Einführung in die Funktionalanalysis:
Teil I

Vorlesung im Wintersemester 1997/98
Professor J. Zowe

1 Normierte Vektorräume

1.1 Grundbegriffe

Definition 1.1.1 X heißt ein *Vektorraum* über $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), falls es zwei Operatoren "+" und "·" auf $X \times X$ bzw. $\mathbb{K} \times X$ gibt, so daß für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- es gibt genau ein neutrales Element 0_X : $\quad x + 0_X = x$
- $\forall x$ gibt es genau ein inverses Element $-x$: $\quad x + (-x) = 0_X$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- $0 \cdot x = 0_X$
- $1 \cdot x = x$

Beispiel 1.1.2

(a) $X := \mathbb{R}^n, \quad X := \mathbb{C}^n$

(b) $X := \{x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \mid \xi_k \in \mathbb{K}\}$

mit $x + y = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} + \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\xi_k + \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$

(b1) $X_1 := \{x \in X \mid \xi_k$ konvergente Folge $\}$

(b2) $X_2 := \{x \in X \mid \exists\, M_x : |\xi_k| \leq M_x \,\forall\, k\}$

(b3) $X_3 := \{x \in X \mid \exists\, k_0 : \xi_k = 0 \text{ für } k \geq k_0\}$

(c) $X := \{f : [a,b] \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}, \quad -\infty < a \leq b < \infty$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad (f+g)(t) &:= f(t) + g(t) \quad \text{für} \quad a \leq t \leq b \\ (\alpha f)(t) &:= \alpha f(t) \qquad\quad \text{“} \qquad\quad \text{“} \end{aligned}$$

(c1) $X_1 := \{f \in X \mid f \text{ Polynom }\}$

Definition 1.1.3 Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

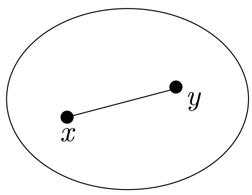
(a) $M \subset X$ heißt ein *linearer Teilraum*:$\Longleftrightarrow$
$\alpha x + \beta y \in M \qquad \forall\, x, y \in M, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
(Beispiele siehe oben)

(b) $V \subset X$ heißt ein *affiner Teilraum* :$\Longleftrightarrow$
$\exists\, x \in X \quad \exists$ linearen Teilraum $M \subset X$:
$V = x + M \quad (= \{x + m \mid m \in M\})$

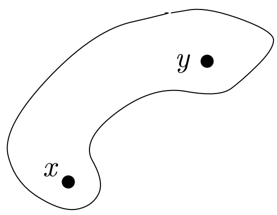
Definition 1.1.4 Sei X ein Vektorraum und $K \subset X$.

(a) K heißt *konvex* :$\Longleftrightarrow$ $\alpha x + (1-\alpha) y \in K \quad \forall\, x, y \in K, \forall\, \alpha \in [0,1]$

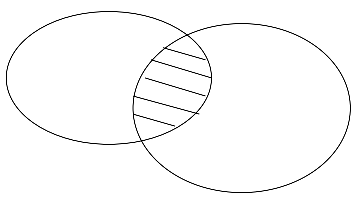
(b) K heißt *Kegel* :$\Longleftrightarrow$ $\lambda x \in K \quad \forall\, x \in K \quad \forall\, \lambda \geq 0$



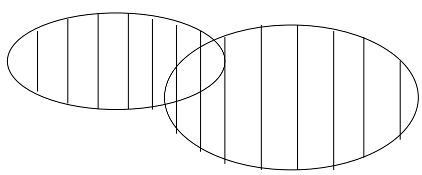
konvex



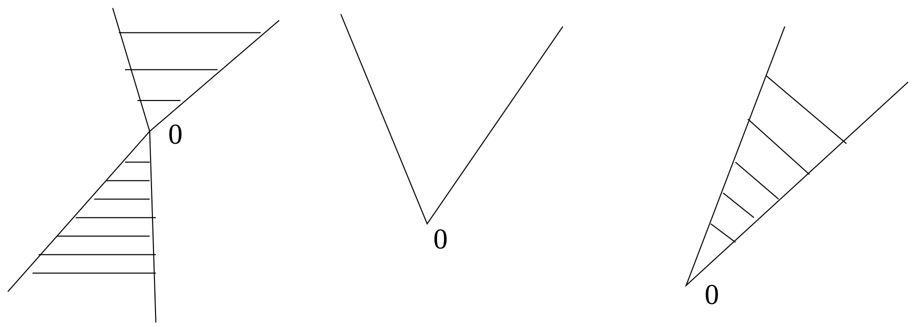
nicht konvex



Schnitt konvexer Mengen: konvex



Vereinigung konvexer Mengen:
nicht konvex



nicht-konvexe Kegel konvexer Kegel

Definition 1.1.5 Sei X ein Vektorraum (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) und $S \subset X$. Mit

- $\operatorname{lin}(S)$ (lineare Hülle)
- $\operatorname{aff}(S)$ (affine Hülle)
- $\operatorname{konv}(S)$ (konvexe Hülle)

bezeichnet man den kleinsten linearen/affinen Teilraum bzw. die kleinste konvexe Menge, die S enthält.

$\lceil$ $\rceil$

Existenz: z.B. $\operatorname{konv}(S) = \bigcap\limits_{C \supseteq S, C \text{ konvex}} C$

Analytische Darstellung: z.B.

$$\operatorname{konv}(S) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \,|\, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, s_i \in S \Big\}$$

$\lfloor$ $\rfloor$

1.2 Normierte Vektorräume

Definition 1.2.1 Ein Vektorraum (über $\mathbb{K}$) mit einer Norm $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(a) $\|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \forall\, x \in X$

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall\, x \in X \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)

heißt *normierter Vektorraum* (NVR).

Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \|x\| - \|y\| &= \|x - y + y\| - \|y\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| \end{aligned}$$

d.h.

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad \forall\, x, y \in X \tag{1.2.1}$$

Beispiel 1.2.2

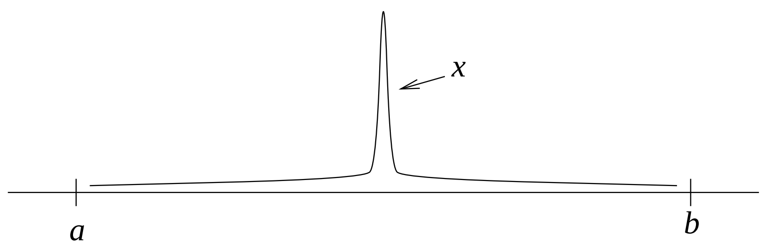
(a) $C[a,b] := \{x : [a,b] \to \mathbb{K} \,|\, x \text{ stetig }\}$ mit $-\infty < a \leq b < \infty$ und

$$\|x\|_\infty := \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \quad \text{für} \quad x \in C[a,b]$$

(b) $X := \{x : [a,b] \to \mathbb{K} \,|\, x \text{ stetig }\}$ und

$$\|x\| := \int_a^b |x(t)| dt$$

Beachte: $C[a,b] \neq X$
$\forall\, M > 0 \quad \exists\, x : \|x\|_\infty > M$, <u>aber</u> $\|x\| < \frac{1}{M}$



(c) Euklidischer Vektorraum:

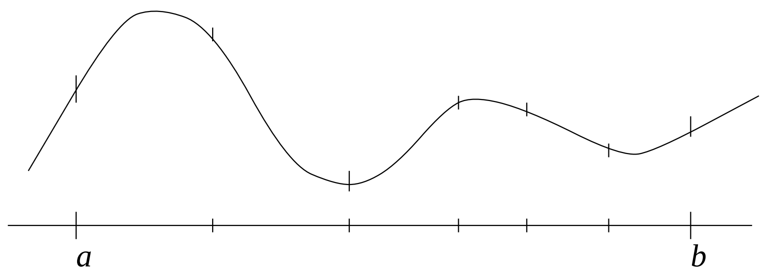
$$E^n (= \mathbb{R}^n \text{ oder } \mathbb{C}^n) \text{ mit } \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

(d) $BV[a,b] := \{x : [a,b] \to \mathbb{K} \,|\, x$ von beschränkter Variation auf $[a,b]\}$ mit $-\infty < a \le b < \infty$.

Dabei heißt x von beschränkter Variation auf $[a,b]$, wenn

$$\exists\, M : \quad \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})| \le M$$

für alle Partitionen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, \quad n \in \mathbb{N}$ von $[a,b]$.



Wir definieren als totale Variation von x

$$TV(x) := \sup_{\text{alle Part. von } [a,b]} \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})|$$

($\approx$ "Änderung" in x-Richtung)

$x =$const: $TV(x) = 0$
x monoton: $TV(x) = |x(b) - x(a)|$
$[a,b] := [0,1], \quad x(t) := \begin{cases} 1/t & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t = 0 \end{cases} \notin BV[0,1]$

<u>Es gilt:</u> (ÜA) Mit

$$\|x\| := |x(a)| + TV(x)$$

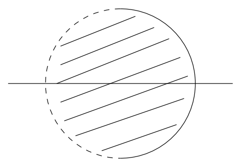
wird $BV[a,b]$ zu einem NVR.

Definition 1.2.3 Sei X ein NVR und $P \subset X$. Mit

$$\begin{aligned} P^\circ &:= \{p \in P \mid \exists\, \epsilon > 0 : \|x - p\| < \epsilon \Rightarrow x \in P\} \\ \overline{P} &:= \{x \in X \mid \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, p \in P : \|x - p\| < \epsilon\} \end{aligned}$$

bezeichnen wir das *Innnere* bzw. den *Abschluß* von P.
Falls $P = P^\circ$ ($P = \overline{P}$), so heißt P *offen* (*abgeschlossen*).

Eine konvexe Menge kann offen, abgeschlossen oder weder offen noch abgeschlossen sein.

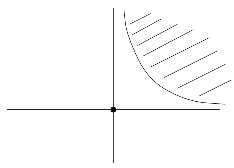


Es gilt

Satz 1.2.4 Sei C ein konvexe Menge in einem normierten Vektorraum. Dann sind auch $\overline{C}$ und C° konvex.

Beweis: Ü.A.

Die "Umkehrung" gilt nicht, z.B. A abgeschlossen $\not\Rightarrow$ konv(A) abgeschlossen.



$$\begin{aligned} A &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x > 0, y \geq 1/x \right\} \\ \mathrm{konv}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x > 0, y > 0 \right\} \end{aligned}$$

1.3 Konvergenz und Stetigkeit

Definition 1.3.1 Seien X und Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$.

(a) T heißt *stetig* in $x_0 \in X$ $:\Longleftrightarrow$ $\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \\ \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| \leq \epsilon \end{array}$

(b) T heißt *stetig* (auf X) $:\Longleftrightarrow$ T stetig für alle $x \in X$

Charakterisierung der Stetigkeit über Folgen:

Definition 1.3.2 Die Folge $\{x_n\}_1^\infty$ in dem normierter Vektorraum X heißt *konvergent* gegen $x \in X$ $(x_n \longrightarrow x)$ $:\Longleftrightarrow$ $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

Satz 1.3.3 Seien $X.Y$ normierte Vektorräume und $T : X \to Y$. Dann gilt:

T ist stetig in $x_0 \Longleftrightarrow (x_n \to x_0 \Rightarrow T(x_n) \to T(x_0))$

Beweis: "$\Rightarrow$": klar

"$\Leftarrow$": Annahme: $\exists\, \epsilon > 0\, \forall\, \delta_n\, (:= \frac{1}{n})\, \exists\, x_n$:

$$\|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{aber} \quad \|T(x_n) - T(x_0)\| > \epsilon$$

Widerspruch ! □

Definition 1.3.4

(a) Seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linear* (linearer Operator), falls

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall\, x, y \in X\, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

(b) Falls $Y = \mathbb{K}$, so spricht man von einem *linearen Funktional.*

Beispiel 1.3.5

- **<u>Lineare Funktionale f:</u>**

  (a) $X := C[0,1], f(x) := x(\frac{1}{2})$ für $x \in X$

  (z.B. $f(x+y) = (x+y)(\frac{1}{2}) = x(\frac{1}{2}) + y(\frac{1}{2}) = f(x) + f(y)$ usw.)

  (b) $X := C[0,1], f(x) := \displaystyle\int_0^1 x(t)dt$ für $x \in X$.

- **Lineare Operatoren T:**

  (c) $X := \mathbb{K}^n, Y := \mathbb{K}^m, A$ $m \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$
  $T(x) := Ax$ für $x \in X$ $(m = 1$: lineares Funktional$)$

  (d) $X = Y = C[a,b]$, $k(.,.)$ stetig auf $[a,b] \times [a,b]$. Für $x \in X$ sei $Tx \in Y$ definiert durch

$$(Tx)(t) := \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau, \quad \text{für} \quad t \in [a,b]$$

Satz 1.3.6 Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear. Dann gilt:

T stetig in $0_X \Rightarrow T$ stetig auf X.

Beweis: Sei x beliebig. Nach Satz 1.3.3 ist zu zeigen:

$$x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx.$$

Das ist aber dasselbe wie

$$\underbrace{(x_n - x)}_{z_n} \to 0 \Rightarrow Tx_n - Tx = T(\underbrace{x_n - x}_{z_n}) \to 0,$$

und das ist Stetigkeit in 0. □

1.4 ℓ_p- und L_p-Räume

Definition 1.4.1

(a) Für $1 \leq p < \infty$ definieren wir

$$\begin{aligned} \ell_p &:= \left\{ x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \,|\, \xi_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \right\} \\ \|x\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{für} \quad x \in \ell_p. \end{aligned}$$

(b) Für $p = \infty$ setzen wir

$$\begin{aligned} \ell_\infty &:= \{ x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \,|\, \xi_i \in \mathbb{K}, \exists\, M : |\xi_i| \leq M \quad \forall\, i \} \\ \|x\|_\infty &:= \sup_i |\xi_i|. \end{aligned}$$

Bemerkung: In E^n gilt $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Frage: Für welche p ist ℓ_p ein Vektorraum und $\|.\|_p$ eine Norm?

$\lceil$ $\rceil$

Z.B.: falls die Dreiecksungleichung gilt, so folgt

$$\begin{array}{l} x, y \in \ell_p \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \Rightarrow \|\alpha x + \beta y\|_p \leq |\alpha| \underbrace{\|x\|_p}_{<\infty} + |\beta| \underbrace{\|y\|_p}_{<\infty}$$

d.h. $(\alpha x + \beta y) \in \ell_p$.

$\lfloor$ $\rfloor$

Satz 1.4.2 (Höldersche Ungleichung) Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ so, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (setze $\frac{1}{\infty} = 0$). Dann folgt für $x = \{\xi_i\} \in \ell_p$ und $y = \{\eta_i\} \in \ell_q$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.4.1}$$

Gleichheit gilt in (1.4.1) genau dann, wenn

$$\left(\frac{|\xi_i|}{\|x\|_p} \right)^{1/q} = \left(\frac{|\eta_i|}{\|y\|_q} \right)^{1/p} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Beweis: Ü.A.

Für $p = q = 2$ erhalten wir als Verallgemeinerung von Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Die Dreiecksungleichung ist eine Folge von Satz 1.4.2.

Satz 1.4.3 (Minkowskiungleichung) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt für alle $x, y \in \ell_p$

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{1.4.2}$$

Beweis: Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind trivial. Sei also $1 < p < \infty$. Offensichtlich gilt mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^{p-1}|\xi_i| + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^{p-1}|\eta_i|.$$

(1.4.1) auf die Summen rechts getrennt angewandt ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{1/p}\right]$$

mit q so, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $p = (p-1)q$.
Division beider Seiten durch $(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p)^{1/q}$ liefert wegen $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{1/p}.$$

Für $n \to \infty$ auf der rechten Seite erhält man

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

und dann für $n \to \infty$ auf der linken Seite die Behauptung (1.4.2). □

Folgerung: $\|.\|_p$ in Definition 1.4.1 (a),(b) ist eine Norm. Insbesondere folgt

$$\begin{array}{r} x, y \in \ell_p \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ell_p,$$

d.h. ℓ_p ist ein Vektorraum.

Definition 1.4.4 Für $1 \leq p < \infty$ setzen wir (s.u.)

$$L_p[a,b] := \left\{ x : [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} |x(t)|^p \text{ ist Lebesgue-} \\ \text{integrierbar} \end{array} \right\} \tag{1.4.3}$$

$$\text{und} \quad \|x\|_p := \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \tag{1.4.4}$$

Wichtige Anmerkung: Es gilt für (1.4.4) **nicht**

$$\|x\|_p = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Es kann $x(t) \neq 0$ auf einer Menge von Lebesgue-Maß 0 sein (z.B. auf einer abzählbaren Punktmenge) !.
Deswegen identifiziert man in (1.4.3) Funktionen f und g, falls $f = g$ f.ü. ($\Leftrightarrow \mu(\{t \in [a,b] \,|\, f(t) \neq g(t)\}) = 0$), und versteht unter L_p den Raum der entsprechenden Äquivalenzklassen.
Damit wird (1.4.4) zu einer Norm und L_p zu einem normierter Vektorraum.

Definition 1.4.5 Wir setzen

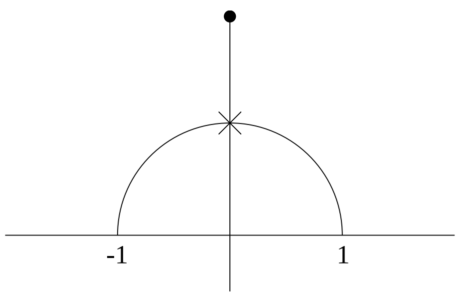
$$L_\infty[a,b] := \left\{ x : [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ ist Lebesgue-meßbar} \\ \text{und beschränkt bis auf} \\ \text{eine Menge vom Maß } 0 \end{array} \right\} \tag{1.4.5}$$

$$\text{und} \quad \|x\|_\infty := \inf_{y(t)=x(t) \text{ f.ü.}} [\sup_{a \le t \le b} |y(t)|]. \tag{1.4.6}$$

Anmerkung: Wir betrachten in (1.4.5) wieder Funktionen als gleich, die sich nur auf einer Menge vom Maß 0 unterscheiden. Dieser Ansatz führt automatisch zu (1.4.6).

Beispiel 1.4.6 Für

$$x(t) := \begin{cases} 1 - t^2 & \text{für} \quad t \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 2 & \text{für} \quad t = 0 \end{cases}$$



ist $\sup_{-1 \le t \le 1} |x(t)| = 2$, aber $\|x\|_\infty = 1$!

Es gelten analoge Aussagen zu Satz 1.4.2 und 1.4.3.

1.5 Banachräume

Definition 1.5.1 Eine Folge $\{x_n\}_1^\infty$ in einem normierten Vektorraum heißt *Cauchyfolge* (CF), falls gilt:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N: \qquad \|x_n - x_m\| \leq \epsilon \quad \text{für} \quad n, m \geq N.$$

$$(\text{d.h.} \quad \|x_n - x_m\| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0).$$

Offensichtlich: $\{x_n\}$ konvergent $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ ist CF.
Aber: Umgekehrte Richtung gilt nicht! (siehe unten)

Definition 1.5.2 Ein normierter Vektorraum X heißt *vollständig* (*Banachraum*, BR), falls jede Cauchyfolge in X einen Limes in X besitzt.

Beispiel 1.5.3 (Bedeutung der Vollständigkeit)

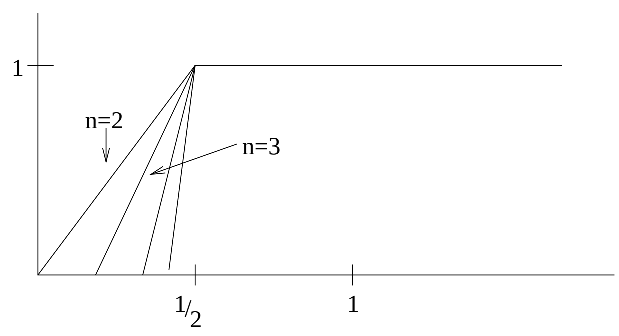
(a) Betrachte in

$$X := \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, x \,\text{stetig}\} \text{ mit } \|x\| := \int_0^1 |x(t)| dt$$

(Beachte: $X \neq C[0,1]$; vgl. Beispiel 1.2.2)

die Folge $\{x_n\}$ mit

$$x_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nt - \frac{n}{2} + 1 & \text{für} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für} \quad t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Es ist

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \left|\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)\right]\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

jedoch gibt es kein $x \in X$ (x stetig!) mit $x_n \to x$, d.h. X ist kein BR.

(b) Dagegen konvergiert $\{x_n\}$ in $L_1[0,1]$ gegen

$$x(t) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für} \quad \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases} \in L_1[0,1].$$

(c) In $C[0,1]$ ist $\{x_n\}$ keine Cauchyfolge, denn

$$\|x_n - x_m\|_\infty \overset{\text{o.B.d.A. } m>n}{=} n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) - \frac{n}{2} + 1 = 1 - \frac{1}{m} \overset{n,m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Lemma 1.5.4 Eine Cauchyfolge in einem normierten Vektorraum X ist beschränkt.

Beweis: Zu Cauchyfolge $\{x_n\}$ wähle N so, daß $\|x_n - x_N\| \le 1$ für $n \ge N$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \|x_n - x_N + x_N\| \\ &\le \|x_n - x_N\| + \|x_N\| \\ &\le \|x_N\| + 1 \quad \text{für} \quad n \ge N.\end{aligned}$$

□

Satz 1.5.5 $C[0,1]$ ist ein Banachraum.

Beweis: Ü.A.

⌈ ⌉

$\|x_n - x_m\| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, t$,
d.h. für jedes feste t ist $\{x_n(t)\}$ Cauchyfolge in $\mathbb{K}$.
$\Rightarrow \forall\, t\, \exists\, x(t)$ mit $x_n(t) \to x(t)$.
Zeige: für die so definierte Funktion x: $x \in C[0,1]$, $x_n \to x$.

⌊ ⌋

Satz 1.5.6 ℓ_p ist ein Banachraum für $1 \le p \le \infty$.

Beweis:

Sei $1 \le p < \infty$ und $\{x_n\}$ mit $x_n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \dots\}$ eine Cauchyfolge in ℓ_p. Wegen

$$|\xi_k^n - \xi_k^m| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i^m|^p \right)^{1/p} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ist $\{\xi_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ für jedes feste k eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ und konvergiert gegen ein $\xi_k \in \mathbb{K}$. Wir zeigen für $x := \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$

(i) $x \in \ell_p$

(ii) $x_n \to x$.

(i): Nach Lemma 1.5.4 gibt es ein M mit $\|x_n\| \le M$ für alle n und damit

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n|^p \le \|x_n\|^p \le M^p \quad \text{für alle} \quad n \quad \text{und} \quad k.$$

Für $n \to \infty$ folgt (beachte: endliche Summe!)

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^p \le M^p \quad \text{für alle} \quad k,$$

und für $k \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \le M^p,$$

und somit $x \in \ell_p$.

(ii): Zu $\epsilon > 0$ wähle N so, daß

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i^m|^p \le \|x_n - x_m\|^p \le \epsilon$$

für $n, m \ge N$ und alle k. Für $m \to \infty$ folgt (endliche Summe!)

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i|^p \le \epsilon \quad \text{für} \quad n \ge N \quad \text{und alle} \quad k.$$

Mit $k \to \infty$ erhalten wir

$$\|x_n - x\|^p \le \epsilon \quad \text{für} \quad n \ge N,$$

also gilt (ii).

Sei $p = \infty$: ähnlich (leichter). $\square$

Wir notieren ohne Beweis:

Satz 1.5.7 $L_p[a,b]$ ist ein Banachraum für $1 \leq p \leq \infty$.

Anmerkung: $L_p[a,b]$ entsteht aus

$$\begin{aligned} R_p[a,b] &:= \{x : [a,b] \to \mathbb{K} \,|\, x \quad \text{stetig}\} \\ \|x\| &:= \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \end{aligned}$$

durch "Vervollständigung".

Definition 1.5.8 Sei X ein normierter Vektorraum und $S \subset X$. S heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge in S gegen ein $x \in S$ konvergiert.

Satz 1.5.9 Sei X ein Banachraum und $S \subset X$. Dann folgt:

S ist vollständig $\Longleftrightarrow S = \overline{S}$.

Beweis: "$\Rightarrow$": $S \ni x_n \to x \overset{\text{vollständig}}{\Longrightarrow} \{x_n\}$ ist Cauchyfolge mit Limes $x \in S$.
"$\Leftarrow$": Sei $\{x_n\}$ eine Cauchyfolge in $S \overset{\text{BR}}{\Longrightarrow} x_n \to x \in X \overset{S \text{ abg.}}{\Longrightarrow} x \in S$. $\square$

Bemerkung: Die Richtung "$\Leftarrow$" gilt nicht in beliebigem normierten Vektorraum.
Beispiel: $S = X$ normierter Vektorraum, aber kein Banachraum.

Aber:

Satz 1.5.10 Sei X ein normierter Vektorraum und $S \subset X$ ein linearer Teilraum. Falls S endlich-dimensional ist, so ist S vollständig.

Beweis: S ist topologisch isomorph zu E^n, und da E^n vollständig ist, ist auch S vollständig. $\square$

1.6 Kompaktheit

Weierstraß: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\begin{array}{l} K \text{ kompakt} \\ \text{(abg. und beschränkt)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\, \underline{k}, \overline{k} \in K \text{mit} \\ f(\underline{k}) \leq f(x) \leq f(\overline{k}) \quad \forall\, x \in K \end{array}$$

Definition 1.6.1 Sei X ein normierter Vektorraum und $K \subset X$. Dann heißt K *kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gibt.

Satz 1.6.2 Sei X ein normierter Vektorraum, $K \subset X$ kompakt und $\{x_n\} \subset K$. Dann existiert eine Teilfolge und ein $x \in K$ mit $x_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Beweis: Annahme: es gibt keinen Häufungspunkt in K, d.h. zu jedem x existiert ein $\epsilon = \epsilon(x)$ mit

$$S_x := \{y \mid \|y - x\| < \epsilon\} \quad \text{enthält nur endlich viele}\, x_n.$$

Nun ist

$$K \subset \bigcup_{x \in K} S_x, \tag{1.6.1}$$

und wegen der Kompaktheit gilt "$\subset$" in (1.6.1) schon mit endlich vielen x. Also liegen in K nur endlich viele der x_n. **Widerspruch!** □

Bemerkung: Im normierten Vektorraum gilt auch die Umkehrung von Satz 1.6.2:

$$\text{"folgenkompakt"} \quad \Longrightarrow \quad \text{kompakt.}$$

Satz 1.6.3 (Weierstraß) Sei X ein normierter Vektorraum, $K \subset X$ und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$K \quad \text{kompakt} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\, \underline{k}, \overline{k} \in K \quad \text{mit} \\ f(\underline{k}) \leq f(x) \leq f(\overline{k}) \quad \forall\, x \in K \end{array}$$

Beweis: Zu $M := \sup\limits_{x\in K} f(x)$ ($M = \infty$ zugelassen) existiert Folge $\{x_n\}$ in K mit $f(x_n) \to M$. Nach Satz 1.6.2 gilt für eine Teilfolge und ein $\overline{k} \in K$

$$x_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \overline{k} \in K,$$

und wegen der Stetigkeit von f

$$f(\overline{k}) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = M.$$

Es folgt $M < \infty$ und

$$f(\overline{k}) = \max_{x\in K} f(x).$$

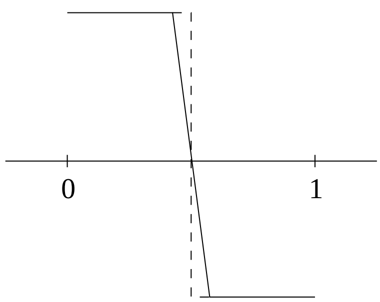
Analog zeigt man Existenz von $\underline{k}$. □

Leider ist Kompaktheit eine "harte" Forderung, falls $\dim X = \infty$ (siehe Satz 1.6.5).

Beispiel 1.6.4 Auf $C[0,1]$ ($\|.\| = \|.\|_\infty$) definieren wir ein lineares Funktional

$$f(x) := \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2}^1 x(t)dt.$$

Es ist $|f(x)| \leq \|x\|$ und damit f stetig in 0 und nach Satz 1.3.6 auf ganz $C[0,1]$.



Mit der Einheitskugel

$$(B =)B_1 := \{x \in C[0,1] \mid \|x\| \leq 1\}$$

gilt $\sup\limits_{x\in B} f(x) = 1$,
aber $f(x) < 1$ für alle $x \in B$.

Nach Satz 1.6.3 kann B nicht kompakt sein.

Satz 1.6.5 In einem normierten Vektorraum X gilt:

$$B := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\} \quad \text{kompakt} \Leftrightarrow \dim X < \infty.$$

Beweis: "$\Leftarrow$": klar.

"$\Rightarrow$": Es gibt Punkte $x_1, \ldots, x_n \in B$, so daß

$$B \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} \{x_i + \frac{1}{2} B^\circ\}.$$

Mit $M := \mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} B &\subset M + \frac{1}{2}B \qquad \left[= \{m + \frac{1}{2}b \,|\, m \in M, b \in B\}\right] \\ &\subset \underbrace{M + \frac{1}{2}(M}_{= M \text{ ,da } M \text{ linear}} + \frac{1}{2}B) = M + \left(\frac{1}{2}\right)^2 B \\ &\subset \ldots \subset M + \left(\frac{1}{2}\right)^k B \end{aligned}$$

für alle k. Es folgt

$$B \subset \overline{M} = M \qquad (\dim M < \infty)$$

und damit schließlich

$$X = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda B \subset M,$$

also $\dim X < \infty$. □

1.7 Dichte Mengen und separable Räume

2 Hilberträume

2.1 Prähilbertraum

Definition 2.1.1 Ein Vektorraum über $\mathbb{K}(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ heißt *Prähilbertraum* (PHR), falls es eine Abbildung $(.\,|\,.) : X \times X \to \mathbb{K}$ gibt mit

$$\begin{array}{rrcl} (i) & (x\,|\,y) & = & \overline{(y\,|\,x)} \\ (ii) & (x+y\,|\,z) & = & (x\,|\,z) + (y\,|\,z) \\ (iii) & (\lambda x\,|\,y) & = & \lambda(x\,|\,y) \\ (iv) & (x\,|\,x) \geq 0 & \text{und} & (x\,|\,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \tag{2.1.1}$$

für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $(.\,|\,.)$ ist symmetrische positiv definite Bilinearform.

Wir zeigen (Prop. 2.1.3), daß X mit

$$\|x\| := (x\,|\,x)^{1/2} \tag{2.1.2}$$

zu einem normierten Vektorraum wird.

Lemma 2.1.2 (Cauchy-Schwarz) Sei X ein Prähilbertraum. Dann gilt für alle $x, y \in X$ mit (der assoziierten Norm) $\|.\|$ aus (2.1.2)

$$|(x\,|\,y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = \lambda y$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ oder wenn $y = 0$.

Beweis: Ü.A.

Proposition 2.1.3 Auf dem Prähilbertraum X definiert (2.1.2) eine Norm.

Beweis: (2.1.1)(iv) $\Rightarrow \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2.1.1)(i),(iii) $\Rightarrow \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x\,|\,\lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(x\,|\,x)} = |\lambda|\sqrt{(x\,|\,x)} = \lambda\|x\|$.

Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y\,|\,x+y) \\
&= (x\,|\,x) + \underbrace{\overbrace{(x\,|\,y)}^{c} + \overbrace{(y\,|\,x)}^{\bar{c}}}_{2Re(x\,|\,y)} + (y\,|\,y) \\
&\leq \|x\|^2 + 2|(x\,|\,y)| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.1.4 (Prähilberträume)

(a) $E^n (= \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$

mit $(x\,|\,y) = (\{\xi_i\}_1^n\,|\,\{\eta_i\}_1^n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\overline{\eta_i}$

und $\|x\|_2 = (x\,|\,x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{1/2}$.

(b) ℓ_2 mit $(x\,|\,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$

$$\text{und } \|x\|_2 = (x\,|\,x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{1/2}.$$

(c) $L_2[a,b]$ mit $(x\,|\,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$

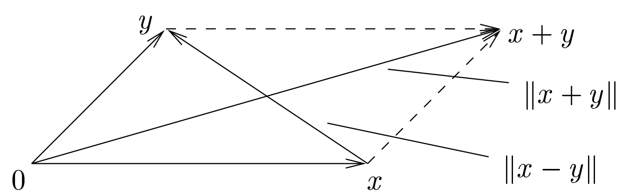
$$\text{und } \|x\|_2 = (x\,|\,x)^{1/2} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Lemma 2.1.5 In einem Prähilbertraum X gilt

(a) $(x\,|\,y) = 0 \quad \forall\, y \in X \Rightarrow x = 0.$

(b) Parallelogrammgesetz:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall\, x, y \in X \tag{2.1.3}$$



Beweis: (a) $(x\,|\,y)|_{y:=x} = (x\,|\,x) = 0 \overset{2.1.1(i)}{\Rightarrow} x = 0.$

(b)

$$\begin{array}{rlcl} & \|x+y\|^2 & = & (x\,|\,x) + (y\,|\,x) + (x\,|\,y) + (y\,|\,y) \\ + & \|x-y\|^2 & = & (x\,|\,x) - (y\,|\,x) - (x\,|\,y) + (y\,|\,y) \\ \hline & \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 & = & 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{array}$$

(Gegen-)Beispiel 2.1.6
$X = \mathbb{R}^2, \|.\|_\infty$ und $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, = y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Dann ist

$$\|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty = \|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1,$$

und damit ist X unter $\|.\|_\infty$ kein Prähilbertraum.
In der 2-Norm gilt dagegen:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2+\|x-y\|_2^2 &= (\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=4\\ 2\|x\|_2^2+2\|y\|_2^2 &= 2\cdot 1+2\cdot 1=4\end{aligned}$$

Anmerkung: Es gilt sogar (Ü.A.):
Ein normierter Vektorraum ist ein Prähilbertraum (d.h. es gibt $(.\,|\,.)$ mit $\|x\|=(x\,|\,x)^{1/2}$) $\Longleftrightarrow$ es gilt (2.1.3)

Lemma 2.1.7 (Stetigkeit des inneren Produktes) In einem Prähilbertraum gilt:

$$\begin{array}{ccc} x_n & \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} & x \\ y_n & \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} & y \end{array} \Rightarrow (x_n\,|\,y_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (x\,|\,y).$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}|(x_n\,|\,y_n)-(x\,|\,y)| &= |(x_n\,|\,y_n)-(x_n\,|\,y)+(x_n\,|\,y)-(x\,|\,y)|\\ &\le |(x_n\,|\,y_n-y)|+|(x_n-x\,|\,y)|\\ &\le \|\underbrace{x_n}_{\longrightarrow x}\|\,\underbrace{\|y_n-y\|}_{\longrightarrow 0}+\underbrace{\|x_n-x\|}_{\longrightarrow 0}\,\|\underbrace{y_n}_{\longrightarrow y}\|\longrightarrow 0.\end{aligned}$$ □

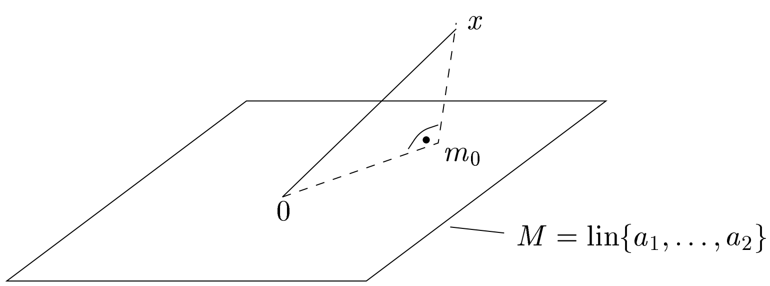
Definition 2.1.8 Ein vollständiger Prähilbertraum heißt *Hilbertraum* (HR).

Anmerkung: Ein Prähilbertraum läßt sich immer zu einem Hilbertraum vervollständigen.

2.2 Der Projektionssatz

Beispiele:

(a) $X=\mathbb{R}^m$

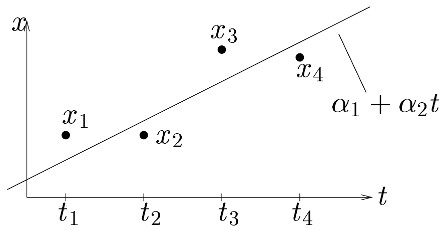


$A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}, m > n, x \in \mathbb{R}^m$, aber $x \notin M$.
Suche $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mit

$$A\alpha \,[= \underbrace{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n}_{\in M}] \approx x$$

("möglichst gut", z.B. $\|A\alpha - x\| \to \min$).

(b)



$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(c) $X := L_2[0,1], M := \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, p \text{ Polynom vom Grad } \leq n\}$
$X \ni x \notin M, \ldots$

Fragen:

1. $\exists\, m_0 \in M : \|x - m_0\| \leq \|x - m\| \quad \forall\, m \in M$?
2. $\exists_1\, m_0 \in M : \|x - m_0\| \leq \|x - m\| \quad \forall\, m \in M$?
3. Charakterisierung von m_0 (für Numerik) ?

Definition 2.2.1 Sei X ein Prähilbertraum, $x, y \in X$ und $S \subset X$.

(a) x heißt *orthogonal* zu y $(x \perp y) :\Longleftrightarrow (x \,|\, y) = 0$.

(b) x heißt *orthogonal* zu S $(x \perp S) :\Longleftrightarrow (x \,|\, s) = 0 \quad \forall\, s \in S$.

In $L_2[0,1]$ gilt z.B: $x(t) = t \perp y(t) = 1 - \frac{3}{2}t$:

$$\int_0^1 t(1 - \frac{3}{2}t)dt = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3\Big|_0^1 = 0.$$

Es gilt

Lemma 2.2.2 (Pythagoras) $x \perp y \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Beweis:
$\|x+y\|^2 = (x+y\,|\,x+y) = \|x\|^2 + \underbrace{(x\,|\,y) + (y\,|\,x)}_{=0} + \|y\|^2.$ $\square$

Satz 2.2.3 (Klassischer Projektionssatz) Sei X ein Prähilbertraum, $x \in X$ und $M \subset X$ ein linearer Teilraum.

(a) Es gibt höchstens ein $m_0 \in M$ mit

$$\|x - m_0\| \leq \|x - m\| \quad \forall\, m \in M. \tag{2.2.1}$$

(b) m_0 genügt (2.2.1) $\Longleftrightarrow x - m_0 \perp M$.

(c) Falls X ein Hilbertraum und $M = \overline{M}$, so existiert immer ein m_0 mit (2.2.1).

Beweis: (b) "$\Rightarrow$": Annahme: $\exists\, m \in M$ mit $(x - m_0\,|\,m) =: \delta \neq 0$.
O.B.d.A. sei $\|m\| = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& \|x - (m_0 + \delta m)\|^2 \\
= \;& \|x - m_0\|^2 - \underbrace{(x - m_0\,|\,\delta m)}_{\overline{\delta}\,\underbrace{(x - m_0\,|\,m)}_{\delta}} - \underbrace{(\delta m\,|\,x - m_0)}_{\delta\,\underbrace{(m\,|\,x - m_0)}_{\overline{\delta}}} + \delta\overline{\delta}\|m\|^2 \\
= \;& \|x - m_0\|^2 - |\delta|^2 \\
< \;& \|x - m_0\|^2 \qquad \textbf{Widerspruch!}
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Sei nun $x - m_0 \perp M$. Für beliebiges $m \in M$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\|x - m\|^2 &= \|(x - m_0) + \underbrace{(m_0 - m)}_{\in M}\|^2 \\
&\overset{\text{L. 2.2.2}}{=} \|x - m_0\|^2 + \|m_0 - m\|^2.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Das zeigt (2.2.1).

(a) Es gelte (2.2.1) mit m_1 und m_0. Nach (b) ist dann $x - m_0 \perp M$, $x - m_1 \perp M$ und aus (2.2.2) folgt

$$\|x - m_1\|^2 = \|x - m_0\|^2 + \|m_0 - m_1\|^2.$$

Aus (2.2.1) folgt

$$\|x - m_1\|^2 = \|x - m_0\|^2,$$

und damit

$$\|m_0 - m_1\|^2 = 0 \quad \text{d.h.} \quad m_0 = m_1.$$

(c) Sei $\delta := \inf\limits_{m \in M} \|x - m\|$ und $\|x - \underbrace{m_i}_{\in M} \| \overset{i \to \infty}{\longrightarrow} \delta$.

Dann ist

$$\begin{aligned} & \|(m_j - x) + (x - m_i)\|^2 + \|(m_j - x) - (x - m_i)\|^2 \\ \overset{(2.1.3)}{=} \quad & 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2 \end{aligned}$$

und nach Umschreiben

$$\begin{aligned} \|m_j - m_i\|^2 &= 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2 - 4 \underbrace{\left\| x - \frac{m_i + m_j}{2} \right\|^2}_{\geq \delta^2} \qquad (2.2.3) \\ &\leq 2 \underbrace{\|m_j - x\|^2}_{\to \delta^2} + 2 \underbrace{\|x - m_i\|^2}_{\to \delta^2} - 4\delta^2 \end{aligned}$$

Also: $\forall \, \epsilon > 0 \; \exists \, N$ mit

$$\|m_j - m_i\| \leq \epsilon \quad \text{für} \quad i, j \geq N.$$

Somit ist $\{m_i\}$ eine Cauchyfolge und konvergiert nach Satz 1.5.9 (X vollständig und M abgeschlossen) gegen ein $m_0 \in M$ mit

$$\|x - m_0\| = \delta.$$

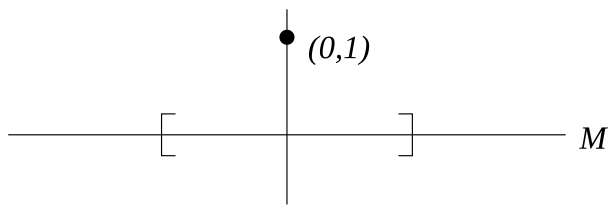
□

Gebraucht:

- Existenz: X vollständig, $M = \overline{M}$ (siehe (c))
- Eindeutigkeit und Charakterisierung: $\|x\| = (x \,|\, x)^{1/2}$ (siehe (b),(a))

(Gegen-) Beispiel

$X := \mathbb{R}^2, M := \{(\alpha, 0) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}, \|.\| := \|.\|_\infty, x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

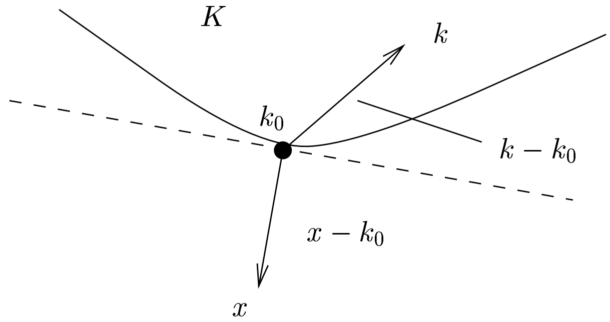


Für <u>alle</u> $\tilde{m} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $-1 \leq \alpha \leq 1$ gilt

$$1 = \|x - \tilde{m}\|_\infty \leq \|x - m\|_\infty \quad \forall\, m \in M,$$

d.h. Lösung ist <u>nicht</u> eindeutig!

Die Linearität von M garantiert im Beweis von Satz 2.2.3, daß $(m_i - m_j)/2$ in (2.2.4) wieder in M liegt. Dazu reicht jedoch schon die Konvexität von M, und es läßt sich M in Satz 2.2.3 durch eine abgeschlossene konvexe Menge ersetzen.



Satz 2.2.4 Sei H ein Hilbertraum, $x \in H$ und $K \subset H$ abgeschlossen und konvex.

(a) Es gibt genau ein $k_0 \in K$ mit

$$\|x - k_0\| \leq \|x - k\| \quad \forall\, k \in K. \tag{2.2.4}$$

(b) k_0 genügt (2.2.2) $\iff Re(x - k_0 \,|\, k - k_0) \leq 0 \quad \forall\, k \in K$.

Beweis: Ü.A., analog zu Satz 2.2.3.

In 2.3, 2.4 und 2.6 betrachten wir Anwendungen des Projektionssatzes.

2.3 Gram-Schmidt

Definition 2.3.1 Sei X ein Prähilbertraum und $S \subset X$. Dann heißt

$$S^{\perp} := \{x \in X \mid x \perp S\}$$

orthogonales Komplement von S.

$$\begin{array}{lcl} S := \{0\} & : & S^{\perp} = X \\ S := X & : & S^{\perp} = \{0\} \end{array}$$

Offensichtlich gilt

$$\left.\begin{array}{c} (x \mid s) = 0 \quad \forall\, s \in S \\ (y \mid s) = 0 \quad \forall\, s \in S \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha x + \beta y \mid s) = 0 \quad \forall\, s \in S,$$

d.h. $S^{\perp}$ ist linearer Teilraum von X. Nach Lemma 2.1.7 gilt weiter für $S^{\perp} \ni x_n \to x$:

$$0 = (x_n \mid s) \to (x \mid s) \quad \forall\, s \in S,$$

d.h. S ist abgeschlossener linearer Teilraum.

Proposition 2.3.2 Sei X ein Prähilbertraum und $S, T \subset X$.

(a) $S^{\perp}$ ist abgeschlossener linearer Teilraum

(b) $S \subset S^{\perp\perp}$

(c) $S \subset T \Rightarrow T^{\perp} \subset S^{\perp}$

(d) $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp}$

(e) $S^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{lin}\{S\}}$

Beweis: Ü.A.

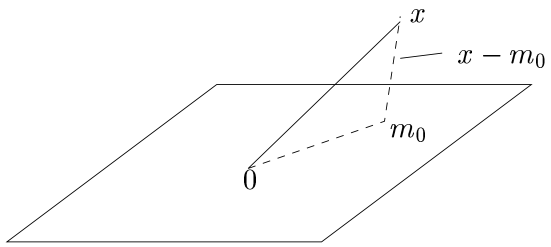
Definition 2.3.3 Sei X ein Prähilbertraum und $M, N \subset X$ lineare Teilräume. X heißt *direkte Summe* von M, N $(X = M \oplus N)$, wenn

$$\forall\, x \in X \quad \exists_1\, m \in M, n \in N : \quad x = m + n.$$

Satz 2.3.4 Sei H ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener linearer Teilraum. Dann ist

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Beweis:



Existenz:

Nach dem Projektionssatz ist: $x = m_0 + \underbrace{(x - m_0)}_{n_0} \in M \oplus M^\perp$ für alle $x \in X$.

Eindeutigkeit:

Annahme: $x = m_0 + n_0 = m_1 + n_1; \quad m_0, m_1 \in M, n_0, n_1 \in M^\perp$.
Dann ist

$$0 = m_1 - m_0 + n_1 - n_0 \quad \text{und} \quad m_1 - m_0 \perp n_1 - n_0$$

und somit

$$\begin{aligned} \|0\|^2 &= \|(m_1 - m_0) + (n_1 - n_0)\|^2 \\ &\overset{\text{L. } 2.2.2}{=} \|m_1 - m_0\|^2 + \|n_1 - n_0\|^2, \end{aligned}$$

also

$$m_0 = m_1, n_0 = n_1.$$

Definition 2.3.5 Sei X ein Prähilbertraum und $S \subset X$. S heißt ein *Orthonormalsystem* (ONS), falls für alle $x, y \in S$

$$x \perp y \quad \text{und} \quad \|x\| = 1.$$

Beispiel: In ℓ_2 bilden die "Einheitsvektoren"

$$e_k := (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0, \ldots)$$

ein Orthonormalsystem.

Proposition 2.3.6 Sei S ein Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum X. Dann ist S ein linear unabhängiges System (d.h. je endlich viele Elemente aus S sind linear unabhängig).

Beweis: Für $s_1, \ldots, s_n \in S$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gelte

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i = 0.$$

Dann ist

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \middle| s_k \right)}_{= \alpha_k} = \underbrace{(0 \mid s_k)}_{= 0} \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n$$

und damit $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, d.h. $s_1, \ldots, s_n$ sind linear unabhängig.

Frage: Wie erhält man ein Orthonormalsystem?

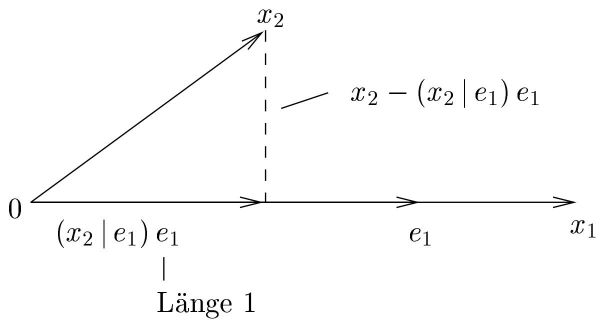
Satz 2.3.7 (Gram-Schmidt) Sei $\{x_i\}_1^n$ mit $n < \infty$ oder $n = \infty$ ein System linear unabhängiger Vektoren im Prähilbertraum X. Dann ist $\{e_i\}_1^n$ für

$$e_i = \frac{z_i}{\|z_i\|} \quad \text{mit} \quad z_i := x_i - \sum_{j=1}^{i-1} (x_j \mid e_j)\, e_j$$

ein Orthonormalsystem und es gilt

$$\operatorname{lin}\{e_1 \ldots, e_m\} = \operatorname{lin}\{x_1 \ldots, x_m\} \qquad 1 \leq m \leq n. \tag{2.3.1}$$

Beweis:



$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_2 = \frac{x_2 - (x_1 \mid e_1)}{\| \ldots \|}, \quad \text{etc..}$$

Allgemeiner Ansatz für $n = 1, 2, \ldots$
(z_i ist die Projektion von x_i auf $\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$)

$$
\left[\begin{array}{c|c} x_1,\dots,x_{i-1} & x_i \\ e_1,\dots,e_{i-1} & e_i \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} e_i \in \operatorname{lin}\{e_1,\dots,e_{i-1},x_i\} \\ e_i \perp e_j \text{ für } j=1,\dots,i-1 \end{array}\right]
$$

$$
e_i = \frac{z_i}{\|z_i\|} \quad \text{mit} \quad z_i := x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j e_j \tag{2.3.2}
$$

Aus der Forderung

$$
(z_i \,|\, e_k) = 0 \quad \text{für} \quad k = 1,\dots,i-1
$$

folgt

$$
\alpha_k = (x_i \,|\, e_k) \quad \text{für} \quad k = 1,\dots,i-1.
$$

Die Beziehung (2.3.1) ist unmittelbare Folge des Ansatzes (2.3.2). □

Beispiel:

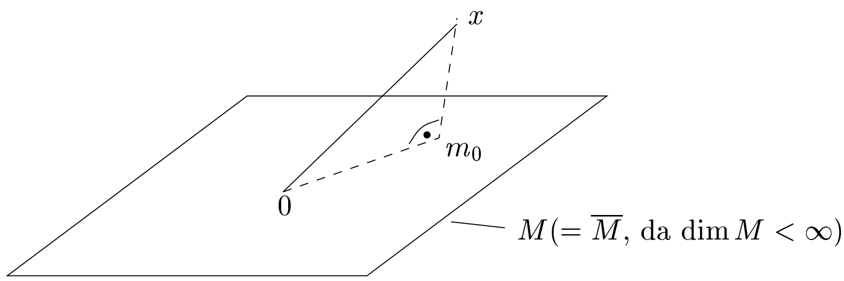
- cg-Verfahren (siehe Optimierungsvorlesung)
- $L_2[-1,1] : \{x_1,x_2,x_3\} \longrightarrow \{e_1,e_2,e_3\}$
  für $x_1(t) = 1, x_2(t) = t, x_3(t) = t^2$.
  - $e_1(t) = \frac{1}{2}$
  - $z_2(t) = x_2(t) - e_1(t)\alpha_1 = t,$
    denn $\alpha_1 = (x_2 \,|\, e_1) = \int_{-1}^{1} t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} t^2 \Big|_{-1}^{1} = 0.$
    d.h. $e_2(t) = \frac{z_2(t)}{\|z_2(t)\|} = \frac{3}{2}(t).$
  - $z_3(t) = x_3(t) - e_1(t)\alpha_1 - e_2(t)\alpha_2 = t^2 - \frac{1}{6}$
    denn $\alpha_1 = (x_3 \,|\, e_1) = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{6} t^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$
    $\alpha_2 = \frac{x_3}{e_2} = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} t^3 dt = 0$
    d.h. $e_3(t) = \frac{z_3(t)}{\|z_3(t)\|} = \frac{30}{7} t^2 - \frac{5}{7}$

2.4 Die Normalgleichungen

Im Fall eines endlichen Teilraumes führt Satz 2.2.3 zu einem numerischen Verfahren

Aufgabe: Sei H ein Hilbertraum und $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset H$. Zu gegebenem $x \in H$ suche $m_0 \in M := \mathrm{lin}\{y_1, \ldots, y_n\}$ mit

$$\|x - m_0\| \leq \|x - m\| \quad \text{für alle} \quad m \in M.$$



Mathematisch:

$$\min_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \|x - \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n)}_{\in M}\| \tag{2.4.1}$$

Nach dem Projektionssatz existiert ein eindeutig bestimmtes m_0 $(= \alpha_1^* y_1 + \ldots + \alpha_n^* y_n)$, das (2.4.1) löst; falls $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig, so sind $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ eindeutig bestimmt. Nach 2.2.3(b) ist m_0 charakterisiert durch

$$x - m_0 \perp M,$$

das heißt

$$(x - m_0 \,|\, y_i) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Somit muß für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gelten

$$\begin{array}{rcl} (y_1 \,|\, y_1)\,\alpha_1 + \ldots + (y_n \,|\, y_1)\,\alpha_n & = & (x \,|\, y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (y_1 \,|\, y_n)\,\alpha_1 + \ldots + (y_n \,|\, y_n)\,\alpha_n & = & (x \,|\, y_n) \end{array}$$

d.h. α ist Lösung des "endlichen" linearen Gleichungssystems

$$G\alpha = b \tag{2.4.2}$$

mit der Gramschen Matrix

$$G := \begin{pmatrix} (y_1 \,|\, y_1) & \dots & (y_n \,|\, y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (y_1 \,|\, y_n) & \dots & (y_n \,|\, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}, b = \begin{pmatrix} (x \,|\, y_1) \\ \vdots \\ (x \,|\, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

(2.4.2) heißen auch die *Normalgleichungen.*

Beispiel:

$H := L_2[0,1] \ni x,\ y_i = t^{i-1},\ i = 1, \dots, n$

$$\underbrace{\int_0^1 [x(t) - (\alpha_1 t^0 + \dots + \alpha_n t^{n-1}]dt}_{\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \longrightarrow \min$$

$$(y_i \,|\, y_j) = t^{i-1}t^{j-1}dt = \frac{1}{i+j-1} t^{i+j-1}\Big|_0^1 = \frac{1}{i+j-1},$$

d.h.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \dots & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{Hilbertmatrix}$$

Bemerkung: (2.4.2) erhält man auch aus der notwendigen Optimalitätsbedingung:

$$\nabla \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Falls $H = \mathbb{R}^m, m > n$ und $Y = (y_1, \dots, y_n)$ so gilt in (2.4.2)

$$G = \underbrace{Y^T Y}_{(n \times m)(m \times n) = n \times n} \quad , \quad b = \underbrace{Y^T x}_{(n \times m)(m \times 1) = n \times 1} \quad .$$

Bemerkung: Für ein Orthonormalsystem $y_1, \dots, y_n$ hat man $G = I_{n \times n}$ in (2.4.2) und damit

$$m_0 = \sum_{i=1}^n (x \,|\, y_i)\, y_i.$$

2.5 Fourierreihen

Definition 2.5.1 Sei X ein normierter Vektorraum. Wir sagen: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ konvergiert gegen $x \in X$ $(x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i)$, wenn $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \to x$.

Satz 2.5.2 Sei $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum H. Dann sind äquivalent:

(i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \longrightarrow x \in H$

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$

Im Fall (i) bzw. (ii) ist $\xi_i = (x \mid e_i)$.

Beweis: *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*: Sei $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$. Dann gilt für $s_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ und (o.B.d.A.) $m > n$

$$\|s_m - s_n\|^2 = \|\sum_{i=n+1}^{m} \xi_i e_i\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |\xi_i|^2 \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist $\{s_n\}$ ein Cauchyfolge und im Hilbertraum existiert ein x mit $s_n \to x$.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*: Falls $s_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ konvergiert, so handelt es sich um eine Cauchyfolge und damit gilt

$$\sum_{i=n+1}^{m} |\xi_i|^2 \overset{m>n,\, m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Es folgt

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

und damit (ii).
In der Situation (i) bzw. (ii) gilt

$$(s_n \mid e_i) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_i,$$

und nach Lemma 2.1.7:

$$(x \,|\, e_i) = \xi_i.$$

$\square$

Frage: Läßt sich ein gegebenes $x \in H$ bezüglich eines gegebenen Orthonormalsystems $\{e_i\}$ immer als Summe $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ darstellen?

Lemma 2.5.3 (Besselsche Ungleichung) Sei H ein Hilbertraum, $x \in H$ und $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x \,|\, e_i)|^2 \leq \|x\|^2. \tag{2.5.1}$$

Beweis: Mit $\alpha_i := (x \,|\, e_i)$ gilt für alle n

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} [(x \,|\, \alpha_i e_i) + (\alpha_i e_i \,|\, x) - (\alpha_i e_i \,|\, \alpha_i e_i)] \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.
\end{aligned}$$

Also

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2,$$

d.h. $(n \to \infty)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2.$$

$\square$

(2.5.1) zusammen mit Satz 2.5.2 garantiert, daß $\sum_{i=1}^{\infty} (x \,|\, e_i)\, e_i$ in H konvergiert.

Frage: Wogegen? gegen x?

Satz 2.5.4 Sei H ein HR, $x \in H, \{e_i\}_1^\infty$ ein Orthonormalsystem und $M := \operatorname{lin}\{e_1, e_2, \ldots\}$. Dann konvergiert

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x|e_i)\, e_i$$

gegen ein $\hat{x} \in \overline{M}$ und es ist

$$x - \hat{x} \perp \overline{M} \quad (\text{d.h.} \quad \|x - \hat{x}\| = \min_{m \in \overline{M}} \|x - m\|). \tag{2.5.2}$$

Beweis: Es ist nur (2.5.2) zu zeigen. Mit $s_n := \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i$ gilt für jedes j und $n > j$

$$(x - s_n \,|\, e_j) = (x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i \,|\, e_j) = (x \,|\, e_j) - (x \,|\, e_j) = 0.$$

Nach Lemma 2.1.7 folgt

$$(x - \hat{x} \,|\, e_j) = \lim_{n \to \infty} (x - s_n \,|\, e_j) = 0 \text{ für alle } j,$$

d.h. $x - \hat{x} \perp M$ und nochmals wegen 2.1.7

$$x - \hat{x} \perp \overline{M}.$$

□

Definition 2.5.5 Ein Orthonormalsystem $\{e_i\}_1^\infty$ im Hilbertraum H heißt *vollständig*, falls

$$\overline{\operatorname{lin}\{e_1, e_2, \ldots\}} = H.$$

Lemma 2.5.6 $\{e_i\}_1^\infty$ ist vollständig $\Longleftrightarrow (x \perp e_i = 0 \quad \forall\, i \Rightarrow x = 0_H)$

Beweis: Ü.A.

Beispiel 2.5.7
Betrachte den Hilbertraum $L_2[-1,1]$, der aus allen quadratisch-integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ besteht. Die linear unabhängigen Funtionen $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ erzeugen den Unterraum der Polynome. Das Gram-Schmidt-Verfahren kann auf die Folge $1, t, t^2, \ldots$ angewandt werden, um eine

orhnormale Folge $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ zu erzeugen. Offensichtlich sind die e_i, da Linearkombinationen von Polynomen, selber Polynome. Es stellt sich heraus daß

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei die $P_n(t)$ die wohlbekannten Legendre-Polynome

$$P_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \{(1-t^2)^n\}.$$

sind. Wir wollen zeigen, daß diese Folge eine vollständige orthnormale Folge in $L_2[-1,1]$. Nach Lemma 2.5.6 reicht es zu zeigen, daß kein von Null verschiedener Vektor orthogonal zum Raum der Polynome ist.

Man nehme an, daß es ein $f \in L_2[-1,1]$ gibt, das orthogonal zu jedem t^n ist, d.h.

$$\int_{-1}^{1} t^n f(t) dt = 0 \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Für die stetige Funktion

$$F(t) = \int_{-1}^{t} f(\tau) d\tau$$

gilt $F(-1) = F(1) = 0$, und es folgt durch partielle Integration

$$\int_{-1}^{1} t^n F(t) dt = \left. \frac{t^{n+1}}{n+1} F(t) \right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{t^{n+1}}{n+1} f(t) dt = 0$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Die Funktion F ist also auch orthogonal zu den Polynomen.

Da F stetig ist, kann der Weierstraßsche Approximationssatz angewandt werden:

Sei $\epsilon > 0$, dann gibt es ein Polynom

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i t^i,$$

so daß

$$|F(t) - Q(t)| < \epsilon$$

für alle $t \in [-1,1]$. Daher, weil f orthogonal zu den Polynomen ist,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |F(t)|^2 dt &= \int_{-1}^{1} F(t)[F(t) - Q(t)] dt \\ &\leq \epsilon \int_{-1}^{1} |F(t)| dt \leq \epsilon\sqrt{2} \left[\int_{-1}^{1} |F(t)|^2 dt \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung ein Spezialfall der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist. Es folgt, daß

$$\int_{-1}^{1} |F(t)|^2 \leq 2\epsilon^2.$$

Da ϵ beliebig war und F stetig ist, folgern wir, daß $F(t) = 0$, und damit daß $f(t) = 0$ fast überall. Das zeigt, daß der Unterraum der Polynome in $L_2[-1,1]$ dicht ist.

Beispiel 2.5.8
Betrachte den komplexen Raum $L_2[0,2\pi]$. Die Funktionen

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

sind eine orthonormale Folge, was leicht durch direkte Rechnung eingesehen werden kann. Weiter kann auf ähnliche Art und Weise wie bei den Legendre-Polynomen gezeigt werden, daß das System vollständig ist. Deshalb erhalten wir die klassische komplexe Fourier-Entwicklung einer beliebigen Funktion $x \in L_2[0,2\pi]$

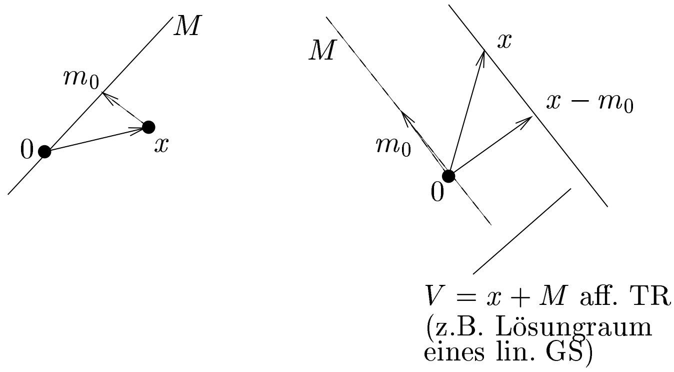
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}},$$

mit den Fourierkoeffizienten c_k gemäß

$$c_k = (x \mid e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-ikt} dt.$$

2.6 Ein Kontrollproblem

Umformulierung von Satz 2.2.3:



Ziel: Suche $v_0 \in V = x + M$ (affiner Teilraum) möglichst nahe bei 0.

Idee: Projiziere x auf M mit Resultat m_0:

$$\| \underbrace{x - m_0}_{=: v_0} \| \leq \| \underbrace{x - m}_{=: v \in V} \| \quad \forall m \in M,$$

d.h.

$$\|v_0\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V. \tag{2.6.1}$$

Satz 2.6.1 Sei H ein Hilbertraum, $M \subset H$ ein abgeschlossener linearer Teilraum und $x \in H$ gegeben. Dann existiert genau ein v_0 in dem affinen Teilraum $V = x + M$ von minimaler Norm, d.h. (2.6.1) gilt. Weiter ist

$$v_0 \perp M.$$

Seien nun linear unabhängige $y_1, \ldots, y_n$ in H und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann existiert nach Satz 2.6.1 genau ein

$$v_0 \in V := \{v \mid (v \mid y_i) = c_i, i = 1, \ldots, n\} \tag{2.6.2}$$

[= spezielle inhomogene Lösung + alle homogenen Lösungen]

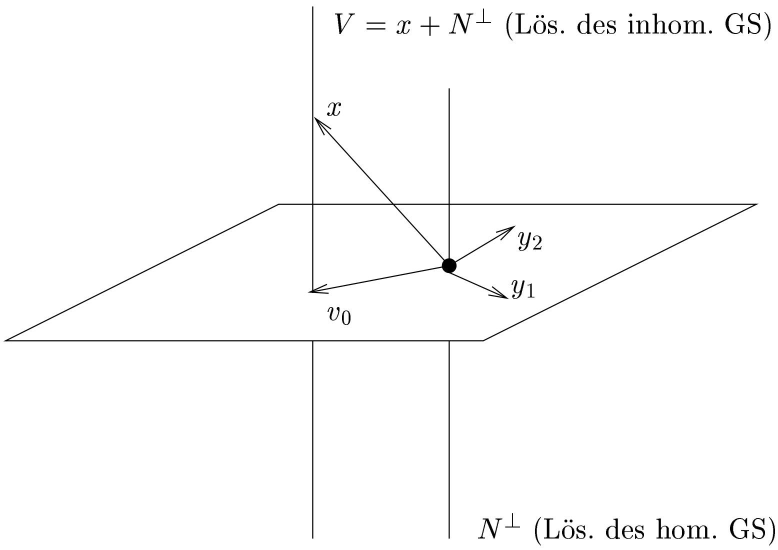
von minimaler Norm. Dieses v_0 steht senkrecht auf $N^\perp$, wobei
$N := \operatorname{lin}\{y_1, \ldots, y_n\}$, d.h.

$$v_0 \in N^{\perp\perp} \overset{\text{Prop.2.3.2}(e)}{=} N.$$

Somit gilt

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \tag{2.6.3}$$

wobei $\beta_1, \ldots, \beta_n$ durch die Restriktionen in (2.6.2) eindeutig bestimmt sind.



Beispiel 2.6.2 (Ein Kontrollproblem) Die Winkelgeschwindigkeit ω einer Motorwelle, der von einer variablen Stromquelle u angetrieben wird, wird duch die folgende Differentialgleichung erster Ordnung gesteuert:

$$\dot{\omega}(t) + \omega(t) = u(t),$$

wobei $u(t)$ die Stromstärke zur Zeit t ist. Die Winkelposition θ der Motorwelle is das Integral von ω über die Zeit. Man nehme an, daß der Motor am Anfang in Ruhe ist, also $\theta(0) = \omega(0) = 0$, und daß man die Stromstärkenfunktion u von minimaler Energie finden will, die die Welle zu der neuen Ruhelage $\theta = 1, \omega = 0$ innerhalb einer Sekunde dreht. Die Energie sei proportional zu $\int_0^1 u^2(t)dt$. Das ist ein einfaches Steuerungsproblem, in dem das Kostenkriterium nur von der Steuerungsfunktion u abhängt. Das Problem kann gelöst werden, indem man es als "Minimale-Norm"-Problem im Hilbertraum $L_2[0,1]$ behandelt.
Man kann die Differentialgleichung erster Ordnung, die den Motor steuert, integrieren, um die explizite Formel

$$\omega(1) = \int_0^1 e^{(t-1)} u(t)dt$$

für die Winkelgeschwindigkeit am Ende für jede beliebige Steuerung zu erhalten. Aus der Gleichung $\dot{\omega}(t) + \dot{\theta}(t) = u(t)$ folgt

$$\theta(1) = \int_0^1 u(t)dt - \omega(1)$$

oder, zusammen mit obiger Gleichung,

$$\theta(1) = \int_0^1 [1 - e^{(t-1)}] u(t) dt.$$

Falls die Funktion u Element des Hilbertraumes $L_2[0,1]$ ist, können die obigen Beziehungen als

$$\begin{aligned} \omega(1) &= (y_1 \,|\, u) \\ \theta(1) &= (y_2 \,|\, u) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden, wobei $y_1 = e^{(t-1)}, y_2 = 1 - e^{(t-1)}$.
Mit diesen Definitionen ist das ursprüngliche Problem äquivalent zu dem, ein $u \in L_2[0,1]$ minimaler Norm zu finden, das die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= (y_1 \,|\, u) \\ 1 &= (y_2 \,|\, u) \end{aligned}$$

erfüllt. Nach (2.6.3) liegt die Optimallösung im Teilraum, der von y_1 und y_2 erzeugt wird. Anders ausgedrückt,

$$u(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^t,$$

wobei α_1 und α_2 so zu wählen sind, daß die Nebenbedingungen erfüllt sind. Wenn man die Konstanten ausrechnet, führt das zur Lösung

$$u(t) = \frac{1}{3-e}[1 + e - 2e^t].$$

3 Dualräume

3.1 Lineare Funktionale

Wir betrachten lineare Funktionale auf einem normierten Vektorraum, z.B.

$$X := C[0,1], f(x) := x\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{für } x \in X.$$

Definition 3.1.1 Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional. Wir sagen:

$$f \text{ ist beschränkt } \iff \exists\, M : |f(x)| \leq \underbrace{M\|x\|}_{\text{stetige Majorante}} \qquad \forall x \in X$$

Es gilt

Proposition 3.1.2 f beschränkt $\Leftrightarrow$ f ist stetig.

Beweis: "$\Rightarrow$" : Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\epsilon}{M} > 0$. Dann gilt

$$\|x\| \le \delta \Rightarrow |f(x)| \le M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon,$$

d.h. f ist stetig in 0 und nach Satz 1.3.6 auf ganz X.
"$\Leftarrow$": Zu $\epsilon = 1$ wähle $\delta > 0$ mit

$$\|x\| \le \delta \Rightarrow |f(x)| \le 1$$

und damit für $M := \frac{1}{\delta}$ und $x \neq 0$

$$|f(x)| \overset{\text{linear}}{=} \left| f\underbrace{\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)}_{\|\cdot\| \le \delta} \right| \frac{\|x\|}{\delta} \le 1 \frac{\|x\|}{\delta} = M\|x\| \qquad \square$$

Frage: Gibt es ein unstetiges lineares Funktional?

Beispiel: Auf

$$X := \{x = \{\xi_i\}_1^\infty \,|\, \exists\, i_0 : \xi_i = 0 \text{ für } i > i_0\} \quad \text{mit} \quad \|x\| = \max_i |\xi_i|$$

definieren wir

$$f(x) := \sum_{i=1}^{i_0} i\,\xi_i \text{ für } x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i_0}, 0, 0 \ldots)$$

Offensichtlich ist f linear aber <u>nicht beschränkt</u>:

$$\text{für } e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \text{ ist } \|e_k\| = 1, \text{ aber } |f(e_k)| = k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Definition 3.1.3 Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt

$$X^* := \{f : X \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ linear und stetig }\}$$

Dualraum von X.

Mit den Definitionen

$$\begin{array}{lclcll} f+g & : & (f+g)(x) & := & f(x)+g(x) & \text{für} \quad x \in X \\ \alpha f & : & (\alpha f)(x) & := & \alpha f(x) & \text{“} \qquad \text{“} \end{array}$$

für $f, g \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ wird X^* selber wieder zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$. Auf X^* definieren wir eine “Norm” durch

$$\|f\| := \inf\Big\{M \mid |f(x)| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\Big\}.$$

Nach Prop. 3.1.2 ist $\|f\|$ wohldefiniert und es gilt

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|. \tag{3.1.1}$$

$\|.\|$ erfüllt die Normaxiome

- $\|f\| \geq 0$ und $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (d.h. $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in X$)
- $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$
- $$\begin{aligned} \|f+g\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \underbrace{|(f+g)(x)|}_{\leq |f(x)|+|g(x)|} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| + \sup_{\|x\| \leq 1} |g(x)| \\ &= \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

Die Elemente aus X^* bezeichnen wir auch mit x^* und schreiben $x^*(x)$ oder

$$\Big[x^*(x) = \Big] \langle x \,,\, x^* \rangle. \tag{3.1.2}$$

Man beachte die Symmetrie in (3.1.2): $\langle .\,,\, . \rangle$ ist Bilinearform auf $X \times X^*$. Es läßt sich somit auch x wieder als lineares Funktional auf X^* deuten!

Satz 3.1.4 Der Dualraum X^* eines normierten Vektorraumes X ist ein Banachraum (beachte: X ist <u>nicht</u> notwendig vollständig!)

Beweis: Zu zeigen: X^* ist vollständig.

Sei $\{x_n^*\}$ eine Cauchyfolge, d.h. $\|x_n^* - x_m^*\| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Somit gilt für jedes feste $x \in X$

$$|x_n^*(x) - x_m^*(x)| = |(x_n^* - x_m^*)(x)| \leq \|x_n^* - x_m^*\| \, \|x\| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist $\{x_n^*(x)\}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ und konvergiert gegen ein Element in $\mathbb{K}$, das wir $x^*(x)$ nennen.
Zu zeigen bleibt für das so definierte Funktional x^*:

$$x^* \text{ ist linear}$$

$$x^* \text{ ist stetig (beschränkt)} \tag{3.1.3}$$

$$x_n^* \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x^* \tag{3.1.4}$$

Die Linearität folgt aus

$$\begin{aligned} x^*(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} x_n^*(\alpha x + \beta y) \\ &\stackrel{x_n^* \text{ linear}}{=} \lim_{n\to\infty} (\alpha x_n^*(x) + \beta x_n^*(y)) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} x_n^*(x) + \beta \lim_{n\to\infty} x_n^*(y) \\ &= \alpha x^*(x) + \beta x^*(y). \end{aligned}$$

Da $\{x_n^*\}$ eine CF ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein M so, daß

$$|x_n^*(x) - x_m^*(x)| \leq \epsilon \|x\| \text{ für } n, m, \geq M \text{ und alle } x.$$

Wegen $x_n^*(x) \to x^*(x)$ folgt

$$|x^*(x) - x_m^*(x)| \leq \epsilon \|x\| \text{ für } m \geq M \text{ und } x \in X, \tag{3.1.5}$$

also

$$\begin{aligned} |x^*(x)| &= |x^*(x) - x_m(x^*) + x_m^*(x)| \\ &\stackrel{\triangle\text{–Ung., (3.1.5)}}{\leq} (\epsilon + \|x_m^*\|)\|x\| \text{ für } x \in X. \end{aligned}$$

Das zeigt (3.1.3).
Aus (3.1.5) ergibt sich weiter

$$\|x^* - x_m^*\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{d.h. (3.1.4).}$$

$\square$

Anmerkung: Satz 3.1.4 zeigt, daß $X = X^{**}$ nicht gelten kann, wenn X nicht vollständig ist; vgl. dazu 3.7.

Bemerkung: Ganz analog zu Satz 3.1.4 beweist man:

Für die normierten Vektorräume X, Y sei

$$L(X,Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ linear und stetig }\}$$
$$\text{mit der Norm} \quad \|T\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Dann gilt: Falls Y vollständig, so ist auch $L(X,Y)$ vollständig.

3.2 Einige Dualräume

Sei $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ für $1 \le p,\, q \le \infty$.
Wir zeigen (o.B.d.A. sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$$\ell_p^* \text{“="}\, \ell_q \text{ für } 1 \le p \overset{!}{<} \infty. \tag{3.2.1}$$

Z.B.: $\ell_1^* = \ell_\infty$, $\underline{\ell_2^* = \ell_2}$, $\ell_3^* = \ell_{\frac{3}{2}}, \ldots$

Satz 3.2.1 Zu jedem $f \in \ell_p^*$, $1 \le p < \infty$, gibt es ein $y = \{\eta_i\} \in \ell_q$ mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i \text{ für alle } x = \{\xi_i\} \in \ell_p.$$

Umgekehrt definiert jedes $y \in \ell_q$ ein $f \in \ell_p^*$ in dieser Weise und es ist

$$\|f\| = \|y\|_q = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} & \text{für} \quad 1 < p < \infty \\[2ex] \sup\limits_i |\eta_i| & \text{für} \quad p = 1. \end{cases}$$

Beweis: Sei $f \in \ell_p^*$.
Mit $\eta_i := f(e_i)$ für $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{–te Pos.}}, 0, \ldots)$ gilt wegen der Stetgkeit von f

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \eta_i \xi_i \text{ für alle } x = \{\xi_i\} \in \ell_p. \tag{3.2.2}$$

Frage:

$$y := \{\eta_i\} \in \ell_q? \tag{3.2.3 (a)}$$

$$\|f\| = \|y\|_q? \tag{3.2.3 (b)}$$

Definiert umgekehrt jedes $y \in \ell_q$ über (3.2.2) ein $f \in \ell_p^*$? (3.2.3 (c))

Sei $1 < p < \infty$:

(a) Für $N \in \mathbb{N}$ definieren wir $x_N = \{\xi_i\} \in \ell_p$ durch

$$\xi_i = \begin{cases} |\eta_i|^{q/p} \operatorname{sgn} \eta_i & \text{für} \quad i \leq N \\ 0 & \text{für} \quad i > N. \end{cases}$$

Dann ist

$$\|x_N\| = \left(\sum_{i=1}^{N} |\eta_i|^q \right)^{1/p}$$

und

$$f(x_N) = \sum_{i=1}^{N} |\eta_i|^{q/p+1} = \sum_{i=1}^{N} |\eta_i|^q.$$

Damit folgt

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_N)|}{\|x_N\|} = \left(\sum_{i=1}^{N} |\eta_i|^q \right)^{1/q} \quad \text{für alle } N.$$

Dies zeigt (3.2.3 (a)) und eine Richtung von (3.2.3 (b)):

$$\|y\|_q \leq \|f\| \tag{3.2.4}$$

(b) Sei nun umgekehrt $y = \{\eta_i\} \in \ell_q$. Dann gilt für das durch y auf ℓ_p definierte lineare Funktional

$$g(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \quad \text{für} \quad x = \{\xi_i\} \in \ell_p$$

nach Hölder (Satz 1.4.2)

$$|g(x)| \leq \sum |\xi_i \eta_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Somit ist g stetig auf ℓ_p(d.h. $g \in \ell_p^*$), was (3.2.3 (c)) zeigt, und weiter

$$\|g\| \leq \|y\|_q. \tag{3.2.5}$$

Offensichtlich ist g vom Typ des unter (a) betrachteten f und aus (3.2.4), (3.2.5) folgt für $f(=g)$

$$\|f\| = \|y\|_q$$

und damit die Behauptung für $1 < p < \infty$.

Sei nun $p = 1$, d.h. $q = \infty$: wie oben, einfacher. □

Bemerkung: Es ist $\ell_\infty^* \neq \ell_1$

Es gilt jedoch

$$c_0^* = \ell_1$$

für

$$\begin{array}{l} c_0 = \{x = \{\xi_i\} | \xi_i \xrightarrow{i\to\infty} 0\} \quad (\overset{!}{\subset} \ell_\infty) \\ \text{mit } \|x\| = \max\limits_i |\xi_i| \text{ für } x \in c_0 \end{array}$$

Beweis: Ü.A.

Dualräume von L_p

Analog zu (3.2.1) zeigt man

$$\begin{aligned} L_p[a,b]^* &= L_q[a,b] \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \\ L_\infty[a,b]^* &\neq L_1[a,b]. \end{aligned}$$

Also z.B.:

zu $f \in L_p^*$, $1 \leq p < \infty$, existiert ein $y \in L_q$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt \ \text{ für } x \in L_p \\ \|f\| &= \|y\|_q. \end{aligned}$$

Der Dual eines Hilbertraumes

Sei H ein Hilbertraum. Jedes $y \in H$ definiert durch

$$f(x) := (x \,|\, y) \ \text{ für } \ x \in H$$

ist ein lineares Funktional auf H. Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$f(x)| = |(x|y)| \leq \|x\| \ \|y\| \ \text{ für alle } \ x \tag{3.2.6}$$

d.h. $\|f\| \leq \|y\|$. Für $x := y$ hat man Gleichheit in (3.2.6), also

$$\|f\| = \|y\|.$$

Jedes $y \in H$ definiert somit ein $f \in H^*$ mit

$$\|f\| = \|y\| \tag{3.2.7}$$

d.h.

$$H \subset H^*.$$

Der folgende Satz zeigt, daß sogar $H = H^*$ gilt.

Satz 3.2.2 (Riesz-Fréchet) Sei H ein Hilbertraum. Zu jedem $f \in H^*$ existiert genau ein $y \in H$ mit

$$\|f\| = \|y\| \text{ und } f(x) = (x|y) \text{ für alle } x \in H.$$

Beweis:

⌈ ⌉

Idee:

$H = \mathbb{R}^n$: Sei $f(x) \overset{x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n}{:=} \underbrace{(f(e_1), \ldots, f(e_n))}_{y^T} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Dabei ist $f(x) = y^Tx$ mit $y \perp f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^Tx = 0\}$.

⌊ ⌋

<u>Existenz</u>:
Setze $N := \{x \in H|f(x) = 0\}$. N ist linearer Teilraum und $N = \overline{N}$. (f stetig, $N = f^{-1}(\{0\})$). Falls $N = H$, so ist $f = 0$ und die Behauptung gilt mit $y = 0$. Sei also $N \neq H$ und damit nach Satz 2.3.4

$$H = N \oplus N^{\perp}.$$

Wähle ein $z \in N^{\perp}$ mit (o.B.d. A) $f(z) = 1$. Für $x \in H$ gilt dann

$$f(x - f(x)z) \overset{f \text{ lin.}}{=} f(x) - f(x) \underbrace{f(z)}_{=1} = 0$$

also

$$x - f(x)z \in N$$

und damit

$$(x - f(x)z \,|\, z) \overset{z \in N^\perp}{=} 0, \text{ d.h. } f(x) = \left(x|\frac{z}{\|z\|^2}\right)$$

Mit $y := \dfrac{z}{\|z\|^2}$ folgt

$$f(x) = (x|y) \text{ für alle } x \in H.$$

<u>Eindeutigkeit:</u>

Es gelte ebenso

$$f(x) = (x|y') \text{ für alle } x \in H.$$

Dann ist

$$0 = (x|y - y') \text{ für alle } x \in H$$

und damit $y = y'$.

Die Beziehung $\|f\| = \|y\|$ wurde schon oben gezeigt (s. (3.2.7)). □

3.3 Der Satz von Hahn-Banach (Fortsetzungssatz)

Frage: Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, M ein linearer Teilraum von X und $f : M \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit

$$\|f\|_M := \sup_{\substack{x \in M \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Gibt es dann ein $F \in X^*$ mit

$$F|_M = f \text{ und } \|F\| = \|f\|_M?$$

Definition 3.3.1 Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Funktion $p : X \to \mathbb{R}$ heißt *sublinear*, falls

$$\begin{aligned} p(x_1 + x_2) &\leq p(x_1) + p(x_2) && \text{für alle } x_1, x_2 \in X \\ p(\alpha x) &= \alpha p(x) && \text{für alle } \alpha \geq 0, x \in X. \end{aligned}$$

Beispiel 3.3.2 Sei X ein normierter Vektorraum

(a) Dann ist das Minkowski-Funktional $p(x) := \|x\|$ sublinear

(b) Sei $K \subset X$ konvex mit $0 \in K^\circ$. Dann ist

$$p(x) := \inf\{r \in \mathbb{R} \,|\, x \in rK, r > 0\}$$

sublinear. Weiter gilt

- p ist stetig
- $\overline{K} = \{x \in X \,|\, p(x) \leq 1\}$
- $K^\circ = \{x \in X \,|\, p(x) < 1\}$.

Beweis: Ü.A.

Satz 3.3.3 (Hahn-Banach) Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, $M \subset X$ ein linearer Teilraum und $p : X \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional. Dann existiert zu jedem linearen Funktional

$$f : M \to \mathbb{R} \text{ mit } f(m) \leq p(m) \;\forall\, m \in M$$

ein lineares Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ mit

$$F|_M = f \text{ und } F(x) \;\leq\; p(x) \;\forall\, x \in X \tag{3.3.1}$$

Beweis:

(i) Sei $y \notin M$ fest. Wie setzen f auf $\mathrm{lin}\{M, y\}$ fort. Für beliebige $m_1, m_2 \in M$ gilt

$$f(m_1) + f(m_2) = f(m_1 + m_2) \leq p(m_1 + m_2) \leq p(m_1 - y) + p(m_2 + y)$$

also

$$f(m_1) - p(m_1 - y) \leq p(m_2 + y) - f(m_2).$$

Damit existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{m \in M} \{f(m) - p(m - y)\} \leq c \leq \inf_{m \in M} \{p(m + y) - f(m)\}. \tag{3.3.2}$$

Für $x = m + \alpha y \in \mathrm{lin}\{M, y\}$ definieren wir nun als Fortsetzung g von f

$$g(x) := f(m) + \alpha c.$$

Falls $\alpha > 0$, so ist

$$\begin{aligned}
\alpha c + f(m) &= \alpha\left[c + f\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right] \\
&\overset{(3.3.2)}{\leq} \alpha\left[p\left(\frac{m}{\alpha}+y\right)\underbrace{-f\left(\frac{m}{\alpha}\right)+f\left(\frac{m}{\alpha}\right)}_{=0}\right] \\
&\overset{\text{sublinear}}{=} p(m+\alpha y).
\end{aligned}$$

Für $-\beta := \alpha < 0$ gilt analog

$$\begin{aligned}
-\beta c + f(m) &= \beta\left[-c + f\left(\frac{m}{\beta}\right)\right] \\
&\overset{(3.3.2)}{\leq} \beta\left[p\left(\frac{m}{\beta}-y\right)\underbrace{-f\left(\frac{m}{\beta}\right)+f\left(\frac{m}{\beta}\right)}_{=0}\right] \\
&\overset{\text{sublinear}}{=} p(m-\beta y).
\end{aligned}$$

Somit gilt für das lineare Funktional $g : \operatorname{lin}\{M, y\} \to \mathbb{R}$:

$$g|_M = f \quad \text{und} \quad g(m+\alpha y) \leq p(m+\alpha y).$$

(ii) Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{A} := \left\{ (N, F_N) \,\middle|\, \begin{array}{l} N \text{ lin.Teilraum von } X \text{ mit } N \supset M \\ F_N : N \to \mathbb{R} \text{ lin. }, F_N|_M = f, F_N(x) \leq p(x) \end{array} \right\}$$

mit der Ordnungsrelation (reflexiv, antisymmetrisch, transitiv)

$$(N_1, F_{N_1}) \preceq (N_2, F_{N_2}) \;:\Longleftrightarrow\; N_1 \subset N_2 \quad \text{und} \quad F_{N_2}|_{N_1} = F_{N_1}.$$

Wegen $(M, f) \in \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Für jede totalgeordnete Teilmenge

$$(N_i, F_{N_i})_{i \in I} \tag{3.3.3}$$

von $\mathcal{A}$ ist

$$N := \bigcup_{i \in I} N_i, \quad F_N(x) := F_{N_i}(x) \quad \text{für } x \in N_i$$

eine obere Schranke (beachte: F_N ist wohldefiniert, da (3.3.3) totalgeordnet ist). Nach dem Zorn'schen Lemma existiert ein somit maximales Element (X_0, F_{X_0}) in $\mathcal{A}$, d.h. $\mathcal{A} \ni (\tilde{N}, \tilde{F}) \succeq (X_0, F_{X_0})$ impliziert $\tilde{N} = X$ und

$\tilde{F} = F_{X_0}$. Wäre nun $X_0 \neq X$, so gäbe es nach (i) eine Majorante von (X_0, F_{X_0}) im Widerspruch zur Maximalität von (X_0, F_{X_0}). Es folgt $X_0 = X$ und $F := F_{X_0} : X \to \mathbb{R}$ erfüllt (3.3.1). $\square$

Korollar 3.3.4 Sei f in Satz 3.3.3 stetig mit der Norm $\|f\|_M$. Dann ist $F \in X^*$ und (3.3.1) läßt sich ersetzen durch

$$F|_M = f,\ \|F\| = \|f\|_M.$$

Beweis: Setze in 3.3.3

$$p(x) := \|f\|_M \|x\|.$$

$\square$

Bemerkung: Der Hahn-Banach-Satz läßt sich auch als "Minimierungsproblem" deuten, nämlich:
Die Aufgabe

$$\min_{F \in X^*, F|_M = f} \|F\|$$

hat eine Lösung F und es ist $\|F\| = \|f\|_M$.

Korollar 3.3.5 Sei X ein normierter Vektorraum. Dann gilt:

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, F \in X^*,\ F \neq 0,\ \text{ mit }\ F(x) = \|F\| \|x\|. \tag{3.3.4}$$

Beweis: Ü.A.

Eine unmittelbare Folgerung ist die Existenz stetiger nichttrivialer linearer Funktionale, also $X^* \supsetneqq \{0\}$. Es gibt normierte Räume, für die das nicht der Fall ist.

Die Umkehrung von (3.3.4) gilt i.a. <u>nicht</u>.

(Gegen-)Beispiel 3.3.6 Auf $X := \ell_1$ definieren wir ein $f \in X^* = \ell_\infty$ durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{i}\right) \xi_i \text{ für } x = \{\xi_i\} \in \ell_1.$$

Es ist $\|f\| = 1$ aber (wie leicht zu sehen)

$$f(x) < \underbrace{\|f\|}_{=1} \|x\| \text{ für alle } x \in \ell_1.$$

3.4 Der Dual des $C[a,b]$

Satz 3.4.1 Zu jedem $f \in C[a,b]^*$ existiert ein $v \in BV[a,b]$, so daß

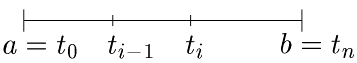
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^b x(t)\,dv(t) \ \text{ für alle } x \in C[a,b] && (3.4.1)\\ \|f\| &= TV(v). && (3.4.2)\end{aligned}$$

Umgekehrt definiert jedes $v \in BV[a,b]$ in dieser Weise ein $f \in C[a,b]^*$.

Beweis:

Idee:

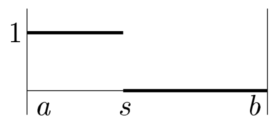
$$\int_a^b x(t)dv(t) \approx \sum_1^n x(t_{i-1})[v(t_i) - v(t_{i-1})]$$



somit $f(x) \approx$ " "

Definiere für:

$$\begin{aligned} s = a &: \ u_a(t) = 0 \text{ für } a \le t \le b \\ s \in (a,b] &: \ u_s(t) = \begin{cases} 1 & a \le t \le s \\ 0 & t > s \end{cases}\end{aligned} \qquad (3.4.3)$$



Dann ist $\quad z(t) := \sum_1^n x(t_{i-1})[u_{t_i}(t) - u_{t_{i-1}}(t)] \sim x(t)$

und $\quad f(x) \approx f(z) = \sum_1^n x(t_{i-1})[\underbrace{f(u_{t_i})(t)}_{\sim f(u_{t_i})} - \underbrace{f(u_{t_{i-1}})(t)}_{\sim f(u_{t_{i-1}})}]$

legt die Definition von v wie unter (3.4.4) nahe.

(a) Sei $f \in C[a,b]^*$ gegeben.
$C[a,b]$ ist linearer Teilraum von

$$\begin{aligned} B &:= \{x : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, \exists M : |x(t)| \le M \,\forall\, t \in [a,b]\} \\ \|x\|_B &= \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|.\end{aligned}$$

Nach Hahn-Banach existiert ein $F \in B^*$ mit

$$F|_{C[a,b]} = f, \ \|F\| = \|f\|.$$

Wir definieren nun $u_s(\cdot)$ wie unter (3.4.3) und setzen (beachte:$F \in B^*$)

$$v(s) := F(u_s) \ \text{ für } \ s \in [a,b]. \tag{3.4.4}$$

Zeige: (i) $v \in BV[a,b]$ und (ii) (3.4.2) gilt mit v.

(i) Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ eine beliebige Partition von $[a,b]$ und

$$\epsilon_i := \operatorname{sgn}(v(t_i) - v(t_{i-1})).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_1^n |v(t_i) - v(t_{i-1})| &= \sum_1^* \epsilon_i(v(t_i) - v(t_{i-1})) \\
&\overset{\text{Def. von } v(t_i)}{=} \sum_1^n \epsilon_i(F(u_{t_i}) - F(u_{t_{i-1}})) \\
&\overset{F \text{ lin.}}{=} F\left(\sum_1^n \epsilon_i(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right)
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\sum_1^n |v(t_i) - v(t_{i-1})| &\leq \|F\| \, \|\sum_1^n \epsilon_i(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\|_B \\
&= \|f\|,
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

da $\|F\| = \|f\|$ und $\|\sum\limits_1^n \epsilon_i(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\|_B = 1$.

Das zeigt (i).

(ii) Zu $x \in C[a,b]$ und beliebiger Partition $t_0, \ldots, t_n$ setze

$$z(t) := \sum_1^n x(t_{i-1})[u_{t_i}(t) - u_{t_{i-1}}(t)]. \quad (\in B)$$

Dann hat man

$$\|z - x\|_B = \max_i \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |x(t_{i-1}) - x(t)| \quad \underset{\substack{\text{Partit.} \to 0 \\ x \text{ glm. stetig} \\ \text{auf } [a,b]}}{\longrightarrow} \quad 0$$

und somit (F stetig auf B)

$$F(z) \longrightarrow F(x) = f(x). \tag{3.4.6}$$

Andererseits gilt nach Definition des Stieltjes-Integrals

$$F(z) \longrightarrow \int_a^b x(t)dv(t).$$

Zusammen mit (3.4.6) zeigt das (3.4.2).

Nun gilt allgemein

$$\left| \int_a^b x(t)dv(t) \right| \leq \|x\| \, TV(v),$$

was zusammen mit (3.4.6) die Beziehung (3.4.2) zeigt.

(b) Sei $v \in BV[a,b]$. Dann ist

$$f(x) = \int_a^b x(t)dv(t)$$

linear und beschränkt, da $|f(x)| \leq \|x\| \, TV(v)$. $\square$

3.5 Zwei Mininimum-Norm-Probleme

Wir studieren das Minimum-Norm-Problem (2.2.1) in einem Raum, dessen Norm nicht durch ein inneres Produkt induziert wird. Haupthilfsmittel ist jetzt der Hahn-Banach-Satz. Abschnitt 3.6 wird zwei Anwendungen der Aussagen vorstellen.

Definition 3.5.1 Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subset X$.

(a) Dann heißt

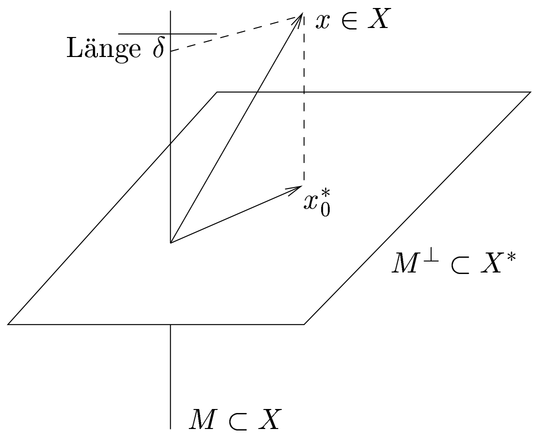
$$M^{\perp} := \{x^* \in X^* \mid \langle m \, , \, x^* \rangle = 0 \quad \forall \, m \in M\}$$

orthogonales Komplement von M.

(b) $x^* \in X^*$ heißt *aligned* zu $x \in X$, falls

$$\langle x \, , \, x^* \rangle = \|x\| \|x^*\|.$$

Das Minimum-Norm-Problem in X



Beachte: Es handelt sich um eine eigentlich nicht erlaubte Veranschaulichung im Hilbertraum $\mathbb{R}^3$!
Der Leser mache sich weiter klar, daß und wieso sich Aussage und Beweis von Satz 2.2.3 nicht übertragen lassen.

Satz 3.5.2 Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, $x \in X$ gegeben und $M \subset X$ ein linearer Teilraum.

(a) Dann existiert ein $x_0^* \in M^\perp$ mit

$$(\delta :=) \inf_{m \in M} \|x - m\| = \max_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in M^\perp}} \langle x \, , \, x^* \rangle = \langle x \, , \, x_0^* \rangle$$

(b) Wird das Minimum der linken Seite in m_0 angenommen, so sind $x - m_0$ und x_0^* aligned.

Beweis:
(a) Für $\epsilon > 0$ wähle man $m_\epsilon \in M$ mit $\|x - m_\epsilon\| \leq \delta + \epsilon$. Dann ist für $x^* \in M^\perp$ mit $\|x^*\| \leq 1$

$$\langle x \, , \, x^* \rangle = \langle x - m_\epsilon \, , \, x^* \rangle \leq \|x - m_\epsilon\| \underbrace{\|x^*\|}_{\leq 1} \leq \delta + \epsilon.$$

Da ϵ beliebig war, folgt

$$\langle x \, , \, x^* \rangle \leq \delta,$$

und es bleibt zu zeigen

$$\langle x \, , \, x_0^* \rangle = \delta$$

für geeignetes $x_0^* \in M^\perp$.
Dazu definieren wir auf $N := \mathrm{lin}\{M, x\}$ ein lineares Funktional $\tilde{x}^*$ durch

$$\tilde{x}^*(n) = \alpha\delta \quad \text{für}\, n = m + \alpha x \in N.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}^*\| &= \sup_{n \in N} \frac{|\tilde{x}^*(n)|}{\|n\|} = \sup_{\alpha, m} \frac{|\alpha\delta|}{\|m + \alpha x\|} \\ &= \frac{\delta}{\inf\limits_{\alpha} \|\frac{m}{\alpha} + x\|} = \frac{\delta}{\delta} = 1. \end{aligned}$$

Für die Fortsetzung x_0^* von $\tilde{x}^*$ auf X gilt

$$\|x_0^*\| = 1, \quad x_0^*|_N = \tilde{x}^*.$$

Nach Konstruktion ist weiter

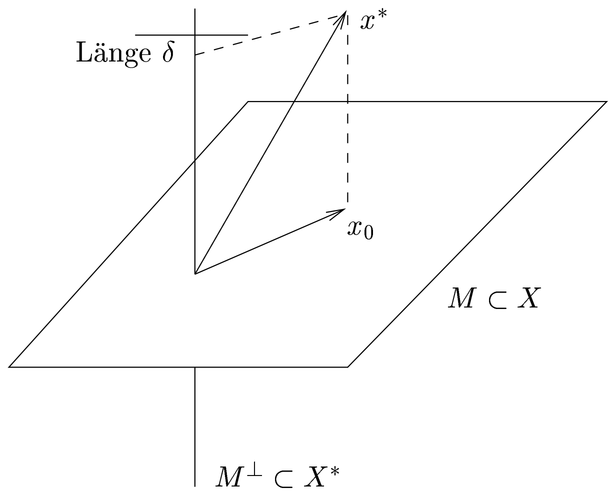
$$x_0^* \in M^\perp \, (x_0^* = \tilde{x}^* \, \text{auf}\, M) \quad \text{und} \quad \langle x \, , \, x_0^* \rangle = \delta.$$

(b) Es ist

$$\langle x - m_0 \, , \, m_0^* \rangle \overset{m_0 \in M, m_0^* \in M^\perp}{=} \langle x \, , \, m_0^* \rangle \overset{(a)}{=} \delta = \|x - m_0^*\| \underbrace{\|x_0^*\|}_{=1}.$$

□

Das duale Minimum-Norm-Problem in X^*



Satz 3.5.3 Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, $M \subset X$ ein linearer Teilraum und $x^* \in X^*$ gegeben.

(a) Dann existiert ein $m_0^* \in M^\perp$ mit

$$(\delta :=) \min_{m^* \in M^\perp} \|x^* - m^*\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in M}} \langle x \, , \, x^* \rangle. \tag{3.5.1}$$

(b) Wird das Supremum auf der rechten Seite in $x_0 \in M$ angenommen, so sind $x^* - m_0^*$ und x_0 aligned.

Beweis: Ü.A., ähnliches Hahn-Banach-Argument wie beim Beweis von Satz 3.5.2

Konsequenz: Um die Existenz einer Lösung zu garantieren, formuliere man das Problem in X^*.

3.6 Zwei Anwendungen

3.6.1 Chebychev-Approximation

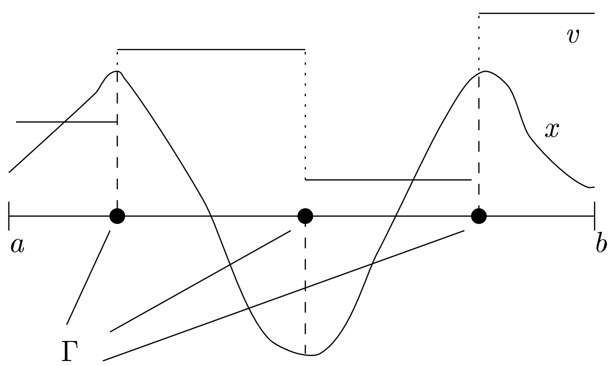
Seien $x \in C[a,b]$ und $v \in BV[a,b]\,(= C[a,b]^*)$ gegeben und

$$\Gamma := \{t \in [a,b] \mid |x(t)| = \|x\|\}.$$

Falls x und v aligned sind, d.h.

$$\langle x \, , \, x^* \rangle = \underbrace{\int_a^b x(t)dv(t)}_{\approx \sum_1^n x(t_{i-1})(v(t_i) - v(t_{i-1}))} = \|x\|_\infty \underbrace{\|v\|}_{TV(v)},$$

so muß v konstant sein bis auf Γ.

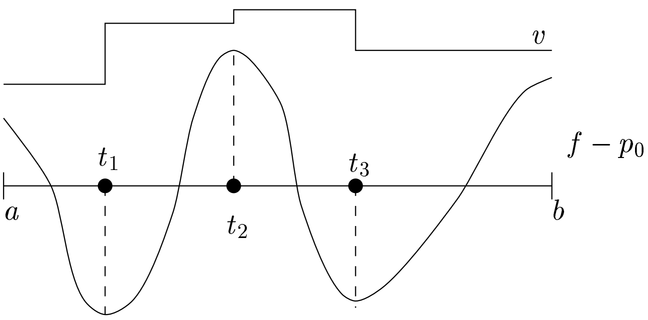


Beispiel 3.6.1 (Chebychev-Approximation)
Sei $f \in C[a,b]$ und $M := \{p \in C[a,b] \,|\, p$ Polynom vom Grad $\leq n\}$.
Da $\dim M = n+1 < \infty$, existiert (Kompaktheit) ein $p_0 \in M$ mit

$$\|f - p_0\| \leq \|f - p\| \quad \forall\, p \in M.$$

Nach Satz 3.5.2 gibt es somit ein $v = x_0^* \in M^\perp$, das zu $f - p_0$ aligned ist.
Sei nun

$$\Gamma = \{t \in [a,b] \,|\, |f(t) - p(t)| = \|f - p_0\|\}.$$



Annahme: $\Gamma = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ mit $m \overset{!}{\leq} n+1$.
Fixiere ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ und setze $q(t) = \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} (t - t_i)$. Dann ist

$q \in M$, aber $\int_a^b q(t)dv \neq 0$ (beachte: $q(t_k) \neq 0$), im Widerspruch zu $v \in M^\perp$.

Wir haben damit gezeigt: $|\Gamma| \geq n+2$
(Das ist der bekannte Alternantensatz, auf dem der Remez-Algorithmus basiert)

3.6.2 Ein Kontrollproblem

Wir betrachten einen Spezialfall von Satz 3.5.2:
Sei X ein normierter Vektorraum, $M = lin\{y_1, \ldots, y_n\} \subset X$ und $c \in \mathbb{R}^n$.
Sei $\bar{x}^*$ so, daß

$$\langle y_i \,,\, \bar{x}^* \rangle = c_i, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.6.2}$$

Dann wird aus (3.5.1)

$$\delta = \min_{m^* \in M^\perp} \|\bar{x}^* - m^*\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in M}} \langle x \, , \, \bar{x}^* \rangle$$

d.h.

$$\delta = \min_{\langle y_i \, , x^* \rangle = c_i} \|x^*\| = \sup_{a \in \mathbb{R}^n : \|Ya\| \leq 1} \langle Ya \, , \, \bar{x}^* \rangle \overset{(3.6.2)}{=} \sup_{a \in \mathbb{R}^n : \|Ya\| \leq 1} c^T a$$

mit $Y = (y_1, \ldots, y_n)$. Somit sehen wir

$$\min_{\langle y_i \, , x^* \rangle = c_i} \|x^*\| = \max_{a \in \mathbb{R}^n : \|Ya\| \leq 1} c^T a. \tag{3.6.3}$$

Beispiel 3.6.2
Betrachte das Problem, den Strom $u(t)$ auf $[0,1]$ zu wählen, um einen Motor anzutreiben, der durch

$$\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = u(t)$$

gesteuert wird, von den Anfangsbedingungen $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ zu $\theta(1) = 1$, $\dot{\theta}(1) = 0$, so daß $\max\limits_{o \leq t \leq 1} |u(t)|$ minimiert wird. Dieses Beispiel ist ähnlich wie Beispiel 2.6.2, aber in die Zielfunktion geht nun anstatt der Gesamtenergie die Sorge ein, daß durch übermäßige Stromstärke möglicherweise ein Schaden entsteht.
Das Problem kann aufgefaßt werden, als wäre es in $C[0,1]$ formuliert, aber da dieser Raum kein Dualraum eines normierten Raumes ist, können wir eine Lösung in $C[0,1]$ nicht garantieren. Daher nehmen wir stattdessen $X = L_1[0,1], X^* = L_\infty[0,1]$ und suchen das $u \in X^*$, das von minimaler Norm ist. Die Nebenbedingungen sind, wie in Beispiel 2.6.2,

$$\int_0^1 e^{(t-1)} u(t) dt = 0$$

$$\int_0^1 [1 - e^{(t-1)}] u(t) dt = 1.$$

Nach (3.6.2) ist

$$\min \|u\| = \max_{\|a_1 y_1 + a_2 y_2\| \leq 1} a_2.$$

Die Norm auf der rechten Seite ist die L_1-Norm. Daher müssen die beiden Konstanten a_1, a_2

$$\int_0^1 |(a_1 - a_2) e^{(t-1)} + a_2| dt \leq 1$$

erfüllen.
Maximierung von a_2 unter dieser Nebenbedingung ist eine leichte Aufgabe, aber wir führen die notwendigen Rechnungen nicht durch. Stattdessen zeigen wir, daß die allgemeine Eigenschaft der optimalen Steuerung einfach aus der Forderung nach Alignment hergeleitet werden kann. Offensichtlich kann die Funktion $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$, als Summe einer Konstanten und einem exponentiellen Term, das Vorzeichen höchstens einmal wechseln, und da die Funktion u mit dieser Funktion aligned ist, muß u die Werte $\pm M$ für ein M annehmen und wechselt das Vorzeichen höchstens einmal.

3.7 Der Bidualraum

Definition 3.7.1 Für einen normierten Vektorraum X über $\mathbb{K}$ mit dem Dualraum X^* bezeichne

$$X^{**} := \{F : X^* \to \mathbb{K} |\, f \text{ linear und stetig}\}$$

den *Bidualraum* mit der Norm

$$\|f\| := \sup_{x^* \neq 0} \frac{|f(x^*)|}{\|x^*\|}.$$

Offensichtlich definiert jedes $x \in X$ ein Funktional auf X^* vermöge

$$x(x^*) := x^*(x) \quad [= \langle x\,,\, x^* \rangle] \text{ für alle } x^* \in X^*.$$

Dieses Funktional x ist linear:

$$\begin{aligned} x(\alpha x_1^* + \beta x_2^*) &= (\alpha x_1^* + \beta x_2^*)(x) \\ &= (\alpha x_1^*)(x) + (\beta x_2^*)(x) \\ &= \alpha x(x_1^*) + \beta x(x_2^*). \end{aligned}$$

Weiter gilt für $x (= \varphi_x) \in X^{**}$

$$\|\varphi_x\| = \sup_{x^* = 0} \frac{|\langle x\,,\, x^* \rangle|}{\|x^*\|} \leq \|x\|.$$

Nach Korollar 3.3.5 gibt es ein ein $x^* \in X^*$, für das

$$|\langle x\,,\, x^* \rangle| = \|x\|\, \|x^*\|,$$

und damit

$$\|\varphi_x\| = \|x\|.$$

Das zeigt
$$X \subset X^{**} \quad \text{und} \quad \|x\|_X = \|x\|_{X^{**}}. \tag{3.7.1}$$
Die Inklusion in (3.7.1) kann echt sein, z.B. ist
$$\ell_1 \subsetneqq \ell_1^{**}.$$

Definition 3.7.2 Ein normierter Vektorraum heißt *reflexiv*, falls
$$X = X^{**}.$$

Beispiel 3.7.3

(a) Ein Hilbertraum ist reflexiv. (Satz 3.2.2)

(b) Die Räume ℓ_p und L_p mit $1 < p < \infty$ sind reflexiv. (Satz 3.2.1).

3.8 Schwache Konvergenz und der Satz von Alaoglu

Definition 3.8.1 Sei X ein normierter Vektorraum und $\{x_n\}$ eine Folge in X. Wir sagen:

x_n konvergiert schwach gegen $x \in X$ $(x_n \rightharpoonup x)$ $:\Longleftrightarrow$ $\langle x_n\,,\,x^*\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x\,,\,x^*\rangle$ für alle $x^* \in X^*$

Proposition 3.8.2 In einem normierten Vektorraum gilt:
$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Longrightarrow x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x. \tag{3.8.1}$$

Beweis: $|\langle x_n\,,\,x^*\rangle - \langle x\,,\,x^*\rangle| \le \|x_n - x\|\|x^*\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Die Umkehrung von (3.8.1) gilt nicht:

Beispiel 3.8.3 In $X = \ell_2$ hat man für die Folge $\{x_n\}$ mit
$x_n = \quad (0,\ldots,0,\underset{\underset{n}{\uparrow}}{1},0,\ldots)$ und beliebiges $y = \{\eta_i\} \in \ell_2 = X^*$
$$\langle x_n\,,\,y\rangle = \eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \langle 0_{\ell_2}\,,\,y\rangle,$$
d.h. $x_n \rightharpoonup 0_{\ell_2}$.
Es gilt jedoch nicht
$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0_{\ell_2},$$
da $\|x_n\| = 1$ für alle n.

Definition 3.8.4 Sei X ein normierter Vektorraum und $\{x_n^*\}$ eine Folge in X^*. Wir sagen:

$$\begin{array}{lcc} x_n^* \text{ konvergiert schwach}^* \text{ gegen } x^* \in X^* & :\Longleftrightarrow & \langle x\,,\,x_n^*\rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x\,,\,x^*\rangle \\ (x_n^* \rightharpoonup x^*) & & \text{für alle}\, x \in X \end{array}$$

Satz 3.8.5 (Alaoglu) Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Einheitskugel $\{x^* \in X^* \,|\, \|x^*\| \le 1\}$ von X^* ist schwach*-kompakt (jede Folge enthält schwach*-konvergente Teilfolge).

Beweis: siehe Literatur.

Wir bemerken als Folgerung, daß in einem reflexiven normierten Vektorraum die Einheitskugel $\{x \,|\, \|x\| \le 1\}$ schwach kompakt ist. Man beachte in diesem Zusammenhang Satz 1.6.5!

3.9 Der Satz von Hahn-Banach (geometrische Form)

Proposition 3.9.1 Sei X ein normierter Vektorraum und $H \subset X$ eine Hyperebene.

(a) Es gibt ein lineares Funktional f und ein $c \in \mathbb{K}$ mit

$$H = \{x \in X \,|\, f(x) = c\}.$$

(b) Es ist $H = \overline{H}$ genau dann, wenn $f \in X^*$.

Beweis: Ü.A.

Satz 3.9.2 (Mazur, Hahn-Banach) Sei X ein reeller normierter Vektorraum, $K \subset X$ konvex, $K^\circ \neq \emptyset, V \subset X$ ein affiner Teilraum mit $K^\circ \cap V = \emptyset$. Dann existiert ein $x^* \in X^*, x^* \neq 0$, und $c \in \mathbb{R}$, so daß

$$\langle v\,,\,x^*\rangle = c \quad \text{für alle } v \in V \quad \text{und} \quad \langle k\,,\,x^*\rangle < c \quad \text{für alle} \quad k \in K^\circ.$$

Beweis: O.B.d.A. sei $0 \in K^\circ$ und p das Minkowski-Funktional von K (siehe Beispiel 3.3.2(b))

$$p(x) = \inf\{r \in \mathbb{R} \,|\, x \in rK, r > 0\}.$$

Weiter setzen wir $M := \text{lin}\, V$. Dann ist V eine Hyperebene in M und nach Prop. 3.9.1(a) gibt es ein lineares Funktional f auf M mit

$$V = \{x \in M \mid f(x) = 1\}.$$

Aus $K^\circ \cap V = \emptyset$ folgt

$$f(x) = 1 \leq p(x) \quad \text{für}\, x \in V.$$

Für $\alpha > 0$ ist wegen der Homogenität von p

$$f(\alpha x) = \alpha \leq p(\alpha x) \quad \text{für}\, x \in V$$

und für $\alpha < 0$ gilt trivialerweise

$$f(\alpha x) \leq 0 \leq p(\alpha x).$$

Somit folgt

$$f(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in M$$

und nach Satz 3.3.3 existiert ein $F : X \to \mathbb{R}$ mit

$$F|_M = f, \quad F(x) \leq p(x) \quad \text{für alle} x \in X.$$

Nach 3.3.2(b) ist p stetig und damit auch F und es ist

$$F(x) \leq p(x) < 1 \quad \text{für } x \in K^\circ.$$

Die Behauptung gilt mit $x^* := F$.

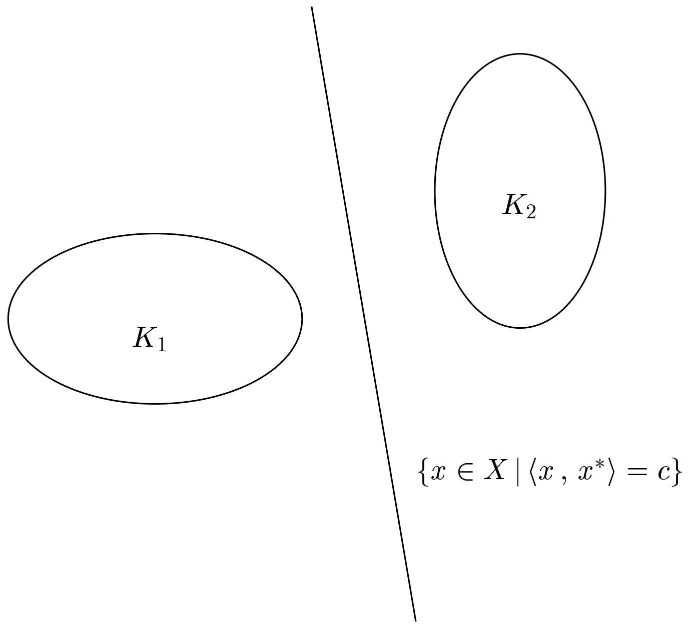
Satz 3.9.3 (Trennungssatz) Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, K_1und K_2 nichtleere konvexe Mengen in X mit $K_1^\circ \neq \emptyset$ und $K_1^\circ \cap K_2 = \emptyset$. Dann existiert ein $x^* \in X^*, x^* \neq 0$, so daß

$$\sup_{x \in K_1} \langle x\,,\, x^* \rangle \leq \inf_{x \in K_2} \langle x\,,\, x^* \rangle.$$

Beweis: Setze in 3.9.2 $K := K_1 - K_2$ (konvex, $K^\circ = K^\circ - K_2 \neq \emptyset, K^\circ \not\ni 0$) und $V = \{0\}$. Dann existiert ein $x^* \neq 0$ und c, so daß

$$\langle k_1 - k_2\,,\, x^* \rangle \leq c = \langle 0\,,\, x^* \rangle.$$

Das zeigt die Behauptung. $\square$



Bemerkung: Auf die Voraussetzung "nichtleer, konvex, $K_1^\circ \neq \emptyset$" kann man nicht verzichten. Die Aussage wird z.B. falsch in der Situation

$$K_1 := \{k\}, \quad K_2 := X.$$