq \Omega$.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} v_i(x) \quad &= \quad \sum_{k,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_j\right)\ (f(x)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_k(x)\right) \cdot d_{ij}(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n u_j(f(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij}(x)\ ,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}v_i(x) &= \sum_{k,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}u_j\Big)(f(x))\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}f_k(x)\Big)d_{ij}(x)}_{=\delta_{jk}\det f'(x)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}u_j(f(x))\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}d_{ij}(x)}_{\equiv 0} \\ &= (\mathrm{div}u)(f(x))\,\det f'(x)\,.\end{aligned}$$

Satz 2. *Es sei* $f\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, $y_0\notin f(\partial\Omega)$ *und* $\alpha=\mathrm{dist}(y_0,f(\partial\Omega))$. *Dann ist* $d(f,\Omega,y)$ *auf* $K(y_0,\alpha)\setminus f(N_f(\Omega))$ *konstant.*

Beweis. Wir wählen $y_1,y_2\in K(y_0,\alpha)\setminus f(N_f(\Omega))$ und setzen $\delta=\alpha-\max\{\|y_1-y_0\|,\|y_2-y_0\|\}>0$. Nach Satz 1. (Heinz) gibt es $0<\varepsilon_0<\delta$, so daß

$$d(f,\Omega,y_i)=\int\limits_{\Omega}\varphi(f(x)-y_i)\det f'(x)dx$$

gilt für $\mathrm{supp}\varphi\subseteq K(0,\varepsilon_0)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$. Wir wählen speziell $\varphi\in C^2(\mathbb{R}^n)$ und setzen

$$U(y)=(y_1-y_2)\int\limits_0^1\varphi(y-y_1+t(y_1-y_2))dt\,.$$

Aus $\|y-y_1+t(y_1-y_2)\|<\varepsilon_0,\quad t\in[0,1]$ folgt

$$\begin{aligned}\|y-y_0\| &< \varepsilon_0+\|y_1-t(y_1-y_2)-y_0\| \\ &\le \varepsilon_0+\alpha-\delta\,,\end{aligned}$$

also aus $\|y-y_0\|\ge\varepsilon_0+\alpha-\delta$ sicher $\|y-y_1+t(y_1-y_2)\|\ge\varepsilon_0$, $t\in[0,1]$. Dann ist aber

$$\mathrm{supp}U\subseteq\overline{K(y_0,\alpha+\varepsilon_0-\delta)}\subseteq K(y_0,\alpha),$$

also $\mathrm{supp}U\cap f(\partial\Omega)=\emptyset$, und nach Hilfssatz 4 existiert $v\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$, $\mathrm{supp}v\subseteq\Omega$ und

Ersetze in HS 3:
$z\sim y_1-y_2$
$x\sim f(x)-y_1$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}v(x) &= (\mathrm{div}U)(f(x))\det f'(x) \\ &= \{\varphi(f(x)-y_2))-\varphi(f(x)-y_1))\}\det f'(x)\,,\end{aligned}$$

woraus durch Integration über $\mathbb{R}^n$ die Behauptung folgt. (Integralsatz von Gauß).

Nach obigem Satz stellt sich die Frage, "wie groß" $f(N_f(\Omega))$ sein kann. Eine für unsere Zwecke ausreichende Antwort gibt

Hilfssatz 5. (Lemma von Sard).*Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega)$ und $W \subseteq \Omega$ ein abgeschlossener Würfel. Dann ist der Jordan-Inhalt von $f(N_f(W))$ gleich Null.*

Beweis. (Nagumo). Es sei $1 \geq \varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Aufgrund der Voraussetzungen über f gibt es $L > 0$ und $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit ($\|\cdot\|$ sei die von der Euklid-Norm erzeugte Matrixnorm)

$$\begin{aligned} \|f'(x)\| &\leq L \quad \text{auf } W \quad , \\ \|f'(x) - f'(\overline{x})\| &< \varepsilon \quad \text{für } \|x - \overline{x}\| < \delta, \quad x, \overline{x} \in W \; . \end{aligned}$$

Dann ist aber für $\|x - \overline{x}\| < \delta, \quad x, \overline{x} \in W$

$$\begin{aligned} & \|f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x - \overline{x})\| \\ = \; & \|\int_0^1 f'(\overline{x} + s(x - \overline{x}))(x - \overline{x})ds - f'(\overline{x})(x - \overline{x})\| \\ = \; & \left\| \int_0^1 \{f'(\overline{x} + s(x - \overline{x})) - f'(\overline{x})\}(x - \overline{x})ds \right\| \\ \leq \; & \int_0^1 \|f'(\overline{x} + s(x - \overline{x})) - f'(\overline{x})\| \cdot \|x - \overline{x}\| ds \\ \leq \; & \varepsilon \|x - \overline{x}\|. \end{aligned}$$

Die Kantenlänge von W sei l. Wir zerlegen W in N^n gleich große Teilwürfel $W_i, \; 1 \leq i \leq N^n$, wobei N so groß gewählt sei, daß der Durchmesser jedes dieser Würfel kleiner oder gleich δ ist:

$$\frac{l}{N} \cdot \sqrt{n} \leq \delta \; .$$

Insbesondere gilt dann für jeden dieser Würfel W_i

$$f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x - \overline{x}) = \eta(\overline{x}), \quad x, \overline{x} \in W_i$$

mit

$$\|\eta(\overline{x})\| \leq \varepsilon \cdot \frac{l\sqrt{n}}{N} \; .$$

Ist speziell $\overline{x}$ kritischer Punkt von f in W, so wählen wir W_i mit $\overline{x} \in W_i$ und bezeichnen mit $\widehat{W_i}$ das Bild von W_i unter der affinen Transformation

$$A(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) \; ,$$

$\widehat{W}_i = A(W_i)$. $\widehat{W}_i$ hat Jordan-Inhalt Null.

Für $y, \widetilde{y} \in \widehat{W}_i$ gilt $y = Ax$, $\widetilde{y} = A\widetilde{x}$ $(x, \widetilde{x} \in W_i)$, also

$$\begin{aligned} \|y - \widetilde{y}\| &\leq \|f'(\overline{x})(x - \widetilde{x})\| \\ &\leq L\|x - \widetilde{x}\| \leq L \text{ diam } W_i = L\frac{l}{N}\sqrt{n} \, , \end{aligned}$$

so daß $\text{diam}\widehat{W}_i \leq L\frac{l}{N}\sqrt{n}$ gilt.

Da aber $f(W_i)$ in der $\varepsilon\frac{l}{N}\sqrt{n}$-Umgebung von $\widehat{W}_i$ liegt, liegt es erst recht in einem “Kreiszylinder” mit “Grundkreis” $K(m, \ (L+\varepsilon)\frac{l}{N}\sqrt{n})$ (m aus dem $\widehat{W}_i$ enthaltenden höchstens $n-1$-dimensionalen affinen Teilraum geeignet gewählt) und Höhe $2\varepsilon\frac{l}{N}\sqrt{n}$. Dessen Volumen ist gleich (V_{n-1} Volumen der $n-1$-dimensionalen Einheitskugel)

$$V_{n-1}((L+\varepsilon)\frac{l}{N}\sqrt{n})^{n-1} \cdot 2\varepsilon\frac{l}{N}\sqrt{n} \, ,$$

und da genau N^n Teilwürfel vorhanden sind, liegt das Bild $f(N_f(W))$ der kritischen Punkte in einer Menge mit Jordan-Inhalt höchstens

$$\begin{aligned} &N^n \cdot V_{n-1}(L+\varepsilon)^{n-1} 2(\frac{l}{N}\sqrt{n})^n \cdot \varepsilon \\ &\leq C_n(L,l) \cdot \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ bliebig war, ist der Hilfssatz bewiesen.

Folgerung. *Ist $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist $f(N_f(\Omega))$ eine Lebesguesche Nullmenge.*

Beweis. Man wähle abzählbar viele abgeschlossene Würfel W_k mit $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ und beachte

$$f(N_f(\Omega)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(N_f(W_k)) \, .$$

Aus der Folgerung ergibt sich insbesondere, daß $f(N_f(\Omega))$ keine inneren Punkte besitzt, daß also in jeder Kugel des $\mathbb{R}^n$ Punkte aus dem Komplement von $f(N_f(\Omega))$ liegen. Nachfolgende Definition ist deshalb sinnvoll.

Definition 2. *Ist $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega)$, so wird*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, \widetilde{y})$$

gesetzt mit

$$\widetilde{y} \notin f(N_f(\Omega)), \quad \|y - \widetilde{y}\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) =: \alpha_0 \, .$$

Bemerkungen. 1) Für festes $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, Ω offen und beschränkt, ist damit d (als Funktion von y) konstant auf den zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, also insbesondere dort stetig.
2) Ist unter den Annahmen von Definition 2. $d(f,\Omega,y) \neq 0$, so gibt es $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$: Man wähle eine Folge $(\widetilde{y}_k)$ mit $\widetilde{y}_k \notin f(N_f(\Omega)), \|y - \widetilde{y}_k\| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. Wegen $d(f,\Omega,\widetilde{y}_k) \neq 0$ gibt es $x_k \in \Omega$ mit $f(x_k) = \widetilde{y}_k$, und die Folge (x_k) ist o.B.d.A konvergent gegen ein $x \in \overline{\Omega}$. Dann ist aber $f(x) = y$ und folglich $x \in \Omega$.

Schränkt man die zulässigen φ in der Heinzschen Formel auf rotationssymmetrische Funktionen ein, so erhält man die Darstellung des Abbildungsgrades zunächst für

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq K(0, \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))) \setminus \overline{K(0,\varepsilon)},$$

$(0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ beliebig). Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 3. *Ist $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega)$ und $\eta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $\operatorname{supp}\eta \subseteq (0, \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)))$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(\|x\|)dx = \Omega_n \cdot \int\limits_0^\infty \eta(s)s^{n-1}ds = 1$, so gilt*

$$d(f,\Omega,y) = \int\limits_\Omega \eta(\|f(x) - y\|) \det f'(x)dx\ .$$

(Ω_n ist der Oberflächeninhalt der n-dimensionalen Einheitskugel.)

Beweis. 1) Wir zeigen zunächst, daß das rechtsstehende Integral in der angegebenen Klasse von Funktionen η nicht von η abhängt, oder, was auf dasselbe herauskommt:

$$\textit{Aus}\quad \alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}\ \textit{stetig},\quad \operatorname{supp}\alpha \subseteq (0, \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))),$$
$$\int\limits_0^\infty \alpha(s)s^{n-1}ds = 0 \quad \textit{folgt} \quad \int\limits_\Omega \alpha(\|f(x) - y\|) \det f'(x)dx = 0\ .$$

Wir wollen zeigen, daß der Integrand des letzten Integrals die Divergenz einer geeigneten Vektorfunktion v ist und setzen (vgl. Hilfssatz 4) $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ fest durch

$$u_0(x) = \left(\frac{1}{\|x\|^n} \int\limits_0^{\|x\|} \alpha(s)s^{n-1}ds \right) \cdot x.$$

(Man beachte, daß u_0 in einer Umgebung um Null verschwindet). Es gilt $\operatorname{div}u_0(x) = \alpha(\|x\|)$, und wegen $\operatorname{supp}\alpha \subseteq (0, \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)))$ und $\int\limits_0^\infty \alpha(s)s^{n-1}ds = 0$ ist $\operatorname{supp}u_0 \subseteq K(0, \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)))$. Für

$$u(x) = u_0(x - y)$$

ist dann $\mathrm{supp} u \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$, und nach Hilfssatz 4 existiert v mit $\mathrm{supp} v \subseteq \Omega$, $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und

$$\mathrm{div} v(x) = (\mathrm{div} u)(f(x)) \cdot \det f'(x) .$$

Wegen $\mathrm{div} u(x) = \alpha(\|x - y\|)$, ist der Integrand tatsächlich die Divergenz einer Funktion $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp} v \subseteq \Omega$. Dann verschwindet aber das Integral, womit 1) bewiesen ist.

2) Nun kann für $y \notin f(N_f(\Omega))$ ein hier speziell betrachtetes η in Satz 1. verwendet werden, und wir erhalten für diesen Fall die Richtigkeit der Behauptung.

Für den allgemeinen Fall wählen wir

$$y_k \to y, \quad y_k \notin f(N_f(\Omega)), \quad \|y - y_k\| < \frac{1}{2} \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega))$$

und ein den obigen Bedingungen genügendes η_0 mit

$$\mathrm{supp} \eta_0 \subseteq \left(\frac{1}{3} \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)),\ \frac{1}{2} \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) \right) .$$

Dann ist wegen $\frac{1}{2} \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) \leq \mathrm{dist}(y_k, f(\partial\Omega))$

$$\begin{aligned}
d(f, \Omega, y) &= \lim_{k\to\infty} d(f, \Omega, y_k) && \text{(Satz 2.)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} \eta_0(\|f(x) - y_k\|) \det f'(x) dx && \text{(2. Schritt)} \\
&= \int\limits_{\Omega} \lim_{k\to\infty} \eta_0(\|f(x) - y_k\|) \det f'(x) dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \eta_0(\|f(x) - y\|) \det f'(x) dx \ ,
\end{aligned}$$

und erneute Anwendung von 1) liefert die volle Behauptung.

(Man beachte: Der Grenzübergang unter dem Integralzeichen ist erlaubt, da nur über eine kompakte (von n unabhängige) Teilmenge von Ω integriert werden muß).

Bemerkung: Mit Hilfe von Satz 3. erhält man die Gültigkeit von Satz 1. (Formel von Heinz) auch für $y \in f(N_f(\Omega))$ $(y \notin f(\partial\Omega))$.

Damit ist es möglich, die **Homotopieinvarianz** (Eigenschaft 4.) des Abbildungsgrades in der Klasse der Funktionen $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ zu beweisen.

Satz 4. *Es sei* $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *stetig und zweimal nach* x *stetig differenzierbar in* $[0,1] \times \Omega$. *Weiter sei* $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *stetig, und für jedes* $t \in [0,1]$ *gelte* $y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$. *Dann ist* $d(H(t,\cdot), \Omega, y(t))$ *konstant in* $[0,1]$.

Beweis. Zunächst sind die betrachteten Abbildungsgrade alle definiert und jeweils ganzzahlig, so daß nur die Stetigkeit von $d(t) = d(H(t,\cdot), \Omega, y(t))$ zu zeigen ist.

Nun ist $\alpha(t) = \operatorname{dist}(y(t), H(t, \partial\Omega)) \geq \alpha > 0$:
Andernfalls gibt es $t_k \to t_0 \in [0,1]$, $x_k \in \partial\Omega$, $x_k \to x_0 \in \partial\Omega$ mit $\alpha(t_k) = \|y(t_k) - H(t_k, x_k)\| \to 0 = \|y(t_0) - H(t_0, x_0)\|$, was $y(t_0) \notin H(t_0, \partial\Omega)$ widerspricht. Dann ist aber

$$d(t) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\|H(t,x) - y(t)\|) \det H_x(t,x) dx ,$$

wobei z. B. $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{2}\right)$, $\Omega_n \int\limits_0^\infty \varphi(t) t^{n-1} dt = 1$ (Satz 3.) gewählt wurde.
Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von H auf $[0,1] \times \overline{\Omega}$ gibt es zu $\frac{\alpha}{2} > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|H(t,x) - H(t,\overline{x})\| < \frac{\alpha}{2} \text{ für } \|x - \overline{x}\| < \delta .$$

Ist dann $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$, so wählen wir $\overline{x} \in \partial\Omega$ mit $\|x - \overline{x}\| < \delta$ und erhalten

$$\begin{aligned} \|H(t,x) - y(t)\| &\geq \|H(t,\overline{x}) - y(t)\| - \|H(t,x) - H(t,\overline{x})\| \\ &\geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

so daß $\varphi(\|H(t,x) - y(t)\|) = 0$ folgt. Das Integral braucht also nur über eine kompakte Teilmenge $\overline{\Omega}_\delta$ von Ω ausgewertet zu werden, und aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit des Integranden auf $[0,1] \times \overline{\Omega}_\delta$ folgt leicht die stetige Abhängigkeit des Integrals, also die von d.
Der letzte Satz erlaubt den Beweis der Tatsache, daß zwei Funktionen schon dann gleichen Abbildungsgrad besitzen, wenn sie sich nur auf dem Rand $\partial\Omega$ nicht "allzusehr" unterscheiden:

Satz 5. *Es sei* $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega)$, $\alpha_0 = \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ *und* $g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *mit*

$$\max_{x \in \partial\Omega} \|f(x) - g(x)\| < \alpha_0 .$$

Dann ist $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$.

Beweis. Wir betrachten die spezielle Homotopie ("Verbindungsstrecke")

$$H(t,x) = (1-t) f(x) + t g(x) .$$

Wäre $H(t,x) = y$ für ein $x \in \partial\Omega,\ t \in [0,1]$, so wäre

$$f(x) - y = t(f(x) - g(x)) \ ,$$

also

$$\alpha_0 \leq \|f(x) - y\| = t\|f(x) - g(x)\| < \alpha_0 \ .$$

Es gilt demnach $y \notin H(t, \partial\Omega)$, und Satz 4 liefert $d(H(0,\cdot), \Omega, y) = d(H(1,\cdot), \Omega, y)$, was zu beweisen war.

Satz 5. beinhaltet insbesondere, daß der Abbildungsgrad einer Funktion $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ nur von den Werten von f auf $\partial\Omega$ abhängt. Um unser eigentliches Ziel, einen Abbildungsgrad für alle $f \in C(\overline{\Omega})$ zu erreichen, gibt es nun (mindestens) zwei Möglichkeiten:

1. Man überlegt sich, daß es zu jedem $f \in C(\overline{\Omega})$ ein $F \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ gibt mit $f(x) = F(x)$ auf $\partial\Omega$ und setzt für $y \notin f(\partial\Omega)$

   $$d(f, \Omega, y) = d(F, \Omega, y) \ .$$

   Nach Satz 5. ist so $d(f, \Omega, y)$ eindeutig definiert (d. h. hängt nicht von der Wahl von F ab).

2. Man approximiert f "genauer als $\operatorname{dist}(x, f(\partial\Omega))$" durch $g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ (es gibt nach dem Approximationssatz von Weierstraß sogar Polynome, die dies leisten) und setzt

   $$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y) \ .$$

   Wieder ist $d(f, \Omega, y)$ unabhängig von der Wahl von g.

Der zweite Weg wird meist in der Literatur eingeschlagen (vgl. K. Deimling). Wir wollen deshalb den ersten gehen und beweisen zunächst:

Hilfssatz 6. *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so existiert ein $r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $r = 0$ auf A, $r > 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus A$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A \neq \emptyset,\ \mathbb{R}^n$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in \mathbb{R}^n : \ \operatorname{dist}(x, A) \leq \frac{1}{k}\} \ , \\ d_k(x) &= \min\{1, \operatorname{dist}(x, A_k)\}. \end{aligned}$$

Die Funktion d_k ist stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^n$, nicht negativ sowie identisch 0 auf A_k.

Mit Hilfe von

$$H(x) = \begin{cases} \gamma \cdot e^{-\frac{1}{1 - \|x\|^2}} & \|x\| < 1, \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

(es ist $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} H = \overline{K(0,1)}$, $\gamma > 0$ so gewählt, daß $\int\limits_{\mathbb{R}^n} H(x)dx = 1$ gilt)

setzen wir

$$H_k(x) = k^n H(kx) \qquad (\operatorname{supp} H_k = \overline{K(0, \frac{1}{k})})$$

und schließlich (*Friedrichssche Glättung*)

$$\widetilde{d}_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d_k(\xi) H_k(\xi - x) d\xi \; .$$

Das Integral braucht nur über $K(x, \frac{1}{k})$ erstreckt zu werden. Deshalb ist für $x \in A$ wegen $K(x, \frac{1}{k}) \subseteq A_k$

$$\widetilde{d}_k(x) = \int\limits_{K(x,\frac{1}{k})} d_k(\xi) H_k(\xi - x) d\xi = 0,$$

und für $x \notin A_k$ wegen $d_k(x) > 0$

$$\widetilde{d}_k(x) = \int\limits_{K(x,\frac{1}{k})} d_k(\xi) H_k(\xi - x) d\xi > 0$$

sowie $0 \leq \widetilde{d}_k(x) \leq 1$ auf $\mathbb{R}^n$. Schließlich ist $\widetilde{d}_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nun leistet

$$r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \widetilde{d}_k(x)$$

das Verlangte. Auf A verschwinden nämlich alle $\widetilde{d}_k$, und zu $x \notin A$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\widetilde{d}_k(x) > 0$. Ist schließlich $j = (j_1, \ldots, j_n)$ ein n-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen und (mit $|j| = j_1 + \cdots + j_n$)

$$D^j = \frac{\partial^{|j|}}{(\partial x_1)^{j_1} \cdots (\partial x_n)^{j_n}}$$

eine zugehörige partielle Ableitung, so gibt es zunächst Zahlen M_m mit

$$|D^j H(x)| \leq M_m \text{ für } |j| = m, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

also

$$|D^j H_k(x)| \leq k^{n+m} M_m, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

sodaß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} D^j \widetilde{d}_k(x)$$

gleichmäßig und absolut auf $\mathbb{R}^n$ konvergiert. Hieraus folgt $r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Hilfssatz 7. (Fortsetzungssatz von Tietze). *Ist (X,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen, $f : A \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so existiert eine stetige Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F = f$ auf A und $\overline{F(X)} \subseteq [\inf f(A), \sup f(A)]$.*

Beweis. Der Fall $f = \text{const}$ ist trivial. Ansonsten kann durch Betrachtung von $\alpha f(x) + \beta$ mit geeigneten α, β $\inf f(A) = 1,\ \sup f(A) = 2$ angenommen werden. Wir setzen

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x) & x \in A, \\ \frac{\inf\{f(y)d(x,y):\ y \in A\}}{\operatorname{dist}(x,A)} & x \notin A. \end{cases}$$

Wegen

$$d(x,y) \leq f(y)d(x,y) \leq 2d(x,y), \quad y \in A$$

folgt

$$\operatorname{dist}(x,A) \leq \inf\{f(y)d(x,y) : \quad y \in A\} \leq 2\operatorname{dist}(x,A)\ ,$$

also

$$1 \leq F(x) \leq 2 \quad \text{für } x \in X\ .$$

Weiter stimmt F auf A mit f überein.

Wir setzen zur Abkürzung $h(x) = \inf\{f(y)d(x,y) : y \in A\}$. Für $x, x_0 \in X$, und $y \in A$ ist

$$d(x_0,y) \quad \leq \quad d(x_0,x) + d(x,y),$$

also (nach Multiplikation mit $f(y)$ und Übergang zum Infimum über $y \in A$)

$$h(x_0) \leq h(x) + 2d(x,x_0).$$

Ebenso folgt

$$h(x) \leq h(x_0) + 2d(x,x_0),$$

also

$$|h(x) - h(x_0)| \leq 2d(x,x_0),$$

sodaß der Zähler von F stetig in $X\backslash A$ (sogar auf X) ist. Der Nenner ist es gleichfalls, so daß F stetig in $X\backslash A$ ist. Da F trivialerweise im Innern von A stetig ist, bleibt die Stetigkeit in $x_0 \in \partial A$ nachzuweisen.

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst $\delta > 0$ mit

$$|f(y) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \text{für } d(x_0, y) < \delta, \quad y \in A\,,$$

also

$$|F(y) - F(x_0)| \leq \varepsilon \quad \text{für } d(x_0, y) < \delta, \quad y \in A\,.$$

Nun sei $d(x, x_0) < \frac{\delta}{4}$, $x \notin A$. Für $y \in A\backslash K(x_0, \delta)$ ist dann

$$f(y)d(x,y) \geq d(x,y) \geq d(x_0,y) - d(x,x_0) \geq \frac{3}{4}\delta,$$

und andererseits

$$f(x_0)d(x,x_0) < \frac{\delta}{2}\,,$$

sodaß $\inf\{f(y)d(x,y) :\ y \in A\} = \inf\{f(y)d(x,y) :\ y \in A\backslash K(x_0,\delta)\}$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned} f(x_0) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon \qquad & y \in A \cap K(x_0, \delta), \\ \operatorname{dist}(x, A \cap K(x_0,\delta)) = \operatorname{dist}(x, A) \quad & \text{falls } d(x, x_0) < \frac{\delta}{4} \end{aligned}$$

folgt wie oben (Multiplikation mit $d(x,y)$ und Übergang zum Infimum)

$$(f(x_0) - \varepsilon)\operatorname{dist}(x,A) \leq h(x) \leq (f(x_0) + \varepsilon)\operatorname{dist}(x,A)\,,$$

was

$$|F(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

für $d(x, x_0) < \frac{\delta}{4}$ bedeutet.

Hilfssatz 8. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen und $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$, so gibt es $\Phi \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $\Phi = \varphi$ auf $\partial\Omega$.*

Beweis. Wir setzen zunächst φ stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^n$ fort (Hilfssatz 7. (Tietze)) und "mitteln" anschließend mit Hilfe variabel gewählter Radien $r(x)$, r aus Hilfssatz 6. zu $A = \mathbb{R}^n\backslash\Omega$ gewählt. Genauer ist also etwa ($\widetilde{\varphi}$ sei die Fortsetzung)

$$\Phi(x) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(\xi)\frac{1}{(r(x))^n} H\left(\frac{\xi - x}{r(x)}\right) d\xi \qquad (x \in \Omega)\,.$$

(H aus Hilfssatz 6.: $H(x) = \gamma e^{-\frac{1}{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} H dx = 1$.)

Wegen $\Phi(x) = \widetilde{\varphi}(\xi)$ mit $|\xi - x| \leq r(x)$ folgt für $x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \Phi(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x_0) \ ,$$

so daß Φ durch φ stetig auf $\overline{\Omega}$ ergänzt werden kann.

Daß Φ in Ω beliebig oft differenzierbar ist, ist nahezu trivial: Auf jeder Kugel, deren Abschluß noch in Ω liegt, ist nämlich $r(x) \geq \alpha_0 > 0$ und deshalb der Integrand stetig nach jedem x_i differenzierbar, sodaß unter dem Integralzeichen differenziert werden darf. Auf jede so erhaltene Ableitung ist diese Schlußweise wieder anwendbar und liefert durch vollständige Induktion die Behauptung.

Bemerkungen.

1. Durch koordinatenweise Anwendung der Hilfssätze 6. - 8. erhält man entsprechende Aussagen für vektorwertige Funktionen.

2. Ist auf $[0,1] \times \partial\Omega$ eine bzgl. (t,x) stetige Funktion φ gegeben, so liefern die Hilfssätze 6. - 8. ein $\Phi : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, das auf $[0,1] \times \partial\Omega$ mit φ übereinstimmt, stetig ist und dessen sämtliche Ableitungen nach x auf $[0,1] \times \Omega$ stetig (bzgl. (t,x)) sind.

3. Es gibt F_k der genannten Art mit $F_k \to \widetilde{\varphi}$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$: man muß nur eine Folge von Funktionen r_k nach Hilfssatz 6. mit $r_k \to 0$ (gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$) wählen und mit deren Hilfe $\widetilde{\varphi}$ glätten.

Nun sind wir in der Lage, die abschließende Definition des Abbildungsgrades für $f \in C(\overline{\Omega})$, $y \notin f(\partial\Omega)$ zu geben.

Definition 3. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und $f \in C(\overline{\Omega})$, $y \notin f(\partial\Omega)$, so wird (der Brouwersche Abbildungsgrad)*

$$d(f,\Omega,y) = d(F,\Omega,y)$$

gesetzt; dabei ist $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Funktion aus $C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$, die auf $\partial\Omega$ mit f übereinstimmt.

Insbesondere besitzen Funktionen, die auf $\partial\Omega$ übereinstimmen, gleichen Abbildungsgrad.

Satz 6. *Der Abbildungsgrad besitzt die Eigenschaften* 1) *bis* 4) *vom Anfang dieses Abschnittes, Seite 1.*

Beweis.

zu 1) Aus $f(x) = x$ auf Ω folgt $f(x) = x$ auf $\overline{\Omega}$, und f ist schon zulässig für die erste Definition des Abbildungsgrades (Definition 1, Seite 3).

zu 2) Ist $d(f, \Omega, y)$ definiert und $\neq 0$, so wählen wir eine Folge von Funktionen $F_k \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $F_k = f$ auf $\partial\Omega$, $F_k \to f$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$. Wegen $d(f, \Omega, y) = d(F_k, \Omega, y) \neq 0$ existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in \Omega$ mit $F_k(x_k) = y$. Ist (x_{k_j}) eine konvergente Teilfolge mit $\overline{x} = \lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j}$, so ist

$$\|f(\overline{x}) - y\| \leq \|f(\overline{x}) - f(x_{k_j})\| + \|f(x_{k_j}) - \underbrace{F_{k_j}(x_{k_j})}_{=y}\|$$

für alle j, was nur für $f(\overline{x}) = y$ möglich ist. Wegen $y \notin f(\partial\Omega)$ gilt $\overline{x} \in \Omega$.

zu 3) Es sei $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k \subseteq \Omega$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ und $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Omega}_k$. Hieraus folgt leicht

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_0 \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{k} \partial\Omega_i = \partial\Omega_0 \supseteq \partial\Omega.$$

Nach Voraussetzung ist nun $y \notin \bigcup\limits_i f(\partial\Omega_i) = f(\bigcup\limits_i \partial\Omega_i) = f(\partial\Omega_0)$, sodaß $\operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) \geq \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega_0)) = \alpha > 0$ gilt.

Wir wählen $F \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $F = f$ auf $\partial\Omega$,

$$\|F(x) - f(x)\| < \frac{1}{2}\alpha$$

auf $\overline{\Omega}$ und $\widetilde{y} \notin F(N_F(\Omega))$ mit $\|y - \widetilde{y}\| < \frac{1}{2}\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y) &\underset{(*)}{=} d(F, \Omega, y) \underset{(**)}{=} d(F, \Omega, \widetilde{y}) \\ &\underset{(***)}{=} \sum_{i=1}^{k} d(F, \Omega_i, \widetilde{y}) \\ &\underset{(+)}{=} \sum_{i=1}^{k} d(F, \Omega_i, y) \\ &\underset{(++)}{=} \sum_{i=1}^{k} d(f, \Omega_i, y) \,. \end{aligned}$$

Dabei gelten jeweils die Gleichheitszeichen wegen

(*) $f = F$ auf $\partial\Omega$.

(**) Definition 2.

(* * *) Folgt leicht aus Definition 1.

(+) $\|y - \widetilde{y}\| < \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega_0)) \leq \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega_i))$, Definition 2.

(++) $\|F(x) - f(x)\| < \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega_i))$ auf $\overline{\Omega}_i$, Definition 3 und Satz 5, angewandt auf Ω_i.

zu 4) Folgt sofort aus Satz 4 bei Bachtung der Bemerkung 1) nach Hilfssatz 8.. Die Homotopie H braucht nur bzgl. x in Ω "C^∞" abgeändert zu werden. Aus der expliziten Formel in Hilfssatz 8 ist die Tatsache, daß das geänderte $\widetilde{H}$ bzgl. x beliebig oft stetig differenzierbar in $[0,1] \times \Omega$ ist, offensichtlich.

Natürlich besitzt der Abbildungsgrad noch eine Reihe weiterer nützlicher Eigenschaften wie

$$\textit{Für } \; f, g \in C(\overline{\Omega}),\ y \notin f(\partial\Omega),\ \|f(x) - g(x)\| < \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) \textit{ auf } \partial\Omega$$
$$\textit{ist} \quad d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y).$$

Sie folgt in einfacher Weise aus Definition 3. und Satz 5..
Außerdem ist der Abbildungsgrad durch die Eigenschaften 1) bis 4) bestimmt, vgl. etwa Deimling.

3 Anwendungen des Brouwerschen Abbildungsgrades

Eine erste wichtige Anwendung des bisherigen ist die *Leray-Schaudersche Alternative*:

Satz. *Es sei* $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *(beschränkt, offen) und* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$*. Dann hat* f *mindestens eine der beiden Eigenschaften:*

1) f besitzt einen Fixpunkt in $\overline{\Omega}$;

2) es existiert $x_0 \in \partial\Omega$ und $\lambda > 1$ mit $f(x_0) = \lambda x_0$.

Beweis. Gilt 2) nicht, so betrachten wir

$$H(t, x) = x - t f(x)$$

und hierzu $d(H(t, \cdot), \Omega, 0)$. H ist stetig auf $[0,1] \times \overline{\Omega}$, es ist $0 \notin H(0, \partial\Omega)$, und für $1 > t > 0$ folgt aus

$$H(t, x) = 0 = x - t f(x)$$

$f(x) = \frac{1}{t}x$, sodaß wegen $\frac{1}{t} > 1$ $x \in \partial\Omega$ nicht möglich ist. Ist nun auch $f(x) \neq x$ auf $\partial\Omega$, so ist wegen $0 \in \Omega$

$$1 = d(H(0,\cdot),\Omega,0) = d(H(1,\cdot),\Omega,0),$$

so daß $x - f(x)$ eine Nullstelle in Ω, also f einen Fixpunkt hat.

Bemerkung. Die Voraussetzung $0 \in \Omega$ kann nicht weggelassen werden.

Als Spezialfall enhält dieser Satz den

Fixpunktsatz von Brouwer. *Jede stetige Selbstabbildung der Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. Der Fall 2) des obigen Satzes (mit $\Omega = K(0,1)$) kann nicht eintreten, denn für $\|x\| = 1$ und $f(x) = \lambda x,\ \lambda > 1$ ist $\|f(x)\| > 1$, also $f(x) \notin K$.

Bemerkungen.

1. Aus der Leray-Schauderschen Alternative folgt, daß f schon dann einen Fixpunkt in $\overline{K(0,1)}$ besitzt, wenn $f(\partial K(0,1)) \subseteq \overline{K(0,1)}$ gilt (Satz von Rothe), oder noch allgemeiner, wenn $f(x) - x$ in keinem Randpunkt von $K(0,1)$ senkrecht nach außen zeigt.

2. Bezüglich welcher Norm hier die Einheitskugel betrachtet wird spielt offensichtlich keine Rolle.

3. Allgemeiner sei $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional ($p(x+y) \leq p(x) + p(x),\ p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für $\lambda \geq 0$). Die "Einheitskugel" $K = \{x :\ p(x) \leq 1\}$ sei beschränkt. Dann besitzt jede stetige Selbstabbildung von K einen Fixpunkt. Zum Beweis braucht nur $\partial K = \{x :\ p(x) = 1\}$ bewiesen und die Leray-Schaudersche Alternative verwendet zu werden.

   (Zunächst ist p stetig, da p außerhalb K nach unten beschränkt ist. Dann ist $\{p(x) < 1\}$ offen und $K = \overline{\{p(x) < 1\}}$.)

   Übrigens ist jede beschränkte konvexe Menge, die die 0 im Innern enthält, Einheitkugel für ein geeignetes p ist (Minkowski-Funktional).

4. Ist schließlich $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige abgeschlossene, beschränkte, konvexe Menge und x_0 innerer Punkt von C, so ist 0 innerer Punkt von $C_{x_0} := C - x_0$, und g, definiert durch

   $$g(x) = f(x + x_0) - x_0, \quad x \in C_{x_0},$$

   bildet C_{x_0} in sich ab, falls f die Menge C in sich abbildet. Jeder Fixpunkt $\overline{x}$ von g liefert dann den Fixpunkt $\overline{x} + x_0$ von f.

Satz von Rouché. *Ist* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $f, g \in C(\overline{\Omega})$ *mit* $\|g(x)\| < \|f(x)\|$ *auf* $\partial\Omega$*, so ist* $d(f+g, \Omega, 0) = d(f, \Omega, 0)$.

Beweis. Für $H(t,x) = f(x) + tg(x)$ folgt aus $x \in \partial\Omega$, $t \in [0,1]$

$$\|H(t,x)\| \geq \|f(x)\| - \|g(x)\| > 0 \; .$$

Hieraus folgt die Behauptung.

"Igelsatz". *Ist* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $0 \in \Omega$*,* n *ungerade und* $f \in C(\partial\Omega)$ *mit* $f(x) \neq 0$ *auf* $\partial\Omega$*, so existiert ein* $x \in \partial\Omega$ *und* $\lambda \neq 0$ *mit* $f(x) = \lambda x$.

Beweis. Da n ungerade und $0 \in \Omega$ ist, gilt

$$d(-\mathrm{Id}, \Omega, 0) = -1 \; .$$

Durch

$$H(t,x) = t(1-t)f(x) + (2t-1)x$$

ist eine Homotopie gegeben mit $H(0,x) = -x$, $H(1,x) = x$, für die wegen $0 \in \Omega$ nicht

$$0 \notin H(t, \partial\Omega)$$

gelten kann, da sonst $d(H(t,\cdot), \Omega, 0)$ konstant wäre. Also gibt es $x_0 \in \partial\Omega$, $0 < t < 1$ mit

$$t(1-t)f(x_0) + (2t-1)x_0 = 0 \; ,$$

und wegen $f(x_0) \neq 0$ ist $2t - 1 \neq 0$. Setze $\lambda = -\frac{2t-1}{t(1-t)}$.
Man mache sich die Bezeichnung "Igelsatz" am Beispiel $\Omega = K(0,1)$ klar!

4 Der Abbildungsgrad in endlich-dimensionalen normierten Räumen

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler normierter Raum und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis in E. Vermöge

$$Lx = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \quad \text{für } x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i$$

ist dann ein linearer Homöomorphismus von E auf $\mathbb{R}^n$ gegeben.

Ist $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt und $f : \overline{\Omega} \to E$ stetig, so ist

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega} &= L(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{offen, beschränkt,} \\ \widetilde{f} &= L \circ f \circ L^{-1} \in C(\overline{\widetilde{\Omega}}, \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

und für $y \notin f(\partial\Omega)$ gilt $Ly \notin \widetilde{f}(\partial\widetilde{\Omega})$ (sonst wäre $Ly = \widetilde{f}(\widetilde{x}) = L(f(\underbrace{L^{-1}\widetilde{x}}_{\in\partial\Omega}))$, also $y \in f(\partial\Omega)$).

Deshalb ist $d(\widetilde{f}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{y})$ definiert und von der gewählten Basis $b_1, \ldots, b_n$ in E unabhängig: Für eine zweite Basis $a_1, \ldots, a_n$ erhält man gemäß obigem Vorgehen $\widetilde{\widetilde{\Omega}}, \widetilde{\widetilde{f}}, \widetilde{\widetilde{y}}$, die durch eine reguläre Matrixtransformation aus $\widetilde{\Omega}, \widetilde{f}, \widetilde{y}$ hervorgehen. Durch

$$\begin{array}{ccc} (\xi_1, \ldots \xi_n) & \xrightarrow{L^{-1}} x \xrightarrow{M} & (\eta_1, \ldots, \eta_n) \\ (\text{bzgl. } b_i) & & (\text{bzgl. } a_i) \end{array}$$

ist ein linearer Homöomorphismus A von $\mathbb{R}^n$ auf sich definiert, der $\widetilde{\Omega}$ auf $\widetilde{\widetilde{\Omega}}$, $\widetilde{y}$ auf $\widetilde{\widetilde{y}}$ abbildet und $\widetilde{f}$ mit $\widetilde{\widetilde{f}}$ nach der Formel

$$L^{-1}\widetilde{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(x) = M^{-1}\widetilde{\widetilde{f}}(\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

miteinander verknüpft. Also ist wegen $(A \equiv ML^{-1})$

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{f}}(y_1, \ldots, y_n) &= ML^{-1}\widetilde{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\ &= (ML^{-1} \circ \widetilde{f} \circ LM^{-1})(y_1, \ldots, y_n) \, . \end{aligned}$$

Für $f \in C^k(\Omega)$ sind $\widetilde{f} \in C^k(\widetilde{\Omega}), \widetilde{\widetilde{f}} \in C^k(\widetilde{\widetilde{\Omega}})$, und

$$\widetilde{\widetilde{f}}' = ML^{-1}\widetilde{f}'LM^{-1} \, ,$$

also $\det \widetilde{\widetilde{f}}' = det \widetilde{f}'$. Dann stimmen aber $d(\widetilde{\Omega}, \widetilde{f}, \widetilde{y}$ und $d(\widetilde{\widetilde{\Omega}}, \widetilde{\widetilde{f}}, \widetilde{\widetilde{y}})$ überein, und es ist sinnvoll

$$d(f, \Omega, y) = d(\widetilde{f}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{y})$$

zu setzen. d heißt Brouwerscher Abbildungsgrad in E und besitzt die Eigenschaften 1) bis 4) aus 2.

Ist nun $E_0 \subseteq E$ ein linearer Teilraum, $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt mit $E_0 \cap \Omega \neq \emptyset$ sowie $f : \overline{\Omega} \to E$ stetig, $f(E_0 \cap \Omega) \subseteq E_0$ und $y \notin f(\partial\Omega)$, $y \in E_0$, so hätte man gerne $d(f, \Omega, y) = d(f\big|_{E_0 \cap \overline{\Omega}}, E_0 \cap \Omega, y)$. Daß dies nicht immer richtig sein kann, liegt auf der Hand. (Man betrachte etwa in $E = \mathbb{C}$, $E_0 = \mathbb{R}$ die Funktion $f(z) = z^2$ auf $\overline{K(0,1)}$ zu $y = 0$). Ist jedoch $f = \mathrm{Id} - g$ mit $g \in C(\overline{\Omega}, E_0)$, sodaß insbesondere aus $x \notin E_0$ auch $f(x) \notin E_0$ folgt, gilt tatsächlich diese Gleichheit:

Wir denken uns eine Basis in E_0 fixiert, erweitern diese zu einer Basis von E und numerieren so, daß die $b_1, \ldots, b_m$ den Teilraum E_0 aufspannen ($\dim E =$

n, $\dim E_0 = m < n$). Dann wird in der natürlichen Homöomorphie von E auf den $\mathbb{R}^n$ der Teilraum E_0 auf $\mathbb{R}^m$ abgebildet, der mit $\{x : x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann.

Es kann also tatsächlich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$, $f = \mathrm{Id} - g$ mit $g(\overline{\Omega}) \subseteq \mathbb{R}^m$ und $y \notin f(\partial\Omega)$ angenommen werden.

Setzt man $\Omega_m = \mathbb{R}^m \cap \Omega$, $f_m = f\big|_{\Omega_m}$ und ist $f \in C^1(\Omega)$, $x \in \Omega_m$ so ist

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_m & R \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-m} \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} ,$$

und nach dem Determinanten-Entwicklungssatz ist

$$\det{}_n f'(x) = \det{}_m f'_m(x) . \qquad (*)$$

Wegen $f^{-1}(y) = f_m^{-1}(y)$ für $y \in \mathbb{R}^m$ folgt hieraus die Behauptung für $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $y \notin f(N_f(\Omega))$. Aus $(*)$ folgt weiter

$$N_f(\Omega) \cap \Omega_m = N_{f_m}(\Omega_m) ,$$

so daß $\mathbb{R}^m \ni y^* \notin f_m(N_{f_m}(\Omega_m))$ auch $y^* \notin f(N_f(\Omega))$ nach sich zieht. Also ist für geeignet gewähltes $y^* \in \mathbb{R}^m$

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y^*) = d(f_m, \Omega_m, y^*) = d(f_m, \Omega_m, y) ,$$

so daß die Behauptung auch für $y \in f(N_f(\Omega))$ gilt. Für $f \in C(\overline{\Omega})$ beweist man die Behauptung schließlich, indem man g in Ω "C^∞" abändert.

5 Endlich-dimensionale und kompakte Abbildungen

In diesem Abschnitt seien E, F normierte Räume.

Definition. Es sei $M \subseteq E$ und $g : M \to F$. g heißt
endlich-dimensional, falls $g(M)$ in einem endlich-dimensionalen Teilraum von F liegt,
kompakt, falls $\overline{g(A)}$ kompakt ist für jede beschränkte Teilmenge A von M.

Bemerkung. Eine endlich-dimensionale Funktion f braucht nicht kompakt zu sein und umgekehrt. Sie ist kompakt genau dann, wenn sei beschränkte Mengen in beschränkte Mengen abbildet.

Satz. *Es seien E, F normiert und $M \subseteq E$. Dann gilt:*

a) *Ist $M \subseteq E$ beschränkt und $g : M \to F$ kompakt, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endlich-dimensionale kompakte Funktion g_ε mit $\|g(x) - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ (Schauder). Ist g stetig, so können die g_ε stetig gewählt werden.*

b) *Ist F vollständig, $g_n : M \to F$ eine Folge kompakter Abbildungen mit*

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge von M, so ist g kompakt. Insbesondere gilt die Umkehrung von a).

c) *Ist $E = F$ und $f = \mathrm{Id} - g$, $g : M \to F$ kompakt und stetig, so sind die Bilder beschränkter und abgeschlossener Teilmengen von M abgeschlossen. Ist zusätzlich M abgeschlossen und $K \subseteq E$ kompakt, so ist $f^{-1}(K) \cap M$ kompakt.*

Beweis.

a) Da $\overline{g(M)}$ kompakt ist, existieren zu $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_i \in M$ mit

$$\overline{g(M)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(g(x_i),\ \varepsilon) .$$

Wir setzen

$$\phi_i(y) = \max\{0,\ \varepsilon - \|y - g(x_i)\|\}$$

und hiermit

$$\lambda_i(y) = \frac{\phi_i(y)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \phi_j(y)} , \quad y \in \bigcup_{i=1}^{n} K(g(x_i),\ \varepsilon) .$$

(Man beachte, daß auf $\overline{g(M)}$ die Summe im Nenner stets positiv ist!)

Schließlich setzen wir

$$g_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g(x)) \cdot g(x_i) .$$

g_ε ist auf M definiert (und stetig, falls g dies ist), $g_\varepsilon(M)$ liegt in dem von den $g(x_i)$ erzeugten höchstens n-dimensionalen Teilraum von F und ist beschränkt. Weiter ist

$$\begin{aligned} \|g(x) - g_\varepsilon(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g(x))(g(x) - g(x_i)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g(x)) \, \|(g(x) - g(x_i)\| \end{aligned}$$

und für die i, für die $\|g(x) - g(x_i)\| \geq \varepsilon$ ist, ist $\lambda_i(g(x)) = 0$. Also ist $\|g(x) - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon, \ x \in M$.

b) Es sei $A \subseteq M$ eine beschränkte Teilmenge von M und $\varepsilon > 0$. Wählt man $n \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\|g_n(x) - g(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ für } x \in A$$

gilt, und endlich viele Punkte $y_1, \ldots, y_k \in g_n(A)$ mit

$$g_n(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(y_i, \frac{\varepsilon}{2}),$$

so folgt

$$g(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(y_i, \varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war ist $g(A)$ totalbeschränkt, also $\overline{g(A)}$ kompakt.

c) Es sei $f = \mathrm{Id} - g$, g kompakt und $A \subseteq M$ beschränkt und abgeschlossen. Ist (y_n) eine in E konvergente Folge von Elementen von $f(A)$, also

$$y_n = x_n - g(x_n), \quad x_n \in A \ ,$$

so besitzt $(g(x_n))$ eine konvergente Teilfolge $(g(x_{n_k}))$. Dann folgt aus $y_n \to y$ sicher $y_{n_k} \to y$, so daß x_{n_k} konvergiert gegen ein $x \in A$. Aus der Stetigkeit folgt dann $y = x - g(x) \in f(A)$. Ist schließlich M abgeschlossen, $K \subseteq E$ kompakt und $x_n \in f^{-1}(K) \cap M$, so ist

$$f(x_n) = x_n - g(x_n) \in K \ ;$$

die Folge $(f(x_n))$ besitzt eine konvergente Teilfolge, kann also o.B.d.A. als konvergent angenommen werden. Da $(g(x_n))$ ihrerseits eine konvergente Teilfolge $(g(x_{n_k}))$ besitzt, ist die Folge (x_{n_k}) konvergent, $x_{n_k} \to x \in M$ (abgeschlossen). Wegen $f(x) = \lim f(x_{n_k}) \in K$ ist $x \in f^{-1}(K) \cap M$, also diese Menge kompakt.

6 Der Leray-Schaudersche Abbildungsgrad

Es sei E reeller, normierter Raum, $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt, $f = \mathrm{Id} - g$, wobei g auf $\overline{\Omega}$ stetig und kompakt ist und es gelte $y \notin f(\partial\Omega)$. Dann ist $f(\partial\Omega)$ abgeschlossen, also $\mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) = \alpha > 0$.

Zu g gibt es nach dem Satz aus 14. eine endlich-dimensionale, stetige, kompakte Funktion g_α mit

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|g(x) - g_\alpha(x)\| < \alpha \,.$$

Wir wählen nun einen endlich-dimensionalen Teilraum E_1 von E, der $g_\alpha(\overline{\Omega})$ und y enthält, Ω schneidet, und setzen $\Omega_1 = E_1 \cap \Omega \neq \emptyset$. Ω_1 ist offen und beschränkt in E_1, es gilt $\overline{\Omega}_1 \subseteq E_1 \cap \overline{\Omega}$, $\partial\Omega_1 \subseteq E_1 \cap \partial\Omega$, und mit $f_\alpha = \mathrm{Id} - g_\alpha$ folgt

$$\begin{aligned} &f_\alpha(\overline{\Omega}_1) \subseteq f_\alpha(E_1 \cap \overline{\Omega}) \subseteq E_1, \\ &y \notin f_\alpha(\partial\Omega_1) \end{aligned}$$

(sonst wäre $y = x_0 - g_\alpha(x_0)$, $x_0 \in \partial\Omega_1 \subseteq E_1 \cap \partial\Omega$, also $|f(x_0) - y| = |x_0 - g(x_0) - y| = |g(x_0) - g_\alpha(x_0)| < \alpha$ im Widerspruch zur Definition von α).

Der Brouwersche Abbildungsgrad

$$d(f_\alpha, \Omega_1, y)$$

ist also definiert und von der speziellen Wahl von g_α und E_1 unabhängig, solange die Bedingungen $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |g(x) - g_\alpha(x)| < \alpha,\ y \in E_1,\ \Omega \cap E_1 \neq \emptyset$ erfüllt sind.

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} &\widetilde{g_\alpha} : \overline{\Omega} \to \widetilde{E_1},\ \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|g(x) - \widetilde{g_\alpha}(x)\| < \alpha \,, \\ &y \in \widetilde{E_1},\ \Omega \cap \widetilde{E_1} \neq \emptyset \,. \end{aligned}$$

Wir setzen $E_0 =$ lin. Hülle von $E_1 \cup \widetilde{E_1}$ und erhalten aus den Überlegungen in 13. sofort

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Id} - \widetilde{g_\alpha}, \Omega \cap E_0, y) &= d(\mathrm{Id} - \widetilde{g_\alpha}, \Omega \cap \widetilde{E_1}, y) \,, \\ d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega \cap E_0, y) &= d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega \cap E_1, y) \,. \end{aligned}$$

In E_0 sind aber $\mathrm{Id} - g_\alpha$ und $\mathrm{Id} - \widetilde{g_\alpha}$ homotop: Mit

$$H(t,x) = t(x - g_\alpha(x)) + (1-t)(x - \widetilde{g_\alpha}(x)) \,,$$

folgt für $x \in \partial(\Omega \cap E_0) \subseteq \partial\Omega$

$\|f(x) - H(t,x)\| = \|t(f(x) - (x - g_\alpha(x))) + (1-t)(f(x) - (x - \widetilde{g_\alpha}(x))\| < \alpha$,

also $H(t,x) \neq y$ für $(t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega_0$.

Also ist tatsächlich $d(\mathrm{Id} - \widetilde{g_\alpha}, \Omega \cap \widetilde{E_1}, y) = d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega_1 E_1, y)$.

Definition. Ist E reell, normiert, $\Omega \subseteq E$ offen, beschränkt, $f = \mathrm{Id} - g$, $g : \overline{\Omega} \to E$ stetig, kompakt, $y \notin f(\partial\Omega)$ so heißt

$$d(f, \Omega, y) = d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega \cap E_1, y)$$

mit

$$\dim E_1 < \infty, \Omega \cap E_1 \neq \emptyset, y \in E_1, g_\alpha(\overline{\Omega}) \subseteq E_1, \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|g(x) - g_\alpha(x)\| < \alpha$$

der Leray-Schaudersche Abbildungsgrad von f bzgl. Ω und y.

7 Eigenschaften des Leray-Schauderschen Abbildungsgrades

Es sei E reeller, normierter Raum, $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt. Dann hat der L-S-Grad folgende Eigenschaften:

1. $d(\mathrm{Id}, \Omega, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \in \Omega \\ 0 & \text{für } y \notin \overline{\Omega} \end{cases}$

2. Ist $f = \mathrm{Id} - g$, $g : \overline{\Omega} \to E$ kompakt und stetig und $d(f, \Omega, y) \neq 0$, so existiert $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$.

3. Sind Ω_i offen, $\Omega_i \subseteq \Omega$, $i = 1, \dots k$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{\Omega_i} = \overline{\Omega}$ und $y \notin f(\partial\Omega_i)$ $(i = 1, \dots, k)$, so gilt (mit $f = \mathrm{Id} - g$, g kompakt)

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^{k} d(f, \Omega_i, y) \, .$$

4. Ist $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ kompakt und stetig (als Abbildung von $\mathbb{R} \times E \to E$) und $H = \mathrm{Id} - h$, $y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$, so ist $d(H(t,\cdot), \Omega, y(t))$ konstant.

Beweis.

1. Es ist $g = 0$ selbst schon endlich-dimensional. Im Fall $y \in \Omega$ kann deshalb $E_1 = \{ty : t \in \mathbb{R}\}$ gewählt werden, und es ist mit $\Omega_1 = \Omega \cap E_1$

$$d(\mathrm{Id}, \Omega, y) = d(\mathrm{Id}, \Omega_1, y) = 1 \quad \text{wegen } y \in \Omega_1 \ .$$

   Ist dagegen $y \notin \Omega$, so wähle man $x_0 \in \Omega$ und $E_1 = \text{lin. Hülle}\,\{x_0, y\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap E_1$. Dann ist $y \notin \Omega_1$, so ist

$$d(\mathrm{Id}, \Omega, y) = d(\mathrm{Id}, \Omega_1, y) = 0 \ .$$

2. Wir setzen $\alpha = \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega))$ und wählen eine Folge von endlich-dimensionalen, kompakten g_n mit $\alpha > \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} \|g(x) - g_n(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zu jedem n wählen wir $E_n \subseteq E$, $\dim E_n < \infty$, $g_n(\overline{\Omega}) \subseteq E_n$, $y \in E_n$, $E_n \cap \Omega \neq \emptyset$. Dann ist jeweils

$$d(\mathrm{Id} - g_n, \Omega \cap E_n, y) = d(\mathrm{Id} - g, \Omega, y) \neq 0 \ ,$$

   so daß jeweils $x_n \in \Omega \cap E_n$ existiert mit

$$x_n - g_n(x_n) = y \ .$$

   Hieraus folgt

$$\|f(x_n) - y\| = \|g_n(x_n) - g(x_n)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

   so daß $y \in f(\overline{\Omega})$ gilt wegen der Abgeschlossenheit dieser Menge (vgl. 14.). Wegen $y \notin f(\partial\Omega)$ gibt es also $x \in \Omega$ mit $y = f(x)$.

3. Wegen $\partial\Omega \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} \partial\Omega_i$ ist $y \notin f(\partial\Omega)$, und wir wählen zunächst $g_\alpha : \overline{\Omega} \to E$ kompakt und endlich-dimensional mit

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|g(x) - g_\alpha(x)\| < \min_i \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega_i)).$$

   Alsdann wählen wir $E_1 \subseteq E$, $\dim E_1 < \infty$ mit $g_\alpha(\overline{\Omega}) \subseteq E_1$, $E_1 \cap \Omega_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, k$, $y \in E_1$. Dann ist

$$d(f, \Omega, y) = d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega \cap E_1, y) \ .$$

   Die Menge X der Lösungen von $x - g_\alpha(x) = y$ in $\overline{\Omega}$ ist kompakt (also abgeschlossen) und liegt offensichtlich in $\Omega \cap E_1$ (wegen $x = y + g_\alpha(x) \in E_1$) und sogar in $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Omega_i \cap E_1 \subseteq \Omega \cap E_1$: wäre nämlich $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Omega_i \cap E_1$, so wegen $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{\Omega}_i$ doch sicher in einem $\overline{\Omega}_i$, also in $\partial\Omega_i$ (bzgl. E), was wegen $\alpha > \|g(x) - g_\alpha(x)\| = \|g(x) - x + y\| \geq \alpha$ nicht möglich ist. Also ist weiter

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y) &= d(\mathrm{Id}, -g_\alpha, \bigcup_{i=1}^{k} (\Omega_i \cap E_1), y) \\ &= \sum_{i=1}^{k} d(\mathrm{Id} - g_\alpha, \Omega_i \cap E_1, y) \\ &= \sum_{i=1}^{k} d(\mathrm{Id} - g, \Omega_i, y) \ . \end{aligned}$$

(Dabei wurde $(\Omega_i \cap E_1) \cap (\Omega_j \cap E_1) = \emptyset$ $(i \neq j)$ und die Additivität des Abbildungsgrades in endlich-dimensionalen Vektorräumen benutzt.)

4. Es sei also $H = \mathrm{Id} - h$, $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ kompakt und stetig, $y : [0,1] \to E$ stetig und $y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$. Dann existiert $\alpha > 0$ mit $\mathrm{dist}(y(t), H(t, \partial\Omega)) \geq \alpha > 0$ für $t \in [0,1]$ (sonst existiert $t_n \to t_0$, $x_n \in \partial\Omega$ mit $y(t_n) - x_n + h(t_n, x_n) \to 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $x_{y_k} \to x_0 \in \partial\Omega$, $y(t_0) - x_0 + h(t_0, x_0) = 0$ $W!$). Nun gibt es nach 14. ein $h_\alpha : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E_1$ stetig, $\dim E_1 < \infty$ mit $\sup\limits_{(t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}} h_\alpha(t,x) - h(t,x)\| < \frac{\alpha}{2}$ und ein endlich- dimensionales $y_\alpha : [0,1] \to E_2$ mit $\|y_\alpha(t) - y(t)\| < \frac{\alpha}{2}$ $(t \in [0,1])$.

   Ist $E_3(t) =$ lin. Hülle von $\{E_1, E_2, w\}$ $(w \in \Omega$ fest$)$, dann

$$\begin{aligned} d(H(t,\cdot), \Omega, y(t)) &= d(\mathrm{Id} - h_\alpha(t,\cdot), \Omega \cap E_3(t), y(t)) \\ &= d(\mathrm{Id} - h_\alpha(t,\cdot), \Omega \cap E_3(H, y_\alpha(t), y(t)) \\ &= d(\mathrm{Id} - h_\alpha(t,\cdot), \Omega \cap E_3(H, y_\alpha(t), y(t)) \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

Aus diesen Eigenschaften folgen wie früher

Leray-Schaudersche Alternative. Ist $0 \in \Omega \subseteq E$, $g : \overline{\Omega} \to E$ kompakt und stetig, so besitzt g wenigstens eine der beiden Eigenschaften:

1. g besitzt einen Fixpunkt in $\overline{\Omega}$.
2. Es existiert $x_0 \in \partial\Omega$ und $\lambda > 1$ mit $g(x_0) = \lambda x_0$.

Fixpunktsatz von Schauder. Ist E reell, normiert und $g : \overline{K(0,1)} \to \overline{K(0,1)}$ kompakt und stetig, so besitzt g mindestens einen Fixpunkt.

Weiter hängt der Abbildungsgrad nur von den Werten von f auf $\partial\Omega$ ab, und es ist

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega \backslash A, y) \ ,$$

falls $A \subseteq \overline{\Omega}$ abgeschlossen ist und $f(x) \neq y$ für $x \in A$ gilt.