Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & 2

Vorlesung von
Professor Dr. Walter Klotz
an der
Technischen Universität Clausthal

4. Auflage 1992

Prof. Dr. Walter Klotz
Institut für Mathematik
Technische Universität Clausthal

1. Auflage 1987
2. überarbeitete Auflage 1990
3. überarbeitete und in TEX gesetzte Auflage 1991
4. überarbeitete und erstmals beide Teile umfassende Auflage 1992

Textverarbeitung:	Hans–Ulrich Kiel
unterstützt von:	Jochen Hein
und	Andreas Franke
erstellt mit:	PasTEX auf Comodore *AMIGA*
und	emTEX auf AT 486
Druck auf:	NeXT, Rechenzentrum TU Clausthal
Vervielfältigung:	Papierflieger, Clausthal
Vertrieb:	Fachschaft Mathematik, Informatik, Physik

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Lineare Algebra 1

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Logische Begriffe

Aussage: Satz der Umgangsprache, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

Beispiel: Hunde haben 5 Beine. f
7 ist eine Primzahl. w
Clausthal ist schön. keine Aussage

FERMATsche Vermutung:
Für alle ganzen Zahlen $n > 2$ hat die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine Lösung in positiven ganzen Zahlen x, y, z. Bis heute unbekannt, ob w oder f.

Symbole für Aussagen: $A, B, C, \ldots$

Aussageform: Aussage, in der Objekte durch Variablen ersetzt sind.

Beispiel: x teilt y, $x|y$ $B(x, y)$
$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ $A(x_1, x_2, x_3)$

Negation $\neg A$ „nicht A"

Verknüpfung von Aussagen

- **Konjunktion** $A \wedge B$ „A und B"
- **Disjunktion** $A \vee B$ „A oder B"
- **Implikation** $A \Rightarrow B$ „A impliziert B"
  „Aus A folgt B", „A ist hinreichend für B", „B ist notwendig für A"
- **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$ „A äquivalent B"
  „A gilt genau dann, wenn B gilt"

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Statt „Es gilt $A \Rightarrow B$ bzw. $A \Leftrightarrow B$“ schreiben wir später meist nur „$A \Rightarrow B$ bzw. $A \Leftrightarrow B$“.

Axiomatisch begründete Theorie
Am Anfang stehen undefinierte Begriffe und Aussagen über diese Begriffe, die als wahr vorrausgesetzt werden. Dies sind die Axiome der Theorie. Die Theorie besteht aus allen wahren Aussagen, die durch logisches Schließen aus den Axiomen gewonnen werden können.

1.2 Mengen

(Georg–August Cantor, 1845–1918, naive Mengenlehre)

Definition: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung.

Beispiel: Die Menge der Blätter eines Baumes (Anschauung)
Die Menge der ganzen Zahlen (Denken)

Die Objekte heißen Elemente der Menge. Symbole für Mengen: $A, B, \dots$
$a \in A$ „a ist Element von A“
$a \notin A$ „a ist nicht aus A“

Beschreibung einer Menge durch Aufzählung der Elemente:

$A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{10, 11, 12, \dots\}$

Beschreibung durch Eigenschaften der Elemente:

$B = \{x \mid \underbrace{x \text{ ist ganze Zahl } \geq 10}_{\text{Aussageform}}\}$

$\{x \mid x \in B \wedge 2 \text{ teilt } x \wedge 5 \text{ teilt } x\} = \{x \mid x \in B, 2|x, 5|x\} = \{10, 20, 30, \dots\}$

Statt Menge: Familie, System
Menge von Mengen = Mengenfamilie, Mengensystem
Indiziertes Mengensystem $(M_i)_{i \in I}$
Jedem Index i aus der Indexmenge I wird eine Menge M_i zugeordnet.

Gilt $x \in A \Rightarrow x \in B$ für alle x, dann heißt A Teilmenge von B
In Zeichen: $A \subseteq B$ (auch $A \subset B$)
Wir schreiben $A \subset B$, wenn $A \subseteq B \wedge A \neq B$ (auch $A \subsetneq B$)
„A ist echte Teilmenge von B“.

$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
$|M|$ Elementeanzahl von M.

Symbole für spezielle Mengen
$\emptyset$ leere Menge $|\emptyset| = 0$, $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.
$P(M)$ **Potenzmenge von** M, Menge aller Teilmengen von M, $\emptyset, M \in P(M)$
$\mathbb{N}$ $= \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$ $= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$ $= \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$ $= \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ Menge der komplexen Zahlen;
i imaginäre Einheit, $i^2 = -1$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Quantoren
Es sei $B(x)$ eine Aussageform
Allquantor $\forall$
Für alle x gilt $B(x)$ $=$ $\forall_x B(x)$
Für alle $x \in M$ gilt $B(x)$ $=$ $\forall_x (x \in M \Rightarrow B(x))$, auch $\forall_{x \in M}(B(x))$ oder $\underset{x \in M}{\forall} B(x)$
Existenzquantor $\exists$
Es gibt ein x, für das $B(x)$ gilt $=$ $\exists_x B(x)$
Es gibt ein $x \in M$, für das $B(x)$ gilt $=$ $\exists_x (x \in M \wedge B(x))$,
auch $\exists_{x \in M}(B(x))$ oder $\underset{x \in M}{\exists} B(x)$

Beispiel: Zu jeder reellen Zahl α und zu jeder positiven reellen Zahl ϵ gibt es eine rational Zahl a, so daß $|\alpha - a| < \epsilon$ ist.

$$\forall_\alpha \forall_\epsilon (\alpha \in \mathbb{R} \wedge \epsilon \in \mathbb{R} \wedge \epsilon > 0 \implies \exists_a (a \in \mathbb{Q} \wedge |\alpha - a| < \epsilon)$$

kürzer: $\forall_{\alpha, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0} \exists_{a \in \mathbb{Q}} (|\alpha - a| < \epsilon)$

Verknüpfung von Mengen
Vereinigung $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Durchschnitt $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Differenz $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ „A minus B", auch $A - B$
A, B **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$ (elementefremd)
Ist $B \subseteq A$, dann heißt $A \setminus B$ das Komplement von B bzgl. A
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Menge der irrationalen Zahlen

Es sei S ein Mengensystem

$$\bigcup S = \bigcup_{M \in S} M = \{x \mid \exists_M (M \in S \wedge x \in M)\}$$

$$\bigcap S = \bigcap_{M \in S} M = \{x \mid \forall_M (M \in S \Rightarrow x \in M)\}$$

Entsprechend für ein indiziertes Mengensystem $(M_i)_{i \in I}$:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists_{i \in I}(x \in M_i)\} \qquad \bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid \forall_{i \in I}(x \in M_i)\}$$

Rechenregel für $\cap$ und $\cup$

1.	Assoziativgesetze	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
		$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2.	Kommutativgesetze	$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
3.	Distributivgesetze	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
		$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Das kartesische Produkt
A, B Mengen: $\quad A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
(a, b) geordnetes Paar oder Tupel; a, b Koordinaten des Tupels
$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$

$A_1, \ldots, A_n$ Mengen $\quad A_1 \times \cdots \times A_n = \{\underbrace{(a_1, \ldots, a_n)}_{n\text{–Tupel}} \mid a_i \in A_i\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$

$\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{–Faktoren}} = A^n \qquad \mathbb{R}^n$ (n–dimensionaler reeller Raum)

1.3 Abbildungen

Es seien A, B nicht leere Mengen. Eine Abbildung f von A in B ist eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ ein $b \in B$ eindeutig zuordnet.
$f : A \to B \quad$ „f ist Abbildung von A in B"
$a \mapsto b \quad b = f(a)$, auch $b = fa$
b ist das **Bild** von a, a ist ein **Urbild** von b
$A = D(f)$ **Defintionsbereich** von f, B **Zielbereich** von f
Es sei $f_1 : A \to B, f_2 : A' \to B'$, dann gilt:

$f_1 = f_2 \overset{\text{Def}}{\iff} A = A' \wedge B = B' \wedge \forall_{x \in A}(f_1(x) = f_2(x))$

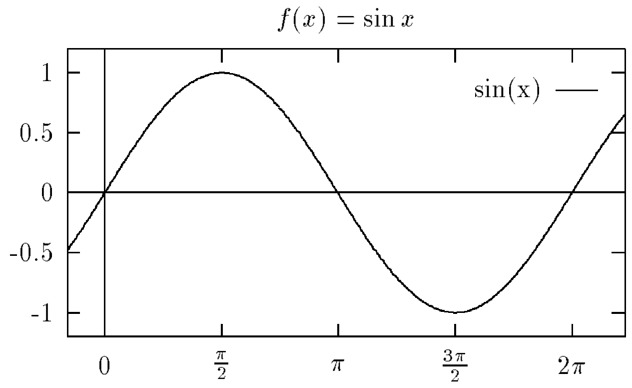
$B^A \quad$ Menge aller Abbildungen von A in B
sind A, B endlich, dann gilt: $|B^A| = |B|^{|A|}$

Im folgenden sei $f : A \to B, M \subseteq A$
Restriktion von f auf M: $f \restriction M : M \to B, \quad f \restriction M(x) = f(x)$ für alle $x \in M$, auch $f|_M$
$f(M) = \{y \mid \exists_{x \in M}(y = f(x))\} = \{f(x) \mid x \in M\}$ **Bild der Menge** M
$f(A) =$ Bild f; **Bildmenge** von f; Wertevorrat von f
Ist Bild $f \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, dann heißt f eine reelle bzw. komplexe Funktion.
Es sei $N \subseteq B$: $f^{-1}(N) = \{x \mid x \in A, f(x) \in N\}$ **Urbild der Menge N**

Ist Bild $f = B$, dann heißt f **surjektiv** bzw. Surjektion oder eine Abbildung von A *auf* B. Folgt aus $x \neq y$ stets $f(x) \neq f(y)$, dann heißt f **injektiv** bzw. Injektion oder umkehrbar eindeutig (eineindeutig). In diesem Fall hat jedes $b \in B$ höchstens ein Urbild. Ist f injektiv, dann existiert die **Umkehrabbildung** (f^{-1}). f^{-1} ordnet jedem $b \in$ Bild f das eindeutig bestimmte Urbild zu.
f^{-1}: Bild $f \to A$; $\quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
bijektiv $\iff$ injektiv $\wedge$ surjektiv, $\quad$ Bijektion
$f : A \to B$ bijektiv $\implies f^{-1} : B \to A$ bijektiv

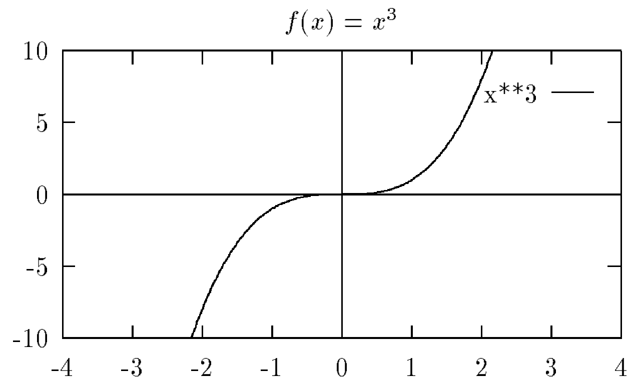
Identische Abbildung auf A $\quad \mathrm{id}_A : A \to A, \mathrm{id}_A(x) = x$
Eine **Permutation** von A ist eine Bijektion von A auf sich.

Beispiel: 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$



nicht surjektiv, nicht injektiv

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$



surjektiv $\wedge$ injektiv $\iff$ bijektiv

Ein reelles bzw. komplexes Polynom n–ten Grades ist eine Funktion der Form: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit Koeffizienten $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ bzw. $\in \mathbb{C}$; $\quad a_n \neq 0 \implies n = \text{Grad } f$

$\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ Menge der reellen bzw. komplexen Polynome

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f((x, y)) = f(x, y) = x + y$
surjektiv, nicht injektiv; $\quad f(0, 1) = f(1, 0) = 1$

Die **Komposition von Abbildungen** (Produkt, Hintereinanderschaltung)

$f : A \to B, g : B \to C$ Komposition: $g \circ f : A \to C$
$g \circ f(a) = g(f(a))$ Hintereinanderschaltung

f surjektiv $\wedge$ g surjektiv $\iff$ $g \circ f$ surjektiv
f injektiv $\wedge$ g injektiv $\iff$ $g \circ f$ injektiv

f bijektiv $\wedge$ g bijektiv $\Longleftrightarrow$ $g \circ f$ bijektiv
Das Abbildungsprodukt ist assoziativ: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Beweis: $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$

$$\left.\begin{array}{r} (h \circ g) \circ f(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) \\ h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f((a)) = h(g(f(a))) \end{array}\right\} \text{ ist gleich für alle } a \in A$$

Beides sind Abbildungen von A in D

Ist $f : A \to A, g : A \to A$, dann sind $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert, im allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$. Das Abbildungsprodukt ist nicht kommutativ.

Prinzip der vollständigen Induktion
Typische Aufgabe: Zeige, daß $\underbrace{n^2 < 2^n}_{A(n)}$ für alle ganzen Zahlen $n \geq 5$
Es sei $A(n)$ eine Aussageform, $n_0 \in \mathbb{Z}$. Es gelte:

1. Induktionsanfang:
   $A(n_0)$ ist wahr

2. Induktionsschluß unter der Induktionsannahme $A(n)$:
   Immer wenn $A(n)$ wahr ist für eine ganze Zahl $n \geq n_0$, dann ist auch $A(n+1)$ wahr

Dann gilt $A(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$.

Beispiel: obige Aufgabe:
Induktionsanfang: $n_0 = 5, \quad 5^2 < 2^5, 25 < 32 \quad \surd$
Induktionsannahme: Es gelte $n^2 < 2^n$ für ein $n \geq 5$
Zu zeigen: $(n+1)^2 < 2^{n+1}$
Induktionsschluß: $(n+1)^2 = n^2+2n+1 < n^2+3n < 2n^2 \overset{\text{Annahme}}{<} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \surd$

$P(n)$ **Anzahl der Permutationen** einer Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$
Eine Permutation f von A wird beschrieben durch eine Anordnung der Elemente in einer bestimmten Reihenfolge

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \ldots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

$P(n)$ Anzahl der Anordnungen von n Objekten in einer bestimmten Reihenfolge

$P(1) = 1; \quad P(2) = 2 : \; a_1a_2, \; a_2a_1;$

$P(3) = 6 : \; a_1a_2a_3, \; a_2a_1a_3, \; a_3a_1a_2, \; a_1a_3a_2, \; a_2a_3a_1, \; a_3a_2a_1$

Satz 1.1: $P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ „n Fakultät“

Beweis: Induktionsanfang: $n_0 = 1 \quad P(1) = 1 \quad \surd$
Annahme: Es gelte $P(n) = n!$ für ein $n \geq 1$
Zu zeigen: $P(n+1) = (n+1)!$
$n+1$ Objekte: $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$
Anzahl der Permutationen mit a_j am Anfang: $P(n)$

$$\Longrightarrow \underbrace{P(n+1) = (n+1) \cdot P(n)}_{\text{Rekursionsformel}} = (n+1) \cdot n! = (n+1)! \quad \surd$$

Vereinbarung: $0! = 1$

1.4 Binomialkoeffizienten

Definition: Es seien $n, k \in \mathbb{Z}$, $k, n \geq 0$. Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ („n über k“) ist die Anzahl der k–elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen.

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = 0, \text{ wenn } k > n$$

Vereinbarung: $\binom{n}{k} = 0$, wenn $k < 0$

Satz 1.2: Es sei $0 \leq k \leq n$; $k, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

1. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Symmetrie
3. $\displaystyle\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ Additionstheorem

Beweis:

1. $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ Nummeriere alle k–elementigen Teilmengen von A: $A_1, A_2, \ldots, A_{\binom{n}{k}}$
   Anzahl der Permutationen von A, bei denen die ersten k Elemete die Menge A_j bilden: $k!(n-k)!$
   $$P(n) = n! = \binom{n}{k} k!(n-k)!, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$
2. folgt aus 1.
3. richtig für $k = 0$. Es sei $1 \leq k \leq n$, $A = \{1, 2, \ldots, n+1\}$
   Anzahl aller k–elementigen Teilmengen von A, die $n+1$ enthalten: $\binom{n}{k-1}$
   Anzahl aller k–elementigen Teilmengen von A, die $n+1$ nicht enthalten: $\binom{n}{k}$
   $$\Longrightarrow \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Vereinbarung: Für $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ wird $\binom{n}{k}$ definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = 0, \text{ wenn } k < 0$$

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Beispiel: Man bestimme die Wahrscheinlichkeit W dafür, daß beim Skatspiel mindestens ein Bube im Skat liegt.
32 Karten, 4 Buben, 2 Karten im Skat

$$W = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{A_1}{A_2}$$

Anzahl der Fälle ohne einen Buben im Skat: $\binom{28}{2}$

$$A_2 = \binom{32}{2}, \quad A_1 = \binom{32}{2} - \binom{28}{2}$$

$$W = \frac{\binom{32}{2} - \binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = 1 - \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = 1 - \frac{28 \cdot 27}{32 \cdot 31} = 1 - \frac{189}{248} = 23,79\%$$

Satz 1.3: Binomischer Satz
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

Beweis: Induktion über n
Induktionsanfang: $n_0 = 0$: $\quad (a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \quad \checkmark$
Annahme: Behauptung richtig für ein $n \geq 0$

Zu zeigen: $(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\quad \text{nach Induktionsannahme} \\
&= (a+b)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n}{j}a^{n+1-j}b^j + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^{j+1} \\
&\quad \text{Substituiere im 2. Summanden: } k=j+1,\ j=k-1 \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n}{j}a^{n+1-j}b^j + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\
&\quad \text{Substituiere im 2. Summanden: } j=k \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n}{j}a^{n+1-j}b^j + \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^{n+1-j}b^j \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\left(\binom{n}{j}+\binom{n}{j-1}\right)a^{n+1-j}b^j \\
&\quad \text{nach Additionstheorem} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^{n+1-j}b^j
\end{aligned}$$

Folgerung:

1. $(1+1)^n = 2^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}$

   Eine Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen

2. $(1-1)^n = 0 = \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-+\dots\pm\binom{n}{n}$

   alternierende Summe der Binomialkoeffizienten

   $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots$

Bemerkung: Der Binomische Satz gilt in jedem Ring (siehe 3.4), wenn $ab=ba$ ist.

Kapitel 2

Relationen

Eine **Relation** ist eine Menge, deren Elemente geordnete Paare sind.
R Relation $\overset{\text{Def}}{\Longrightarrow} \exists_{A,B}(R \subseteq A \times B) \qquad (a,b) \in R$
Vorfeld $R = \{a \mid \exists_{b \in B}((a,b) \in R)\}$
Nachfeld $R = \{b \mid \exists_{a \in A}((a,b) \in R)\}$
Feld $R =$ Vorfeld $R \cup$ Nachfeld R
R Relation *in* A, wenn $R \subseteq A \times A$
R Relation *auf* A, wenn Vorfeld $R = A$ und Nachfeld $R \subseteq A$ ist
Statt $(a,b) \in R$ schreibt man auch aRb „a steht in Relation mit b“

Beispiel:

1. Heiratsrelation, A Menge aller Menschen (in A),
   $R = \{(a,b) \mid a, b \in A, a \text{ verheiratet mit } b\}$
2. $A = \mathbb{R}$ gewöhnliche Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$
3. $\emptyset$ leere Relation auf $\emptyset$
4. $f : A \to B$, Graph von f, $G(f) = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$
   $G(f)$ bestimmt f eindeutig; man kann f durch $G(f)$ definieren (mit $G(f)$ identifizieren):
   Eine Abbildung von A in B ist eine Relation $f \subseteq A \times B$, so daß es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt mit $(a,b) \in f$.

Eine Relation R auf einer Menge A heißt:

- **reflexiv** , wenn xRx für alle $x \in A$
- **symmetrisch** , wenn $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in A$
- **antisymmetrisch** , wenn $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$
- **transitiv** , wenn $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in A$

Beispiel:

1. Heiratsrelation: nicht reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv

3. $\emptyset$ hat aus formalen Gründen alle 4 beschriebenen Eigenschaften

2.1 Ordnungsrelationen

Eine Relation R auf einer Menge A heißt **Teilordnung** auf A, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
Eine Teilordnung R auf A heißt eine **vollständige Ordnung** auf A, wenn für alle $x, y \in A$ gilt: $xRy \vee yRx$
Statt R schreibt man für Ordungen meist $\leq$: $(x, y) \in R \iff xRy \iff x \leq y$
mit $\leq$ können alle Ungleichheitszeichen definiert werden

$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y, \quad x \geq y \iff y \leq x, \quad x > y \iff x \geq y \wedge x \neq y$

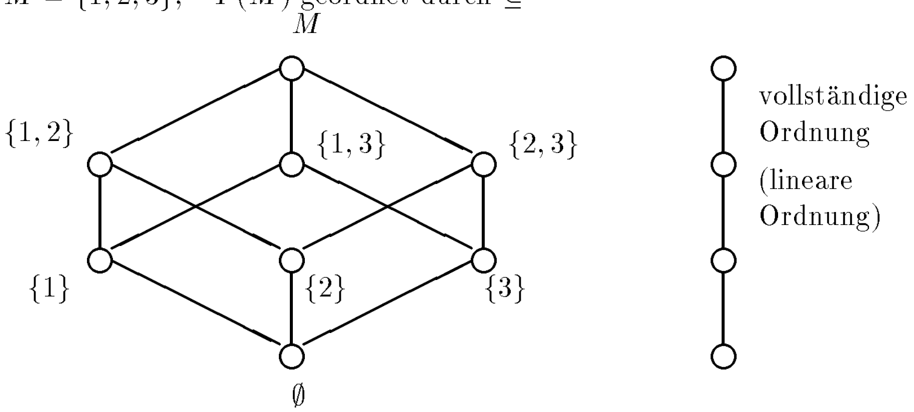
Man sagt: „A wird durch R teilweise bzw. vollständig geordnet“

Beispiel: Jedes Mengensystem S wird durch die Inklusion $\subseteq$ teilweise geordnet.

$$A \subseteq A, \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B, \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$$

Teilordungen endlicher Mengen lassen sich durch ihr **Ordnungsdiagramm** veranschaulichen:

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$, $\quad P(M)$ geordnet durch $\subseteq$



Größere Elemente stehen über kleineren. Es werden nur direkt benachbarte Elemente verbunden. Keine waagerechten Verbindungen.
A Menge der markierten Punkte. Definiere: $x \leq y \iff x = y$ oder es gibt einen aufsteigenden Weg von x nach y. $\leq$ ist Teilordnung auf A.

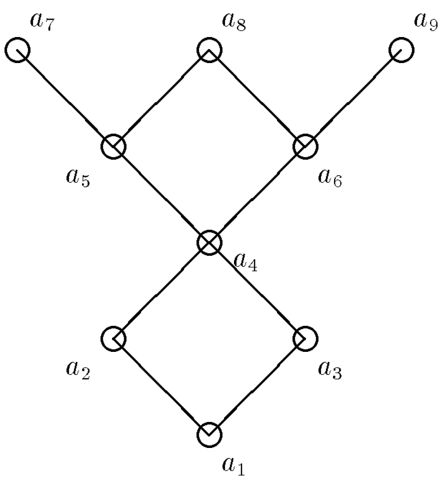
Es sei $\leq$ eine Teilordung auf A, $M \subseteq A$, $a \in A$. Dann heißt a:

- **obere Schranke** von M, wenn $m \leq a$ für alle $m \in M$
- **untere Schranke** von M, wenn $m \geq a$ für alle $m \in M$
- **größtes Element** von M, wenn $a \in M$ und $m \leq a$ für alle $m \in M$
- **kleinstes Element** von M, wenn $a \in M$ und $m \geq a$ für alle $m \in M$
- **Supremum** von M ($a = \sup M$), wenn a kleinste obere Schranke von M ist

- **Infimum** von M ($a = \inf M$), wenn a größte untere Schranke von M ist
- **maximales Element** von M, wenn $a \in M \wedge \forall_{m \in M}(m \not> a)$
- **minimales Element** von M, wenn $a \in M \wedge \forall_{m \in M}(m \not< a)$

Es existiert höchstens ein $\left\{ \begin{array}{c} \text{größtes Element} \\ \text{kleinstes Element} \\ \text{Supremum} \\ \text{Infimum} \end{array} \right\}$ von M

Beispiel:



$A = \{a_1, \ldots, a_9\} \quad A = M$
A hat kein größtes Element, kleinstes Element: a_1
maximale Elemente: a_7, a_8, a_9, minimales Element: a_1
$\sup\{a_5, a_6\} = a_8$, $\inf\{a_5, a_6\} = a_4$

2.2 Äquivalenzrelationen

Eine Relation R auf einer Menge A heißt eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

häufig $\sim$ statt R, $\quad a \sim b$ „a äquivalent b"

$a \sim a, \quad a \sim b \implies b \sim a, \quad a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c$

$K(a) = \{b \mid b \sim a, b \in A\}$ die durch a repräsentierte **Äquivalenzklasse**, häufig auch $[a]$ statt $K(a)$, $a \in K(a)$

Beispiel:

1. A Menge aller Menschen, $a \sim b \iff a$ hat das gleiche Geschlecht wie b
   2 Äquvalenzklassen: Frauen, Männer
2. $f : A \to B \quad a_1, a_2 \in A \quad a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2)$
   die von f auf A induzierte (erzeugte) Äquivalenzrelation
3. $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z} \quad a \sim b \iff m | a - b$
   Kongruenz modulo m. Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen **Restklassen modulo** m. Statt $a \sim b$ schreibt man $a \equiv b \bmod m$

Satz 2.1:

1. $a \sim b \iff K(a) = K(b)$
2. $K(a) \neq K(b) \implies K(a) \cap K(b) = \emptyset$

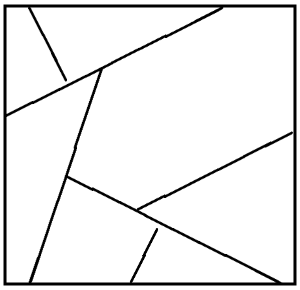
Beweis: 1. $K(a) = K(b) \implies a \in K(b),\ b \in K(a) \implies a \sim b$
Umkehrung: Es sei $a \sim b$

$$x \in K(a) \iff x \sim a \iff x \sim b \iff x \in K(b), \text{ also } K(a) = K(b)$$

2. Annahme: $\exists_c : c \in K(a) \cap K(b)$

$$c \sim a \wedge c \sim b \implies a \sim b \overset{1.}{\implies} K(a) = K(b) \quad \textbf{Widerspruch!}$$

A



A zerfällt in nicht leere disjunkte Äquivalenzklassen. Jede Zerlegung von A in nicht leere disjunkte Teilmengen heißt eine **Partition** von A

Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf A induziert eine Partition P auf A. Umgekehrt induziert jede Partition P auf A eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A.
Es sei $P = (M_i)_{i \in I}$ eine Partition von A.
Definiere: $a \sim b \iff \exists_{i \in I}(a \in M_i \wedge b \in M_i)$. Partitionen und Äquivalenzrelationen auf A entsprechen sich umkehrbar eindeutig.
$A/_\sim = \{K(a) \mid a \in A\}$ **Quotientenmenge** von A bzgl. $\sim$
Die Abbildung $p : A \to A/_\sim,\ a \mapsto K(a)$ heißt die **natürliche (kanonische) Surjektion** von A auf $A/_\sim$.

Kapitel 3

Algebraische Strukturen

Eine **Verknüpfung** auf einer Menge A ist eine Abbildung $\tau : A \times A \to A$.

Statt $\tau(a,b)$ schreibt man: $a\tau b$, meist $\begin{cases} a \cdot b, ab \text{ multiplikative Schreibweise} \\ a + b \text{ additive Schreibweise} \end{cases}$

τ heißt **assoziativ** , wenn $(a\tau b)\tau c = a\tau(b\tau c)$ für alle $a, b, c \in A$
τ heißt **kommutativ** , wenn $a\tau b = b\tau a$ für alle $a, b \in A$
Eine **algebraische Struktur** besteht aus einer nicht leeren Menge A und einer oder mehreren Verknüpfungen. Schreibweise: $(A, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$, kurz: A

Beispiel: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $\quad (P(A), \cap, \cup)$, $\quad (A^A, \circ)$

3.1 Homomorphismus und Isomorphismus

Es seien $(S, \tau_1, \dots, \tau_n)$ und $(T, \tau_1', \dots, \tau_n')$ algebraische Strukturen und $f : S \to T$. Dann heißt f ein **Homomorphismus** , wenn f mit allen Verknüpfungen verträglich ist, d.h wenn für alle $a, b \in S$ und für alle τ_i bzw. τ_i' gilt: $f(a\tau_i b) = f(a)\tau_i' f(b)$.
Ist f surjektiv, dann heißt T **homomorphes Bild** von S.
Ist f bijektiv, dann heißt f ein **Isomorphismus** und T **isomorph** zu S,
in Zeichen: $S \simeq T$.
Isomorphe Strukturen werden häufig als gleich angesehen. Sie gehen formal ineinander über, wenn man dieselben Symbole für die Verknüpfung, für a und $f(a)$ verwendet. Homomorphismen sind die strukturerhaltenden Abbildungen algebraischer Strukturen.

Satz 3.1: Es seien $(S, \cdot)$ und $(T, \cdot)$ algebraische Strukturen und f ein Homomorphismus von S auf T. Dann gilt:

1. Ist $\cdot$ assoziativ auf S, dann auch auf T
2. Ist $\cdot$ kommutativ auf S, dann auch auf T

3. Hat S ein **neutrales Element**, d.h. ein Einselement e mit
   $e \cdot a = a \cdot e = a$ für alle $a \in S$,
   dann ist $f(e)$ neutrales Element von T.
4. Haben S und T eine weitere Verknüpfung $+$ und gelten die Distributivgesetze,
   d.h. $a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c), \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in S$,
   dann gelten die Distributivgesetze auch in T.

Beweis: 1.

$$\begin{aligned}(f(a) \cdot f(b)) \cdot f(c) &= f(a \cdot b) \cdot f(c) = f((a \cdot b) \cdot c) = f(a \cdot (b \cdot c)) \\ &= f(a) \cdot f(b \cdot c) = f(a) \cdot (f(b) \cdot f(c))\end{aligned}$$

2.,4. entsprechend

3. $f(e) \cdot f(a) = f(e \cdot a) = f(a) \cdot f(e) = f(a \cdot e) = f(a)$
   $\Longrightarrow f(e)$ ist neutral in T

Satz 3.2: Die Isomorphie $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge algebraischer Strukturen

Beweis: S, S_1, S_2, S_3 algebraische Strukturen, Verknüpfung $\cdot$

1. Reflexivität: $S \simeq S$, Isomorpismus $\mathrm{id}_S : S \to S$
2. Symmetrie: Es sei $S_1 \simeq S_2$. Zu zeigen: $S_2 \simeq S_1$
   Es existiert Isomorphismus $f : S_1 \to S_2$.
   Es existiert $f^{-1} : S_2 \to S_1; \quad a', b' \in S_2; \quad a' = f(a),\ b' = f(b); \quad a, b \in S_1$

   $$f^{-1}(a' \cdot b') = f^{-1}(f(a) \cdot f(b)) = f^{-1}(f(a \cdot b)) = a \cdot b = f^{-1}(a') \cdot f^{-1}(b')$$

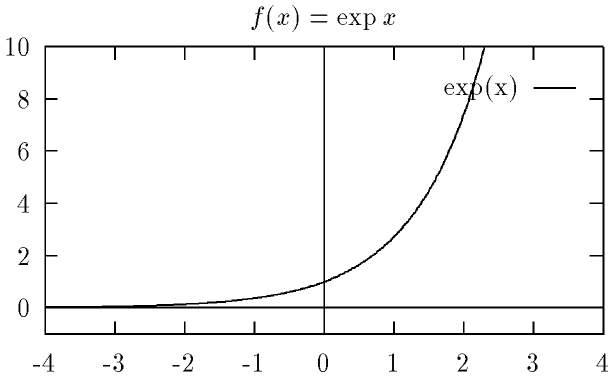
   f^{-1} ist Isomorphismus. Also $S_2 \simeq S_1$
3. Transitivität: $S_1 \simeq S_2 \wedge S_2 \simeq S_3$. Zu zeigen: $S_1 \simeq S_3$
   Es existieren Isomorphismen $f_1 : S_1 \to S_2,\ f_2 : S_2 \to S_3$
   $f_2 \circ f_1 : S_1 \to S_3$ Bijektion

   $$\begin{aligned}f_2 \circ f_1(a \cdot b) &= f_2(f_1(a \cdot b)) = f_2(f_1(a) \cdot f_1(b)) = f_2(f_1(a)) \cdot f_2(f_1(b)) \\ &= (f_2 \circ f_1)(a) \cdot (f_2 \circ f_1)(b)\end{aligned}$$

   $f_2 \circ f_1$ ist Isomorpismus, $S_1 \simeq S_3$

Nebenresultat:
1. f Isomorphismus $\Longrightarrow f^{-1}$ Isomorphismus
2. f, g Isomorphismen $\Longrightarrow f \circ g$ Isomorphismus
3. f, g Homomorphismen $\Longrightarrow f \circ g$ Homomorphismus

Beispiel: $(\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}_+, \cdot), \quad \mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
Isomorphismus $x \mapsto a^x, \quad a > 1 \qquad x, y \in \mathbb{R}; \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$



3.2 Halbgruppe

Eine **Halbgruppe** (H, τ) ist eine algebraische Struktur mit einer assoziativen Verknüpfung τ. Ist τ kommutativ, dann heißt die Halbgruppe kommutativ oder **abelsch**. $|H|$ nennt man die Ordnung der Halbgruppe.

Beispiel:
1. $M^M = \{f \mid f : M \to M\}$, Komposition $\circ$, $M \neq 0$
   $(M^M, \circ)$ ist Halbgruppe, nicht abelsch für $|M| \geq 3$
2. $(P(M), \cap)$, $(P(M), \cup)$ abelsche Halbgruppen
3. $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +)$ abelsche Halbgruppen

Im folgenden sei $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe
$e \in H$ heißt **neutrales Element (Einselement)**, wenn $e \cdot a = a \cdot e = a$ für alle $a \in H$
Nullelement bei additiver Schreibweise, 0: $a + 0 = 0 + a = a$
H hat höchstens ein neutrales Element.
Annahme: $e \neq e'$ neutrale Elemente $\Longrightarrow$ $e \cdot e' = e' = e$ **Widerspruch!**

Beispiel: $(P(M), \cap)$, Einselement: M; $(P(M), \cup)$, Einselement: $\emptyset$
$(M^M, \circ)$, Einselement: id_M

Ein **Monoid** ist eine Halbgruppe mit neutralem Element.
Es sei $(H, \cdot)$ Monoid; $a, b \in H$, Einselement e
b heißt **invers** zu a, wenn $a \cdot b = b \cdot a = e$.
a hat höchstens ein inverses Element.
Annahme: $b \neq b'$ invers zu a : $b' = e \cdot b' = (b \cdot a) \cdot b' = b \cdot (a \cdot b') = b \cdot e = b$ **Widerspruch!**
multiplikative Schreibweise: $b = a^{-1}$; $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
additive Schreibweise: $b = -a$; $a + (-a) = (-a) + a = 0$
a^{-1} bzw. $-a$ ist das inverse Element zu a

a heißt **invertierbar** oder eine **Einheit** von H, wenn a^{-1} existiert.
e ist stets invertierbar: $e^{-1} = e$.
In $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(P(M), \cup)$, $(P(M), \cap)$ sind nur die neutralen Elemente invertierbar:

$m \cdot n = 1 \Rightarrow m = n = 1, \quad A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = B = \emptyset, \quad A \cap B = M \Rightarrow A = B = M$

In $(\mathbb{Z}, +)$ ist jedes Element invertierbar.

a invertierbar $\Longrightarrow$ a^{-1} invertierbar, $(a^{-1})^{-1} = a$
a, b invertierbar $\Longrightarrow$ $a \cdot b$ invertierbar, $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = e \qquad (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}b = e$

Definition: Es sei $n \in \mathbb{N}$:

multiplikative Schreibw.: $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{–Faktoren}}$;

$a^{-n} := (a^{-1})^n$, wenn a^{-1} existiert; $\quad a^0 := e$

additive Schreibw.: $na := a + a + \cdots + a; \quad (-n)a := n(-a); \quad 0a := 0$

Es gelten die **Potenzrechenregeln**:

multiplikative Schreibweise:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$, wenn $ab = ba$

additive Schreibweise:

1. $ma + na = (m+n)a$
2. $n(ma) = (nm)a$
3. $n(a+b) = na + nb$

für $m, n \geq 0$;
sogar für $m, n \in \mathbb{Z}$, wenn a, b invertierbar

3.3 Gruppe

Eine **Gruppe** G ist eine Halbgruppe mit neutralem Element, in der jedes Element invertierbar ist.

Gruppenaxiome:

1. $(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in G$
2. Es existiert ein neutrales Element $e \in G$ mit $ea = ae = a$ für alle $a \in G$
3. Zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in G$ mit $a^{-1}a = aa^{-1} = e$

Eine **Untergruppe** U der Gruppe G ist eine Teilmenge $U \subseteq G$, die mit der von G auf U eingeschränkten Verknüpfung selbst eine Gruppe bildet.

Untergruppenkriterium:

1. U ist multiplikativ abgeschlossen, d.h $\forall_{a,b}(a, b \in U \Rightarrow a \cdot b \in U)$
2. $e \in U$
3. $\forall_a(a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U)$

Jede Gruppe G hat 2 triviale Untergruppen: $\{e\}$, G

Beispiel:

1. Die additiven Gruppen von $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$:
   $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ $\quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
   $m \in \mathbb{N}: \quad m\mathbb{Z} = \{0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, \pm \ldots\}$
   $(m\mathbb{Z}, +)$ ist Untergruppe von $\mathbb{Z}$.
2. Die multiplikativen Gruppen von $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$:
   $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad (\mathbb{Q}_0, \cdot)$, $(\mathbb{R}_0, \cdot)$, $(\mathbb{C}_0, \cdot)$ $\quad \mathbb{Q}_0 \subseteq \mathbb{R}_0 \subseteq \mathbb{C}_0$
3. $E(H)$ Menge der Einheiten (invertierbaren Elemente) des Monoids $(H, \cdot)$
   $(E(H), \cdot)$ ist eine Gruppe, die **Einheitengruppe** von H
4. Es sei a Element der Gruppe $(G, \cdot)$
   $[a] := \{a^0 = e, a^{\pm 1}, a^{\pm 2}, \ldots\}$ heißt **die von a erzeugte zyklische Untergruppe von G**

G heißt **zyklisch** , wenn $G = [a]$ für ein $a \in G$. Jede zyklische Gruppe ist abelsch. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine zyklische Gruppe: $\mathbb{Z} = [1]$

Es sei G Gruppe, $a \in G$. Die **Ordnung** von a:
$\operatorname{ord} a = \min\{n | n \in \mathbb{N} \wedge \exists_{m \in Z}(0 \leq m < n,\ a^m = a^n)\}$ bzw. $= \infty \quad \operatorname{ord} e = 1,\ e^1 = e^0$
Es sei $\operatorname{ord} a = k,\ k < \infty \quad a^k = a^m$ für ein $m \in \mathbb{Z},\ 0 \leq m < k$
$\Longrightarrow\ a^{k-m} = a^0 = e, \quad k - m \in \mathbb{N} \Longrightarrow m = 0, \quad a^k = e = a^{\operatorname{ord} a}$

$$a^0 = e, a^1, a^2, \ldots, a^{k-1}, a^k = a^0, a^{k+1} = a^1, a^{k+2} = a^2, \ldots, a^{2k} = a^0, a^{2k+1} = a^1, \ldots$$

$$a^0 = e, a^{-1} = a^{k-1}, a^{-2} = a^{k-2}, \ldots, a^{-k} = a^0, a^{-k-1} = a^{k-1}, \ldots$$

$$\Longrightarrow [a] = \{a^0 = e, a^1, a^2, \ldots, a^{k-1}\}, \quad |[a]| = k = \operatorname{ord} a$$

Satz 3.3: Es sei f ein Homorphismus von der Gruppe $(G, \cdot)$ in die algebraische Struktur $(A, \cdot)$. Dann gilt:

1. $f(G)$ ist eine Gruppe. Dabei ist $f(e)$ das Einselement in $f(G)$ und $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.
2. Es sei $H \subseteq A$ eine Gruppe. Dann ist das Urbild $f^{-1}(H)$ Untergruppe von G.
3. G abelsch $\Longrightarrow f(G)$ abelsch,
   $G = [a]$ zyklisch $\Longrightarrow f(G) = [f(a)]$ zyklisch

Beweis:

1. Wir zeigen $a', b' \in f(G) \implies a' \cdot b' \in f(G)$
   Es existieren $a, b \in G$ mit $a' = f(a)$, $b' = f(b)$
   $a' \cdot b' = f(a) \cdot f(b) = f(ab) \in f(G)$
   f wird surjektiv, wenn der Zielbereich auf $f(G)$ eingeschränkt wird.
   Satz 1: $\cdot$ assoziativ in $G \implies \cdot$ assoziativ in $f(G)$
   zu 3.: $\cdot$ kommutativ in $G \implies \cdot$ kommutativ in $f(G)$
   $f(e) \cdot f(a) = f(ea) = f(a), \quad f(a) \cdot f(e) = f(ae) = f(a)$
   $f(e)$ ist Einselement in $f(G)$. (Satz 1)
   $f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e), \quad f(a^{-1}) \cdot f(a) = f(a^{-1}a) = f(e)$
   $f(a^{-1})$ ist invers zu $f(a)$, d.h. $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$
   Also ist G eine Gruppe

2. Es sei H Untergruppe von $f(G)$
   $a, b \in f^{-1}(H)$, d.h. $f(a), f(b) \in H$
   $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \in H \implies a \cdot b \in f^{-1}(H)$
   $f(e) \in H \implies e \in f^{-1}(H)$
   $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1} \in f^{-1}(H)$
   Also ist $f^{-1}(H)$ Untergruppe von G

3. $G = [a] = \{a^0, a^{\pm 1}, a^{\pm 2}, \ldots\}; \quad f(a^n) = (f(a))^n$

   $f(a^{-n}) = f((a^{-1})^n) = (f(a^{-1}))^n = ((f(a)^{-1})^n = (f(a))^{-n}$

   $f(G) = \{(f(a))^0, (f(a))^{\pm 1}, \ldots\} = [f(a)]$

Es seien G, G' Gruppen, Einselemente e bzw. e', $f : G \to G'$ Homomorphismus
$f^{-1}(\{e\})$ ist Untergruppe von G, der **Kern von f** , in Zeichen: Kern f

Die symmetrische Gruppe
$M \neq \emptyset$, $(M^M, \circ)$ ist Halbgruppe
Die Einheitengruppe $S(M)$ von M^M besteht genau aus den Bijektionen (Permutationen) von M auf sich. Sie heißt die **symmetrische Gruppe von** M.
$|S(M)| = |M|!$
Wir setzen $S_n = S(\{1, 2, \ldots, n\})$
S_n heißt die **symmetrische Gruppe vom Grad** n.
Übung: $|M_1| = |M_2| = n \Rightarrow S(M_1)) \simeq S(M_2) \simeq S_n$
Eine Permutation $f \in S_n$ heißt ein **Zyklus** der Länge $r > 1$, wenn es Zahlen $a_1, \ldots, a_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, so daß gilt:

$$f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \ldots, f(a_r) = a_1; \quad \text{sonst: } f(x) = x$$

Schreibweise: $f(a_1, a_2, \ldots, a_r) \quad [= (a_2, \ldots, a_r, a_1)]$
Das Produkt disjunkter Zyklen f, g ist kommutativ, $f \circ g = g \circ f$
Zyklus der Länge 1: $(a) = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}} = \mathrm{id}$

Satz 3.4: Jede Permutation $f \in S_n$ läßt sich als Komposition disjunkter Zyklen schreiben. Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren und eventuelle Zyklen der Länge 1.

Beispiel: $f \in S_8$ $\qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 8 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$$f = (1\,3\,5\,8) \circ (2\,6) \circ (4) \circ (7) = (1\,3\,5\,8) \circ (2\,6)$$

Beweis: Es sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $f^k(1) = f^l(1)$, $0 \leq l < k$.
$f^{k-l}(1) = f^0(1) = 1 \Rightarrow l = 0$
Setze $f_1 = (f^0(1), f^1(1), \ldots, f^{k-1}(1))$. Wähle $j \notin f_1$. Verfahre mit j wie mit 1. Bilde $f_2 = (f^0(j), f^1(j), \ldots, f^{k-1}(j))$. f_1, f_2 disjunkt, da jedes Element eines Zyklus den ganzen Zyklus eindeutig bestimmt. Fahre fort bis $\{1, \ldots, n\}$ ausgeschöpft ist.
$f = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_r$ $\qquad$ Eindeutigkeit $\surd$

Eine **Transposition** ist ein Zyklus der Länge 2
$t = (a, b)$, $\quad t$ vertauscht a und b, $\quad t^2 = \mathrm{id}$, $\quad \mathrm{ord}\, t = 2$, $\quad t^{-1} = t$

Satz 3.5: Jede Permutation $f \in S_n$ $(n \geq 2)$ ist Komposition von Transpositionen

$$f = t_q \circ t_{q-1} \circ t_{q-2} \circ \cdots \circ t_1$$

Bei jeder solchen Darstellung hat q dieselbe Parität.
(gerade oder ungerade)

Beweis: $\mathrm{id} = (a, b) \circ (a, b)$; $\quad$ Zyklus $g = (a_1, \ldots, a_r)$, $r \geq 2$
$g = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ (a_3, a_4) \circ \cdots \circ (a_{r-1}, a_r)$ $\quad r - 1$ Transpositionen
Zyklenzerlegung $f = (a_1, \ldots, a_r)(b_1, \ldots, b_s) \ldots (c_1, \ldots, c_m)$

f ist Komposition von $\underbrace{r - 1 + s - 1 + \cdots + m - 1}_{N(f)\text{: „Norm“ von } f\text{, eindeutig bestimmt}}$ Transpositionen

Wir untersuchen, wie sich $N(f)$ ändert, wenn man f mit einer Transposition $t = (ab)$ multipliziert. $N(tf) = ?$

1. Fall: a, b liegen in demselben Zyklus von f:
$(ab) \circ (a, d_1, \ldots, d_h, b, e_1 \ldots, e_k) = (a, d_1, \ldots, d_h) \circ (b, e_1, \ldots, e_k) \qquad (*)$
$N(tf) = N(f) - (h + k + 2 - 1) + k + h = N(f) - 1$

2. Fall: a, b liegen in verschiedenen Zyklen von f:
Multipliziere $(*)$ mit (a, b).
$(a, b) \circ (a, d_1, \ldots, d_h) \circ (b, e_1, \ldots, e_k) = (a, d_1, \ldots, d_h, b, e_1, \ldots, e_k)$
$N(tf) = N(f) - k - h + k + h + 1 = N(f) + 1$

Komposition von f mit einer Transposition ändert die Parität von $N(f)$
$f = f_q \circ t_{q-1} \circ \cdots \circ t_1$
$N(t_1) = 1$ ungerade, $N(t_2 \circ t_1)$ gerade, $N(t_3 \circ t_2 \circ t_1)$ ungerade, ...
Parität von q = Parität von $N(f)$ eindeutig bestimmt durch f.

Eine Permutation $f \in S_n$ $(n \geq 2)$ heißt **gerade**, wenn f Komposition einer geraden Anzahl von Transpositionen ist, andernfalls heißt f **ungerade**.
f gerade, g gerade $\Rightarrow f \circ g$ gerade; $\quad$ id $= (ab)(ab)$ gerade
$f = t_1 \circ \cdots \circ t_q \Rightarrow f^{-1} = t_q^{-1} \circ \cdots \circ t_1^{-1} = t_q \circ \cdots \circ t_1 \quad f$ gerade $\Rightarrow f^{-1}$ gerade

Wir definieren das **Signum von** $f \in S_n$: $\operatorname{sgn} f = \begin{cases} 1, \text{ wenn } f \text{ gerade} \\ -1, \text{ wenn } f \text{ ungerade} \end{cases}$

$\operatorname{sgn}(f \circ g) = \operatorname{sgn}(f) \cdot \operatorname{sgn}(g) \qquad \operatorname{sgn} : S_n \to (\mathbb{R}_0, \cdot)$ Homomorphismus
Die geraden Permutationen bilden eine Untergruppe von S_n, die **alternierende Gruppe** A_n vom Grad n. $A_n = \operatorname{Kern} \operatorname{sgn} = \{f \in S_n \mid \operatorname{sgn} f = 1\}$

3.4 Ring

Ein **Ring** ist eine algebraische Struktur $(R, +, \cdot)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
2. $(R, \cdot)$ ist Halbgruppe
3. Es gelten die Distributivgesetze, d.h. $a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc$

Der Ring heißt kommutativ, wenn die Multiplikation kommutativ ist.
0 neutrales Element bzgl. $+$; 1 neutrales Element bzgl. $\cdot$, wenn vorhanden.
Ein **Unterring** U ist eine Teilmenge des Ringes R, die mit den von R auf U eingeschränkten Verknüpfungen selbst einen Ring bildet.
Unterringkriterium

1. $a, b \in U \implies a + b, ab \in U$ für alle $a, b \in U$
2. $0 \in U$
3. $a \in U \implies -a \in U$

Triviale Unterringe: $R, \{0\}$

Beispiel: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$; $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
$m\mathbb{Z} = \{0, \pm m, \pm 2m, \ldots\}$ Unterring von $\mathbb{Z}$
Es sei $(G, +)$ abelsche Gruppe. Setze $a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in G$;
$(G, +, \cdot)$ ist ein Ring.

Satz 3.6: Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $(A, +, \cdot)$ eine algebraische Struktur. Ferner sei $f : R \to A$ ein Homomorphismus, d.h $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$. Dann ist das homomorphe Bild $f(R)$ wieder Ring. Dabei ist $f(0)$ Nullelement von $f(R)$ und $f(1)$ Einselement von $f(R)$, wenn 1 das Einselement von R ist. Ist R kommutativ, dann auch $f(R)$. Ist H ein Unterring von $f(R)$, dann ist $f^{-1}(H)$ ein Unterring von R.

Beweis: wie zu Satz 3.3 (Seite 20)

3.5 Körper

$(R, +, \cdot)$ Ring, $R \setminus \{0\} = R_0$
Ein Ring R heißt ein **Körper**, wenn $(R_0, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Beispiel: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

K Körper, Nullelement 0, neutral bzgl. $+$; Einselement 1, neutral bzgl. $\cdot$

Behauptung: $a, b \in K$ Körper, $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Beweis: „$\Longleftarrow$“ etwa $a = 0:\quad ab = (0+0)b = 0b + 0b \Rightarrow 0 = 0b$ gilt so auch im Ring
„$\Longrightarrow$“ Es sei $ab = 0$ etwa $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0 \Rightarrow b = 0$
In Ringen kann $ab = 0$ sein mit $a, b \neq 0$. Solche Elemente heißen **Nullteiler** des Ringes.

Kleinster Körper $\mathbb{Z}_2 = F_2 = \{0, 1\}$

Verknüpfungstafeln: $\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad 1 + 1 = 0;\ 1 = -1$

K endlich: $n \cdot 1 = 1 + \cdots + 1 \quad n$ Summanden
Es existiert m mit $m \cdot 1 = n \cdot 1,\ 1 < m < n \Rightarrow (n - m) \cdot 1 = 0$

Definition: Die **Charakteristik** $\chi(K)$ des Körpers ist wie folgt definiert:
$\chi(K) = 0$, wenn $n \cdot 1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$\chi(K) = p$, wenn $p = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1 = 0\}$ existiert

Behauptung: Ist $\chi(K) = p \neq 0$, dann ist p Primzahl

Beweis: Es sei $\chi(K) = p \neq 0 \quad 1 + \cdots + 1 = 0$, p Summanden
Annahme: p keine Primzahl $p = k \cdot l,\ 1 < k, l < p$

$$p \cdot 1 = \underbrace{\underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{l \cdot 1} + \cdots + \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{l \cdot 1}}_{k \cdot (l \cdot 1)} = \underbrace{l \cdot 1 + \cdots + l \cdot 1}_{k \text{ Summanden}} = \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{k \cdot 1} l \cdot 1$$

$$= (k \cdot 1) \cdot (l \cdot 1) = 0 \Longrightarrow \text{etwa } k \cdot 1 = 0$$

Widerspruch! Also ist p Primzahl

Polynome
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, alle $a_i \in K$
Polynome werden als Ausdrücke dieser Form definiert. f heißt Polynom über K
$K[x]$ = Menge aller Polynome über K
Polynome können wie üblich multipliziert und addiert werden.

$g(x) = b_n x^n + \cdots + b_0 \qquad g = f \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_0 = b_0$
$(K[x], +, \cdot)$ ist ein Ring, Polynomring von K
neutrales Element bzgl. $+$ ist das Nullpolynom f_0, alle Koeffizienten $= 0$; Einselement: $f_e = 1$; $\quad f, g \neq f_0 \Rightarrow f \cdot g \neq f_0$;
$-f(x) = -a_n x^n - \cdots - a_0$ additives Inverses von f
$K[x]$ ist kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Einselement (Integritätsbereich)
Jedem Polynom $f \in K[x]$ ist eine Abbildung $\widetilde{f} : K \to K$ zugeordnet $a \in K,\ a \mapsto f(a)$
$f_1 = x,\ f_2 = x^2 \in \mathbb{Z}_2[x],\ f_1 \neq f_2$, aber $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$, da in $\mathbb{Z}_2$ stets $a = a^2$
Man kann zeigen: $|K| = \infty,\ f_1 \neq f_2 \Rightarrow \widetilde{f_1} \neq \widetilde{f_2}$

Kapitel 4

Vektorräume

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ Symbole für Vektoren
V abelsche Gruppe, Verknüpfung $+$, K Körper

Definition: Ein **Vektorraum** besteht aus einer abelschen Gruppe V, einem Körper K und einer Multiplikation $\cdot$, die jedem Paar $(\lambda, \mathfrak{a})$ mit $\lambda \in K$ und $\mathfrak{a} \in V$ eindeutig ein Element $\lambda \cdot \mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} \in V$ zuordnet, so daß folgende Axiome erfüllt sind:
Vektorraumaxiome: für $\lambda, \mu \in K$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$

$$V_1 : (\lambda\mu)\mathfrak{a} = \lambda(\mu\mathfrak{a})$$

$$V_2 : \lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}$$

$$V_3 : (\lambda + \mu)\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}$$

$$V_4 : 1 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

Die Elemente von V heißen **Vektoren**, die Elemente von K **Skalare**.
„V ist Vektorraum über K", „V ist K–Vektorraum". In Zeichen: $(V, K, \cdot)$, kürzer: (V, K) oder V
0 ist neutrales Element von K,
$\mathfrak{o}$ **(Nullvektor)** ist neutrales Element von V
reeller Vektorraum: $K = \mathbb{R}$, komplexer Vektorraum: $K = \mathbb{C}$
Ersetzt man in der Definition K durch einen Ring R mit Einselement, dann kommt man zum Begriff des **Moduls** V über R.

Beispiel:

1. $M \neq \emptyset$, K Körper, $K^M = \{f \mid f : M \to K\}$, $f_1, f_2 \in K^M$
   Definiere: $f_1 + f_2$ durch $x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$ punktweise Addition;
   λf durch $x \mapsto \lambda f(x)$
   K^M ist abelsche Gruppe bzgl. $+$
   Nullelement ist die **Nullfunktion** f_0, $f_0(x) = 0$ für alle $x \in M$
   $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_2(x) + f_1(x) = (f_2 + f_1)(x)$ für alle $x \implies f_1 + f_2 = f_2 + f_1$ (Kommutativgesetz). Ebenso folgt das Assoziativgesetz.
   Invers zu f ist $-f$, $x \to -f(x)$

   $$((\lambda\mu)f)(x) = (\lambda\mu)f(x) = \lambda(\mu f(x)) = \lambda(\mu f)(x) \text{ für alle } x \in M$$

$\Longrightarrow (\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$, Axiom V_1

$(\lambda(f_1 + f_2))(x) = \lambda(f_1(x) + f_2(x)) = \lambda f_1(x) + \lambda f_2(x) = (\lambda f_1 + \lambda f_2)(x)$

für alle $x \Longrightarrow \lambda(f_1 + f_2) = \lambda f_1 + \lambda f_2$, Axiom V_2

Entsprechend folgt Axiom V_3
$1 \cdot f = f \Longrightarrow$ Axiom V_4
K^M ist Vektorraum über K. Ebenso folgt, daß V^M Vektorraum über K ist, wenn V ein Vektorraum über K ist.

2. K Körper, $V = K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K\}$
Standardraum der Dimension n über K. Man kann die Elemente von K^n als Abbildungen $f : M \to K$ auffassen.
$M = \{1, 2, \ldots, n\}$, $f(i) = x_i$, für $i = 1, \ldots, n$.
$K^n = K^M$. Damit wird K^n Vektorraum über K gemäß 1.

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

d.h. Addition und Skalarmultiplikation erfolgen koordinatenweise

$\mathfrak{o} = (0, \ldots, 0), \qquad -(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$

Schreibt man die Tupel nicht als Zeilen-, sondern als Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dann erhalten wir den Raum K_n. Häufig wird zwischen K^n und K_n nicht unterschieden.

3. $K^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in K\}$ **Folgenraum** über K. Die Elemente werden nicht nur in diesem Fall, sondern allgemein für K^I gern als Tupel geschrieben: $(x_i)_{i \in I}$ bzw. (x_i)

4. K_1, K_2 Körper, $K_1 \subseteq K_2$. K_2 ist Vektorraum über K_1
Insbesondere ist $\mathbb{R}$ Vektorraum über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Q}$. Die Elemente von K_1 können sowohl als Skalare als auch als Vektoren aufgefaßt werden!

Satz 4.1:
1. $\lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \iff \lambda = 0 \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$
2. $(-\lambda)\mathfrak{a} = -(\lambda\mathfrak{a})$

Beweis:
1. „$\Longleftarrow$“ $\lambda = 0: \quad 0\mathfrak{a} + 0\mathfrak{a} \overset{V_3}{=} (0+0)\mathfrak{a} = 0\mathfrak{a} \Longrightarrow 0\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$
   $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}: \quad \lambda\mathfrak{o} + \lambda\mathfrak{o} \overset{V_2}{=} \lambda(\mathfrak{o} + \mathfrak{o}) = \lambda\mathfrak{o} \Longrightarrow \lambda\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$
   „$\Longrightarrow$“ Es sei $\lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, ferner $\lambda \neq 0$. Multipliziere mit λ^{-1}
   $\lambda^{-1}(\lambda\mathfrak{a}) \overset{V_1}{=} (\lambda^{-1}\lambda)\mathfrak{a} = 1\mathfrak{a} \overset{V_4}{=} \mathfrak{a} = \lambda^{-1}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$
2. $(-\lambda)\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{a} = (-\lambda + \lambda)\mathfrak{a} = 0\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \Longrightarrow (-\lambda)\mathfrak{a} = -(\lambda\mathfrak{a})$

Ein **Unterraum** U eines Vektorraumes V ist eine Teilmenge von V, die mit den von V auf U eingeschränkten Operationen $+, \cdot$ selbst ein Vektorraum ist.

Satz 4.2: Unterraumkriterium
Eine nicht leere Teilmenge U von V ist genau dann Unterraum von V, wenn für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \lambda$ gilt:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U \implies \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in U; \quad \mathfrak{a} \in U \implies \lambda\mathfrak{a} \in U$$

Zusammengefaßt:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U \wedge \lambda, \mu \in K \Rightarrow \underbrace{\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}}_{\text{Linearkombination v. } \mathfrak{a},\, \mathfrak{b}} \in U \text{ für alle } \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \lambda, \mu$$

Beweis: Die Bedingungen sind notwendig. Es sind nur Axiome nachzuweisen, die eine Existenzforderung erheben.
U sei Untergruppe von V bzgl. $+$:

$$\mathfrak{a} \in U, 0 \in K \implies 0\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \in U \qquad \mathfrak{a} \in U, -1 \in K \implies (-1)\mathfrak{a} = -\mathfrak{a} \in U$$

Keine Existenzforderung in $V_1 - V_4$

Triviale Unterräume von V: V, $\{\mathfrak{o}\}$ Nullraum
Unterräume U_1, U_2 heißen **fremd**, wenn $U_1 \cap U_2 = \{\mathfrak{o}\}$

Beispiel: Es sei I ein reelles Intervall, $|I| > 1$, auch $I = \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^I$ Raum der reellen Funktionen auf I
$C^r(I) = \{f \mid f \in \mathbb{R}^I,\ f\ r\text{–mal stetig differenzierbar}\}$
$(f+g)^{(r)} = f^{(r)} + g^{(r)}, \quad (\lambda f)^{(r)} = \lambda f^{(r)}$
$C^r(I)$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^I$ $\qquad C^0(I) \supseteq C^1(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \dots$
$C^0(I) = C(I)$ Raum der stetigen Funktionen auf I
$C^\infty(I) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(I)$ Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf I
$\mathbb{R}[x]$ Raum der reellen Polynome, d.h. der Abbildungen der Form:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$
$\mathbb{R}[x]$ ist Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R})$; auch von $C^\infty(I)$, wenn die Polynome auf I eingeschränkt werden
$\mathbb{R}_n[x]$ Raum der Polynome mit Grad $\leq n$

Satz 4.3: Der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume ist ein Unterraum.

Beweis: Es sei S ein System von Unterräumen von V. $D = \bigcap S$, $\mathfrak{o} \in D$, also $D \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in D &\implies \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U \text{ für alle } U \in S \\ &\implies \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} \in U \text{ für alle } \lambda, \mu \in K,\ U \in S \\ &\implies \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} \in D \text{ für alle } \lambda, \mu \in K \end{aligned}$$

Definition: Es sei M eine Teilmenge des Vektorraumes V.
$[M] = \bigcap\{U \mid U \supseteq M,\ U \text{ ist Unterraum von } V\}$ heißt der **von M erzeugte oder aufgespannte Unterraum**.

$[M]$ ist der kleinste Unterraum der M enthält. $U \supseteq M \implies U \supseteq [M]$
$M = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$, $[M] = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$; $[\emptyset] = \{\mathfrak{o}\}$ Nullraum

Definition: $M \subseteq V$ Der Vektor $\mathfrak{a}$ heißt eine **Linearkombination von** M, wenn es endlich viele Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in M$ und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gibt mit: $\mathfrak{a} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{a}_n$

Satz 4.4: Der von einer nicht leeren Teilmenge M eines Vektorraumes V aufgespannte Unterraum besteht genau aus den Linerarkombinationen von M.

Beweis: M^* Menge der Linearkombinationen von M. M^* ist Unterraum.
$M^* \supseteq M \Rightarrow M^* \supseteq [M]$ Andererseits $[M] \supseteq M^*$. Also $M^* = [M]$

Man nennt $[M]$ auch die lineare Hülle von M.

Es sei $(U_i)_{i \in I}$ ein System von Unterräumen

$\sum\limits_{i \in I} U_i = \left[\bigcup\limits_{i \in I} U_i\right]$ heißt der **Summenraum** der U_i, $i \in I$

$\sum_{i \in I} U_i$ besteht aus allen Summen der Form:
$\mathfrak{a} = \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i \in U_i$, $\mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{o}$ nur für endlich viele $i \in I$
Ist diese Darstellung für alle $\mathfrak{a} \in \sum_{i \in I} U_i$ eindeutig, dann heißt die Summe der Unterräume **direkt**.

In Zeichen: $\bigoplus\limits_{i \in I} U_i$ bzw. $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$

Satz 4.5: Es seien U_1, U_2 Unterräume. Genau dann ist $U_1 + U_2$ eine direkte Summe, wenn $U_1 \cap U_2 = \{\mathfrak{o}\}$.

Beweis: Es sei $U_1 \cap U_2 = \{\mathfrak{o}\}$.
$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1' + \mathfrak{a}_2'$; $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1' \in U_1$; $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2' \in U_2$
$\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1' = \mathfrak{a}_2' - \mathfrak{a}_2 \in U_1 \cap U_2 \implies \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2'$
Die Summe ist direkt. Bedingung ist notwendig
Allgemein $V = \bigoplus U_i \implies U_i \cap U_j = \{\mathfrak{o}\}$ für alle $i \neq j$
Umkehrung gilt nicht bei mehr als 2 Unterräumen.

Kapitel 5

Basis und Dimension

Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ eines Vektorraumes V heißen **linear unabhängig** oder **frei**, wenn der Nullvektor nur die triviale Darstellung als Linearkombination der Vektoren a_i zuläßt, d.h. wenn aus $\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ stets folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$
Eine Teilmenge $M \subseteq V$ heißt linear unabhängig oder frei, wenn je endlich viele verschiedene Vektoren aus M linear unabhängig sind.
linear abhängig = nicht linear unabhängig
$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ linear abhängig $\Longrightarrow$ es existiert $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nicht alle $= 0$
mit $\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$
$\emptyset$ linear unabhängig, $\{\mathfrak{o}\}$ linear abhängig,
$\{\mathfrak{a}\}$ linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$,
M linear unabhängig $\wedge\, M' \subseteq M \Longrightarrow M'$ linear unabhängig

Satz 5.1: Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ $(n \geq 2)$ sind genau dann linear abhängig, wenn ein Vektor eine Linearkombination der anderen ist.

Beweis: Es sei etwa $\mathfrak{a}_1 = \mu_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + \mu_n\mathfrak{a}_n$
$-1\mathfrak{a}_1 + \mu_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + \mu_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o} \Longrightarrow \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ linear abhängig.
Umkehrung: Es seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ linear abhängig. $\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$, nicht alle $\lambda_i = 0$, etwa $\lambda_1 \neq 0$

$$\mathfrak{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathfrak{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathfrak{a}_n$$

5.1 Basis

Definition: Eine **Basis** B des Vektorraumes V ist eine linear unabhängige Menge, die den ganzen Raum erzeugt, d.h. $[B] = V$

Beispiel: 1. $\{\mathfrak{o}\} = [\emptyset]$, $\emptyset$ Basis des Nullraumes

2. $V = K^n$, K Körper
   $\mathfrak{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathfrak{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathfrak{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$
   $\lambda_1\mathfrak{e}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{e}_n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
   $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathfrak{o} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$
   $\{\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n\}$ heißt die **Standardbasis** des K^n. $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ heißen die **Standardbasisvektoren**

3. $K[x]$; $x^0, x^1, x^2, \ldots$
   $\lambda_0 x^0 + \cdots + \lambda_n x^n = \mathfrak{o}$ Nullpolynom $\implies \lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$
   $B = \{x^0, x^1, \ldots\}$ ist eine Basis von $K[x]$

Satz 5.2: Für eine Teilmenge B des Vektorraumes $V \neq \{\mathfrak{o}\}$ sind folgende Aussagen gleichwertig:

1. B ist eine Basis von V
2. B ist eine minimale Menge, die V erzeugt, d.h. für $C \subsetneqq B$ folgt: $[C] \subsetneqq V$
3. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V, d.h. für $D \supsetneqq B$ folgt: D ist linear abhängig
4. Jeder Vektor $\mathfrak{a} \in V$ kann auf genau eine Weise als Linearkombination von B dargestellt werden.

Beweis:

1. ⇒ 2. Es sei $C \subsetneqq B$. Annahme: $[C] = V$
Es sei $\mathfrak{b} \in B \setminus C$; $\mathfrak{b} = \lambda_1\mathfrak{c}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{c}_n$, $\mathfrak{c}_i \in C$
$\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n\}$ linear abhängige Teilmenge von B. **Widerspruch!**

2. ⇒ 3. Annahme: B ist linear abhängig
$\mathfrak{b} = \lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n$; $b, b_i \in B$ $[B \setminus \{\mathfrak{b}\}] = [B] = [V]$
Widerspruch! zu 2. Also ist B Basis.
Es sei $D \supsetneqq B$. Annahme: D ist linear unabhängig
$[D] \supseteq [B] = V$. D wäre Basis von V, aber nicht minimal.
Widerspruch!

3. ⇒ 4. Es sei $\mathfrak{a} \in V \setminus B$. $B \cup \{\mathfrak{a}\}$ linear abhängig.
$\mathfrak{o} = \lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n + \lambda\mathfrak{a}$, $b_i \in B$, nicht alle $\lambda_i, \lambda = 0$
$\implies \lambda \neq 0$, da B linear unabhängig

$$\mathfrak{a} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\mathfrak{b}_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\mathfrak{b}_n; \quad [B] = V, \ B \text{ Basis.}$$

Annahme: $\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n = \mu_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \mu_n\mathfrak{b}_n$
$\implies (\lambda_1 - \mu_1)\mathfrak{b}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}$ B Basis, also $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$

4. ⇒ 1. $[B] = V$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n &= \mathfrak{o} \\ 0\mathfrak{b}_1 + \cdots + 0\mathfrak{b}_n &= \mathfrak{o} \end{aligned}\right\} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

B ist linear unabhängig, also Basis

Ist $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ eine Basis von V und $\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n$ dann heißen die Skalare λ_i die **Koordinaten** von $\mathfrak{a}$ bzgl. B.

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ bzw. $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ Koordinatendarstellung **(Koordinatenvektor)** von $\mathfrak{a}$ bzgl. B. $\lambda_i\mathfrak{b}_i$ heißen die **Komponenten** von $\mathfrak{a}$ bzgl. B.

Ist $V = [M]$, dann nennen wir M auch ein **Erzeugendensystem** von V. V heißt **endlich erzeugt** , wenn $V = [M]$ für ein endliches M.

Satz 5.3: Ist M ein (endliches) Erzeugendensystem von V, dann gibt es eine Basis $B \subseteq M$.

Beweis: Allgemeiner Beweis mit dem ZORNschen Lemma.
Wir setzen vorraus: $|M| < \infty$, $V \neq \{\mathfrak{o}\}$
Es sei $M = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$, alle $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{o}$
Setze $B_1 = \{\mathfrak{m}_1\}$. $B_1 \subseteq M$. B_1 ist linear unabhängig. $[B_1] = [\mathfrak{m}_1]$
Es sei B_i bereits definiert. $1 \leq i < n$. B_i linear unabhängig. $B_i \subseteq M$. $[B_i] = [\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_i]$.

Setze $B_{i+1} = \begin{cases} B_i \text{ , wenn } \mathfrak{m}_{i+1} \in [B_i] \\ B_i \cup \{\mathfrak{m}_{i+1}\} \text{ sonst} \end{cases}$

$[B_{i+1}] = [\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{i+1}]$, $B_{i+1} \subseteq M$.
B_{i+1} linear unabhängig? Klar, wenn $B_{i+1} = B_i$. Es sei $\mathfrak{m}_{i+1} \notin [B_i]$
$\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_k\mathfrak{a}_k + \lambda\mathfrak{m}_{i+1} = \mathfrak{o}$; $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k \in B_i$
$\mathfrak{m}_{i+1} \notin [B_i] \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_k = 0$. B_n ist Basis von V; $B_n \subseteq M$

Jeder Vektorraum hat eine Basis. Beweis mit Mengenlehre.
Nicht immer kann eine Basis explizit angegeben werden. V Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Eine Basis von V nennt man **Hamel Basis**. Keine explizite Darstellung bekannt.

Satz 5.4: Austauschsatz von Steinitz
Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ eine Basis von V und $\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n$, $\lambda_1 \neq 0$.
Dann ist auch $B' = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ eine Basis von V.

Beweis: $b_1 = \dfrac{1}{\lambda_1}\mathfrak{a} - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathfrak{b}_2 - \cdots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathfrak{b}_n \implies [B'] = [B] = V$
Es sei $\mu_1\mathfrak{a} + \mu_2\mathfrak{b}_2 + \cdots + \mu_n\mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}$
$\mu_1(\lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n) + \mu_2\mathfrak{b}_2 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}$
$\mu_1\lambda_1\mathfrak{b}_1 + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2)\mathfrak{b}_2 + \cdots + (\mu_1\lambda_n + \mu_n)\mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}$

$$\begin{aligned} \mu_1\lambda_1 = 0 &\implies \mu_1 = 0, \text{ da } \lambda_1 \neq 0 \text{ nach Voraussetzung} \\ \mu_1\lambda_2 + \mu_2 = 0 &\implies \mu_2 = 0 \\ &\vdots \\ \mu_1\lambda_n + \mu_n = 0 &\implies \mu_n = 0 \end{aligned}$$

Satz 5.5: Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ eine Basis von V. Dann gilt:

1. Ist $A = \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k\}$ ein linear unabhängiges Vektorsystem in V, dann ist
$|A| = k \leq n$. $|A| = n \iff A$ ist Basis von V.
2. Jedes linear unabhängige Vektorsystem A in V läßt sich zu einer Basis von V erweitern.
3. Ist A ein beliebiges Erzeugendensystem von V und $|A| = n$, dann ist A eine Basis von V.

Beweis:

1. Annahme: $k > n$
$\mathfrak{a}_1 = \lambda_1 \mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{b}_n$, nicht alle $\lambda_i = 0$, etwa $\lambda_1 \neq 0$
Satz 5.4: $A_1 = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ ist Basis von V.
$\mathfrak{a}_2 = \lambda'_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda'_2 \mathfrak{b}_2 + \cdots + \lambda'_n \mathfrak{b}_n$ Nicht alle $\lambda'_2, \dots, \lambda'_n = 0$, da A linear unabhängig. Etwa $\lambda'_2 \neq 0$
Satz 5.4: $A_2 = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_3, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ ist Basis von V.
usw. bis folgt: $A_n = \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}$ ist Basis von V.
Dann ist aber $\mathfrak{a}_{n+1}$ Linearkombination von $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$; A linear abhängig. **Widerspruch!**
Also $k \leq n$. $k = n \Rightarrow A_n = A$ ist Basis von V.
Es sei A Basis von V. Dann folgt wie oben neben $k \leq n$ auch $n \leq k$ (A, B vertauschen!) Also $n = k = |A|$
2. $A = \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k\}$, $k \leq n$
$\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k$ lassen sich mit Satz 5.4 in die Basis B einbauen.
$A_k = \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_{k+1}, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ ist Erweiterung von A zu einer Basis von V
3. Es existiert eine Basis $B' \subseteq A$. $|B'| = |A| = n \implies B' = A$

5.2 Dimension

Definition: Die allen Basen eines Vektorraumes V gemeinsame Anzahl von Vektoren heißt die **Dimension** von V, $\dim V$.
$\dim V = \infty$, wenn keine endliche Basis existiert.

Satz 5.6: Für einen Unterraum U eines endlich dimensionalen Raumes V gilt:

1. $\dim U \leq \dim V$
2. $\dim U = \dim V \iff U = V$

Beweis:

1. A Basis von U. Erweitere A zu einer Basis B von V
$A \subseteq B$; $\dim U = |A| \leq |B| = \dim V$
2. Es sei $\dim U = \dim V$. A, B wie unter 1.
$A \subseteq B \wedge |A| = |B| \implies A = B$, da A, B endlich
$U = [A] = [B] = V$. Andere Richtung trivial

Beispiel:

1. $[\emptyset] = \{\mathfrak{o}\}$, $\dim\{\mathfrak{o}\} = |\emptyset| = 0$
2. K^n Standardbasis $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$; $\dim K^n = n$
3. V Vektorraum $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$; $\{1, i\}$ Basis von V; $\dim V = 2$

Satz 5.7: Dimensionsformel für Unterräume
Es seien U und W endlich dimensionale Unterräume des Vektorraumes V.
Dann gilt:
$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Beweis: Es sei $B' = \{\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_s\}$ eine Basis von $U \cap W$.
Erweitere B' zu einer Basis B_1 von U bzw. B_2 von W.
$B_1 = \{\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_s, u_1, \ldots, u_k\}$, $\quad B_2 = \{\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_s, w_1, \ldots, w_l\}$
Bilde $B = B_1 \cup B_2 = \{\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_s, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l\}$
Wir zeigen: B ist Basis von $U + W$

$$\underbrace{x_1\mathfrak{c}_1 + \cdots + x_s\mathfrak{c}_s + y_1u_1 + \cdots + y_ku_k}_{u \in U} + \underbrace{z_1w_1 + \cdots + z_lw_l}_{w \in W} = \mathfrak{o}; \quad x_i, y_i, z_i \in K$$

$u = -w \Rightarrow u, w \in U \cap W$
w ist Linearkombination der $\mathfrak{c}_i$ alleine
B_2 Basis von $W \implies z_1 = \cdots = z_l = 0$
$u = \mathfrak{o}$, B_1 Basis von $U \implies x_1 = \cdots = x_s = y_1 = \cdots = y_k = 0$
B ist frei. $[B] = U + W$; B ist Basis von $U + W$.

$$\dim U + W = s + k + l = \underbrace{(s + k)}_{\dim U} + \underbrace{(s + l)}_{\dim W} - \underbrace{s}_{\dim U \cap W}$$

Folgerung: $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$

Satz 5.8: Es sei $V = \bigoplus\limits_{i \in I} U_i$. Dann gilt:

1. Ist B_i Basis von U_i für $i \in I$, dann ist $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ eine Basis von V
2. $\dim V = \sum\limits_{i \in I} \dim U_i$

Beweis:

1. Die Elemente von V haben die Form

$$\mathfrak{a} = \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i, \quad \mathfrak{a}_i \in U_i, \text{ nur endlich viele } \mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{a}_i = \sum_{\mathfrak{b} \in B_i} \lambda(\mathfrak{b})\mathfrak{b} \quad \text{nur endlich viele } \lambda(\mathfrak{b}) \neq 0$$

$$\mathfrak{a} = \sum_{i \in I} \sum_{\mathfrak{b} \in B_i} \lambda(\mathfrak{b})\mathfrak{b} = \sum_{\mathfrak{b} \in B} \lambda(\mathfrak{b})\mathfrak{b} \quad \text{nur endlich viele } \lambda(\mathfrak{b}) \neq 0$$

$[B] = V \quad$ Zu zeigen: B ist linear unabhängig.

Es sei $\sum\limits_{\mathfrak{b} \in B} \lambda(\mathfrak{b})\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ Ordne um: $\sum\limits_{i \in I} \underbrace{\sum_{\mathfrak{b} \in B_i} \lambda(\mathfrak{b})\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}_i \in U_i} = \mathfrak{o}$

$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}$ für alle $i \in I$, wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von $\mathfrak{o}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_i = \sum_{\mathfrak{b} \in B_i} \lambda(\mathfrak{b})\mathfrak{b} = \mathfrak{o} \quad &\Longrightarrow \quad \lambda(\mathfrak{b}) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{b} \in B_i,\ B_i \text{ linear unabhängig} \\ &\Longrightarrow \quad \lambda(\mathfrak{b}) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{b} \in B \end{aligned}$$

2. $\bigcup_{i \in I} B_i$ ist eine disjunkte Vereinigung.

   $$\dim V = |B| = \sum_{i \in I} |B_i| = \sum_{i \in I} \dim U_i$$

Kapitel 6

Lineare Abbildungen

Definition: Es seien V, V' Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to V'$ heißt **linear** oder ein **Homomorphismus** , wenn für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt: $f(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}) = \lambda f(\mathfrak{a}) + \mu f(\mathfrak{b})$
Ist $V = V'$, dann heißt f ein **Endomorphismus** von V.
Hom (V, V') Menge aller linearen Abbildungen von V in V'
Hom $V :=$ Hom (V, V)
Ein **Isomorphismus** ist eine bijektive lineare Abbildung. Ein **Automorphismus** ist ein Isomorphismus eines Raumes auf sich selbst.
Ist $f : V \to V'$ linear, dann heißt $f^{-1}\{\mathfrak{o}\}$ der **Kern von** f
in Zeichen: Kern f

Beispiel:

1. $f \in$ Hom V, $\alpha \in K$. Definiere f durch $\mathfrak{x} \to \alpha\mathfrak{x}$; $\quad f = \alpha \cdot \mathrm{id}$
   f heißt die **Homothetie** oder **Streckung** mit dem Faktor α. f ist Automorphismus für $\alpha \neq 0$
2. $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Raum der reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Δ Differenzoperator: $V \to V$
   $\Delta(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $\quad \Delta$ linear
   $\Delta(\lambda(a_n) + \mu(b_n)) = \Delta(\lambda a_n + \mu b_n) = (\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1} - \lambda a_n - \mu b_n) = \lambda(a_{n+1} - a_n) + \mu(b_{n+1} - b_n) = \lambda\Delta(a_n) + \mu\Delta(b_n)$
   Δ ist Endomorphismus von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   Kern Δ besteht aus allen konstanten Folgen
3. $V = C^1(\mathbb{R})$, $V' = C^0(\mathbb{R})$
   $D : V \to V'$ Differenzoperator $\quad D(f) = f'$; D ist linear
   Kern D = Menge aller konstanten Funktionen auf $\mathbb{R}$
4. $V = K[x]$; $f \in V$; $\quad f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
   Ableitungsoperator $D : V \to V$
   $D(f) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$; D ist linear

Satz 6.1: Es seien $f : V \to V'$ eine lineare Abbildung und U, U' Unterräume von V bzw. V'. Dann gilt:

1. $f(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$

2. $f(U)$ und $f^{-1}(U')$ sind Unterräume von V' bzw. V.
   Insbesondere ist Kern $f = f^{-1}\{\mathfrak{o}\}$ ein Unterraum von V.
3. f injektiv $\iff$ Kern $f = \{\mathfrak{o}\}$

Beweis: f ist (Gruppen–) Homomorphismus von $(V,+) \to (V',+)$

1. $f(\mathfrak{o}) = f(0 \cdot \mathfrak{o}) = 0 \cdot f(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$
2. Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in f(U)$; $\quad \mathfrak{x} = f(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{y} = f(\mathfrak{b});\quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U$
   $$\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y} = \lambda f(\mathfrak{a}) + \mu f(\mathfrak{b}) = f(\underbrace{\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}}_{\in U}) \in f(U)$$
   Also ist $f(U)$ Unterraum von V'
   Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in f^{-1}(U')$; $\quad f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{b}) \in U'$
   $f(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}) = \lambda f(\mathfrak{a}) + \mu f(\mathfrak{b}) \in U' \implies \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} \in f^{-1}(U')$
   Also ist $f^{-1}(U')$ Unterraum
3. „$\implies$“ $f(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$; $\quad f$ injektiv $\Rightarrow$ Kern $f = \{\mathfrak{o}\}$
   „$\impliedby$“ Es sei Kern $f = \{\mathfrak{o}\}$
   $f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}) \Rightarrow f(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{o} \Rightarrow \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in$ Kern f
   $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\quad f$ injektiv

Satz 6.2: Es seien V und V' Vektorräume über dem Körper K und B eine Basis von V. Ferner sei jedem Vektor $\mathfrak{b} \in B$ ein Vektor $\mathfrak{b}^* \in V'$ zugeordnet.
Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to V'$ mit $f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^*$ für alle $\mathfrak{b} \in B$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{x} \in V$. Eindeutige Darstellung: $\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + x_n\mathfrak{b}_n$, $b_i \in B$
Es sei f Homomorphismus mit den verlangten Eigenschaften.
$f(\mathfrak{x}) = x_1 f(\mathfrak{b}_1) + \cdots + x_n f(\mathfrak{b}_n) = x_1\mathfrak{b}_1^* + \cdots + x_n\mathfrak{b}_n^*$
Also ist f eindeutig bestimmt.
Definiere f gemäß $f(\mathfrak{x}) = x_1\mathfrak{b}_1^* + \cdots + x_n\mathfrak{b}_n^*$. Dann ist $f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^*$ für $\mathfrak{b} \in B$.
Wir zeigen: f ist linear. $\quad \mathfrak{y} = y_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + y_n\mathfrak{b}_n$

$$\begin{aligned}
f(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}) &= f((\lambda x_1 + \mu y_1)\mathfrak{b}_1 + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n)\mathfrak{b}_n) \\
&= (\lambda x_1 + \mu y_1)\mathfrak{b}_1^* + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n)\mathfrak{b}_n^* \\
&= \lambda(x_1\mathfrak{b}_1^* + \cdots + x_n\mathfrak{b}_n^*) + \mu(y_1\mathfrak{b}_1^* + \cdots + y_n\mathfrak{b}_n^*) \\
&= \lambda f(\mathfrak{x}) + \mu f(\mathfrak{y})
\end{aligned}$$

Satz 6.3: Es sei $f \in$ Hom (V, V'); $\quad \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in V$; $\quad M \subseteq V$

1. $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ linear abhängig $\implies f(\mathfrak{a}_1), \ldots, f(\mathfrak{a}_n)$ linear abhängig
2. Ist f injektiv, dann gilt in 1. auch die Umkehrung, d.h insbesondere:
   M linear unabhängig $\iff f(M)$ linear unabhängig
3. $f([M]) = [f(M)]$

Beweis: 1. $\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$; nicht alle $\lambda_i = 0$
$f(\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n) = \lambda_1 f(\mathfrak{a}_1) + \cdots + \lambda_n f(\mathfrak{a}_n) = f(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$
$\implies f(\mathfrak{a}_1), \ldots, f(\mathfrak{a}_n)$ linear abhängig

2. Es sei f injektiv $\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$; nicht alle $\lambda_i = 0$
$\Longrightarrow f(\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n) = \mathfrak{o} \Longrightarrow \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$, da Kern $f = \{\mathfrak{o}\}$
3. $f([M])$ besteht genau aus Vektoren der Form:
$f(\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_r m_r) = \lambda_1 f(m_1) + \cdots + \lambda_r f(m_r), \quad m_i \in M,\ \lambda_i \in K$
Das sind aber genau die Elemente von $[f(M)]$

6.1 Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Satz 6.4: Dimensionsformel für lineare Abbildungen
Es sei $f \in \text{Hom}\,(V, V')$, $\dim V = n < \infty$. Dann gilt:
$\dim\,(\text{Bild}\ f) = \dim V - \dim\,(\text{Kern}\ f)$

Beweis: Es sei $B_0 = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k\}$ eine Basis von Kern f.
Erweitere B_0 zu einer Basis $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ von V

$$\text{Bild}\ f = f(V) = f[B] = [f(B)] = [\underbrace{f(\mathfrak{b}_1), \ldots, f(\mathfrak{b}_k)}_{\mathfrak{o}}, f(\mathfrak{b}_{k+1}), \ldots, f(\mathfrak{b}_n)]$$

Wir zeigen: $f(\mathfrak{b}_{k+1}), \ldots, f(\mathfrak{b}_n)$ sind linear unabhängig
$\lambda_{k+1} f(\mathfrak{b}_{k+1}) + \cdots + \lambda_n f(\mathfrak{b}_n) = \mathfrak{o} \Longrightarrow f(\lambda_{k+1}\mathfrak{b}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n) = \mathfrak{o}$
$\Longrightarrow \lambda_{k+1}\mathfrak{b}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n \in \text{Kern}\ f \Longrightarrow \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$
$\dim\,(\text{Bild}\ f) = n - k = \dim V - \dim\,(\text{Kern}\ f)$

Bemerkung: In der Form $\dim\,(\text{Kern}\ f) + \dim\,(\text{Bild}\ f) = \dim V$ gilt Satz 6.4 auch, wenn $\dim V = \infty$ ist.

Definition: Ist $f : V \to V'$ eine lineare Abbildung. Dann heißen
$\dim\,(\text{Kern}\ f) = \text{def}\ f$ der **Defekt** von f und
$\dim\,(\text{Bild}\ f) = \text{rg}\ f$ der **Rang** von f
$\text{rg}\ f = \dim V - \text{def}\ f$

Satz 6.5: Es seien V und V' Vektorräume der gleichen Dimension n. Dann gilt für jede lineare Abbildung $f : V \to V'$: f injektiv $\Longleftrightarrow$ f surjektiv

Beweis: f injektiv $\overset{\text{Satz 6.1}}{\Longleftrightarrow}$ Kern $f = \{\mathfrak{o}\}$ $\Longleftrightarrow$ $\text{def}\ f = 0$ $\overset{\text{Satz 6.4}}{\Longleftrightarrow}$ $\dim\,(\text{Bild}\ f) = \dim V =$ $\dim V'$ $\overset{\text{Satz 5.6}}{\Longleftrightarrow}$ Bild $f = V'$ $\Longleftrightarrow$ f surjektiv

Bemerkung: Satz 6.5 gilt nur bei endlicher Dimension.
$V = V' = \mathbb{R}[x]$, Ableitungsoperator D, $\quad Df = f' \quad D \in \text{Hom}\ V$
D ist surjektiv, da $D(\int f(x)dx) = f(x)$. Aber D ist nicht injektiv.
Kern D besteht aus allen konstanten Funktionen. $\text{def}\ D = 1$

Satz 6.6: Jeder n–dimensionale Vektorraum V über dem Körper K ist isomorph zu K^n (d.h. es existiert ein Isomorphismus $\sigma : V \to K^n$).

Beweis: Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ eine Basis von V.
Definiere $\sigma_B : V \to K^n$ durch

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + x_n\mathfrak{b}_n \longrightarrow (x_1, \dots, x_n)$$
$$\mathfrak{y} = y_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + y_n\mathfrak{b}_n \longrightarrow (y_1, \dots, y_n)$$

$\sigma_B(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \sigma_B((x_1+y_1)\mathfrak{b}_1+\cdots+(x_n+y_n)\mathfrak{b}_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = \sigma_B\mathfrak{x}+\sigma_B\mathfrak{y}$
ebenso $\sigma_B(\lambda\mathfrak{x}) = \lambda\sigma_B(\mathfrak{x})$
σ_B ist linear, surjektiv also nach Satz 6.5 auch injektiv
σ_B ist ein Isomorphismus. $V \simeq K^n$

$\sigma_B(\mathfrak{x}) = (x_1, \dots, x_n)$ Koordinatendarstellung (-vektor) von $\mathfrak{x}$ bzgl. B
σ_B **Koordinaten – Isomorphismus** bzgl. B.
Insbesondere gilt: $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \dots, \mathfrak{z}$ linear unabhängig $\iff$ $\sigma_B(\mathfrak{x}), \sigma_B(\mathfrak{y}), \dots, \sigma_B(\mathfrak{z})$ linear unabhängig

Satz 6.7:

1. Die Komposition von Homomorphismen (Isomorphismen) ist ein Homomorphismus (Isomorphismus).
2. Ist $f : V \to V'$ Isomorphismus, dann ist auch f^{-1} Isomorphismus.
3. Die Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Klasse von Vektorräumen.

Beweis:

1. $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$; f, g linear. Wir zeigen: $g \circ f$ linear
   $(g \circ f)(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}) = g(\lambda f\mathfrak{a} + \mu f\mathfrak{b}) = \lambda g \circ f\mathfrak{a} + \mu g \circ f\mathfrak{b}$
2. f^{-1} ist bijektiv. $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}' \in V'$ $\mathfrak{a}' = f\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = f\mathfrak{b}$
   $f^{-1}(\lambda\mathfrak{a}' + \mu\mathfrak{b}') = f^{-1}(\lambda f\mathfrak{a} + \mu f\mathfrak{b}) = f^{-1}(f(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b})) = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$
   $= \lambda f^{-1}\mathfrak{a}' + \mu f^{-1}\mathfrak{b}'$
3. folgt aus 1. und 2.

Die Automorphismen eines Vektorraumes V bilden eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S(V)$, die **lineare Gruppe** von V, $GL(V)$ (general linear group).
Isomorphe Vektorräume haben isomorphe lineare Gruppen $GL(K^n) =: GL(n, K)$ **lineare Gruppe vom Grad** n **über** K. $GL(n, K)$ ist bis auf Isomorphie die lineare Gruppe jedes Vektorraumes der Dimension n.

6.2 Vektorräume aus linearen Abbildungen

Satz 6.8: Hom (V, V') ist ein Unterraum von ${V'}^V$.

Beweis: $f \in$ Hom $(V, V') \implies \lambda f \in$ Hom (V, V'); $f_1, f_2 \in$ Hom $(V, V') \implies f_1 + f_2 \in$ Hom (V, V')

Definition: Eine **Algebra** A **über dem Körper** K (K–Algebra) ist ein Vektorraum A über K, in dem ein vektorielles Produkt $\circ$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} \in A$ mit folgenden Eigenschaften definiert ist:
$(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}) \circ \mathfrak{c} = \lambda(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}) + \mu(\mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}) \qquad \mathfrak{a} \circ (\lambda\mathfrak{b} + \mu\mathfrak{c}) = \lambda(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) + \mu(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c})$
$\lambda, \mu, \in K; \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in A$
A heißt assoziativ oder kommutativ, wenn $\circ$ assoziativ bzw. kommutativ ist. $\quad (\lambda\mathfrak{a}) \circ \mathfrak{c} = \lambda(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \circ (\lambda\mathfrak{c})$
Ist A assoziativ, dann ist $(A, +, \circ)$ ein Ring

Satz 6.9: Für jeden Vektorraum V über K ist Hom V eine assoziative K–Algebra mit dem Einselement id_V (bzgl $\circ$).

Beweis: $(\lambda f + \mu g) \circ h(\mathfrak{x}) = (\lambda f + \mu g)(h(\mathfrak{x})) = \lambda f(h\mathfrak{x}) + \mu g(h\mathfrak{x}) = \lambda(f \circ h)\mathfrak{x} + \mu(g \circ h)\mathfrak{x} = (\lambda(f \circ h) + \mu(g \circ h))(\mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{x} \in V$
$\Longrightarrow (\lambda f + \mu g) \circ h = \lambda(f \circ h) + \mu(g \circ h)$
ebenso folgt das andere Distributivgesetz

Hom V **Algebra der Endomorphismen von** V, **Endomorphismenring von** V

Definition: Es sei V ein Vektorraum über K. Dann heißt $V^* = \mathrm{Hom}\,(V, K)$ der zu V **duale Vektorraum**. Die Elemente von V^* nennt man **Linearformen** von V.

Beispiel:

1. $V = C[0,1]$ Vektorraum über $\mathbb{R}$
   $\sigma_1(f) = f(0)$, $\sigma_2(f) = \int_0^1 f(x)dx; \quad \sigma_1, \sigma_2 \in V^*$
2. $V = K^n, \quad \mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
   Definiere $\sigma(\mathfrak{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n =< \mathfrak{a}, \mathfrak{x} >$ **inneres Produkt** von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$; $\quad \sigma \in V^*$
   Wir zeigen, daß jede Linearform von K^n diese Gestalt hat.

Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ eine Basis von V.
Definiere $\sigma_k \in V^*$ durch $\sigma_k(\mathfrak{b}_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, \text{ für } i = k \\ 0, \text{ für } i \neq k \end{cases}$
σ_k ist damit nach Satz 6.2 eindeutig definiert.

Es sei $\sigma \in V^*; \quad \sigma(\mathfrak{b}_i) = a_i; \quad$ Bilde $\sigma' = \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i$

$$\sigma'(\mathfrak{b}_j) = \sum_i a_i\sigma_i(\mathfrak{b}_j) = a_j = \sigma(\mathfrak{b}_j) \text{ für alle } j = 1, \ldots, n \overset{\text{Satz 6.2}}{\Longrightarrow} \sigma = \sigma' = \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i$$

Es sei $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\sigma_i}_{\widetilde{\sigma}} = \mathfrak{o}$ Nullabbildung $\qquad \widetilde{\sigma}(\mathfrak{b}_j) = \lambda_j = 0$ für alle j

$\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ heißt die zu $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ **duale Basis** von V^*

Satz 6.10:
1. Es sei $\dim V < \infty$. Dann gilt:
$\dim V^* = \dim V, \quad V^* \simeq V$
2. Jede Linearform von K^n kann auf genau eine Weise als inneres Produkt geschrieben werden, d.h. zu jedem $\sigma \in (K^n)^*$ gibt es genau einen Vektor $F(\sigma) = (a_1, \ldots, a_n) = \mathfrak{a} \in K^n$ mit
$\sigma(\mathfrak{x}) = < \mathfrak{a}, \mathfrak{x} > = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ für alle $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$
Dabei ist die Abbildung $F : (K^n)^* \to K^n$ ein Isomorphismus.

Beweis:
1. $\surd$
2. Es sei $B^* = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ die zur Standardbasis $\{\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n\}$ von K^n duale Basis von $(K^n)^*$.
$F : (K^n)^* \to K^n$ sei der Koordinaten-Isomorphismus bzgl. B^*
Es sei $\sigma \in (K^n)^*, \quad F(\sigma) = \mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$,
$\sigma = a_1\sigma_1 + \cdots + a_n\sigma_n, \quad \sigma = (x_1, \ldots, x_n)$
$$\sigma(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i(\sum_{j=1}^{n} x_je_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ix_j\sigma_i(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i = < \mathfrak{a}, \mathfrak{x} >$$
$\mathfrak{a} = (\sigma(e_1), \ldots, \sigma(e_n))$ eindeutig bestimmt

Definition: Es seien $M \subseteq V, \ M' \subseteq V^*$.
Die **Annullatoren** von M bzw. M' sind definiert durch:

$$\text{Ann } M = \{f \in V^* | f\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \text{ für alle } \mathfrak{x} \in M\},$$

$$\text{Ann } M' = \{f \in V | f\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \text{ für alle } f \in M'\}$$

Satz 6.11: Annullatoren sind Unterräume. Es seien $U \subseteq V, \ U' \subseteq V^*$ Unterräume. Dann gilt:

1. $\dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$
2. $\dim \text{Ann } U' = \dim V - \dim U'$

Beweis:
1. Erweitere eine Basis von U zu einer Basis von V.
$B = \{\underbrace{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r}_{\in U}, \mathfrak{b}_{r+1} \ldots, \mathfrak{b}_n\}$, duale Basis $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$
Es sei $f \in$ Ann U. $\quad f = x_1f_1 + \cdots + x_nf_n, \quad x_i = f(\mathfrak{b}_i)$.
$f(\mathfrak{b}_1) = \cdots = f(\mathfrak{b}_r) = 0 \implies f = x_{r+1}f_{r+1} + \cdots + x_nf_n$
Ann $U = [\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_n], \quad \dim \text{Ann } U = n - r = \dim V - \dim U$.
2. Definiere $\widehat{\sigma} : V \to V^{**}, \quad \mathfrak{x} \to \widehat{\mathfrak{x}} \in V^{**}, \quad \widehat{\mathfrak{x}}(f) = f(\mathfrak{x})$. $\widehat{\sigma}$ ist linear. Es sei $\mathfrak{x} \in$ Kern $\widehat{\sigma}$.
Annahme: $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$.
$\mathfrak{x}$ kann Basisvektor werden.
Es existiert $f \in V^*$ mit $f(\mathfrak{x}) = 1$. $\widehat{\mathfrak{x}}(f) = 1, \quad \widehat{\mathfrak{x}} \neq \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{x} \notin$ Kern $\widehat{\sigma}$. **Widerspruch!**
Kern $\widehat{\sigma} = \{\mathfrak{o}\}, \quad \dim V = \dim V^{**} \implies \widehat{\sigma}$ ist Isomorphismus.

$\overline{\text{Ann}}\ U' = \{\widehat{\mathfrak{x}} \in V^{**} \mid \widehat{\mathfrak{x}}(f) = 0 \text{ für alle } f \in U'\}$
$\widehat{\mathfrak{x}}(f) = 0 \text{ für alle } f \in U' \iff f(\mathfrak{x}) = 0 \text{ für alle } f \in U' \iff \mathfrak{x} \in \text{ Ann } U'$
$\widehat{\sigma}(\text{Ann } U') = \overline{\text{Ann}}\ U'$
$\dim \text{Ann } U' = \dim \overline{\text{Ann}}\ U' \overset{1.}{=} \dim V^* - \dim U' = \dim V - \dim U'$

Kapitel 7

Matrizen

Eine $m \times n$ – **Matrix** über dem Körper K ist eine indizierte Familie $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ von Elementen aus K.
A ist eine Abbildung von $m \times n = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$
$K^{m \times n}$ Menge aller $m \times n$ – Matrizen über K, $m \times n$ **Format von** A

Hauptdiagonale $\searrow$ $\swarrow$ Nebendiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \\ & & & \uparrow & & \end{pmatrix} \leftarrow i\text{–ter Zeilenvektor}, \in K^n$$

j–ter Spaltenvektor, $\in K_m$

kurz: $A = (a_{ij})$ a_{ij} i, j–Koordinaten, -Eintrag von A

A heißt **quadratisch**, wenn $m = n$ ist.
Die zu A **transponierte Matrix** A^T entsteht aus A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten bzw. durch Spiegelung der Einträge von A an der Hauptdiagonalen.
$A^T =: (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, $b_{ij} = a_{ji}$, $A^T \in K^{n \times m}$, $K^{1 \times n} = K^n$ $K^{n \times 1} = K_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1, 2, 3) \qquad (A^T)^T = A$$

A heißt **symmetrisch**, wenn $A^T = A$ ist. A symmetrisch $\Longrightarrow$ A quadratisch
A heißt **schiefsymmetrisch**, wenn $A^T = -A = (-a_{ij})$ ist. A schiefsymmetrisch $\Longrightarrow$ A quadratisch $\wedge a_{ii} = 0$ für alle i, wenn $\chi(K) \neq 2$

$m \times n$ – **Nullmatrix** hat lauter Einträge 0 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

$n \times n$ – **Einheitsmatrix** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n = I$

$I = (\delta_{ij})$, KRONECKER Symbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } i = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

$A \in K^{n \times n}$ $A = (a_{ij})$ heißt $\begin{cases} \textbf{Diagonalmatrix}, \text{ wenn } a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j \\ \textbf{obere Dreiecksmatrix}, \text{ wenn } a_{ij} = 0 \text{ für alle } i > j \\ \textbf{untere Dreiecksmatrix}, \text{ wenn } a_{ij} = 0 \text{ für alle } i < j \end{cases}$

$A, B \in K^{m \times n}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$
Definiere: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, $\lambda A = (\lambda a_{ij})$
$K^{m \times n}$ wird so zu einem Vektorraum, der zu $K^{m \cdot n}$ isomorph ist, denn die Elemente beider Räume unterscheiden sich nur in der Schreibweise. $\dim K^{m \times n} = m \cdot n$
$(A + B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda(A^T)$ Transposition ist eine lineare Abbildung

7.1 Matrixprodukt

Es seien $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ – Matrix, $B = (b_{ij})$ eine $n \times l$ – Matrix, dann ist das Matrixprodukt $A \circ B = C = (c_{ik})$ eine $m \times l$ – Matrix mit:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

i–te Zeile $\underset{A}{\begin{pmatrix} \\ \hline \end{pmatrix}}$ $\underset{B}{\begin{pmatrix} & \Big| & \end{pmatrix}}$ k–te Spalte $= \underset{A \circ B}{\begin{pmatrix} & c_{ik} \end{pmatrix}}$

c_{ik} ist das innere Produkt der i–ten Zeile von A mit der k–ten Spalte von B.

Beispiel: 1. $\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{AB}{\begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 \\ 20 & 36 & 2 \end{pmatrix}}$

BA nicht definiert

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$AB \neq BA$

3. $K^{1\times n} = K^n,\ K^{n\times 1} = K_n \quad \mathfrak{a} = (1,2,3),\ \mathfrak{b} = (3,2,1)$

inneres Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^T = (1,2,3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ nicht definiert

$$\mathfrak{a}^T\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(3,2,1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

4. $$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathfrak{x}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{\mathfrak{y}}{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}} \qquad A\mathfrak{x} = \mathfrak{y}; \quad \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in K_n,\ A \in K^{n\times n}$$

Satz 7.1: Für das Matrixprodukt gelten folgende Rechenregeln. Dabei seien alle auftretenden Produkte definiert.

1. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
2. $AI = IA = A \quad (I$ Einheitsmatrix; $A, I \in K^{n\times n})$
3. $(AB)C = A(BC)$
4. $A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$
5. $(AB)^T = B^T A^T$

Beweis:

1. $(\lambda A)B : \sum_j (\lambda a_{ij}) b_{jk} = \lambda \sum_j a_{ij} b_{jk} : \lambda(AB)$
2. $A = (a_{ij}),\ I = (\delta_{jk}) \qquad \sum_j a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}$
3. $A = (a_{ij}),\ B = (b_{jk}),\ C = (c_{kl})$

   $$(AB)C : \sum_k (\sum_j a_{ij} b_{jk}) c_{kl} = \sum_k \sum_j a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_j \sum_k a_{ij} b_{jk} c_{kl}$$

   $$= \sum_j a_{ij} (\sum_k b_{jk} c_{kl}) : A(BC)$$
4. $A(B+C) : \sum_j a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_j a_{ij} b_{jk} + \sum_j a_{ij} c_{jk} : AB + AC$
5. $A = (a_{ij}),\ B = (b_{jk}),\ AB = (c_{ik}),\quad A^T = (a^T_{ji}),\ B^T = (b^T_{kj}),\ (AB)^T = (c^T_{ki}),\quad a^T_{ji} = a_{ij},\ b^T_{kj} = b_{jk},\ c^T_{ki} = c_{ik}$

   $$c^T_{ki} = c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} = \sum_j a^T_{ji} b^T_{kj} = \sum_j b^T_{kj} a^T_{ji} \implies (AB)^T = B^T A^T$$

Folgerung: $K^{n\times n}$ ist eine assoziative Algebra mit Einselement.
(Wir zeigen: $K^{n\times n} \simeq \mathrm{Hom}\, K^n$ bzw. $\mathrm{Hom}\, K_n$)

Blockmultiplikation quadratischer Matrizen

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A_1 & A_2 \\ \hline & \\ A_3 & A_4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline B_1 & B_2 \\ \hline & \\ B_3 & B_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline C_1 & C_2 \\ \hline & \\ C_3 & C_4 \\ \hline \end{array}$$

$C_1 = A_1B_1 + A_2B_3, \quad C_2 = A_1B_2 + A_2B_4$
$C_3 = A_3B_1 + A_4B_3, \quad C_4 = A_3B_2 + A_4B_4$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A_1 & 0 \\ \hline & \\ 0 & A_4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline B_1 & 0 \\ \hline & \\ 0 & B_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline C_1 & 0 \\ \hline & \\ 0 & C_4 \\ \hline \end{array}$$

diagonale Blockmatrizen $\qquad C_1 = A_1B_1,\ C_4 = A_4B_4$

$A \in K^{n\times n}$ heißt **invertierbar** oder **regulär**, wenn es eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ gibt mit $AB = BA = I$ (Zum Nachweis der Invertierbarkeit reicht $AB = I$ oder $BA = I$. Beweis folgt)
Man setzt $B = A^{-1}$, eindeutig bestimmt, siehe 3.2 Seite 18.
Die invertierbaren Matrizen bilden die Einheitengruppe von $K^{n\times n}$. A^{-1} heißt die zu A inverse Matrix.
singulär = nicht regulär, A^{-1} existiert nicht.
Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dann sei $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ die zu A konjugierte Matrix. Es gilt $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär $\Longrightarrow (\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$

Beweis: $\overline{A} \cdot \overline{A^{-1}} = \overline{AA^{-1}} = \overline{I} = I$

Definition: Der **Rang** einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A, rg A.

Kapitel 8

Matrizen und lineare Abbildungen

Es seien V, V' Vektorräume über K, $f : V \to V'$ linear
$B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis von V, $B' = \{\mathfrak{b}'_1, \dots, \mathfrak{b}'_m\}$ Basis von V'.

$$f(\mathfrak{b}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathfrak{b}'_i$$

$A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ heißt die Matrix von f bzgl. B und B',
$A = M(f, B, B')$, kurz: $M(f)$
Die Koordinaten von $f(\mathfrak{b}_j)$ bilden die j–te Spalte von A.
Ist $V = V'$, dann wählt man meist $B = B'$ $\quad M(f, B)$ statt $M(f, B, B)$
Durch A ist f eindeutig definiert.

Es sei $\mathfrak{x} \in V, \mathfrak{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathfrak{b}_j \quad f(\mathfrak{x}) = \sum_j x_j f \mathfrak{b}_j = \sum_{i,j} x_j a_{ij} \mathfrak{b}'_i = \sum_{i=1}^{m} (\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}_{x'_i}) \mathfrak{b}'_i$

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{für } i = 1, \dots, m \iff \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Stellt man die Vektoren in V, V' dar durch ihre Koordinatenvektoren bzgl. B bzw. B', dann hat f die Wirkung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Insbesondere hat jede lineare Abbildung $K_n \to K_m$ die Form $\mathfrak{x} \mapsto A\mathfrak{x}$, $A \in K^{m \times n}$, da bzgl. der Standardbasen in K_n, K_m jeder Vektor mit seinem Koordinatenvektor übereinstimmt.

Beispiel: 1. $\varphi : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ sei definiert durch $\varphi\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathfrak{x}$

$$B = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{b}_2} \}. \text{ Man bestimme } M(\varphi, B)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi\mathfrak{b}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathfrak{b}_1 + 1 \cdot \mathfrak{b}_2 \\ \varphi\mathfrak{b}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathfrak{b}_1 + 3 \cdot \mathfrak{b}_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $M(\varphi, B) = I \iff \varphi = \mathrm{id}$

Ist $A \in K^{m\times n}$ gegeben, dann nennen wir $\varphi_A : K_n \to K_m$, $\mathfrak{x} \mapsto A\mathfrak{x}$ die A zugeordnete lineare Abbildung $M(\varphi_A) = A$ bzgl. der Standardbasen.

Satz 8.1:
1. Die Matrixzuordnung $M : \mathrm{Hom}\ (V, V') \to K^{m\times n}$ ist ein Vektorraum – Isomorphismus.
2. M ist bei geeigneter Wahl der Basen mit der Komposition von Abbildungen verträglich, d.h. $M(\tilde{f} \circ f) = M(\tilde{f}) \circ M(f)$

Beweis:
1. $f, \tilde{f} \in \mathrm{Hom}\ (V, V')$, $\quad M(f) = (a_{ij})$, $M(\tilde{f}) = (\widetilde{a_{ij}})$
   Wir bestimmen $M(\lambda f + \mu\tilde{f})$
   $$(\lambda f + \mu\tilde{f})(\mathfrak{b}_j) = \lambda f(\mathfrak{b}_j) + \mu\tilde{f}(\mathfrak{b}_j) = \lambda \sum_i a_{ij}\mathfrak{b}'_i + \mu \sum_i \widetilde{a_{ij}}\mathfrak{b}'_i$$
   $$= \sum_i (\lambda a_{ij} + \mu\widetilde{a_{ij}})\mathfrak{b}'_i \Longrightarrow M(\lambda f + \mu\tilde{f}) = \lambda M(f) + \mu M(\tilde{f})$$
   M ist bijektiv also Isomorphismus
2. Es sei $f : V \to V'$, $\tilde{f} : V' \to V''$
   Basen: $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$, $B' = \{\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_m\}$, $B'' = \{\mathfrak{b}''_1, \ldots, \mathfrak{b}''_l\}$
   $M(f, B, B') = M(f) = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$;
   $M(\tilde{f}, B', B'') = M(\tilde{f}) = (\widetilde{a_{ij}}) \in K^{l\times m}$
   $$\tilde{f} \circ f(\mathfrak{b}_j) = \tilde{f}(\sum_i a_{ij}\mathfrak{b}'_i) = \sum_i a_{ij}\tilde{f}(\mathfrak{b}'_i) = \sum_i a_{ij} \sum_k \widetilde{a_{ki}}\mathfrak{b}''_k = \sum_k (\underbrace{\sum_i \widetilde{a_{ki}}a_{ij}}_{c_{ki}})\mathfrak{b}''_k$$
   $$M(\tilde{f} \circ f, B, B'') = M(\tilde{f} \circ f) = M(\tilde{f}) \circ M(f)$$

Folgerung:
1. $\dim \mathrm{Hom}\ (V, V') = \dim V \cdot \dim V'$
2. Die Algebra der Endomorphismen eines n–dimensionalen Vektorraumes V ist isomorph zu $K^{n\times n}$. Insbesondere folgt (nochmals), daß $K^{n\times n}$ eine assoziative Algebra mit Einselement ist.

Satz 8.2: Es seien V und V' Vektorräume mit Basen B bzw. B', $f \in \text{Hom}\,(V, V')$, $M(f, B, B') = M(f)$

1. $\text{rg}\ f = \text{rg}\ M(f)$
2. Ist $\dim V = \dim V' = n$, dann gilt:
   (a) f Isomorphismus $\Longrightarrow$ $M(f^{-1}) = (M(f))^{-1}$
   (b) f Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ $M(f)$ invertierbar

Beweis:

1. $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis von V, $\quad \text{rg}\ f = \dim\,[f\mathfrak{b}_1, \ldots, f\mathfrak{b}_n]$
   die Koordinaten von $f\mathfrak{b}_1, \ldots, f\mathfrak{b}_n$ stehen in den Spalten von $M(f)$
   $\Longrightarrow$ $\text{rg}\ f = \text{rg}\ M(f)$
2. (a) Es sei $f : V \to V'$ Isomorphismus
   $\begin{matrix} V & \xrightarrow{f} & V' & \xrightarrow{f^{-1}} & V \\ B & & B' & & B \end{matrix} \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_V$
   $M(f^{-1} \circ f) = M(f^{-1}) \circ M(f) = M(\text{id}_V, B) = I$
   $\Longrightarrow$ $M(f)$ invertierbar $\wedge (M(f))^{-1} = M(f^{-1})$
   (b) Es sei $M(f)$ invertierbar
   $\tilde{f} : V' \to V$ sei die lineare Abbildung mit $M(\tilde{f}, B', B) = (M(f))^{-1}$
   $M(\tilde{f} \circ f) = M(\tilde{f}) \circ M(f) = (M(f))^{-1} \circ M(f) = I$
   $\Longrightarrow$ $\tilde{f} \circ f = \text{id}_V$, ebenso $f \circ \tilde{f} = \text{id}_{V'}$ $\Longrightarrow$ f bijektiv, Isomorphismus

Satz 8.3:

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ $\quad A$ invertierbar $\Longleftrightarrow$ $\text{rg}\ A = n$
2. Es seien $A, B \in K^{n \times n}$
   $AB = I \Longrightarrow A, B$ invertierbar, $A^{-1} = B,\ B^{-1} = A$
3. Die Gruppe der invertierbaren Matrizen in $K^{n \times n}$ ist isomorph zu $GL(n, K)$.

Beweis:

1. Wende Satz 8.2 an. $V = V' = K_n,\ B = B'$ Standardbasis
   $f = \varphi_A,\ f(\mathfrak{x}) = A\mathfrak{x}$
   A invertierbar $\Longleftrightarrow$ f Automorphismus $\Longleftrightarrow$ $\text{rg}\ f = n$ $\Longleftrightarrow$ $\text{rg}\ A = n$
2. $M(\varphi_A \circ \varphi_B) = M(\varphi_A) \cdot M(\varphi_B) = AB = I$
   $\Longrightarrow$ $\varphi_A \varphi_B = \text{id}$ $\Longrightarrow$ φ_A surjektiv, φ_B injektiv
   $\Longrightarrow$ φ_A, φ_B Automorphismen $\Longrightarrow$ A, B invertierbar
   $AB = I \Longrightarrow B = A^{-1}$, entsprechend $A = B^{-1}$
3. Matrixzuordnung $M : \text{Hom}\ V \to K^{n \times n}$
   Die Restriktion von M auf $GL(n, K)$ bildet $GL(n, K)$ isomorph auf die Gruppe der invertierbaren Matrizen in $K^{n \times n}$ ab. Diese Gruppe bezeichnen wir im folgenden ebenfalls mit $GL(n, K)$

8.1 Matrixverhalten bei Basisveränderung

Satz 8.4: Es seien V, V' Vektorräume über K, $\dim V, V' < \infty$. B_1, B_2 seien Basen von V; B_1', B_2' Basen von V'. Ferner sei $f \in \text{Hom}\,(V, V')$. Dann gilt:

$$M(f, B_2, B_2') = \underbrace{M(\text{id}_{V'}, B_1', B_2')}_{M(\text{id}_{V'}, B_2', B_1')^{-1}} M(f, B_1, B_1') M(\text{id}_V, B_2, B_1)$$

Bemerkung: Die Matrizen $M(\text{id}_V, B_2, B_1)$, $M(\text{id}_{V'}, B_2', B_1')$ nennen wir auch die Matrizen der Basistransformation $B_1 \to B_2$ bzw. $B_1' \to B_2'$ (Übergangsmatrizen). In den Spalten dieser Matrizen stehen die Koordinaten der neuen Basisvektoren bzgl. der alten Basis. Es ist allgemein $M(\text{id}\,, B_1, B_2) = M(\text{id}\,, B_2, B_1)^{-1}$

Beweis: $\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & V' & \xrightarrow{\text{id}_{V'}} & V' \\ B_2 & & B_1 & & B_1' & & B_2' \end{array}$ $\qquad f = \text{id}_{V'} \circ f \circ \text{id}_V$

Satz 8.1: $M(f, B_2, B_2') = M(\text{id}_{V'}, B_1', B_2') M(f, B_1, B_1') M(\text{id}_V, B_2, B_1)$

$\begin{array}{ccccc} V' & \xrightarrow{\text{id}_{V'}} & V' & \xrightarrow{\text{id}_{V'}} & V' \\ B_2' & & B_1' & & B_2' \end{array}$ $\qquad \text{id}_{V'} = \text{id}_{V'} \circ \text{id}_{V'}$

$I = M(\text{id}_{V'}, B_2', B_2') = M(\text{id}_{V'}, B_1', B_2') \circ M(\text{id}_{V'}, B_2', B_1')$

Die Matrix einer Basistransformation ist stets invertierbar.

Satz 8.5: Besteht zwischen $m \times n$ – Matrizen A_1 und A_2 eine Gleichung
$A_2 = R^{-1} A_1 S$
mit regulären Matrizen $R \in K^{m \times m}$, $S \in K^{n \times n}$, dann sind A_1, A_2 Matrizen derselben linearen Abbildung $\varphi_{A_1} : K_n \to K_m$, $\varphi_{A_1}(\mathfrak{x}) = A_1 \mathfrak{x}$

Beweis: $M(\varphi_{A_1}, B_1, B_1') = A_1$ bzgl. der Standardbasen B_1 von K_n und B_1' von K_m
B_2 = Menge der Spaltenvektoren von S, Basis von K_n
B_2' = Menge der Spaltenvektoren von R, Basis von K_m
Satz 8.4: $M(\varphi_{A_1}, B_2, B_2') = R^{-1} A_1 S = A_2$

Folgerung: Multiplikation einer Matrix mit einer regulären Matrix ändert ihren Rang nicht.
$AS = I^{-1} AS$; $\quad A, I^{-1} AS$ gehören zu $\varphi_A \implies \text{rg}\ A = \text{rg}\ AS = \text{rg}\ \varphi_A$

Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ heißen äquivalent, $A \sim B$, wenn es reguläre Matrizen $S \in K^{n \times n}$, $R \in K^{m \times m}$ gibt mit $B = RAS$; $\sim$ ist Äquivalenzrelation.
Äquivalente Matrizen sind Matrizen derselben linearen Abbildung
$f : K_n \to K_m \quad A \sim B \implies \text{rg}\ A = \text{rg}\ B$

Satz 8.6: 1. Hat $A \in K^{m\times n}$ den Rang r, dann ist A äquivalent zur Matrix

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad r \text{ Einsen}$$

I_r ist für $r > 0$ die $r \times r$ – Einheitsmatrix, $I_0 =$ Nullmatrix

2. $A \sim B \iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$

Beweis: 1. $\varphi_A : K_n \to K_m$, $\varphi_A(\mathfrak{x}) = A\mathfrak{x}$, $M(\varphi_A) = A$ bzgl. der Standardbasen B_1, B_1'
Erweitere eine Basis von Kern φ_A zu einer Basis B_2 von K_n

$$B_2 = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r, \underbrace{\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_n}_{\text{Basis v. Kern } \varphi_A}\} \quad \underbrace{\dim \operatorname{Bild} \varphi_A}_{\operatorname{rg} \varphi_A = \operatorname{rg} A = r} = \underbrace{\dim K_n}_{n} - \dim \operatorname{Kern} \varphi_A$$

$\varphi_{A1}\mathfrak{b}_1 + \cdots + \varphi_{Ar}\mathfrak{b}_r$ sind eine Basis von Bild φ_A.
Erweitere diese Basis zu einer Basis B_2' von K_m.

$$M(\varphi_A, B_2, B_2') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad r \text{ Einsen}$$

Nach Satz 8.4 ist diese Matrix $\sim A$.

2. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B \implies A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim B \implies A \sim B$

Folgerung: 1. Die Relation $\sim$ auf $K^{m\times n}$ hat nur endlich viele Äquivalenzklassen.

2. Es sei $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, $\dim V = n$, $\dim V' = m$, $\operatorname{rg} f = r$.
Dann gibt es Basen B, B' von V bzw. V' mit:

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis wie zu 1. bei Satz 8.6

Satz 8.7: 1. Es seien $f \in \operatorname{Hom} V$, $\dim V = n < \infty$; B_1, B_2 Basen von V, S die Matrix der Basistransformation $B_1 \to B_2$. Dann ist
$M(f, B_2) = S^{-1} M(f, B_1) S$

2. Besteht zwischen $n \times n$ – Matrizen A_1, A_2 eine Gleichung der Form
$A_2 = S^{-1} A_1 S$
mit einer regulären Matrix $S \in K^{n\times n}$, dann sind A_1, A_2 Matrizen desselben Endomorphismus $f = \varphi_{A_1}$ von K_n

Beweis: folgt aus den Sätzen 8.4 und 8.5

Definition: Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine reguläre Matrix S gibt mit $B = S^{-1}AS$.
Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n \times n}$.

Kapitel 9

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

$a_{ij}, b_i \in K$ lineares Gleichungssystem über dem Körper K.
$A = (a_{ij})$ **Koeffizientenmatrix** des Systems.

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ **erweiterte Matrix**

$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ **Lösungsvektor,** $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ rechte Seite des Systems

$A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ Matrixform des Gleichungssystems
Lösungsmenge := Menge aller Lösungsvektoren
Allgemeine Lösung := Formel, die alle Lösungsvektoren liefert
Es sei φ_A die der Matrix A zugeordnete lineare Abbildung $K_n \to K_m$
$\varphi_A(\mathfrak{x}) = A\mathfrak{x}, \quad M(\varphi_A) = A$ bzgl. der Standardbasen
$\varphi_A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{b}$ lösbar $\iff \mathfrak{b} \in$ Bild φ_A

Satz 9.1: Das System $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ ist genau dann lösbar, wenn rg $A =$ rg A_e ist.

Beweis: $e_1, \ldots, e_n$ Standardbasis von K_n $\quad \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ Spaltenvektoren von A
$A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ lösbar $\iff \mathfrak{b} \in$ Bild $\varphi_A = [\varphi_A(e_1), \ldots, \varphi_A(e_n)]$

$$\underbrace{[\varphi_A(e_1), \ldots, \varphi_A(e_n), \mathfrak{b}]}_{V_1} = \underbrace{[\varphi_A(e_1), \ldots, \varphi_A(e_n)]}_{V_2} \iff \underbrace{\dim V_1}_{\text{rg } A_e} = \underbrace{\dim V_2}_{\text{rg } A} \text{ ,da } V_1 \supseteq V_2$$

Das lineare Gleichungssystem $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ heißt **homogen**, wenn $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ist, sonst **inhomogen**.
$A\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ stets lösbar durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, **triviale Lösung**.
$A\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \iff \varphi_A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{o} \iff \mathfrak{x} \in$ Kern φ_A
Satz 6.4: dim Kern $\varphi_A = \dim K_n -$ dim Bild $\varphi_A = n -$ rg A

Satz 9.2: Die Lösungsmenge des homogenen Systems $A\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ ist ein Vektorraum der Dimension $p = n - \text{rg } A$; d.h. es gibt p linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p \in K_n$, so daß die allgemeine Lösung des homogenen Systems die folgende Gestalt hat:
$\mathfrak{x} = \lambda_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + \lambda_p\mathfrak{x}_p,\ \lambda_i \in K$

Folgerung: Das homogene System hat genau dann nur die triviale Lösung, wenn $\text{rg } A = n$ ist.

Satz 9.3: Es sei $\mathfrak{x}_0$ eine spezielle Lösung (**Partikularlösung**) des inhomogenen Systems $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{x}_h = \lambda_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + \lambda_p\mathfrak{x}_p,\ \lambda_i \in K$ die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $A\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, dann lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:
$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_h = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + \lambda_p\mathfrak{x}_p\ \lambda_i \in K$

Beweis: $A\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{b}$; $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b} \iff A\mathfrak{x} = A\mathfrak{x}_0 \iff A(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = \mathfrak{o} \iff \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ Lösung des homogenen Systems

Folgerung:

1. Ist $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ lösbar, dann gilt:
   $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ eindeutig lösbar $\iff \text{rg } A = n$
2. Es sei $m = n,\ A \in K^{m \times n}$. Dann gilt:
   $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ eindeutig lösbar $\iff \text{rg } A = n$

Beweis:

1. $\surd$
2. $\text{rg } A = n \implies \text{Bild } \varphi_A = K_n,\ \mathfrak{b} \in K_n,\ A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ lösbar. Im Fall $m = n$ ist $\text{rg } A = n \iff A$ invertierbar. Man erhält in diesem Fall die eindeutige Lösung in der Form $\mathfrak{x} = A^{-1}\mathfrak{b}$

9.1 Gaußsches Eliminationsverfahren

Wir schreiben das Gleichungssystem in vereinfachter Form:

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{3}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_1 \end{array}$$

Elementare Umformungen:

1. Multiplikation einer Zeile mit $c \neq 0$ aus K
2. Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
3. Vertauschen zweier Zeilen
4. Spaltenvertauschen links vom Strich

1., 2., 3. ändern die Lösungsmenge nicht. 4. entspricht einer Umnumerierung der Unbekannten, die am Ende des Lösungsverfahrens wieder rückgängig gemacht werden kann.

Vereinfachung der Koeffizientenmatrix A durch elementare Umformungen. Es sei $A \neq \mathfrak{o}$. Durch Zeilen– und Spaltenvertauschen erreicht man: $a_{11} \neq 0$, nach Multiplikation der 1. Zeile mit $\frac{1}{a_{11}}$ sogar: $a_{11} = 1$

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & \cdot(-a_{i1}) \\ \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i & \leftarrow \\ \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m & \end{array}$$

für alle $i \neq 1$

$$\longrightarrow \begin{array}{c|ccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cline{2-4} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \multicolumn{3}{c|}{\cdots\cdots\cdots} & \cdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Hat A in dem eingerahmten Bereich Einträge $\neq 0$, dann sorge man dafür (wie oben für a_{11}), daß $a_{22} = 1$ wird.

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} & b_2 & \cdot(-a_{i2}) \\ \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \cdots & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i & \leftarrow \\ \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \cdots & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m & \end{array}$$

für alle $i \neq 2$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cline{3-5} 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \multicolumn{2}{c|}{\cdots} & \multicolumn{3}{c|}{\cdots\cdots\cdots} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Setze das Verfahren fort so lange im eingerahmten Bereich noch Einträge $\neq 0$ stehen.

Auf diese Weise erhält das System schließlich folgende Gestalt:

$$\begin{array}{c|cccccccc|c} & & & & \downarrow r & & & & & \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r \rightarrow & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ & 0 & & & \cdots & & & 0 & b_{r+1} \\ & \multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \cdots \\ & 0 & & & \cdots & & & 0 & b_m \end{array} \qquad (*)$$

Bei elementaren Umformungen bleibt die Dimension des Lösungsraumes des homogenen Systems dim Kern $\varphi_A = n - \text{rg } A$ unverändert, d.h. rg A bleibt unverändert. $(*)$ entnimmt man rg $A = r$. Durch elementare Umformungen der Matrix kann rg A bestimmt werden.

Es sei rg $'A$ die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A (Zeilenrang von A). $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ Zeilenvektoren von A

$[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m] = [c\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m] = [\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m] \quad c \neq 0$

Elementare Umformungen ändern rg $'A$ nicht. $(*)$ entnimmt man rg $'A = r$. Also rg $'A =$ rg A, „Zeilenrang = Spaltenrang", rg $A^T =$ rg A
$A \in K^{m \times n} \implies$ rg $A \leq \min\{m, n\}$
Aus der Form $(*)$ des Gleichungssystem folgt:
System lösbar $\iff b_{r+1} = \cdots = b_m = 0 \iff$ rg $A =$ rg A_e
Es sei $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$
Für jede Wahl $x_{r+1}, \ldots, x_n \in K$ ergibt sich genau eine Lösung $x_1, \ldots, x_n$.

Partikularlösung: $\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$n - r = p$ linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} -a_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} -a_{1,r+2} \\ \vdots \\ -a_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{x}_p = \begin{pmatrix} -a_{1n} \\ \vdots \\ -a_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1 \mathfrak{x}_1 + \cdots + \lambda_p \mathfrak{x}_p, \ \lambda_i \in K$

Beispiel: Bestimme die allgemeine Lösung des folgenden reellen Gleichnungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 9 \\ 3x_1 & + & 9x_2 & - & 2x_3 & - & 11x_4 & = & -3 \\ 4x_1 & + & 12x_2 & - & 6x_3 & - & 8x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 14x_4 & = & -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r cccc} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 & (-3) & (-4) & (-2) \\ 3 & 9 & -2 & -11 & -3 & \leftarrow & & \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 6 & & \leftarrow & \\ 2 & 6 & 2 & -14 & -12 & & & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r l} & \leftarrow & \rightarrow & & & \\ 1 & 3 & -4 & 3 & 9 & \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 & \cdot\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 & \cdot\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 & \cdot\frac{1}{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r cc} 1 & -4 & 3 & 3 & 9 & & \leftarrow \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & (-1) & (4) \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & \leftarrow & \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Partikularlösung: $\mathfrak{x}'_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems:

$\mathfrak{x}'_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{x}'_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösungen des inhomogenen Systems (x_2, x_3 wieder vertauscht)

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rlrr} x_1 = & -3 & -3\lambda_1 & +5\lambda_2 \\ x_2 = & & \lambda_1 & \\ x_3 = & -3 & & +2\lambda_2 \\ x_4 = & & & \lambda_2 \end{array}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Beispiel: Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ Bestimme A^{-1}

$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ Spaltenvektoren von A^{-1}

$$A\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\mathfrak{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccr|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & (-3) & (-1) \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow & \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccr|rccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & (-2) \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & \leftarrow \end{array}$$

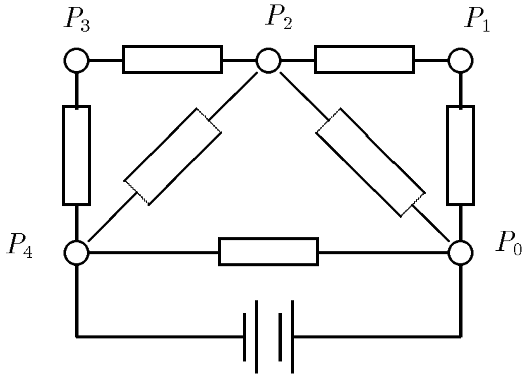
$$\begin{array}{ccr|rrccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & & \leftarrow \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 & 1 & \cdot(-1) & (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|rcr} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -1 \end{array}$$

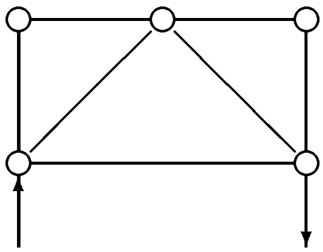
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

9.2 Beispiel aus der Elektrotechnik

Berechnung elektrischer Widerstandsnetzwerke



kurz:



Knotenpunkte $P_0, \ldots, P_{n+1}$; P_0, P_{n+1} Nachbarn der Spannungsquelle.
Wir setzen vorraus, daß das Netzwerk einen zusammenhängenden Graphen darstellt (ohne die Verbindung über die Spannungsquelle).
R_{jk} Widerstand zwischen P_j, P_k $\quad R_{jk} = R_{kj} > 0; \quad j,k = 0,\ldots,n+1;\ j \neq k$
U_j Spannung zwischen P_j und P_0; $\quad j = 0,\ldots,n+1$
Dann wird $U_0 = 0,\ U_{n+1} = V \geq 0$ (Batteriespannung)
Leitfähigkeit $\sigma_{j,k} = \frac{1}{R_{jk}}; \quad j,k = 0,\ldots,n+1;\ j \neq k$
Wir setzen $\sigma_{j,k} = 0$, wenn keine direkte Verbindung zwischen P_j und P_k existiert.
$(\sigma_{j,k})$ ist eine symmetrische $(n+2) \times (n+2)$ – Matrix, $\sigma_{j,k} \geq 0\ (j \neq k)$.
Für $j = k$ (Hauptdiagonale) sind die Einträge noch undefiniert.
Der Strom I_{ik} von P_j nach P_k berechnet sich nach dem **Ohmschen Gesetz**:
$U_j - U_k = R_{jk} I_{jk}, \quad I_{jk} = \sigma_{jk}(U_j - U_k)$ Vorzeichen beachten! $I_{kj} = -I_{jk}$

Kirchhoffsche Regel:
In jedem Punkt $P_j \neq P_0, P_{n+1}$ ist die Summe der einfließenden Ströme gleich der Summe der ausfließenden Ströme.

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n+1} I_{jk} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n+1} \sigma_{jk}(U_j - U_k) = 0, \text{ für } j = 1,\ldots,n \quad (2)$$

Das gibt ein System von n linearen Gleichnungen für n unbekannte Spannungen $U_1,\ldots,U_n$. Ist das System eindeutig lösbar?
Für $j = 1,\ldots,n$ gilt:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n+1} \sigma_{jk}(U_k - U_j) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n+1} \sigma_{jk} U_k - \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n+1} \sigma_{jk} U_j \qquad \text{Setze } \sigma_{jj} = -\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n+1} \sigma_{jk}$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n+1} \sigma_{jk}U_k + \sigma_{jj}U_j = \sum_{k=0}^{n+1} \sigma_{jk}U_k = \sigma_{j0}\underbrace{U_0}_{0} + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk}U_k + \sigma_{j,n+1}\underbrace{U_{n+1}}_{V} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk}U_k = -\sigma_{j,n+1}V \quad (1)$$

Wir zeigen: Das homogene System $\sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk}U_k = 0;\ j = 1,\ldots,n \quad (3)$

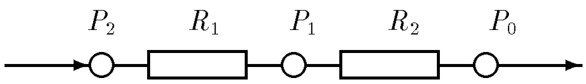
hat nur die triviale Lösung.
(Dann ist $(\sigma_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ invertierbar und damit (1) eindeutig lösbar).

Annahme: (3) hat eine Lösung mit $\min_{k=1,\ldots,n} U_k = U_j < 0$
Dann hat (2) die Lösung $U_0 = 0, U_1, \ldots, U_n, U_{n+1} = V = 0$
In (2) sind alle Summanden ≤ 0, damit sogar $= 0$
$\sigma_{jk}(U_j - U_k) = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n+1,\ k \neq j$
$\Longrightarrow U_k = U_j$ in allen Nachbarpunkten P_k von P_j.
Ebenso müssen dann alle Nachbarpunkte der P_k die Spannung U_j haben. Da das Netzwerk zusammenhängend ist folgt schließlich $U_j = U_0 = 0$. **Widerspruch!**
Ebenso widerlegt man $\max_{k=1,\ldots,n} U_k > 0$.
Also hat (3) nur die triviale Lösung.
Ähnlich zeigt man, daß für alle Lösungen von (1) gilt: $0 \leq U_k \leq V$

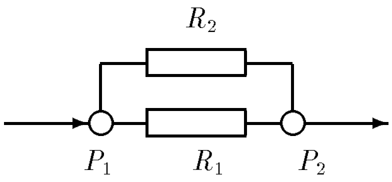
Gesamtstrom $I_g = \sum_{k=1}^{n+1} I_{k0} = \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_{k0}U_k = \sum_{k=0}^{n} I_{n+1,k} = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n+1,k}(V - U_k)$

Gesamtwiderstand $R_g = \dfrac{V}{I_g}$

Serien– und Parallelschaltung zweier Widerstände:



Serienschaltung



Parallelschaltung

Bei Serienschaltung addieren sich die Widerstände.

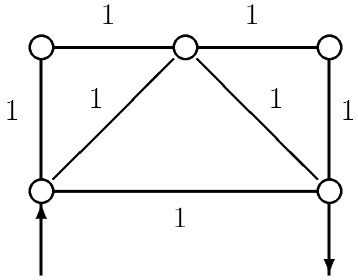
$$\frac{U_1}{R_2} + \frac{U_1 - V}{R_1} = 0, \quad U_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V}{R_1}, \quad U_1 = \frac{R_2 V}{R_1 + R_2}$$

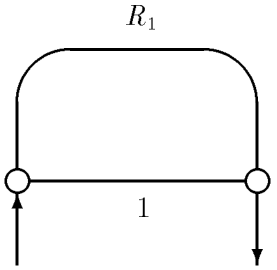
$$I_g = \frac{U_1}{R_2} = \frac{1}{R_1 + R_2}V, \quad R_g = \frac{V}{I_g} = R_1 + R_2$$

Bei Parallelschaltung addieren sich die Leitfähigkeiten.

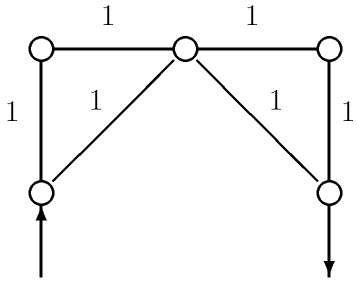
$$I_g = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}, \quad \frac{1}{R_g} = \frac{I_g}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

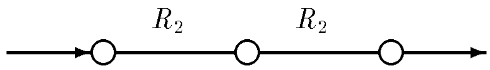
Bestimme den Gesamtwiderstand folgendes Netzwerkes:



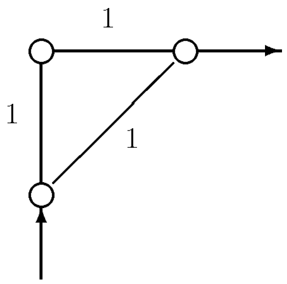


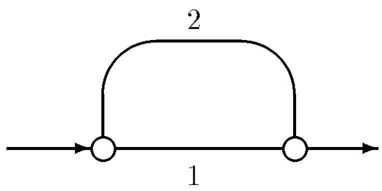
R_1 :





R_2 :





$$\frac{1}{R_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad R_2 = \frac{2}{3}, \quad R_1 = 2R_2 = \frac{4}{3};$$

$$\frac{1}{R_g} = 1 + \frac{1}{R_1} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}, \quad R_g = \frac{4}{7}$$

9.3 Elementarmatrizen

Es handelt sich um besonders einfache invertierbare $n \times n$ – Matrizen.
Es sei $a \neq 0, k \neq l$

$$T_{k,l}(a) = (\alpha_{ij}), \quad \alpha_{ij} \begin{cases} 1, \text{ für } i = j \\ a, \text{ für } i = k,\ j = l \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \quad \uparrow l \end{array}$$

with row label: $k \rightarrow$ (third row)

$$T_{k,k}(a) = (\beta_{ij}), \quad \beta_{ij} \begin{cases} 0, \text{ für } i \neq j \\ 1, \text{ für } i = j \neq k \\ a, \text{ für } i = j = k \end{cases} \qquad k \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Es sei A $n \times n$ – Matrix
$T_{k,l}(a)A$ zur k–ten Zeile von A wird die mit a multiplizierte l–te Zeile addiert.
$AT_{k,l}(a)$ zur l–ten Spalte von A wird die mit a multiplizierte k–te Spalte addiert.

$$T_{kl}(a)T_{kl}(-a) = I_n, \quad (T_{kl}(a))^{-1} = T_{kl}(-a), \quad (T_{kk}(a))^{-1} = T_{kk}(a^{-1})$$

Elementarmatrizen sind invertierbar. Die Inversen sind Elementarmatrizen. Alle elementaren Umformungen an A lassen sich durch Multiplikation mit Elementarmatrizen ausführen.
z.B. auch Zeilenvertauschen. Zeilenvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_1 \cdot(-1) \\ \mathfrak{a}_2 \;\leftarrow \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathfrak{a}_1 \;\leftarrow \\ \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1\,(1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathfrak{a}_2 \;(-1) \\ \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 \;\leftarrow \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathfrak{a}_2 \\ -\mathfrak{a}_1 \cdot(-1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a}_1 \end{matrix}$$

Es sei $A = (a_{ij})$ eine invertierbare $n \times n$ – Matrix. A kann durch Multiplikation mit Elementarmatrizen in I_n überführt werden.
$T_1 \cdots T_r A T'_1 \cdots T'_s = I, \quad A = T_r^{-1} \cdots T_1^{-1} T'^{-1}_s \cdots T'^{-1}_1$
A ist Produkt von Elementarmatrizen.
Wir zeigen, daß wir in diesem Produkt höchstens eine Diagonalmatrix benötigen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Fall: Einer der Einträge $a_{12}, \ldots, a_{1n}$ ist $\neq 0$, etwa $a_{12} \neq 0$
   Multipliziere die 2. Zeile mit $\frac{1}{a_{12}}(1 - a_{11})$ und addiere sie zur ersten
   $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}$. Erzeuge unterhalb der 1 wie üblich Nullen.

2. Fall: $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0, \; a_{11} \neq 0$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \\ 0 & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} \end{matrix}$$

Da rg $A = n$ und die ersten beiden Spalten linear unabhängig sind, ist einer der Einträge $a_{22}, a_{32}, \ldots, a_{n2} \neq 0$, etwa a_{22}. Addiere die 2. Spalte zur ersten. Dann weiter wie im 1. Fall.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots \\ 0 & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & a_{n2} & \cdots \end{pmatrix}$$ Einer der Einträge $a_{22}, \ldots, a_{n2}$ ist $\neq 0$

1. Fall: Einer der Einträge $a_{32}, \ldots, a_{3n}$ ist $\neq 0$, etwa $a_{32} \neq 0$
Multipliziere die 3. Zeile mit $\frac{1}{a_{32}}(1 - a_{22})$ und addiere zur 2. Zeile

$$\begin{array}{cc} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \\ 0 & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{3n} \end{array}$$

Erzeuge in der 2. Spalte über und unter der 1 lauter Nullen

2. Fall: $a_{32} = \cdots = a_{3n} = 0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{3n} \end{array}$$

Da die Spalten linear unabhängig sind, ist wenigstens einer der Einträge $a_{33}, \ldots, a_{3n} \neq 0$. Etwa $a_{33} \neq 0$. Addiere die 3. Spalte zur 2. Spalte. Fahre dann wie im 1. Fall fort.

Man erhält $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & \cdots \\ 0 & 1 & a_{23} & \\ 0 & 0 & a_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n3} & \end{pmatrix}$ usw. bis $A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & a_{1n} \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & a_{nn} \end{pmatrix}$

$a_{n,n} \neq 0$. Erzeuge über a_{nn} lauter Nullen $\begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{nn} \end{pmatrix}$

Satz 9.4: Jede invertierbare Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen, von denen höchstens eine Matrix eine Diagonalmatrix ist.

$$A = T_1 T_2 \cdots T_r D, \quad D = T_{n,n}(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

Kapitel 10

Determinanten

Wiederholung
S_n symmetrische Gruppe vom Grad n, $\quad |S_n| = n!$
$t \in S_n$ Transposition, $t = (a, b)$ $\quad a, b$ werden vertauscht.
$\pi \in S_n$, π ist Komposition von Transpositionen.
$\pi = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_q$ Dabei ist q stets gerade oder ungerade
sgn $\pi = (-1)^q$, $\quad$ sgn $\pi_1 \circ \pi_2 =$ sgn $\pi_1 \cdot$ sgn π_2

$$\pi \begin{cases} \text{gerade, wenn sgn } \pi = 1 \\ \text{ungerade, wenn sgn } \pi = -1 \end{cases}$$

A_n Menge der geraden Permutationen in S_n, alternierende Gruppe vom Grad n.
t Transposition $\implies tA_n = A_n t$ Menge der ungeraden Permutationen

Es sei V Vektorraum über K.

Definition: Eine Abbildung $f : V^n \to K$ heißt eine n–**fache Linearform** von V, wenn $f(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ in jeder Variablen $\mathfrak{x}_i$ linear ist.
$f(\ldots, \lambda\mathfrak{x}_i + \mu\mathfrak{x}_i', \ldots) = \lambda f(\ldots, \mathfrak{x}_i, \ldots) + \mu f(\ldots, \mathfrak{x}_i', \ldots)$
Bilinearform := 2–fache Linearform
Die n–fachen Linearformen bilden einen Unterraum von K^{V^n}.

Beispiel:

1. $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in K^m$, $\quad \mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_m)$
   $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m =< \mathfrak{x}, \mathfrak{y} >$
   Das innere Produkt der Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in K^m$ ist eine Bilinearform
2. $V = \mathbb{R}[x]$; $\quad P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$
   $f(P_1, P_2) = \int_0^1 P_1(x) P_2(x) dx$ Bilinearform von $\mathbb{R}[x]$

10.1 Determinantenfunktionen

$V = K^n$

Definition: Eine n–fache Linearform f von K^n heißt eine **Determinantenfunktion**, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. $f(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0$, wenn $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_j$ für ein Paar $i \neq j$
2. $f(\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_n) = 1$ für die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_n$ der Standardbasis

Satz 10.1: Ist f eine Determinantenfunktion von K^n, dann gilt:
$f(\dots, \mathfrak{a}_i, \dots, \mathfrak{a}_j, \dots) = f(\dots, \mathfrak{a}_i + \lambda \mathfrak{a}_j, \dots, \mathfrak{a}_j, \dots)$

Beweis: rechte Seite $= f(\dots, \mathfrak{a}_i, \dots, \mathfrak{a}_j, \dots) + \lambda \underbrace{f(\dots, \mathfrak{a}_j, \dots, \mathfrak{a}_j, \dots)}_{0}$

Folgerung: Sind $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ linear abhängig, dann ist $f(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0$

Beweis: Es sei etwa $\mathfrak{a}_1 = \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{a}_n$

$$f(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) = f(\underbrace{\mathfrak{a}_1 - \lambda_2 \mathfrak{a}_2 \cdots - \lambda_n \mathfrak{a}_n}_{\mathfrak{o} = 0 \cdot \mathfrak{o}}, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0$$

Satz 10.2: Es sei f Determinantenfunktion von K^n, $\pi \in S_n$. Dann gilt:
$f(\mathfrak{a}_{\pi 1}, \mathfrak{a}_{\pi 2}, \dots, \mathfrak{a}_{\pi n}) = \text{sgn } \pi \cdot f(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n)$
Insbesondere wechselt f das Vorzeichen, wenn zwei Vektoren $\mathfrak{a}_i$ vertauscht werden.

Beweis: Wir beweisen zunächst die letzte Aussage.
$f(\dots, \mathfrak{a}_i, \dots, \mathfrak{a}_j, \dots) = f(\dots, \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j, \dots, \mathfrak{a}_j, \dots) = f(\dots, \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j, \dots, -\mathfrak{a}_i, \dots)$
$= f(\dots, \mathfrak{a}_j, \dots, -\mathfrak{a}_i, \dots) = -f(\dots, \mathfrak{a}_j, \dots, \mathfrak{a}_i, \dots)$
Der Satz ist richtig für $\pi = t$ Transposition
Es sei jetzt $\pi = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_q$ Produkt von Transpositionen. $(-1)^q = \text{sgn } \pi$
$f(\mathfrak{a}_{\pi 1}, \dots, \mathfrak{a}_{\pi n}) = f(\mathfrak{a}_{t_1(t_2 \dots t_q 1)}, \dots, \mathfrak{a}_{t_1(t_2 \dots t_q n)}) = -f(\mathfrak{a}_{t_2 \dots t_q 1}, \dots, \mathfrak{a}_{t_2 \dots t_q n}) \cdots =$
$(-1)^q f(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = \text{sgn } \pi f(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n)$

Satz 10.3: Es sei f Determinantenfunktion von K^n;

$$\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n \in K^n \quad \mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathfrak{b}_j\,,\ i = 1, \dots, n. \text{ Dann ist}$$

$$f(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = (\sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi a_{1,\pi 1} a_{2,\pi 2} \cdots a_{n,\pi n}) f(\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$$

Beweis: $f(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = f(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1,j_1} \mathfrak{b}_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n,j_n} \mathfrak{b}_{j_n})$

$$= \sum_{\substack{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n \\ \text{paarweise verschieden}}} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n} \cdot f(\mathfrak{b}_{j_1}, \mathfrak{b}_{j_2}, \dots, \mathfrak{b}_{j_n})$$

Es sei $\pi \in S_n$ mit $\pi 1 = j_1,\ \pi 2 = j_2, \dots, \pi n = j_n$

$$f(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n} \underbrace{f(\mathfrak{b}_{\pi 1}, \dots, \mathfrak{b}_{\pi n})}_{\text{sgn } \pi \cdot f(\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)}$$

Satz 10.4: $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ linear abhängig $\Longleftrightarrow$ $f(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) = 0$

Beweis: $\Longrightarrow$ steht in Satz 10.1, Folgerung
Es sei $f(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) = 0$. Annahme: $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ linear unabhängig.
Dann ist $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ eine Basis von K^n.
Jeder Vektor $\mathfrak{a}_i$ ist in Satz 10.3 darstellbar, und es folgt:
$f(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) = 0$ für alle $\mathfrak{a}_i \in K^n$.
Insbesondere $f(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n) = 0$ **Widerspruch!**

Satz 10.5: Es gibt genau eine Determinantenfunktion von K^n.
Ist $\mathfrak{a}_1 = (\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \mathfrak{a}_n = (\mathfrak{a}_{n1}, \mathfrak{a}_{n2}, \ldots, \mathfrak{a}_{nn})$, dann gilt:

$$(*) \quad f(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1,\pi 1} a_{2,\pi 2} \cdots a_{n,\pi n} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{\pi 1,1} a_{\pi 2,2} \cdots a_{\pi n,n}$$

Beweis: $\mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathfrak{e}_j\,, \quad i = 1, \ldots, n \quad \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ Standardbasis

Satz 10.3: $f(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n} \underbrace{f(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n)}_{1}$

eindeutig bestimmt durch $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$.
Wenn es eine Determinantenfunktion f gibt, dann nur eine. Sie muß durch $(*)$ definiert sein.
Man definiere f durch $(*)$. Dann ist f eine n–fache Linearform.
Ist $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{e}_i$ für $i = 1, \ldots, n$, dann ist $a_{ij} = \delta_{ij}$

$$f(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \delta_{1,\pi 1} \cdots \delta_{n,\pi n}$$

Nur ein Summand $\neq 0$, der für $\pi = \mathrm{id}$. $f(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n) = 1$
Wir zeigen: $f(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i, \ldots, \mathfrak{a}_j, \ldots, \mathfrak{a}_n) = 0$, wenn $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_j$, für $i \neq j$
$t = (i, j) \in S_n$ $\quad A_n$ Menge der geraden Permuntationen
$A_n \cdot t = \{\pi \cdot t \mid \pi \in A_n\}$ Menge der ungeraden Permuntationen
Es sei $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_j \quad a_{ik} = a_{jk}$, für $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} f(\ldots, \mathfrak{a}_i, \ldots, \mathfrak{a}_j, \ldots) &= \sum_{\pi \in A_n} \underbrace{\operatorname{sgn} \pi}_{1} a_{1,\pi 1} \cdots a_{i,\pi i} \cdots a_{j,\pi j} \cdots a_{n,\pi n} \\ &+ \sum_{\pi \in A_n} \underbrace{\operatorname{sgn} \pi}_{-1} a_{1,\pi t 1} \cdots a_{i,\pi t i} \cdots a_{j,\pi t j} \cdots a_{n,\pi t n} \\ &- \sum_{\pi \in A_n} a_{1,\pi 1} \cdots a_{i,\pi j} \cdots a_{j,\pi i} \cdots a_{n,\pi n} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f(\ldots, \mathfrak{a}_i, \ldots, \mathfrak{a}_j, \ldots) = 0$

f ist Determinantenfunktion
Zur Herleitung der Gleichung unter $(*)$

Mit π durchläuft auch π^{-1} alle Elemente von S_n genau einmal. sgn π = sgn π^{-1}
Ordne in $(*)$ die Faktoren nach dem zweiten Index

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1,\pi 1} a_{2,\pi 2} \cdots a_{n,\pi n} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} a_{\pi^{-1}1,1} \cdots a_{\pi^{-1}n,n}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{\pi 1,1} \cdots a_{\pi n,n}$$

Definition: Wir bezeichnen die eindeutig bestimmte Determinantenfunktion von K^n mit det. $\det(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ heißt die **Determinante** der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$. Die Determinante eine Matrix $A \in K^{n \times n}$, $\det A$ ist die Determinante der Zeilenvektoren von A.

Satz 10.6: $A, B \in K^{n \times n}$; $\quad \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in K^n$

1. $det A^T = \det A$
2. $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ linear abhängig $\iff \det(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = 0$
3. rg $A = n \iff A \neq 0$
4. A invertierbar $\iff \det A \neq 0$
5. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
6. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
7. $\det I_n = 1$

Beweis:

1. $A = (a_{ij}), \quad A^T = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ji}$

   $$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi c_{1,\pi 1} \cdots c_{n,\pi n} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{\pi 1,1} \cdots a_{\pi n,n} = \det A$$

   nach Satz 10.4
   $\det A$ ist auch die Determinante der Spaltenvektoren von A, n–fache Linearform der Spaltenvektoren von A
2. Satz 10.4
3. rg $A = n \iff$ Zeilenvektoren linear unabhängig $\overset{2.}{\iff} \det A \neq 0$
4. A invertierbar $\iff$ rg $A = n \iff \det A \neq 0$
5. $A = (a_{ij}),\ B = (b_{jk})$; $\quad \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ Standardbasis von K^n
   Definiere:

   $$\mathfrak{b}_i = \sum_{k=1}^n b_{jk} \mathfrak{e}_k\,; \quad j = 1, \ldots, n; \text{ Zeilenvektoren von } B$$

   $$\mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathfrak{b}_j\,; \quad i = 1, \ldots, n$$

   $$\Longrightarrow \mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_{jk} \mathfrak{e}_k = \sum_{k=1}^n (\underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}}_{c_{ik}}) \mathfrak{e}_k = \sum_{k=1}^n c_{ik} \mathfrak{e}_k\,; \quad A \cdot B = (c_{ik})$$

$\det(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = \det(c_{ik}) = \det(A \cdot B)$
Satz 10.3: $\det(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = \det A \cdot \underbrace{\det(\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)}_{\det B}$

6. $A \cdot A^{-1} = I_n$
   $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n = 1$
   $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
7. $\det I_n = \det(\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_n) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(a_{ij})$$

Zusammenfassung wichtiger Rechenregeln für $\det A$

1. Addiert man zu einer Zeile (Spalte) eine Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten), dann ändert sich $\det A$ nicht.
2. Vertauscht man zwei Zeilen oder zwei Spalten, dann wechselt $\det A$ das Vorzeichen.
   Umformungen gemäß 1.,2. nennen wir elementare Determinantenumformungen.
3. $\det A$ ist linear in den Zeilen und ebenso in den Spalten von A

10.2 Berechnung von Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_2} \operatorname{sgn} \pi a_{1,\pi 1} a_{2,\pi 2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$|S_3| = 3! = 6 \quad A_3 = \{\mathrm{id}, (123), (132)\} \quad S_3 \setminus A_3 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$A = (a_{ij}) \in K^{3\times 3} \quad \det A = \sum_{\pi \in S_3} \operatorname{sgn} \pi a_{1,\pi 1} a_{2,\pi 2} a_{3,\pi 3}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$

$$\begin{array}{cccc|cc} +\searrow & +\searrow & +\searrow & -\swarrow & -\swarrow & -\swarrow \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Regel von SARRUS

Satz 10.7: Wird A durch elementare Determinantenumformungen mit k Zeilen– und Spaltenumformungen in eine Dreiecksmatrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

überführt, dann ist $\det A = (-1)^k \det B = (1-)^k b_{11} \cdot b_{22} \cdots b_{nn}$

Beweis: $\det A = (-1)^k \det B$ folgt aus den vorhergehenden Sätzen.

$$\det B = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \qquad \underbrace{b_{1,\pi 1} \cdots b_{n,\pi n}}_{0, \text{ falls } \nu > \pi(\nu) \text{ für ein } \nu \in \{1,\ldots,n\}}$$

Es sei $\nu \leq \pi\nu$ für alle $\nu = 1, \ldots, n$
$n \leq \pi n \leq n \implies \pi n = n, \quad n-1 \leq \pi(n-1) \leq n-1 \implies \pi(n-1) = n-1$ usw.
$\implies \pi = \mathrm{id} \quad \det B = b_{11} \cdot b_{22} \cdots b_{nn}$

Satz 10.8: $A \in K^{n \times n}$ habe folgende „Stufenform“:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_4 = 0 \\ \hline A_3 & A_2 \\ \hline \end{array}$$

Dann ist $\det A = \det A_1 \cdot \det A_2$

Beweis: A_1 stehe im Schnitt der ersten m Zeilen und Spalten.

$$Z = \{1, \ldots, m\},\ \overline{Z} = \{1, \ldots, n\} \setminus Z; \quad \det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n}$$

Wegen $A_4 = 0$ genügt es nur über $\pi \in S_n$ mit $\pi(Z) = Z$ zu summieren.
$\pi(Z) = Z \iff \pi(\overline{Z}) = \overline{Z}$
Jede Permutation $\pi \in S_n$ mit $\pi(Z) = Z$ zerfällt in $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ mit:
$\pi_1 \restriction Z = \pi \restriction Z,\ \pi_1 \restriction \overline{Z} = \mathrm{id}_{\overline{Z}}; \quad \pi_2 \restriction Z = \mathrm{id}_Z,\ \pi_2 \restriction \overline{Z} = \pi \restriction \overline{Z};$
$\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi_1 \cdot \operatorname{sgn} \pi_2$

$$\det A = \sum_{\pi_1 \in S(Z)} \sum_{\pi_2 \in S(\overline{Z})} \operatorname{sgn} \pi_1 \cdot \operatorname{sgn} \pi_2 a_{1,\pi_1 1} \cdots a_{m,\pi_1 m} a_{m+1,\pi_2(m+1)} \cdots a_{n,\pi_2(n)}$$

$$= \sum_{\pi_1 \in S(Z)} \operatorname{sgn} \pi_1 a_{1,\pi_1 1} \cdots a_{m,\pi_1 m} \sum_{\pi_2 \in S(\overline{Z})} \operatorname{sgn} \pi_2 a_{m+1,\pi_2(m+1)} \cdots a_{n,\pi_2(n)}$$

$$= \det A_1 \cdot \det A_2$$

Der Satz gilt ebenso für $A_3 = 0$.

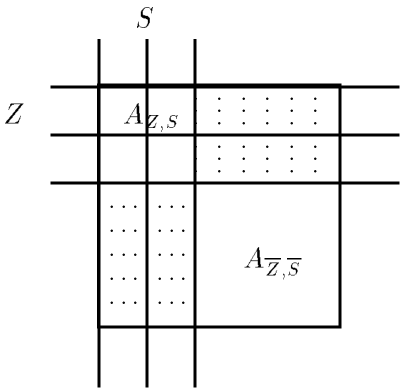
$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n} \quad T = \{1, 2, \ldots, n\}$
$P_m(T)$ Menge aller m–elementigen Teilmengen von T.
Zeilenmenge $Z = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq T, \quad \overline{Z} = T \setminus Z$
Spaltenmenge $S = \{j_1, \ldots, j_m\} \subseteq T, \quad \overline{S} = T \setminus S$
$A_{Z,S}$ $m \times m$ – Untermatrix von A aus den Zeilen Z und den Spalten S.
entsprechend $A_{\overline{Z},\overline{S}} \in K^{(n-m)\times(n-m)}$

Satz 10.9: Laplacescher Entwicklungssatz, 1772
Die Entwicklung von $\det A$ nach den Zeilen $Z = \{i_1, \ldots, i_m\}$ lautet:

$$\det A = \sum_{\substack{S \in P_m(T) \\ S=\{j_1,\ldots,j_m\}}} (-1)^{i_1+\cdots+i_m+j_1+\cdots+j_m} \det A_{Z,S} \cdot \det A_{\overline{Z},\overline{S}}$$

Beweis: $\det A = \sum\limits_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n} = \sum\limits_{S \in P_m(T)} \underbrace{\sum\limits_{\pi(Z)=S,\ \pi \in S_n} \text{sgn } \pi a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n}}_{\sigma}$

In σ kommen nur Einträge aus $A_{Z,S}$ und $A_{\overline{Z},\overline{S}}$ vor. σ ändert sich nicht, wenn alle Einträge im gepunkteten Bereich 0 gesetzt werden. So entsteht A' aus A, $\quad A' = (a'_{ij})$



$$\sigma = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi a'_{1,\pi 1} \cdots a'_{n,\pi n} = \det A' \overset{\text{Satz 10.8}}{=} \det A_{Z,S} \cdot \det A_{\overline{Z},\overline{S}}$$

A' hat im allgemeinen nicht die Stufenform wie in der Skizze, kann aber durch Zeilen– und Spaltenvertauschungen in diese Form gebracht werden.

Zeilenvert.	$i_1, \ldots, i_m \to 1, \ldots, m$	$: (i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_m - m)$
Spaltenvert.	$j_1, \ldots, j_m \to 1, \ldots, m$	$: (j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \cdots + (j_m - m)$
		$i_1 + \cdots + i_m + j_1 + \cdots + j_m - 2(1 + \cdots + m)$

$$\Longrightarrow \quad \sigma = (-1)^{i_1+\cdots+i_m+j_1+\cdots+j_m} \det A_{Z,S} \det A_{\overline{Z},\overline{S}}$$

Statt nach Zeilen kann auch nach Spalten entwickelt werden.

Definition: Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Die Untermatrix $A_{ij} \in K^{n-1 \times n-1}$ entsteht durch Streichen der i–ten Zeile und der j–ten Spalte. Man nennt $(-1)^{i+j} \det A_{ij} = \text{Adj}\,(i,j)$ die **Adjunkte** oder den **Cofaktor** von (i,j).

Satz 10.10: Entwicklung nach einer Zeile i bzw. Spalte j

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{Adj}\,(i,j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \text{Adj}\,(i,j)$$

Beweis: folgt aus Satz 10.9

Beispiel: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$
$= 45 - 48 - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0$

Bemerkung: Definition und Berechnung von Determinanten bleiben unverändert, wenn K nicht Körper, sondern kommutativer Ring mit Einselement ist. Z.B. für einen Polynomring $K[x]$

Satz 10.11:
1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{Adj}\,(k,j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{Adj}\,(i,k) = 0$, für $i \neq k$ bzw. $j \neq k$
2. Ist $A = (a_{ij})$ regulär, dann gilt:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{Adj}\,(i,j))^T_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

Beweis:
1. Beide Ausdrücke sind Entwicklungen einer Determinante mit 2 gleichen Zeilen bzw. Spalten.
$$\begin{matrix} i\text{–te Zeile} \\ k\text{–te Zeile} \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{———————} \\ \text{———————} \end{pmatrix}$$
Ersetze die k–te Zeile durch die i–te Zeile. Entwickle nach der k–ten Zeile
2. Es sei $A \cdot (\mathrm{Adj}\,(i,k))^T = (c_{ik})$
$c_{ik} = \sum_j a_{ij}\mathrm{Adj}\,(k,j) = \det A \cdot \delta_{ik}$, d.h $(c_{ik}) = \det A \cdot I$
$$\Longrightarrow\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{Adj}\,(i,j))^T_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

Satz 10.12: Cramersche Regel

Es sei A eine reguläre $n \times n$ – Matrix, $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Dann hat das Gleichungssystem $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ die Lösung:

$$x_i = \frac{1}{\det A} \overset{i\text{–te Spalte}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} ; \quad i = 1,\dots,n$$

Beweis: $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b} \Longrightarrow \mathfrak{x} = A^{-1}\mathfrak{b}$, $\quad A^{-1} = (c_{ij})$, $c_{ij} = \dfrac{\mathrm{Adj}\,(j,i)}{\det A}$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}b_j = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} b_j\mathrm{Adj}\,(j,i) = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Eine $k \times l$ – Untermatrix von A steht im Schnitt von k Zeilen und l Spalten von A. Eine k–reihige Unterdeterminante von A ist die Determinante einer $k \times k$ – Untermatrix von A

Satz 10.13: Es sei $A \in K^{m \times n}$, $A \neq 0$. Ist r die größte natürliche Zahl, für die A eine r–reihige Unterdeterminante $\neq 0$ hat, dann ist $r = \text{rg } A$.

Beweis: Es sei B eine $r \times r$ – Untermatrix von A, $\det B \neq 0$.
Dann sind die Spalten von B und damit auch die entsprechenden r Spalten von A linear unabhägig. Also rg $A \geq r$.
Umkehrung:
A hat rg A linear unabhängige Zeilen. Sie bilden eine Matrix A', rg $A' =$ rg A.
A' hat rg A linear unabhängige Spalten. Sie bilden eine rg $A \times$ rg A – Untermatrix A'' von A. A'' regulär, $\det A'' \neq 0 \implies r \geq \text{rg } A$. Also $r = \text{rg } A$.

Definition: Es sei $\varphi \in \text{Hom } V$, $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis von V, $M(\varphi, B) = A$
Dann ist $\det \varphi = \det A$ die Determinante von φ.
Diese Definition ist unabhängig von B: $\det(S^{-1}AS) = \det A$

Kapitel 11

Skalarprodukte

11.1 Skalarprodukte reeller Vektorräume

Es sei V Vektorraum über K
Bilinearform (BLF) $\beta : V \times V \to K$, $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ linear in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$.
$\beta(\mathfrak{o}, \mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{o}) = 0$
β heißt **symmetrisch (SF)**, wenn $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$

Definition: Eine Bilinearform β eines reellen Vektorraumes V heißt ein **Skalarprodukt**, wenn gilt:

1. β ist symmetrisch
2. β ist **positiv definit**, d.h. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) > 0$ für alle $\mathfrak{x} \neq 0$
   $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0 \iff \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$

Beispiel:

1. $V = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_n)$
   $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ **Standard – Skalarprodukt** von $\mathbb{R}^n$
2. $V = C[a, b]$ Raum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$.
   $h \in V$, $h(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$; $f, g \in V$

   Definiere: $\beta(f, g) = \displaystyle\int_a^b h(x) f(x) g(x) dx$

   $\beta(f, f) = \displaystyle\int_a^b h(x) f^2(x) dx \geq 0; \quad = 0 \iff f = \mathfrak{o}$ Nullfunktion

11.2 Hermitesche Formen

Definition: Eine **Hermitesche Form (HF)** eines komplexen Vektorraumes V ist eine Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ mit:

1. $\beta(\lambda \mathfrak{x}_1 + \mu \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}) = \lambda \beta(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}) + \mu \beta(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y})$

2. $\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \overline{\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}$

$\beta(\mathfrak{o}, \mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{o}) = 0$

Satz 11.1: Für eine HERMITEsche Form β gelten:

1. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2) = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1) + \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_2)$
2. $\beta(\mathfrak{x}, \lambda\mathfrak{y}) = \overline{\lambda}\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$
3. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \in \mathbb{R}$

Beweis:
1. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2) = \overline{\beta(\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2, \mathfrak{x})} = \overline{\beta(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x})} + \overline{\beta(\mathfrak{y}_2, \mathfrak{x})} = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1) + \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_2)$
2. $\beta(\mathfrak{x}, \lambda\mathfrak{y}) = \overline{\beta(\lambda\mathfrak{y}, \mathfrak{x})} = \overline{\lambda}\,\overline{\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})} = \overline{\lambda}\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$
3. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \overline{\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})}$

Definition: Eine HERMITEsche Form β heißt positiv definit, wenn $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) > 0$ für alle $\mathfrak{x} \neq 0$ ist. Ein Skalarprodukt eines komplexen Vektorraumes V ist eine positiv definite HERMITEsche Form von V.

Beispiel:
1. $V = \mathbb{C}^n$, $\quad \mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_n)$
   Definiere: $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n$ **Standard – Skalarprodukt** von $\mathbb{C}^n$
2. V Menge der stetigen Funktionen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$.
   $\varphi(x) = u(x) + iv(x); \quad u, v \in C[a, b]$
   $h \in C[a, b]$, $h(x) > 0$ für alle $x \in C[a, b]$

   Definiere: $\beta(\varphi, \psi) = \displaystyle\int_a^b h(x)\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$

   $\beta(\varphi, \varphi) = \displaystyle\int_a^b h(x)|\varphi(x)|^2 dx \geq 0; \quad = 0 \iff \varphi = \mathfrak{o}$

11.3 Vektorräume mit Skalarprodukt

Ein mit einem Skalarprodukt β ausgestatteter reeller (komplexer) Vektorraum V heißt ein **euklidischer (unitärer) Vektorraum** .
Wir schreiben: $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}$ statt $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$; $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^2$
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ euklidisch bzw. unitär mit Standard – Skalarprodukt.

Im folgenden sei V stets ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Die **Norm** oder **Länge** des Vektors $\mathfrak{x}$ ist definiert durch $\|\mathfrak{x}\| = \sqrt{\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}}$
$\|\mathfrak{x}\| \geq 0, \quad \|\mathfrak{x}\| = 0 \iff \mathfrak{x} = \mathfrak{o}, \quad \|\lambda\mathfrak{x}\| = |\lambda|\|\mathfrak{x}\|$
$\mathfrak{x}$ **Einheitsvektor** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ $\|\mathfrak{x}\| = 1$
Die Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ sind Einheitsvektoren.
$\mathfrak{a} \neq 0 \implies \|\dfrac{\mathfrak{a}}{\|\mathfrak{a}\|}\| = 1$ **Normierung** von $\mathfrak{a}$

Vektoren heißen **orthogonal**, wenn $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = 0$ ist. $\mathfrak{x} \perp \mathfrak{y}$

Satz 11.2: Satz des Pythagoras

$$\mathfrak{x} \perp \mathfrak{y} \implies \|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\|^2 = \|\mathfrak{x}\|^2 + \|\mathfrak{y}\|^2$$

Beweis: $\|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\|^2 = (\mathfrak{x}+\mathfrak{y})(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}\mathfrak{x} + \mathfrak{x}\mathfrak{y} + \mathfrak{y}\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\mathfrak{y} = \|\mathfrak{x}\|^2 + \|\mathfrak{y}\|^2$

Satz 11.3: Ungleichung von Cauchy – Schwarz

$$|\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}| \le \|\mathfrak{x}\|\cdot\|\mathfrak{y}\|, \quad \text{„ = “} \iff \mathfrak{x},\mathfrak{y} \text{ linear abhängig}$$

Beweis: Klar für $\mathfrak{y} = \mathfrak{o}$. Es sei $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{o},\ \lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
0 \le (\mathfrak{x}-\lambda\mathfrak{y})\cdot(\mathfrak{x}-\lambda\mathfrak{y}) &= \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} - \overline{\lambda}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y} - \lambda\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{x} + \lambda\overline{\lambda}\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{y} \\
&= \|\mathfrak{x}\|^2 - (\overline{\lambda\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{x}} + \lambda\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{x}) + |\lambda|^2\|\mathfrak{y}\|^2 \\
&= \|\mathfrak{x}\|^2 - 2\Re(\lambda\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{x}) + |\lambda|^2\|\mathfrak{y}\|^2
\end{aligned}$$

Setze: $\lambda = \dfrac{\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}}{\|\mathfrak{y}\|^2}$

$$0 \le \|\mathfrak{x}\|^2 - 2\Re\frac{|\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}|^2}{\|\mathfrak{y}\|^2} + \frac{|\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}|^2}{\|\mathfrak{y}\|^2} = \|\mathfrak{x}\|^2 - \frac{|\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}|^2}{\|\mathfrak{y}\|^2}$$

$|\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}|^2 \le \|\mathfrak{x}\|^2\|\mathfrak{y}\|^2 \implies |\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}| \le \|\mathfrak{x}\|\cdot\|\mathfrak{y}\|$

„ = “ $\iff \mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y}$

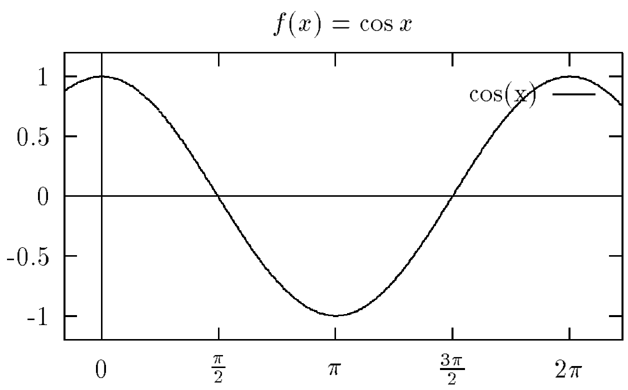
Beispiel:

1. $V = \mathbb{C}^n \quad |x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n|^2 \le (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)(|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2)$
   „ = “ $\iff x_i = \lambda y_i$ für alle i oder alle $y_i = 0$
2. $V = C[a,b] \quad \left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$
   „ = “ $\iff f(x) = \lambda g(x)$ oder $g = \mathfrak{o}$

Es sei V euklidisch; $\mathfrak{x},\mathfrak{y} \neq \mathfrak{o}$

$-1 \le \dfrac{\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}}{\|\mathfrak{x}\|\cdot\|\mathfrak{y}\|} \le 1$

Es existiert genau ein Winkel $\alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi$, mit $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y} = \|\mathfrak{x}\|\cdot\|\mathfrak{y}\|\cdot\cos\alpha$



$\alpha = \measuredangle\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ **Winkel zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$**
$\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ **gleich gerichtet**, wenn $\alpha = 0$ ist
$\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ **entgegengesetzt gerichtet**, wenn $\alpha = \pi$ ist.
$\mathfrak{x} \perp \mathfrak{y} \iff \cos\alpha = 0 \iff \measuredangle\mathfrak{x},\mathfrak{y} = \frac{\pi}{2}$

Satz 11.4: V euklidisch; $\mathfrak{x},\mathfrak{y} \neq \mathfrak{o}$. Dann gilt:

1. $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ gleich gerichtet (entgegengesetzt gerichtet)
   $\iff \mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y}$ mit $\lambda > 0$ (mit $\lambda < 0$)
2. $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} \iff \|\mathfrak{x}\| = \|\mathfrak{y}\| \wedge \mathfrak{x},\mathfrak{y}$ gleich gerichtet

Beweis: 1. Es sei $\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y}$

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}}{\|\mathfrak{x}\|\cdot\|\mathfrak{y}\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} +1, & \alpha = 0, \text{ für } \lambda > 0 \\ -1, & \alpha = \pi, \text{ für } \lambda < 0 \end{cases}$$

Es sei $\alpha = 0$ oder π, $\cos\alpha = \pm 1$

$$|\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}| = \|\mathfrak{x}\|\cdot\|\mathfrak{y}\| \overset{\text{Satz 11.3}}{\Longrightarrow} \mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y} \overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \lambda > 0, \text{ wenn } \alpha = 0 \\ \lambda < 0, \text{ wenn } \alpha = \pi \end{cases}$$

2. folgt aus 1.

Satz 11.5: Dreiecksungleichung
In jedem euklidischen oder unitären Raum gilt: $\|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\| \leq \|\mathfrak{x}\| + \|\mathfrak{y}\|$
„ = " $\iff \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \vee$ es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, mit $\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y}$

Beweis: Wir zeigen: $\|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\|^2 \leq \|\mathfrak{x}\|^2 + 2\|\mathfrak{x}\|\cdot\|\mathfrak{y}\| + \|\mathfrak{y}\|^2$

$$\|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\|^2 = (\mathfrak{x}+\mathfrak{y})(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \|\mathfrak{x}\|^2 + \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y} + \underbrace{\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{x}}_{\overline{\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}}} + \|\mathfrak{y}\|^2 = \|\mathfrak{x}\|^2 + 2\Re(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}) + \|\mathfrak{y}\|^2$$

$$\leq \|\mathfrak{x}\|^2 + 2|\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}| + \|\mathfrak{y}\|^2 \overset{\text{Satz 11.3}}{\leq} \|\mathfrak{x}\|^2 + 2\|\mathfrak{x}\|\cdot\|\mathfrak{y}\| + \|\mathfrak{y}\|^2$$

Für $\mathfrak{y} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y}$ mit $\lambda \geq 0$ besteht Gleichheit
Umkehrung: Es bestehe Gleichheit $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$
$\Re(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}) = |\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}| = \|\mathfrak{x}\|\cdot\|\mathfrak{y}\|$
$\Longrightarrow \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y} = a \geq 0 \wedge \mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y}$ (Satz 11.3)

$$\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y} = \lambda\|\mathfrak{y}\|^2 = a, \quad \lambda = \frac{a}{\|\mathfrak{y}\|^2} \geq 0$$

Euklidisch: $\|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\| = \|\mathfrak{x}\| + \|\mathfrak{y}\| \iff \mathfrak{x},\mathfrak{y}$ gleichgerichtet oder $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{y} = \mathfrak{o}$

Definition: $d(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\|$ **Abstand** der Vektoren $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$.
$d : V^2 \to \mathbb{R}$ ist eine **Metrik**:

1. $d(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \geq 0$, $\quad d(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0 \iff \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$
2. $d(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = d(\mathfrak{y},\mathfrak{x})$ Symmetrie
3. $d(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) \leq d(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + d(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ Dreiecksungleichung

V wird mit d zu einem **metrischen Raum**

11.4 Orthogonalsysteme

Definition: **Orthogonalsystem:** Nicht leere Menge von Vektoren $\neq \mathfrak{o}$, die paarweise orthogonal sind.

Orthonormalsystem: Orthogonalsystem aus Einheitsvektoren.

Orthonormalbasis (ONB): Orthonormalsystem, das Basis ist.

Satz 11.6: Jedes Orthogonalsystem S ist linear unabhängig.

Beweis: Es seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \in S$
$\lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathfrak{a}_n = \mathfrak{o} \implies \lambda_k \|\mathfrak{a}_k\|^2 = 0 \implies \lambda_k = 0$ für alle k

Satz 11.7: Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ eine ONB von V

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathfrak{b}_i\,,\quad \mathfrak{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathfrak{b}_i.\ \text{Dann gilt:}$$

1. $x_i = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{b}_i\,, \quad \mathfrak{x} = \sum_{i=1}^n (\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{b}_i) \mathfrak{b}_i$
2. $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ Standardskalarprodukt der Koordinatenvektoren

Beweis:
1. $\mathfrak{x} \mathfrak{b}_i = (x_1 \mathfrak{b}_1 + \dots + x_n \mathfrak{b}_n) \cdot \mathfrak{b}_i = x_i \|\mathfrak{b}_i\|^2 = x_i$
2. $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = (\sum_i x_i \mathfrak{b}_i)(\sum_j y_j \mathfrak{b}_i) = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} \underbrace{(\mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_j)}_{\delta_{ij}} = \sum_i x_i \overline{y_i}$

Folgerung: Es seien B_1, B_2 ONBs von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bzgl. eines beliebigen Skalarproduktes. Ferner sei S die Matrix der Basistransformation $B_1 \to B_2$. Dann bilden die Spalten von S eine ONB bzgl. des Standardskalarproduktes.

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **orthogonal** bzw. **unitär**, wenn ihre Spalten bzgl. des Standardskalarproduktes eine ONB bilden.

A orthogonal $\iff A^T A = I \iff A^{-1} = A^T \iff AA^T = I \iff$ Die Zeilen von A bilden eine ONB
$\det(AA^T) = \det(A)^2 = 1 \implies |\det A| = 1$
A^{-1} orthogonal $\iff (A^{-1})(A^{-1})^T = I \iff A^T A^{TT} = I$
Mit A ist auch stets A^{-1} orthogonal.
A unitär $\iff A^T \overline{A} = I \iff A^{-1} = \overline{A}^T \iff A\overline{A}^T = I \iff |\det A| = 1$

Satz 11.8: **Orthonormalisierungsverfahren von E. Schmidt**
Es sei $A = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots\}$ eine endliche oder abzählbare Basis von V. Dann gibt es eine ONB $B = \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots\}$ von V mit:
$[\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k] = [\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k]$ für alle $k = 1, 2, \dots$

Beweis: $\mathfrak{b}_1 = \dfrac{\mathfrak{a}_1}{||\mathfrak{a}_1||}, \quad [\mathfrak{b}_1] = [\mathfrak{a}_1]$

Es seien $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ bereits bestimmt mit: $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ ist ONB von $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$

$\mathfrak{b}'_{n+1} = \mathfrak{a}_{n+1} - \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathfrak{a}_{n+1}\mathfrak{b}_i)\mathfrak{b}_i \neq 0$, da $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n+1}$ linear unabhängig.

$[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}'_{n+1}] \overset{\text{Austauschsatz}}{=} [\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{a}_{n+1}] = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}]$

Es sei $1 \leq k \leq n$

$$b'_{n+1}\mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_{n+1}\mathfrak{b}_k - \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{a}_{n+1}\mathfrak{b}_i)(\underbrace{\mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_k}_{\delta_{ik}}) = \mathfrak{a}_{n+1}\mathfrak{b}_k - \mathfrak{a}_{n+1}\mathfrak{b}_k = 0$$

$\mathfrak{b}'_{n+1} \perp \mathfrak{b}_k$. Setze $\mathfrak{b}_{n+1} = \dfrac{\mathfrak{b}'_{n+1}}{||\mathfrak{b}'_{n+1}||}$

Satz 11.9: QR – Zerlegung einer regulären Matrix
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$ regulär. Dann gibt es eine orthogonale bzw. unitäre Matrix Q und eine obere (rechte) Dreiecksmatrix R mit $A = Q \cdot R$.

Beweis: Es sei $A' = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$ die Basis aus den Spaltenvektoren von A. Orthonormalisiere A' zur ONB B' bzgl. des Standardskalarproduktes. Es sei R die Matrix der Basistransformation $B' \to A'$. Aus $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k] = [\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k]$ von Satz 11.8 folgt, daß R eine rechte Dreiecksmatrix ist.
Q sei die Matrix mit den Spaltenvektoren B'. Q ist orthogonal bzw. unitär.
$A = Q \cdot R$ siehe Übung

Bemerkung: QR – Zerlegung wird angewandt bei der numerischen Bestimmung von Eigenwerten einer Matrix.

Satz 11.10: Jedes Orthonormalsystem eines endlich oder abzählbar unendlich dimensionalen Raumes kann zu einer ONB erweitert werden.

Beweis: Es sei $\dim V = n, \quad A = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r\},\ r < n$
Erweitere A zu einer Basis A' von $V \quad A' = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$
Wende auf A' das Orthonormalisierungsverfahren an. Dabei bleiben $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ unverändert!

$\mathfrak{b}_1 = \dfrac{\mathfrak{a}_1}{||\mathfrak{a}_1||} = \mathfrak{a}_1,\ b'_2 = \mathfrak{a}_2 - (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1)\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2 = \dfrac{\mathfrak{b}'_2}{||\mathfrak{b}_2||} = \mathfrak{a}_2,$ usw.

11.5 Matrix einer Bilinear– bzw. Hermiteschen Form

Definition: Es sei $B = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$ eine Basis des Vektorraumes V. Ferner sei β eine Bilinearform (BLF) von V bzw. eine HERMITEsche Form (HF) von $\mathbb{C}^n$. Es sei $a_{ij} = \beta(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j)$. Dann ist $A = (a_{ij}) = M(\beta, B)$ die **Matrix von β bzgl. B.**

Satz 11.11: Mit den Bezeichnungen der obigen Definition und

$\mathfrak{x} = \sum_i x_i \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{y} = \sum_i y_i \mathfrak{a}_i$ folgt:

1. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ bzw. $\sum_{i,j} a_{ij} x_i \overline{y_j}$
2. β symmetrische BLF $\iff A^T = A$
3. Wird in $\mathbb{C}^n$ β durch die 2. Gleichung in 1. definiert, dann gilt: β HERMITEsche Form $\iff \overline{A}^T = A$

Beweis:

1. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \beta(\sum_i x_i \mathfrak{a}_i\,,\ \sum_j y_j \mathfrak{a}_j) = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j}\, \underbrace{\beta(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j)}_{a_{ij}}$
2. β symmetrisch $\implies \beta(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = \beta(\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_i),\ a_{ij} = a_{ji},\ A^T = A$
   Umkehrung: Es sei $A^T = A$
   $$\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} y_i x_j = \sum_{i,j} a_{ji} y_j x_i = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$
3. β hermitesch $\implies \beta(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = \overline{\beta(\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_i)},\ a_{ij} = \overline{a_{ji}},\ A = \overline{A}^T$
   Umkehrung: Es gelte $A = \overline{A}^T$ $\quad\beta$ linear in $\mathfrak{x}\surd$
   $$\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} y_i \overline{x_j} = \overline{\sum_{i,j} \overline{a_{ij} y_i} x_j} = \overline{\sum_{i,j} \overline{a_{ji} y_j} x_i} = \overline{\sum_{i,j} a_{ij} x_i \overline{y_j}} = \overline{\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}$$

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **hermitesch**, wenn $\overline{A}^T = A$ ist.
Es sei $A \in K^{n\times n}$, $\quad \mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Dann heißt

$$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = \mathfrak{x} A \mathfrak{y}^T \text{ bzw. } \sum_{i,j} a_{ij} x_i \overline{y_j} = \mathfrak{x} A \overline{\mathfrak{y}}^T$$

die zu A gehörende BLF bzw. im Komplexen die zu A gehörende HERMITEsche Form, wenn $\overline{A}^T = A$ ist.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **positiv definit**, wenn die zugehörige BLF bzw. HERMITEsche Form ein Skalarprodukt ist.

$$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \mathfrak{x} A \mathfrak{x}^T \text{ bzw. } \sum_{i,j} a_{ij} x_i \overline{x_j} = \mathfrak{x} A \overline{\mathfrak{x}}^T$$

heißt auch die zu β bzw. A gehörende **quadratische Form**.

Für die zu A gehörende BLF bzw. HF gilt: $M(\beta, B) = A$ bzgl. der Standardbasis B.

Satz 11.12: Es seien $B = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$, $B' = \{\mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_n\}$ Basen von V. Ist β eine BLF bzw. HF von V, $A = M(\beta, B)$ und $S = (s_{ij})$ die Matrix der Basistransformation $B \to B'$, dann gilt:
$M(\beta, B') = S^T A S$ bzw. $S^T A \overline{S}$

Beweis: $A = (a_{ij})$, $M(\beta, B') = A' = (a'_{ij})$ $\quad \mathfrak{a}'_j = \sum\limits_k s_{kj}\mathfrak{a}_k$

$$a'_{ij} = \beta(\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{a}'_j) = \beta(\sum_k s_{ki}\mathfrak{a}_k, \sum_l s_{lj}\mathfrak{a}_l) = \sum_{k,l} s_{ki}\overline{s_{lj}}\underbrace{\beta(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l)}_{a_{kl}} = \sum_l (\sum_k s^T_{ik} a_{kl})\overline{s_{lj}}$$

$$(S^T A)\overline{S} = S^T A \overline{S}$$

Satz 11.13: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn es eine reguläre $n \times n$ – Matrix S gibt mit $A = S^T S$ bzw. $S^T \overline{S}$.

Beweis: Es sei A positiv definit, β das zugehörige Skalarprodukt, B Standardbasis
Orthonormalisiere B zu B'
S Matrix der Basistransformation $B' \to B$ (obere Dreiecksmatrix)
$M(\beta, B) = A = S^T M(\beta, B')\overline{S} = S^T I \overline{S} = S^T \overline{S}$

Umkehrung: Es sei $A = S^T\overline{S}$, S regulär
$\overline{A}^T = (\overline{S}^T S)^T = S^T\overline{S} = A$
A ist hermitesch. Also ist die zugehörige Form hermitesch.

$$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i \overline{y_j} = \mathfrak{x} A \overline{\mathfrak{y}}^T \text{ zugehörige HF}$$

$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \mathfrak{x} S^T \overline{S}\,\overline{\mathfrak{x}}^T = (\mathfrak{x} S^T)\overline{S\mathfrak{x}^T} = (\mathfrak{x} S^T)(\overline{\mathfrak{x} S^T})^T \geq 0$
Standardskalarprodukt des Vektors $\mathfrak{x} S^T$ mit sich selbst.
$= 0 \iff \mathfrak{x} S^T = \mathfrak{o} \iff \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, da S^T regulär.
Also ist β ein Skalarprodukt, A positiv definit.

Folgerung:

1. A positiv definit $\implies \det A = \det(S^T\overline{S}) = |\det S|^2 > 0$
2. Die quadratische Form einer positiv definiten Matrix A ist eine Summe aus Quadraten bzw. Betragsquadraten von Linearformen.
$$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^n |z_k|^2, \quad z_k = \sum_j s_{kj} x_j$$
3. Es sei β eine BLF bzw. HF von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$
B Standardbasis, $M(\beta, B) = A$, d.h. β ist die zu A gehörige BLF bzw. HF
β Skalarprodukt $\iff$ A positiv definit $\iff$ $A = S^T S$ bzw. $S^T\overline{S}$ mit regulärem S

Die Skalarprodukte aus $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ werden genau durch die Matrizen S^TS bzw. $S^T\overline{S}$ definiert.
Die Darstellung einer positiv definiten Matrix A in der Form $A = S^TS$ bzw. $S^T\overline{S}$ mit einer regulären oberen Dreiecksmatrix heißt auch **Cholesky – Zerlegung** von A.

Satz 11.14: Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, dann gilt:

1. $a_{ii} > 0$ für alle i
2. $a_{ik}^2 < a_{ii}a_{kk}$ für alle $i \neq k$
3. $\max\limits_{i,j} |a_{ij}|$ wird nur in der Hauptdiagonalen angenommen.

Beweis: $q(\mathfrak{x}) = \beta(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x_ix_j > 0$ für alle $\mathfrak{x} \neq 0$

Setze $\mathfrak{x} = e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ $\quad q(e_i) = a_{ii} > 0 \implies 1.$
Setze $\mathfrak{x} = \lambda e_i + e_k = (0,\ldots,\lambda,\ldots,1,\ldots,0) \neq \mathfrak{o}$
$q(\mathfrak{x}) = \beta(\lambda e_i + e_k, \lambda e_i + e_k) = \lambda^2\beta(e_i,e_i) + 2\lambda\beta(e_i,e_k) + \beta(e_k,e_k)$
$= a_{ii}\lambda^2 + 2a_{ik}\lambda + a_{kk} > 0$

$$\implies \lambda^2 + 2\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\lambda + \frac{a_{kk}}{a_{ii}} > 0 \quad \text{quadratische Ergänzung}$$

$$\left(\lambda + \frac{a_{ik}}{a_{ii}}\right)^2 + \frac{a_{kk}}{a_{ii}} - \frac{a_{ik}^2}{a_{ii}^2} > 0 \text{ für alle } \lambda$$

$$\implies \frac{a_{kk}}{a_{ii}} - \frac{a_{ik}^2}{a_{ii}^2} > 0 \implies a_{ii}a_{kk} > a_{ik}^2 \implies 2.$$

$|a_{ik}| < \sqrt{a_{ii}a_{kk}}$ für alle $i \neq k \implies 3.$
geometrisches Mittel, zwischen a_{ii} und a_{kk} gelegen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. (A symmetrisch!)

$$q(\mathfrak{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + 2x_1\sum_{i=2}^{n} a_{i1}x_i + \sum_{i,j\geq 2} a_{ij}x_ix_j$$

quadratische Ergänzung, $a_{11} > 0$

$$(*) \quad q(\mathfrak{x}) = a_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{i1}}{a_{11}}x_i)^2 + \underbrace{\sum_{i,j\geq 2} a_{ij}x_ix_j - \frac{1}{a_{11}}\sum_{i\geq 2} a_{i1}x_i \cdot \sum_{j\geq 2} a_{1j}x_j}_{\sum\limits_{i,j\geq 2}\underbrace{\left(a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\right)}_{a_{ij}^{(1)}} x_ix_j}$$

$A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$. $\quad A^{(1)}$ ist symmetrisch und positiv definit!
$a_{22}^{(1)} > 0$. Das Verfahren kann fortgesetzt werden.
Zwischenergebnis: Das Verfahren ergibt eine Darstellung von $q(\mathfrak{x})$ als Summe aus

Quadraten von Linearformen.
Aus $(*)$ folgt: Ist $a_{11} > 0$ und $A^{(1)}$ positiv definit, dann ist auch A positiv definit.
A positiv definit $\iff$ Bei $A, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ treten stets nur positive Elemente in der Hauptdiagonalen auf.

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| \begin{array}{c} \cdot(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}) \\ \\ \leftarrow \\ \\ \\ \end{array} \qquad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$$

Einträge wie beim GAUSSschen Eliminationsverfahren

Satz 11.15: Die symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn bei Anwendung des GAUSSschen Eliminationsverfahrens auf A (ohne Zeilen- bzw. Spaltenvertauschungen) stets nur positive Hauptdiagonalelemente auftreten.

11.6 Orthogonales Komplement

Definition: Es seien U_1, U_2 Unterräume von V.
U_1, U_2 **orthogonal**, $U_1 \perp U_2 \overset{Def}{\iff} \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2 = 0$ für alle $\mathfrak{x}_1 \in U_1,\ \mathfrak{x}_2 \in U_2$
Ist M eine beliebige Teilmenge von V, dann heißt
$M^\perp = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}_1 = 0 \text{ für alle } \mathfrak{x}_1 \in M\}$
das **orthogonale Komplement** von M. $\quad \{\mathfrak{x}\}^\perp = \mathfrak{x}^\perp$

Satz 11.16: Es sei $M \subseteq V$. Dann gelten:

1. $M \cap M^\perp \subseteq \{\mathfrak{o}\}$, d.h. $\emptyset$ oder $\{\mathfrak{o}\}$
2. $M^\perp$ ist Unterraum von V
3. $M^\perp = [M]^\perp$

Beweis:
1. Es sei $\mathfrak{x} \in M \cap M^\perp \implies \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x} = 0 \implies \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$
2. $\mathfrak{o} \in M^\perp$. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in M^\perp$, $\mathfrak{x} \in M$
   $(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{x} = \lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) + \mu(\mathfrak{b}\mathfrak{x}) = \mathfrak{o} \implies \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} \in M^\perp$
3. $[M]^\perp \subseteq M^\perp$, da allgemein $A \subseteq B \implies A^\perp \supseteq B^\perp$
   Es sei $\mathfrak{x} \in M^\perp$, $\mathfrak{x}_1 \in [M]$. Zu zeigen: $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x} = 0$
   $\mathfrak{x}_1 = \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_r m_r,\ m_i \in M \qquad \mathfrak{x}_i\mathfrak{x} = \lambda_1(m_1\mathfrak{x}) + \cdots + \lambda_r(m_r\mathfrak{x}) = 0$

Satz 11.17: Es sei U Unterraum von V. Dann gilt:

1. $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$. Die Summe ist direkt
2. $\dim U < \infty \implies U \oplus U^\perp = V$

Beweis:
1. Summe direkt, da $U \cap U^{\perp} = \{\mathfrak{o}\}$
2. Es sei $\dim U = n, \quad B = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$ eine ONB von $U \quad \mathfrak{x} \in V$

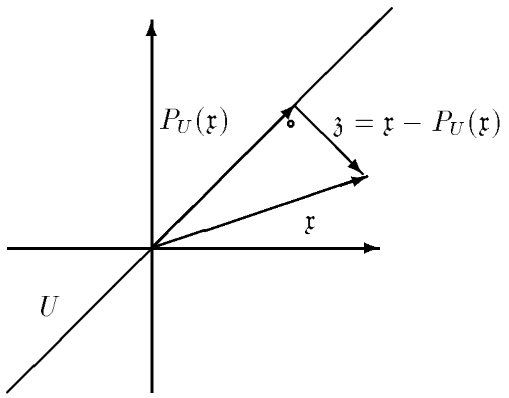
   Setze $\mathfrak{y} = \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{x}\mathfrak{a}_i)\mathfrak{a}_i\,, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x} - \mathfrak{y}$

   $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$, $\mathfrak{y} \in U$. Zu zeigen: $\mathfrak{z} \in U^{\perp}$

   $$\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{a}_k = (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})\mathfrak{a}_k = \mathfrak{x}\mathfrak{a}_k - \mathfrak{y}\mathfrak{a}_k = \mathfrak{x}\mathfrak{a}_k - \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{x}\mathfrak{a}_i)(\underbrace{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k}_{\delta_{ik}}) = \mathfrak{x}\mathfrak{a}_k - \mathfrak{x}\mathfrak{a}_k = 0$$

Definition: Schreibt man $\mathfrak{x} \in V$ in der From $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{y} \in U$, $\mathfrak{z} \in U^{\perp}$, dann heißt $\mathfrak{y} = P_U(\mathfrak{x})$ die **orthogonale Projektion** von $\mathfrak{x}$ auf den Unterraum U.

Ist $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ eine ONB von U, dann ist
$P_U(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{x}\mathfrak{a}_i)\mathfrak{a}_i$



Satz 11.18: Es sei U Unterraum von V, $\mathfrak{x} \in V$. Es existiere $P_U(\mathfrak{x})$.
Dann ist $\min\{\|\mathfrak{x} - u\| \mid u \in U\} = \|\mathfrak{x} - P_U(\mathfrak{x})\|$
Dabei wird das Minimum nur für $u = P_U(\mathfrak{x})$ angenommen.

Beweis: $\|\mathfrak{x} - u\|^2 = \|(\underbrace{\mathfrak{x} - P_U(\mathfrak{x})}_{\in U^{\perp}}) + (\underbrace{P_U(\mathfrak{x}) - u}_{\in U})\|^2$

PYTHAGORAS:
$\|\mathfrak{x} - u\|^2 = \|\mathfrak{x} - P_U(\mathfrak{x})\|^2 + \|P_U(\mathfrak{x}) - u\|^2 \geq \|\mathfrak{x} - P_U(\mathfrak{x})\|^2$
„ = “ $\iff u = P_U(\mathfrak{x})$

Definition: Es seien M_1, M_2 nicht leere Teilmenge von V. Der **Abstand** $d(M_1, M_2)$ von M_1 und M_2 ist definiert durch:
$d(M_1, M_2) = \inf\{d(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \mid \mathfrak{x}_1 \in M_1, \mathfrak{x}_2 \in M_2\}$
Dabei ist $d(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2\| \qquad d(\{\mathfrak{x}\}, M) = d(\mathfrak{x}, M)$

Folgerung: aus Satz 11.18
Ist $\mathfrak{x} \in V$, U Unterraum von V und existiert $P_U(\mathfrak{x})$, dann wird $d(\mathfrak{x}, U) = \inf\{d(\mathfrak{x}, u) \mid u \in U\}$ genau für $u = P_U(\mathfrak{x})$ angenommen.

Kapitel 12

Affine Geometrie in Vektorräumen

Analytische Geometrie ist Geometrie in Vektorräumen.
Synthetische Geometrie startet mit einem Axiomensystem für die geometrischen Objekte: Punkte, Geraden

Es sei V Vektorraum über K. Für $A, B \subseteq V$ definiere man:
$A + B = \{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \mid \mathfrak{a} \in A, \mathfrak{b} \in B\}$, $\{\mathfrak{a}\} + B = \mathfrak{a} + B$
Eine **affine Menge** oder lineare Mannigfaltigkeit von V ist eine Nebenklasse (Restklasse) eines Unterraumes U von V.
Es sei L affine Menge von V zum Unterraum U.
L hat die Form $L = \mathfrak{x}_0 + U$; $\quad \mathfrak{x}_0 \in L$ „repräsentiert" L
Jeder andere Vektor $\mathfrak{x}_1 \in L$ ist ebenfalls Repräsentant von $L:\ L = \mathfrak{x}_1 + U$
$U = L - \mathfrak{x}_0 = L - L = \{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 \mid \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in L\}$ eindeutig durch L bestimmt. $U = U(L)$

Der **affine Raum** $A(V)$ ist die Gesamtheit aller affinen Mengen in V.
Affine Geometrie in V ist Untersuchung von $A(V)$.
Euklidische (unitäre) Geometrie liegt vor, wenn V euklidisch bzw. unitär ist.

Definition: Es sei $L = \mathfrak{x}_0 + U$. Es gilt $\dim L = \dim U$

12.1 Punkt, Gerade und Ebene

Affine Mengen der Dimension 0,1 bzw. 2 heißen **Punkte**, **Geraden** bzw. **Ebenen**.

Punkt: $P = \mathfrak{x}_0 + U$, $\dim U = 0 \implies U = \{\mathfrak{o}\} \quad P = \{\mathfrak{x}_0\}$
$\mathfrak{x}_0$ eindeutig bestimmt, **Ortsvektor von** P
auch $\mathfrak{x}_P$ statt $\mathfrak{x}_0$, häufig werden P und $\mathfrak{x}_P$ identifiziert.
Es sei $L = \mathfrak{x}_0 + U$. $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}$ heißt ein **Aufpunkt** von L
$P = \{\mathfrak{x}_P\}$ **inzidiert** mit L, wenn $\mathfrak{x}_P \in L$; $\quad P \subseteq L$
$\iff$ P liegt auf L, L geht durch P

Gerade: $g = \mathfrak{x}_0 + U, \quad \dim U = 1 \implies U = [\mathfrak{a}],\ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$

$$g = \{\mathfrak{x} \mid \underbrace{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a}}_{\text{Gleichung von } g}, \lambda \in K\}$$

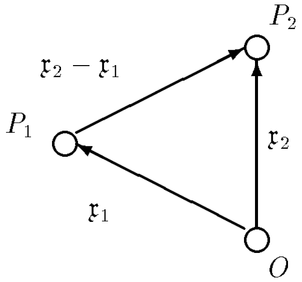
$\mathfrak{a}$ **Richtungsvektor** von g, bis auf einen skalaren Faktor $\neq 0$ eindeutig.

Ebene: $E = \mathfrak{x}_0 + U, \quad U = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}];\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear unabhängig

$$E = \{\mathfrak{x} \mid \underbrace{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}}_{\text{Gleichung von } E};\ \lambda, \mu \in K\}$$

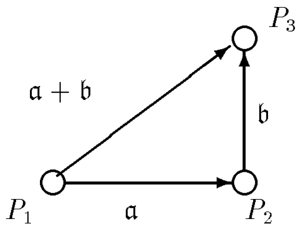
„$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ spannen E im Punkt $\{\mathfrak{x}_0\}$ auf."

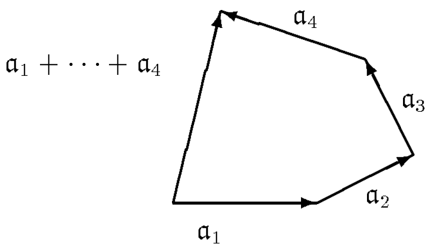
Verbindungsvektor zweier Punkte: $P_1 = \{\mathfrak{x}_1\},\ P_2 = \{\mathfrak{x}_2\}, \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1$
Nullpunkt $O = \{\mathfrak{o}\} \quad \overrightarrow{OP_1} = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{o} = \mathfrak{x}_1$.
Der Ortsvektor von P_1 ist der Verbindungsvektor $\overrightarrow{OP_1}$.
$\overrightarrow{P_1P_2}$ wird durch die gerichtete Strecke von P_1 nach P_2 veranschaulicht.

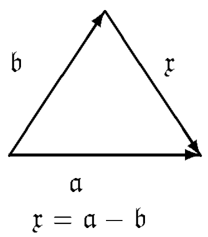


$$\overrightarrow{P_2P_1} = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = -\ \overrightarrow{P_1P_2}$$

$P_3 = \{\mathfrak{x}_3\}; \quad \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1 = \overrightarrow{P_1P_3}$



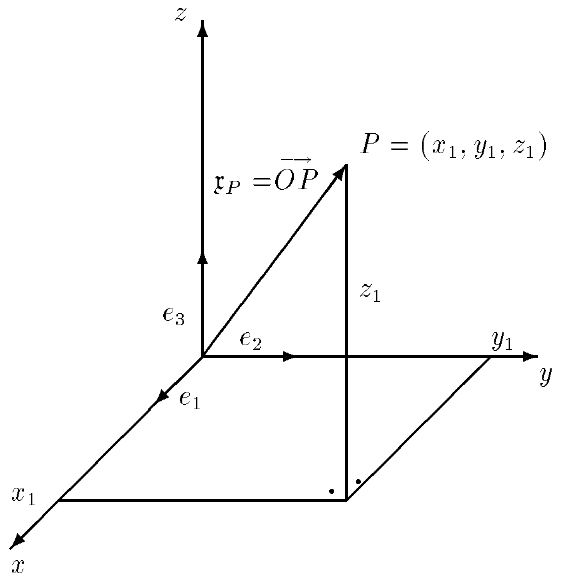




Bemerkung: Skizzen veranschaulichen einen abstrakten Sachverhalt. Bei Beweisen darf man sich jedoch nur auf die Axiome, Sätze und Definitionen der Theorie stützen. Z.B. hat man bei affiner Geometrie keine Längen- und Winkelbegriffe.

Anschauungsraum: der uns umgebene dreidimensionale Raum
Anschauungsebene: Tafelebene
Keine mathematischen Objekte! Mathematische Objekte sind die Modelle, mit denen Räume beschrieben werden: $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt.

Der Bezug von Modell und „Wirklichkeit" wird hergestellt durch ein kartesisches Koordinatensystem:



Drei zueinander senkrechte Achsen, die ein Rechtssystem bilden, d.h. bei Drehung der x – Achse um 90° und Fortschreiten in z – Richtung entsteht eine Rechtsschraube.

Vereinbarung: $\emptyset$ ist eine affine Menge der Dimension -1

Satz 12.1: Der Durchschnitt affiner Mengen ist eine affine Menge.

$$\mathfrak{x}_0 \in \bigcap_{i\in I} L_i \implies \bigcap_{i\in I} L_i = \mathfrak{x}_0 + \bigcap_{i\in I} U(L_i)$$

Beweis: Klar, wenn $\bigcap\limits_i L_i = \emptyset$. Es sei $\mathfrak{x}_0 \in \bigcap\limits_i L_i$; $L_i = \mathfrak{x}_0 + U(L_i)$

$$\mathfrak{x} \in \bigcap_i L_i \iff \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 \in U(L_i) \text{ für alle } i \iff \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 \in \bigcap_i U(L_i)$$

$$\iff \mathfrak{x} \in \mathfrak{x}_0 + \bigcap_i U(L_i)$$

Es sei $M \subseteq V$.
$L(M) = \bigcap\{L \,|\, L \text{ ist affine Menge mit } L \supseteq M\}$ heißt die von M bzw. der Punktmenge $\{\{\mathfrak{x}\} \,|\, \mathfrak{x} \in M\}$ **erzeugte** oder **aufgespannte** affine Menge.

Satz 12.2: Es sei $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}, \ldots, P_n = \{\mathfrak{x}_n\}$. Dann ist
$$L(P_1, \ldots, P_n) = L(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n) = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0]$$

Beweis: Die rechte Seite ist die kleinste affine Menge, die $\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n$ enthält.

Die Punkte $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}, \ldots, P_n = \{\mathfrak{x}_n\}$ heißen **affin unabhängig**, wenn die Vektoren $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0$ linear unabhängig sind. Affin unabhängige Punkte $P_0, \ldots, P_n$ bilden ein **affines Koordinatensystem** von $L(P_0, \ldots, P_n)$.
$\mathfrak{x} \in L(P_0, \ldots, P_n)$ hat dann eine eindeutige Darstellung:

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) + \cdots + \lambda_n(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0),\ \lambda_i \in K$
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ heißen die **Koordinaten des Punktes** $P = \{\mathfrak{x}\}$ bzgl. $P_0, \ldots, P_n$

$$\mathfrak{x} = \underbrace{(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i)}_{\alpha_0} \mathfrak{x}_0 + \underbrace{\lambda_1}_{\alpha_1} \mathfrak{x}_1 + \cdots + \underbrace{\lambda_n}_{\alpha_n} \mathfrak{x}_n$$

$$\mathfrak{x} = \alpha_0\mathfrak{x}_0 + \alpha_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathfrak{x}_n\ ,\ \alpha_i \in K,\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$$

affine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n$
$L(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ besteht genau aus den affinen Linearkombinationen von $\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n$.
Sind $P_0, \ldots, P_n$ affin unabhängig, dann sind $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ eindeutig bestimmt. Sie heißen die **baryzentrischen Koordinaten** von $P = \{\mathfrak{x}\}$ bzgl. $P_0, \ldots, P_n$

Satz 12.3: Durch $n+1$ affin unabhängige Punkte geht genau eine affine Menge der Dimension n.

Beweis: $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}, \ldots, P_n = \{\mathfrak{x}_n\}$ affin unabhängig
$L = L(P_0, \ldots, P_n)$ kleinste affine Menge durch $P_0, \ldots, P_n$, $\dim L = n$
L' sei affine Menge durch $P_0, \ldots, P_n$, $\dim L' = n$
$L = \mathfrak{x}_0 + U(L),\ L' = \mathfrak{x}_0 + U(L')$
$L' \supseteq L \implies U(L') \supseteq U(L)$, $\dim U(L') = \dim U(L) = n \implies L' = L$

Folgerung:

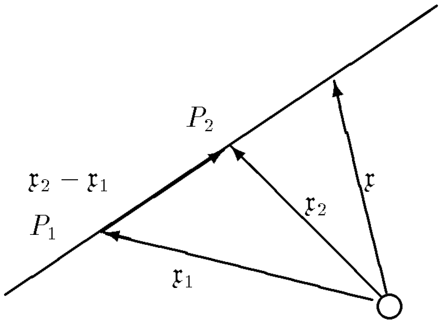
1. Durch 2 verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
2. Durch 3 affin unabhängige Punkte geht genau eine Ebene.
3. Ist $\dim V \geq n-1$, dann gilt:
   $P_0, \ldots, P_n$ affin abhängig $\iff$ Durch $P_0, \ldots, P_n$ geht eine affine Menge der Dimension $n-1$.

Beweis:

1. $\surd$
2. $\surd$
3. Es seien $P_0, \ldots, P_n$ affin abhängig

   $$L(P_0, \ldots, P_n) = \mathfrak{x}_0 + [\underbrace{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0}_{U(L),\ \dim U(L) \leq n-1}]$$

   Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r\}$ eine Basis von $U(L)$, $r \leq n-1$
   Erweitere B zu einer Basis $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_m$ von V. $m \geq n-1$
   $L' = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{n-1}] \supseteq L$, $\dim L' = n-1$
   Umkehrung:
   $L' = \mathfrak{x}_0 + U(L')$ gehe durch $P_0, \ldots, P_n$, $\dim U(L') = n-1$
   $\implies \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0 \in U(L')$, linear abhängig.



$L(P_1, P_2) = \mathfrak{x}_1 + [\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1], \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)$
Gleichung der Geraden durch P_1, P_2, die **Verbindungsgerade**

Satz 12.4: Es sei $\chi(K) \neq 2$, d.h. $\frac{1}{2} \in K$. Dann gilt:
$M \subseteq V$ ist genau dann affin, wenn M mit je 2 Punkten P_1, P_2 auch $L(P_1, P_2)$ enthält.

Beweis: Es sei M affin. $P_1 = \{\mathfrak{x}_1\}$, $P_2 = \{\mathfrak{x}_2\}$ Punkte von M
$L(P_1, P_2) = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1),\ \lambda \in K\}$
$\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 \in U(M) \implies \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) \in U(M)$
$M = \mathfrak{x}_1 + U(M) \supseteq L(P_1, P_2)$

Umkehrung:
Für alle $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ gelte: $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in M \implies (1-\lambda)\mathfrak{x}_1 + \lambda\mathfrak{x}_2 \in M$ für alle $\lambda \in K$
Es sei $\mathfrak{x}_0 \in M, \quad U = M - \mathfrak{x}_0$
Wir zeigen: U ist Unterraum von $V \quad \mathfrak{o} \in U$
Es sei $\mathfrak{u} \in U$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{a} - \mathfrak{x}_0$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_0 \in M$
$\implies (1-\lambda)\mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{x}_0 + \lambda(\mathfrak{a} - \mathfrak{x}_0) = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{u} \in M \implies \lambda\mathfrak{u} \in M - \mathfrak{x}_0 = U$
Es seien $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \in M, \quad \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{x}_0,\ \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{x}_0; \quad \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{x}_0 \in M$

$$\implies \frac{1}{2}\mathfrak{a}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{a}_2 \in M \implies \frac{1}{2}(\underbrace{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{x}_0}_{\mathfrak{u}_1}) + \frac{1}{2}(\underbrace{\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{x}_0}_{\mathfrak{u}_2}) \in M - \mathfrak{x}_0 = U$$

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2) \in U \overset{s.o.}{\implies} \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 \in U$$

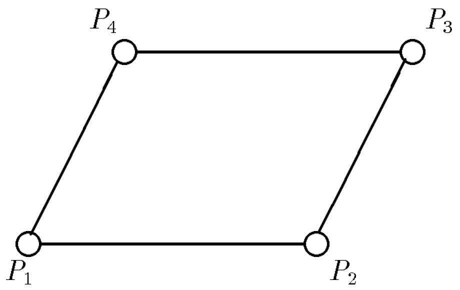
Definition: Affine Mengen L_1, L_2 heißen **parallel**, $L_1 \| L_2$, wenn $U(L_1) \subseteq U(L_2)$ oder $U(L_2) \subseteq U(L_1)$.

Satz 12.5:
1. $L_1 \| L_2 \implies L_1 \cap L_2 = \emptyset \vee L_1 \subseteq L_2 \vee L_2 \subseteq L_1$
2. $L_1 \| L_2 \wedge L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \wedge \dim L_1 = \dim L_2 < \infty \implies L_1 = L_2$

Beweis: Es sei $\mathfrak{x}_0 \in L_1 \cap L_2$. $\quad L_1 = \mathfrak{x}_0 + U(L_1)$, $L_2 = \mathfrak{x}_0 + U(L_2)$
Etwa $U(L_1) \subseteq U(L_2) \quad \Rightarrow L_1 \subseteq L_2$
$\dim L_1 = \dim L_2 \Rightarrow \dim U(L_1) = \dim U(L_2) \Rightarrow U(L_1) = U(L_2) \Rightarrow L_1 = L_2$

Ein **Dreieck** besteht aus 3 affin unabhängigen Punkten.
Ein **Viereck** besteht aus 4 Punkten, von denen je 3 affin unabhängig sind.

Ein **Parallelogramm** ist ein Viereck, für dessen Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 bei geeigneter Nummerierung gilt:
$L(P_1, P_2) \| L(P_3, P_4)$ und
$L(P_2, P_3) \| L(P_1, P_4)$

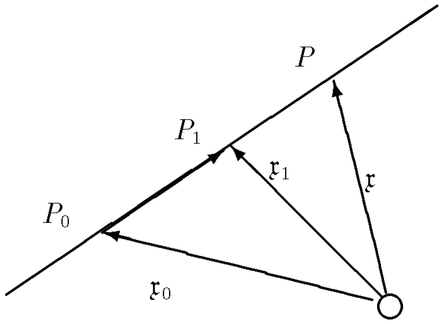


Übung: Zeige, daß P_1, P_2, P_3, P_4 in einer Ebene liegen, $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}$

12.2 Teilverhältnis und Mittelpunkt

Es seien $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}$, $P_1 = \{\mathfrak{x}_1\}$, $P = \{\mathfrak{x}\}$ **kollinear** (auf einer Geraden), $P_0 \neq P_1$.
Das **Teilverhältnis** $\frac{P-P_0}{P_1-P_0}$ ist die Koordinate von P bzgl. P_0, P_1.

$\mathfrak{x}$ hat eine eindeutige Darstellung
$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)$
$\lambda = \dfrac{P - P_0}{P_1 - P_0}$ (formal: $\dfrac{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0}{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0}$, **Vorsicht!**)



Satz 12.6: Es seien P_0, P_1, P_2 kollineare Punkte, dann gilt:

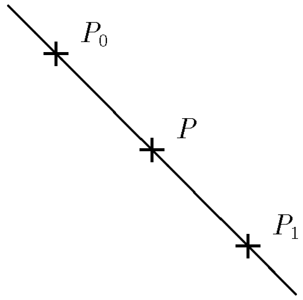
1. $$\frac{P - P_0}{P_2 - P_0} \cdot \frac{P_2 - P_0}{P_1 - P_0} = \frac{P - P_0}{P_1 - P_0} \quad (P_1, P_2 \neq P_0)$$
2. $$\left(\frac{P - P_0}{P_1 - P_0}\right)^{-1} = \frac{P_1 - P_0}{P - P_0} \quad (P, P_1 \neq P_0)$$

Beweis: $P = \{\mathfrak{x}\}$, $P_i = \{\mathfrak{x}_i\}$

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = \frac{P - P_0}{P_1 - P_0} \cdot (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)$$
$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = \frac{P - P_0}{P_2 - P_0} \cdot (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0)$$

1. $$\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0 = \frac{P_2 - P_0}{P_1 - P_0} \cdot (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)$$
$$\overline{}$$
$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = \underbrace{\frac{P - P_0}{P_2 - P_0} \cdot \frac{P_2 - P_0}{P_1 - P_0}}_{\text{eindeutig best.} = \frac{P-P_0}{P_1-P_0}} \cdot (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)$$

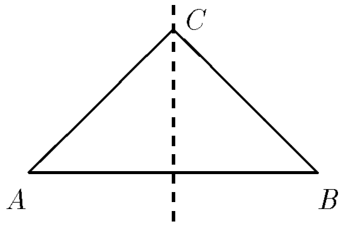
2. $$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = \frac{P - P_0}{P_1 - P_0} \cdot (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)$$
$$\Longrightarrow \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0 = \underbrace{\left(\frac{P - P_0}{P_1 - P_0}\right)^{-1}}_{\text{eindeutig best.} = \frac{P_1-P_0}{P-P_0}} \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)$$



Es sei $\chi(K) \neq 2$, $\frac{1}{2} \in K$
P heißt der **Mittelpunkt** von P_0, P_1, wenn P auf $L(P_0, P_1)$ liegt und $\frac{P-P_0}{P_1-P_0} = \frac{1}{2}$ ist.
$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1)$ Ortsvektor des Mittelpunktes.

12.3 Seitenhalbierende und Schwerpunkt

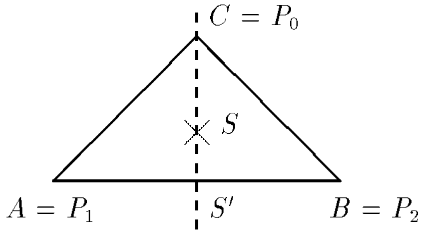
Eine **Seitenhalbierende** eines Dreiecks ist eine Gerade durch eine Ecke und den Mittelpunkt der beiden anderen Ecken.



Der **Schwerpunkt** $S = \{\mathfrak{x}_S\}$ der Punkte $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}, \dots, P_n = \{\mathfrak{x}_n\}$ ist definiert durch $\mathfrak{x}_S = \frac{1}{n+1}(\mathfrak{x}_0, \dots, \mathfrak{x}_n)$ (Dabei sei $n + 1 \neq 0$)
$\mathfrak{x}_S$ ist affine Linearkombination von $\mathfrak{x}_0, \dots, \mathfrak{x}_n$
$\Longrightarrow \mathfrak{x}_S \in L(\mathfrak{x}_0, \dots, \mathfrak{x}_S)$, S liegt in $L(P_0, \dots, P_n)$

Satz 12.7: Schwerpunktsatz
Es seien $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}, \dots, P_n = \{\mathfrak{x}_n\}$ affin unabhängig, $\quad n + 1, n \neq 0$

Es sei $S = \{\mathfrak{x}_S\}$ der Schwerpunkt von $P_0, \dots, P_n$ und $S' = \{\mathfrak{x}_{S'}\}$ der Schwerpunkt von $P_1, \dots, P_n$.
Dann liegt S auf $L(P_0, S')$, und es gilt $\frac{S-P_0}{S'-P_0} = \frac{n}{n+1}$



Beweis: $S' \subseteq L(P_1, \dots, P_n)$. $\quad P_0 \not\subseteq L(P_1, \dots, P_n)$, da $P_0, \dots, P_n$ affin unabhängig.
Also ist $P_0 \neq S'$.
$L(P_0, S') : \ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda(\mathfrak{x}_{S'} - \mathfrak{x}_0) = (1 - \lambda)\mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{x}_{S'}$

$$\text{Setze } \lambda = \frac{n}{n+1} : \quad \mathfrak{x} = \frac{1}{n+1}\mathfrak{x}_0 + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n}(\mathfrak{x}_1 + \dots + \mathfrak{x}_n) = \mathfrak{x}_S$$

$$\Longrightarrow S \subseteq L(P_0, S'), \quad \frac{S - P_0}{S' - P_0} = \frac{n}{n+1}$$

Folgerung: Die 3 Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks. $\frac{S-P_0}{S'-P_0} = \frac{2}{3} \quad \chi(K) \neq 2, 3$

12.4 Hyperebenen

Definition: Die affine Menge $H = \mathfrak{x}_1 + U$ heißt eine **Hyperebene**, wenn U ein eindimensionales Komplement in V hat.

Es existiert $\mathfrak{a}_1 \in V$ mit $V = U \oplus [\mathfrak{a}_1]$. Ist $\dim V = n$, dann ist $\dim U = n - 1$
Übung: U ist Kern einer Linearform. In K^n hat H eine skalare Gleichung der Form $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = a_0$.

Satz 12.8: Es sei $\dim V \geq 2$, g Gerade, H Hyperebene. Dann gilt:

1. $g \nparallel H \implies g$ trifft H in genau einem Punkt.
2. $g \| H \implies g \cap H = \emptyset \vee g \subseteq H$

Beweis: 1. $g = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{a}]$, $H = \mathfrak{x}_1 + U$, $V = U \oplus [\mathfrak{a}_1]$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{o}$
$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{u}_0 + \alpha_0 \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{u}_1 + \alpha_1 \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}_2 + \alpha_2 \mathfrak{a}_1$
$\mathfrak{u}_i \in U$, $\alpha_i \in K$ eindeutig bestimmt
$g \nparallel H \implies \alpha_2 \neq 0$
$\mathfrak{x} \in g \cap H \iff \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda \mathfrak{a} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{u}$ lösbar mit $\lambda \in K, \mathfrak{u} \in U$
$\mathfrak{u}_0 + \alpha_0 \mathfrak{a}_1 + \lambda(\mathfrak{u} + \alpha_2 \mathfrak{a}_1) = \mathfrak{u}_1 + \alpha_1 \mathfrak{a} + \mathfrak{u}$

$$\underbrace{(\alpha_0 - \alpha_1 + \lambda\alpha_2)\mathfrak{a}_1}_{\in[\mathfrak{a}_1]} = \underbrace{\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_0 - \lambda\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}}_{\in U}, \quad U \cap [\mathfrak{a}_1] = \{\mathfrak{o}\}$$

$\iff \alpha_0 - \alpha_1 + \lambda\alpha_2 = 0$ und $\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_0 - \lambda\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u} = 0$
eindeutig lösbar in λ und $\mathfrak{u}$, genau ein Schnittpunkt.

2. folgt aus Satz 12.5

Folgerung: Zwei nicht parallele Geraden einer Ebene schneiden sich in genau einem Punkt.

Beweis: $g_1 = \mathfrak{x}_1 + [\mathfrak{a}_1]$, $g_2 = \mathfrak{x}_2 + [\mathfrak{a}_2]$, $E = \mathfrak{x}_0 + U$, $\dim U = 2$ $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in U$, linear unabhängig; $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in E$
Verschiebe E in den Nullpunkt.
$E' = E - \mathfrak{x}_0 = U$, $g_1' = g_1 - \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{a}_1]$, $g_2' = g_2 - \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{a}_2]$
Fasse g_1' als Hyperebene, g_2' als Gerade von U auf.
$\implies$ genau ein Schnittpunkt P
$\implies g_1, g_2$ haben genau den Schnittpunkt $P + \mathfrak{x}_0$

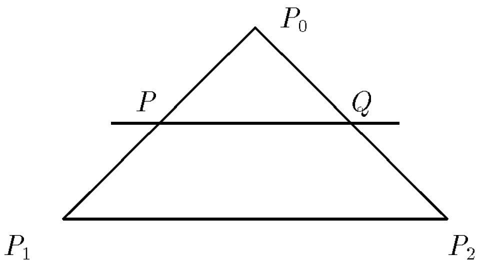
12.5 Geometrische Sätze

Satz 12.9: Strahlensatz

Gegeben sei ein Dreieck P_0, P_1, P_2
$P \subset L(P_0, P_1)$, $Q \subset L(P_0, P_2)$,
$P, Q \neq P_0$. Dann gilt:

$$\frac{P - P_0}{P_1 - P_0} = \frac{Q - P_0}{P_2 - P_0}$$

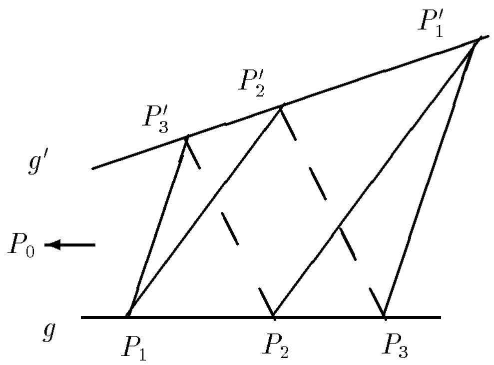
$$\iff L(P, Q) \parallel L(P_1, P_2)$$



Beweis: $\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0 = \underbrace{\frac{P - P_0}{P_1 - P_0}}_{\alpha} \cdot (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)$, $\quad \mathfrak{x}_Q - \mathfrak{x}_0 = \underbrace{\frac{Q - P_0}{P_2 - P_0}}_{\beta} \cdot (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0)$

$L(P, Q) \parallel L(P_1, P_2) \iff [\mathfrak{x}_p - \mathfrak{x}_Q] = [\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2]$
$\iff \mathfrak{x}_p - \mathfrak{x}_Q = \lambda(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)$ für ein $\lambda \in K$
$\iff \alpha(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) - \beta(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0) = \lambda(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) = \lambda(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) - \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0)$
$\iff \alpha = \beta = \lambda$, da $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0$ linear unabhängig.

Satz 12.10: Satz von Pappus
Es seien g, g' verschiedene Geraden einer Ebene; $P_1, P_2, P_3 \subset g$; $P_1', P_2', P_3' \subset g'$. Ist $g \cap g' = P_0$, dann seien alle anderen Punkte von P_0 verschieden. Dann gilt:



$$\begin{array}{ll} L(P_1, P_3') \parallel L(P_3, P_1') & \text{und} \\ L(P_1, P_2') \parallel L(P_2, P_1') & \text{imp.} \\ \hline L(P_2, P_3') \parallel L(P_3, P_2') & \end{array}$$

Beweis: Es sei $g \nparallel g'$, $g \cap g' = P_0$ Strahlensatz:

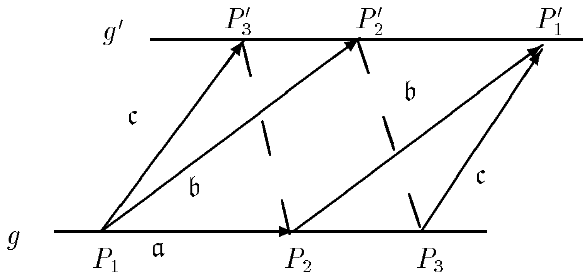
$$L(P_1, P_3') \parallel L(P_3, P_1') \iff \frac{P_3' - P_0}{P_1' - P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_3 - P_0}$$

$$L(P_1, P_2') \parallel L(P_2, P_1') \iff \frac{P_2' - P_0}{P_1' - P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_2 - P_0}$$

$$L(P_2, P_3') \parallel L(P_3, P_2') \iff \frac{P_3' - P_0}{P_2' - P_0} = \frac{P_2 - P_0}{P_3 - P_0}$$

$$\frac{P_3' - P_0}{P_2' - P_0} = \frac{P_3' - P_0}{P_1' - P_0} \cdot \frac{P_1' - P_0}{P_2' - P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_3 - P_0} \cdot \frac{P_2 - P_0}{P_1 - P_0} = \frac{P_2 - P_0}{P_3 - P_0}$$

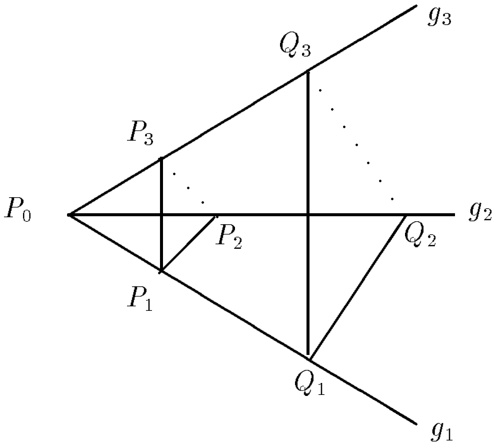
Fall $g \parallel g'$:



$\overrightarrow{P_2P_3'} = -\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} - \mathfrak{a}, \quad \overrightarrow{P_3P_2'} = \mathfrak{c} - \mathfrak{b} - \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} - \mathfrak{a}$

Satz 12.11: Satz von Desargues

Es seien 3 Geraden g_1, g_2, g_3 in einer Ebene gegeben, die sich alle im Punkt P_0 schneiden oder parallel sind.
$P_1, Q_1 \subset g_1$; $P_2, Q_2 \subset g_2$; $P_3, Q_3 \subset g_3$; alle $P_i, Q_i \neq P_0$

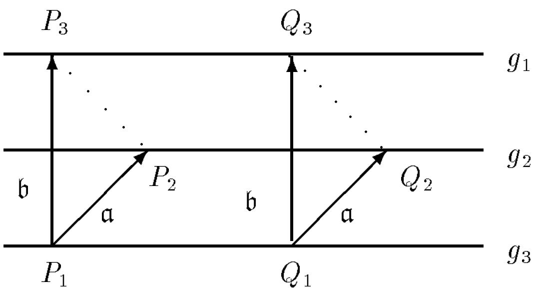


$$\begin{array}{l} L(P_1, P_2) \parallel L(Q_1, Q_2) \quad \text{und} \\ L(P_1, P_3) \parallel L(Q_1, Q_3) \quad \text{imp.} \\ \hline L(P_2, P_3) \parallel L(Q_2, Q_3) \end{array}$$

Beweis: Voraussetzung: $\dfrac{P_3 - P_0}{Q_3 - P_0} = \dfrac{P_1 - P_0}{Q_1 - P_0}, \quad \dfrac{P_1 - P_0}{Q_1 - P_0} = \dfrac{P_2 - P_0}{Q_2 - P_0}$

$$\Longrightarrow \frac{P_3 - P_0}{Q_3 - P_0} = \frac{P_2 - P_0}{Q_2 - P_0} \Longrightarrow L(P_2, P_3) \parallel L(Q_2, Q_3)$$

Fall $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$:



$\Longrightarrow \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{Q_2Q_3} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$

Kapitel 13

Euklidische (unitäre) Geometrie

13.1 Das Lot

V sei Vektorraum mit Skalarprodukt, $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
L_1, L_2 seien affine Mengen in V. Definiere:
L_1 orthogonal L_2, $L_1 \perp L_2 \overset{\text{Def}}{\iff} U(L_1) \perp U(L_2)$
Eine Gerade g, die L trifft und senkrecht zu L ist, heißt ein **Lot** von L.
$\mathfrak{x}_0 \in g \cap L, \quad g = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{a}],\ L = \mathfrak{x}_0 + U, \quad \mathfrak{a} \perp U$
Es sei $\mathfrak{x} \in g \cap L$. $\quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{u},\ \mathfrak{u} \in U$
$\implies \lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{u} \mid \cdot\, \mathfrak{a} \implies \lambda\mathfrak{a}^2 = 0 \implies \lambda = 0,\ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$
Das Lot g trifft L in genau einem Punkt, dem **Lotfußpunkt**.

Abstand: $d(L_1, L_2) = \inf\{\|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2\|,\ \mathfrak{x}_1 \in L_1,\ \mathfrak{x}_2 \in L_2\}$
$P_1 = \{\mathfrak{x}_1\},\ P_2 = \{\mathfrak{x}_2\} \implies d(P_1, P_2) = \|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2\|$

Satz 13.1: L_1, L_2 affine Mengen; $\dim L_1, L_2 < \infty$. Dann gilt:

1. Es gibt Punkte $F_1 = \{\mathfrak{x}_1\} \subseteq L_1$, $F_2 = \{\mathfrak{x}_2\} \subseteq L_2$ mit $d(F_1, F_2) = d(L_1, L_2)$. Ist $U(L_1) \cap U(L_2) = \{\mathfrak{o}\}$, dann sind F_1, F_2 eindeutig bestimmt.
2. Für $F_1 = \{\mathfrak{x}_1\} \subseteq L_1$ und $F_2 = \{\mathfrak{x}_2\} \subset L_2$ gilt:
   $d(F_1, F_2) = d(L_1, L_2) \iff \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 \perp U(L_1) + U(L_2)$,
   d.h. $d(L_1, L_2)$ ist der Abstand der Lotfußpunkte eines gemeinsamen Lotes von L_1, L_2.
3. $W = U(L_1) + U(L_2), \quad \mathfrak{z}_0 \in L_1 - L_2 \implies d(L_1, L_2) = \|\mathfrak{z}_0 - P_W(\mathfrak{z}_0)\|$

Beweis: $L_1 = \mathfrak{x}_0 + U,\ L_2 = \mathfrak{x}'_0 + U' \quad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{u} \in L_1,\ \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}'_0 + \mathfrak{u}' \in L_2$

$$\|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2\| = \|\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{u} - \mathfrak{x}'_0 - \mathfrak{u}'\| = \|\underbrace{(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}'_0)}_{\mathfrak{z}_0} - \underbrace{(-\mathfrak{u} + \mathfrak{u}')}_{\mathfrak{w} \in W = U + U'}\|$$

$d(L_1, L_2) = \inf\{\|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2\|,\ \mathfrak{x}_1 \in L_1, \mathfrak{x}_2 \in L_2\} = \inf\{\|\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{w}\| \mid \mathfrak{w} \in W\} = d(\mathfrak{z}_0, W)$
Satz 11.18: Der Abstand wird genau für $\mathfrak{w} = \underbrace{P_W(\mathfrak{z}_0)}_{\mathfrak{w}_0}$ angenommen.

Damit ist 3. bewiesen.
$\mathfrak{w}_0 = -\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}'_0,\ \mathfrak{u}_0 \in U,\ \mathfrak{u}'_0 \in U'$. Darstellung eindeutig, wenn $U \cap U' = \{\mathfrak{o}\}$
$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{u}_0,\ \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}'_0 + \mathfrak{u}'_0$
$F_1 = \{\mathfrak{x}_1\},\ F_2 = \{\mathfrak{x}_2\}$. Mit dieser Wahl wird $d(F_1, F_2) = d(L_1, L_2) \implies 1.$

Zu 2. Ist $d(F_1, F_2) = d(L_1, L_2)$, dann müssen F_1, F_2 die angegeben Form haben.
$\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}'_0) - (-\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}'_0) = \mathfrak{z}_0 - P_W(\mathfrak{z}_0) \perp W$
Umkehrung: Sei $(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \perp W$
$\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}'_0) - (-\mathfrak{u} + \mathfrak{u}') = \mathfrak{z}_0 - \mathfrak{w} = \mathfrak{v} \in W^\perp$
$\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{w} + \mathfrak{v},\ w \in W,\ v \in W^\perp \implies \mathfrak{w} = P_W(\mathfrak{z}_0) \implies d(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = d(L_1, L_2)$

Folgerung: Es sei $P = \{\mathfrak{x}_P\},\ L = \mathfrak{x}_0 + U,\ P \not\subset L,\ \dim L < \infty$
Dann gibt es genau ein Lot von P auf L.
$d(P, L) = \|\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0 - P_U(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0)\|$

Beweis: $U(P) = \{\mathfrak{o}\}, \quad U(P) \cap U = \{\mathfrak{o}\}, \quad W = U(P) + U = U$

13.2 Normalenvektoren

Es sei $\dim V = n$. H Hyperebene, $H = \mathfrak{x}_0 + U,\ \dim U = n - 1$
$V = U \oplus U^\perp \implies U^\perp = [\mathfrak{a}],\ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$
$\mathfrak{a}$ heißt ein **Normalenvektor** von H, bis auf Faktor $\neq 0$ eindeutig.
$\mathfrak{x} \in V \implies \mathfrak{x} = \mathfrak{u} + \lambda\mathfrak{a}. \quad \mathfrak{a}\mathfrak{x} = 0 \implies \mathfrak{x}\mathfrak{a} = \underbrace{\mathfrak{u}\mathfrak{a}}_{0} + \lambda\mathfrak{a}^2 = 0$

$\implies \lambda = 0,\ \mathfrak{x} \in U$ d.h. $\mathfrak{a}^\perp = U$
$\mathfrak{x} \in H \iff \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 \in U \iff \mathfrak{a}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0 \iff \mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}_0 = b$
$(*) \quad H = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{a}\mathfrak{x} = b\}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{x} = b$ **skalare Gleichung von** H
Umgekehrt wird durch $(*)$ eine Hyperebene mit Normalvektor $\mathfrak{a}$ definiert:
$f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}\mathfrak{a}$ ist Linearform. Es sei $U =$ Kern f. $U = [\mathfrak{a}]^\perp$
$\dim U = n - 1$, rg $f = 1 \implies$ Bild $f = \mathbb{C}$
Es existiert $\mathfrak{x}_0 \in V$ mit $\mathfrak{x}_0\mathfrak{a} = \overline{b} \implies \mathfrak{a}\mathfrak{x}_0 = b, \quad \mathfrak{x}_0 \in H$
$\mathfrak{x} \in H \implies \mathfrak{a}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = \mathfrak{a}\mathfrak{x} - \mathfrak{a}\mathfrak{x}_0 = b - b = 0 \implies \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 \in U$
$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 \in U \implies \mathfrak{a}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0 \implies \mathfrak{a}\mathfrak{x} = \underbrace{\mathfrak{a}\mathfrak{x}_0}_{b} \implies \mathfrak{x} \in H, \quad H = \mathfrak{x}_0 + U$

$\mathfrak{a}\mathfrak{x} = b$. Dividiere durch $\|\mathfrak{a}\|$: $\quad \dfrac{\mathfrak{a}}{\|\mathfrak{a}\|}\mathfrak{x} = \dfrac{b}{\|\mathfrak{a}\|}, \quad \mathfrak{n}\mathfrak{x} = c$

Man erhält die **Hessesche Normalform (HNF)** der Hyperebenengleichung.
$\mathfrak{n}$ Normaleneinheitsvektor, im Reellen bis auf einen Faktor ± 1 eindeutig bestimmt.

Satz 13.2: Es sei $\mathfrak{n}\mathfrak{x} - c = 0$ die HNF der Gleichung der Hyperebene H. $\quad P = \{\mathfrak{x}_P\}$
Dann ist $d(P, H) = |\mathfrak{n}\mathfrak{x}_P - c|$

Beweis: F Fußpunkt des Lotes g von P auf H.

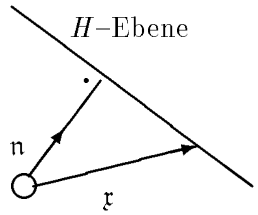
$$g = \mathfrak{x}_P + [\mathfrak{n}], \quad \mathfrak{x}_F \in g \cap H, \quad \mathfrak{n}\mathfrak{x}_F = c$$

$$\cdot\mathfrak{n} \mid \mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_P + \lambda_F \mathfrak{n}, \quad \underbrace{\mathfrak{n}\mathfrak{x}_F}_{c} = \mathfrak{n}\mathfrak{x}_P + \overline{\lambda_F}$$

$$d(P, H) = \|\mathfrak{x}_F - \mathfrak{x}_P\| = |\lambda_F| = |\mathfrak{n}\mathfrak{x}_P - c|$$

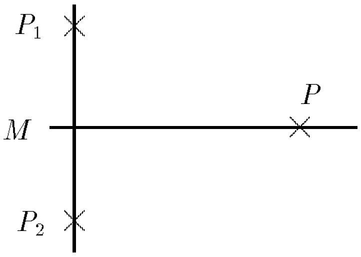
$P = 0 = \{\mathfrak{o}\}$. $|c|$ Abstand des Nullpunktes von H

in $\mathbb{R}^3$:



$$\mathfrak{n}\mathfrak{x} = c \begin{cases} > 0, \text{ wenn } \mathfrak{n} \text{ von } O \text{ zu } H \text{ zeigt} \\ < 0 \text{ andernfalls} \end{cases}$$

Es sei $E = \mathfrak{x}_0 + U$ Ebene. $\dim U = 2$ $\quad g = \mathfrak{x}_1 + [\mathfrak{a}] \subset E$
$[\mathfrak{a}] \subset U$, orthogonales Komplement in U: $[\mathfrak{a}]^\perp = [\mathfrak{b}]$ eindimensional, durch $P_1 \subset g$ gibt es genau ein Lot g_1 von g in E: $g_1 = \mathfrak{x}_1 + [\mathfrak{b}]$.

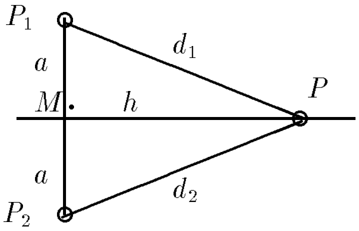


Es sei M der Mittelpunkt von P_1 und P_2. Das **Mittellot** von P_1 und P_2 in der Ebene E ist das Lot auf $L(P_1, P_2)$ durch M. $\quad P_1 \neq P_2$

Satz 13.3: Es seien P, P_1, P_2 Punkte einer Ebene, g das Mittellot von P_1 und P_2. Dann gilt: $P \subset g \implies d(P, P_1) = d(P, P_2)$
Im euklidischen Raum (nur dort) gilt auch die Umkehrung.

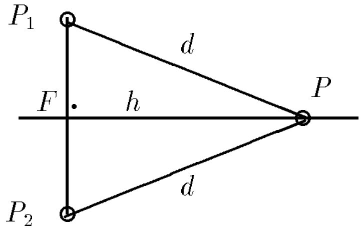
Beweis:

$P \subset g$



PYTHAGORAS: $d_1 = d_2 = \sqrt{a^2 + h^2}$

Umkehrung:



Es sei $d(P, P_1) = d(P, P_2) = d$
F Fußpunkt des Lotes von P auf $L(P_1, P_2)$
$\| \overrightarrow{P_1F} \| = \| \overrightarrow{FP_2} \| = \sqrt{d^2 - h^2}$
$\mathfrak{x}_F = \mathfrak{x}_1 + \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) \quad F = M \iff \lambda = \frac{1}{2}$

$$\| \overrightarrow{P_1F} \| = \| \overrightarrow{FP_2} \| \iff \|\mathfrak{x}_F - \mathfrak{x}_1\| = \|\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_F\|$$
$$\iff |\lambda| \cdot \|\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1\| = \|\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 - \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)\| = |1 - \lambda| \cdot \|\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1\|$$

$\iff |\lambda| = |1-\lambda| \iff |\lambda|^2 = |1-\lambda|^2 = (1-\lambda)(1-\overline{\lambda}) = 1-\lambda-\overline{\lambda}+|\lambda|^2$
$\iff 2\Re\lambda = 1 \iff \Re\lambda = \frac{1}{2}$
Im Reellen folgt $\lambda = \frac{1}{2}$, $F = M$, $P \subset g$

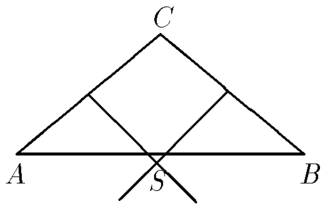
13.3 Sphären

Eine n–**dimensionale Kugel** ist eine Teilmenge G einer n–dimensionalen affinen Menge L der Form ($\mathfrak{x}_0 \in L$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$)

$G = \{\mathfrak{x} \mid \|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0\| \ \le\ r,\ \mathfrak{x} \in L\}$ abgeschlossene Kugel
$\quad < \ r$ offene Kugel
$\quad = \ r$ **Sphäre**

Mittelpunkt $\{\mathfrak{x}_0\}$, Radius r.
Ein **Kreis** ist eine 2–dimensionale Sphäre.

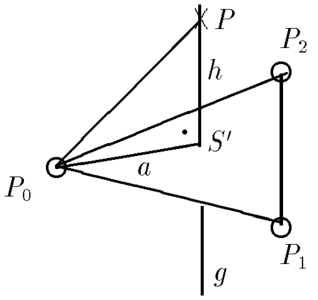
Im folgenden sei V ein euklidischer Vektorraum.



Im Dreieck schneiden sich die Mittellote von A, C und B, C in S. S hat von A, B, C gleiche Abstände. Also muß auch das Mittellot von A, B durch S gehen. S ist der Mittelpunkt des **Umkreises** von A, B, C.

Satz 13.4: Durch $n + 1$ affin unabhängige Punkte $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}, \ldots, P_n = \{\mathfrak{x}_n\}$ geht genau eine n–dimensionale Sphäre.

Beweis: Wir zeigen:
(∗) Es gibt genau einen Punkt $S = \{\mathfrak{x}_S\} \subset L(P_0, \ldots, P_n)$ mit
$d(S, P_0) = d(S, P_1) = \cdots = d(S, P_n) = r$
Dann ist $\|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_S\| = r$ die Gleichung der Sphäre durch $P_0, \ldots, P_n$
Vollständige Induktion: (∗) richtig für $n = 1, 2$.
Annahme: (∗) richtig für $n - 1$.
Es sei S' der Punkt in $L(P_0, \ldots, P_{n-1})$ mit $d(S', P_0) = \cdots = d(S', P_{n-1})$
$L = L(P_0, \ldots, P_n) = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n] = \mathfrak{x}_0 + U, \quad \mathfrak{a}_i = \mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_0$
$L' = L(P_0, \ldots, P_{n-1}) = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}] = \mathfrak{x}_0 + U'$
$U' \subset U$. ${U'}^{\perp} = [\mathfrak{a}]$ eindimensional in U. Es gibt in L genau ein Lot g auf L' durch $S' : g = \mathfrak{x}'_S + [\mathfrak{a}]$
Für $P \subset L$ gilt: $P \subset g \iff d(P, P_0) = \cdots = d(P, P_{n-1})$
Beweis wie für das Mittellot mit Pythagoras



$g \subset P$, $d(P, P_i) = \sqrt{a^2 + h^2}$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$
Umkehrung: Es sei $d(P, P_i) = d$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$
S'' Fußpunkt des Lotes von P auf L'.
$d(S'', P_i) = \sqrt{d^2 - h^2}$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$
$\implies S'' = S'$, $P \subset g$

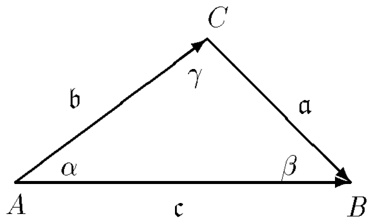
Der gesuchte Punkt S muß auf g liegen. $\mathfrak{x}_S = \mathfrak{x}_{S'} + \lambda\mathfrak{a}$
$d(S, P_n) = d(S, P_0) \iff \|(\mathfrak{x}_{S'} - \mathfrak{x}_n) + \lambda\mathfrak{a}\| = \|(\mathfrak{x}_{S'} - \mathfrak{x}_0) + \lambda\mathfrak{a}\|$
Quadrieren
$\iff \|\mathfrak{x}_{S'} - \mathfrak{x}_n\|^2 + 2\lambda\mathfrak{a}(\mathfrak{x}_{S'} - \mathfrak{x}_n) + \lambda^2\|\mathfrak{a}\|^2 = \|\mathfrak{x}_{S'} - \mathfrak{x}_0\|^2 + 2\lambda\mathfrak{a}(\mathfrak{x}_{S'} - \mathfrak{x}_0) + \lambda^2\|\mathfrak{a}\|^2$

$$\iff 2\lambda\mathfrak{a}(\underbrace{\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0}_{\mathfrak{a}_n}) = \|\mathfrak{x}_{S'} - \mathfrak{x}_n\|^2 - \|\mathfrak{x}_{S'} - \mathfrak{x}_0\|^2$$

$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_n \neq 0$, da sonst $\mathfrak{a} \in U \cap U^\perp$, $\quad \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \implies \lambda, S$ eindeutig bestimmt.

13.4 Dreiecksberechnung

$\alpha = \measuredangle\, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} = \measuredangle \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$
$\beta = \measuredangle\, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} = \measuredangle -\mathfrak{c}, -\mathfrak{a}$
$\gamma = \measuredangle\, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} = \measuredangle -\mathfrak{b}, \mathfrak{a}$
$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 \underbrace{+2\mathfrak{a}\mathfrak{b}}_{-2\mathfrak{a}\cdot(-\mathfrak{b})}$



$\|\mathfrak{a}\| = a, \ \|\mathfrak{b}\| = b, \ \|\mathfrak{c}\| = c$
$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ **Kosinussatz** PYTHAGORAS für $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$

$0 < b^2c^2 - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2 = b^2(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2 - (\mathfrak{b}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}))^2$
$= b^2a^2 + 2b^2(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + b^4 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2 - 2(\mathfrak{a}\mathfrak{b})b^2 - b^4 = a^2b^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2$
$b^2c^2 - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2 = a^2b^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2 = a^2c^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{c})^2$

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{bc}, \quad \cos\beta = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{ac}, \quad \cos\gamma = -\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{ab}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2}{b^2c^2}} = \frac{1}{bc}\sqrt{b^2c^2 - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{c})^2}{a^2c^2}} = \frac{1}{ac}\sqrt{a^2c^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{c})^2}$$

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2}{a^2b^2}} = \frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2}$$

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{a}{b}$ **Sinussatz**

Funktionsgraphen von Kosinus bzw. Sinus siehe Seite 7 und 75

Wir zeigen: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

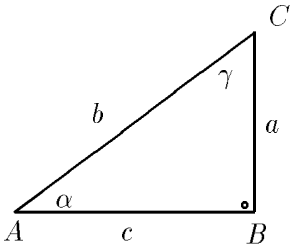
$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha=\frac{a}{c}\sin\gamma,\ \sin\beta=\frac{b}{c}\sin\gamma\\
&= \sin\gamma\left(\frac{a}{c}\cos\beta+\frac{b}{c}\cos\alpha\right)=\sin\gamma\left(\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{c^2}+\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{c^2}\right)\\
&= \frac{1}{c^2}\mathfrak{c}\,\underbrace{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}_{\mathfrak{c}}\sin\gamma=\sin\gamma \implies
\end{aligned}$$

1. $\alpha+\beta=\gamma=\pi$ oder
2. $\alpha+\beta=\pi-\gamma, \quad \alpha+\beta+\gamma=\pi.$

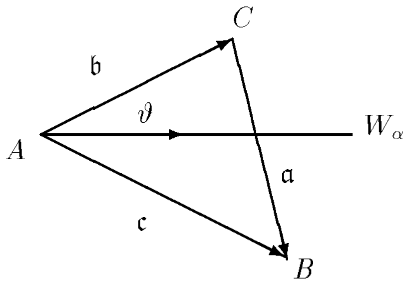
Es gelte 1.: $\alpha+\beta=\gamma$.
Man zeigt ebenso: $\sin(\alpha+\gamma)=\sin\beta$.
Aus $\alpha+\gamma=\beta$ würde mit 1. folgen: $\alpha=0$, **Widerspruch!**
Also ist $\alpha+\gamma=\pi-\beta, \quad \alpha+\beta+\gamma=\pi.$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{a}{b},\ \sin\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\gamma=\frac{c}{b}=\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



Die **Winkelhalbierende** W_α ist eine Gerade in $L(A,B,C)$, die definiert wird durch:
$(\|\mathfrak{a}\|=a,\ \|\mathfrak{b}\|=b$ usw.)
$W_\alpha=\mathfrak{x}_A+[\vartheta], \quad \underbrace{\measuredangle\vartheta,\mathfrak{b}=\measuredangle\vartheta,\mathfrak{c}}_{\iff \frac{\vartheta\mathfrak{b}}{db}=\frac{\vartheta\mathfrak{c}}{dc}}$

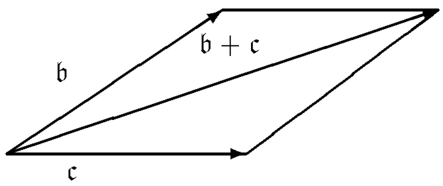


$$\vartheta\left(\frac{\mathfrak{b}}{b}-\frac{\mathfrak{c}}{c}\right)=0 \implies \vartheta\in\underbrace{\left(\frac{\mathfrak{b}}{b}-\frac{\mathfrak{c}}{c}\right)^{\perp}}_{\left[\frac{\mathfrak{b}}{b}+\frac{\mathfrak{c}}{c}\right]} \text{ orthogonales Komplement in } [\mathfrak{b},\mathfrak{c}]$$

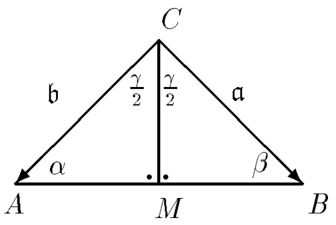
$$W_\alpha=\mathfrak{x}_A+\left[\frac{\mathfrak{b}}{b}+\frac{\mathfrak{c}}{c}\right]$$

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_A+\lambda\left(\frac{\mathfrak{b}}{b}+\frac{\mathfrak{c}}{c}\right) \quad \text{Gleichung der Winkelhalbierenden durch } A$$

Ist $b=c$, dann ist $W_\alpha=\mathfrak{x}_A+[\mathfrak{b}+\mathfrak{c}]$



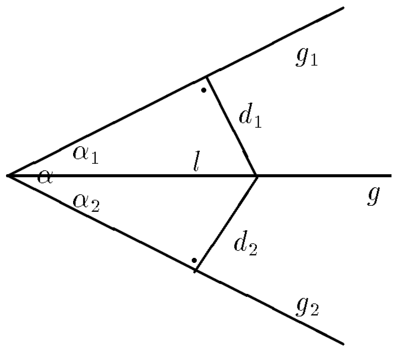
In einer **Raute** (Parallelogramm mit gleich langen Seiten) halbieren die Diagonalen die Winkel.



Es sei $\|\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{b}\|$, gleichschenklig
M Mittelpunkt von A, B
g_1 Seitenhalbierende durch C
g_2 Winkelhalbierende durch C
g_3 Mittellot von A, B

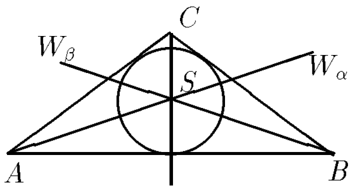
$g_2 = \mathfrak{x}_C + [\mathfrak{a} + \mathfrak{b}]$

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ist die Richtung der Diagonalen durch C in dem von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramm (Raute). Die Diagonalen halbieren sich. $\Longrightarrow$ $g_1 = g_2$. C hat von A, B gleiche Abstände. $\Longrightarrow$ C liegt auf dem Mittellot von A, B $\Longrightarrow$ $g_1 = g_2 = g_3$.
Es folgt noch $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$.



g_1, g_2 Schenkel des Winkels α
$d_1 = d_2 = d \Rightarrow$
$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$
$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \sin\alpha_1 = \dfrac{d_1}{l} = \sin\alpha_2 = \dfrac{d_2}{l} \Rightarrow d_1 = d_2$

Die Winkelhalbierende ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den Schenkeln des Winkels den gleich Abstand haben.



Es sei S der Schnittpunkt von W_α und W_β.
S hat von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand.
$\Longrightarrow$ W_γ geht ebenfalls durch S. S ist der Mittelpunkt des **Inkreises** des Dreiecks.

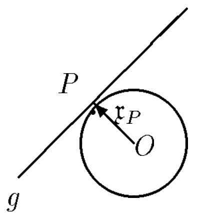
13.5 Schnitt von Kreis und Gerade

Es sei $\dim V = 2$
Kreis $K: \|\mathfrak{x}\| = r$, Gerade $g: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_P + \lambda\mathfrak{a}$, $\|\mathfrak{a}\| = 1$
Gesucht $K \cap g$
$\|\mathfrak{x}\|^2 = r^2$; $\quad \mathfrak{x}_P^2 + 2\lambda\mathfrak{a}\mathfrak{x}_P + \lambda^2 = r^2$, $\quad \lambda^2 + 2\lambda\mathfrak{a}\mathfrak{x}_P + \mathfrak{x}_P^2 - r^2 = 0 \quad (*)$
$\lambda_{1,2} = -\mathfrak{a}\mathfrak{x}_P \pm \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{x}_P)^2 - \mathfrak{x}_P^2 + r^2}$

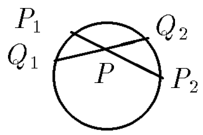
$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}\mathfrak{x}_P)^2 - \mathfrak{x}_P^2 + r^2 &> 0 \quad \text{2 Schnittpunkte} \\ &= 0 \quad \text{1 Schnittpunkt, } g \text{ Tangente an } K \\ &< 0 \quad \text{kein Schnittpunkt} \end{aligned}$$

$P = \{\mathfrak{x}_P\}$ im Inneren von K, $\mathfrak{x}_P^2 < r^2 \Longrightarrow$ 2 Schnittpunkte

Es sei P auf K $\quad \mathfrak{x}_P^2 = r^2$
g Tangente $\iff \mathfrak{a}\mathfrak{x}_P = 0$
In diesem Fall ist $\mathfrak{x}_P$ Normalenvekor von g
$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}_P = \mathfrak{x}_P^2 = r^2$ skalare Gleichung der Tangente durch P bzw. $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}_0) = r^2$, wenn nicht O, sondern $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}$ Mittelpunkt des Kreises ist.



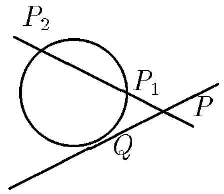
Sehnensatz
$\| \overrightarrow{PP_1} \| \cdot \| \overrightarrow{PP_2} \| = \| \overrightarrow{PQ_1} \| \cdot \| \overrightarrow{PQ_2} \|$
Folgt aus $(*)$. $\quad P_1 = \{\mathfrak{x}_1\},\ P_2 = \{\mathfrak{x}_2\}$
$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_P + \lambda_1 \mathfrak{a},\ \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_P + \lambda_2 \mathfrak{a}$



$\| \overrightarrow{PP_1} \| = \|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_P\| = |\lambda_1| \cdot \|\mathfrak{a}\| = |\lambda_1|, \quad \| \overrightarrow{PP_2} \| = |\lambda_2|$
$|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2| = |\mathfrak{x}_P^2 - r^2|$ unabhängig von der Richtung der Sehne

Sehnen – Tangenten – Satz

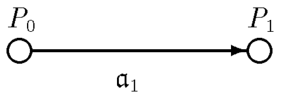
$\| \overrightarrow{PP_1} \| \cdot \| \overrightarrow{PP_2} \| = \| \overrightarrow{PQ} \|^2$
Beweis wie oben



13.6 Spate

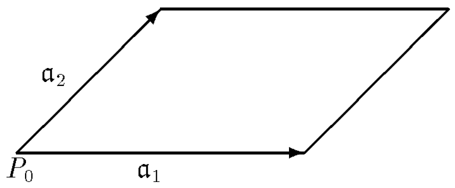
Es seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in V$, linear unabhängig $\quad \mathfrak{x}_0 \in V$
Wir definieren den von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ in $\{\mathfrak{x}_0\}$ aufgespannten n–**dimensionalen Spat**:
$Sp(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \alpha_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \alpha_n \mathfrak{a}_n\,,\ 0 \le \alpha_i \le 1\}$
Die $(n - r)$–dimensionalen **Seiten** von Sp sind Teilmengen, die man erhält, wenn man r Koeffizienten $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ konstant 0 oder 1 setzt.
Ecken von Sp sind 0–dimensionale Seiten.
Kanten von Sp sind 1–dimensionale Seiten.

$Sp(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{a}_1)$



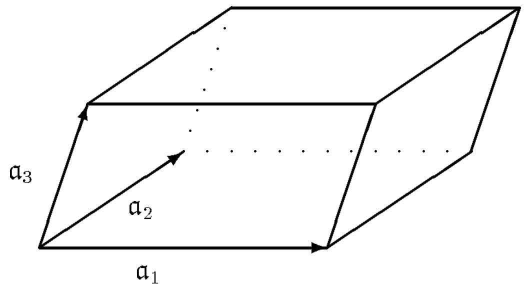
Strecke $\overline{P_0 P_1}$

$Sp(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$



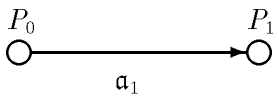
das von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ in P_0 aufgespannte Parallelogramm

$Sp(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$



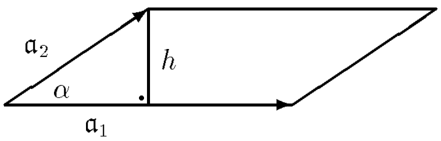
Spat

$Sp(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ **Quader**, wenn $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Orthogonalsystem
Würfel = Quader mit $\|\mathfrak{a}_1\| = \cdots = \|\mathfrak{a}_n\| = a$ Kantenlänge
Wir definieren das (n–dimensionale) **Volumen** von Sp:
$V(Sp) = V(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \sqrt{\det(\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j)}$
$\det(\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j) = \det(S^T S) = (\det S)^2$ **Gramsche Determinante** siehe Übung
$V(Sp) = |\det S|$
Dabei enthält S in den Spalten die Koordinaten von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bzgl. einer beliebigen ONB.

$V(\mathfrak{a}_1) = \sqrt{\det(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_1)} = \|\mathfrak{a}_1\|$ 

Länge der Strecke $\overline{P_0 P_1}$

$$V(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1^2 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_2^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2 - (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^2} = \|\mathfrak{a}_1\| \cdot \|\mathfrak{a}_2\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$
$$= \|\mathfrak{a}_1\| \cdot \|\mathfrak{a}_2\| \cdot \sin\alpha$$



$h = \|\mathfrak{a}_2\| \cdot \sin\alpha$
$V(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \|\mathfrak{a}_1\| \cdot h$ Grundseite $*$ Höhe
Parallelogrammfläche

Quadervolumen:
$$V(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathfrak{a}_n^2 \end{pmatrix}} = \|\mathfrak{a}_1\| \cdots \|\mathfrak{a}_n\|$$

Satz 13.5: Es sei ψ ein Automorphismus von $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$
Dann gilt: $V(\psi\mathfrak{a}_1, \ldots, \psi\mathfrak{a}_n) = |\det\psi| \cdot V(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$

Beweis: Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ ONB von $U = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$
Definiere $\varphi \in \operatorname{Hom} U$ durch: $\varphi(\mathfrak{b}_i) = \mathfrak{a}_i,\ i = 1, \ldots, n$.
$\psi \circ \varphi(\mathfrak{b}_i) = \psi\mathfrak{a}_i$
$M(\psi \circ \varphi, B)$ hat in den Spalten die Koordinaten der Vektoren $\psi\mathfrak{a}_i$ bzgl. B.
$$\begin{aligned} V(\psi\mathfrak{a}_1, \ldots, \psi\mathfrak{a}_n) &= |\det M(\psi \circ \varphi, B)| \\ &= |\det M(\psi, B)| \cdot |\det M(\varphi, B)| \\ &= |\det\psi| \cdot \underbrace{|\det S|}_{V(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)} \end{aligned}$$

13.7 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \mathfrak{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$; e_1, e_2, e_3 Standardbasis
$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1) \in \mathbb{R}^3$
$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
Entwickle nach der 1. Zeile

$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ist linear in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear abhängig $\Longrightarrow \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$. Es gilt auch $\Longleftarrow$ siehe Übung
$\mathbb{R}^3$ ist mit dem Vektorprodukt eine Algebra über $\mathbb{R}$.
$\mathfrak{b} \times \mathfrak{a} = -(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ antikommutativ

$$e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1) = e_3$$

Entsprechend: $e_2 \times e_3 = e_1,\ e_3 \times e_1 = e_2$

$$\left.\begin{array}{r} (e_1 \times e_1) \times e_2 = \mathfrak{o} \times e_2 = \mathfrak{o} \\ e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_3 \times e_1 = -e_2 \neq \mathfrak{o} \end{array}\right\} \text{nicht assoziativ}$$

$\mathfrak{c} = (c_1, c_2, c_3)$. **Spatprodukt** der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

keine Änderung bei zyklischem Vertauschen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$
$|(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c}| = V(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ Spatvolumen bzw. 0, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ linear abhängig.
$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{b} = 0$
$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ist senkrecht zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$
$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]^\perp$ eindimensional, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear unabhängig sind.

Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear unabhängig, $\mathfrak{c} = \dfrac{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}}{\|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\|}$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c} &= \|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\| \\ &= V(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}\mathfrak{b} & 0 \\ \mathfrak{a}\mathfrak{b} & \mathfrak{b}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{c}^2 \end{vmatrix}} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{b} & \mathfrak{b}^2 \end{vmatrix}} = V(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\| = \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \sin\alpha, \quad \alpha = \measuredangle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$
Fläche des von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear unabhängig. e_1, e_2, e_3 Rechtssystem
e_1, e_2, e_3 und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ gleichorientiert, wenn $\det(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) > 0$
$\det(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\|^2 > 0$

1. $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]^\perp$
2. $\|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\| = \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \sin\alpha$
3. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ Rechtssystem, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear unabhängig

1., 2., 3. legen $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ eindeutig fest.

Satz 13.6: Grassmann Identität, Entwicklungssatz

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b} - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$$

Beweis: $F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$, $\quad G(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b} - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} \quad V = \mathbb{R}^3$
$F, G : V^3 \to V$ linear in $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$
Es genügt $F = G$ für die Vektoren e_1, e_2, e_3 der Standardbasis zu zeigen.
$\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} \in \{e_1, e_2, e_3\}$
$F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = G(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$, wenn $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ paarweise verschieden oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$
Es sei $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$

1. Fall: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$

$$G(\mathfrak{b},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \underbrace{(\mathfrak{b}\mathfrak{c})}_{0}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}^2\mathfrak{c} = -\mathfrak{c}$$

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{b},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) &= \mathfrak{b} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}),\ \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = \pm\vartheta,\ \{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\vartheta\} = \{e_1,e_2,e_3\} \\ &= \pm\mathfrak{b} \times \vartheta = \lambda\mathfrak{c},\ \lambda = \pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{b} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}))\mathfrak{c} &= (\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c} = \lambda \\ &= (\mathfrak{c} \times \mathfrak{b})(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = -1 \quad \surd \end{aligned}$$

2. Fall: $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$

$$F(\mathfrak{c},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = -F(\mathfrak{c},\mathfrak{c},\mathfrak{b}) \overset{\text{Fall 1}}{=} -G(\mathfrak{c},\mathfrak{c},\mathfrak{b}) = G(\mathfrak{c},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$$

Folgerung: Jacobi Identität

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + \mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) + \mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$$

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b} & - & (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} & - & (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{a} \\ (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{a} & - & (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b} \\ \hline & \mathfrak{o} & \end{array}$$

Teil II

Lineare Algebra 2

Kapitel 14

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition: V Vektorraum über K, $\dim V = n \geq 1$
Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V$. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt ein **Eigenwert** von φ, wenn $E_\lambda = \operatorname{Kern}(\varphi - \lambda \mathrm{id}) \neq \{\mathfrak{o}\}$, d.h., wenn es einen Vektor $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ gibt mit $\varphi\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x}$. Die Vektoren $\neq \mathfrak{o}$ aus E_λ heißen **Eigenvektoren** von φ zum Eigenwert λ.
E_λ ist der **Eigenraum** von φ zum Eigenwert λ.
$\dim E_\lambda$ ist die **geometrische Ordnung (Vielfachheit)** von λ.
Die Menge $S(\varphi)$ der Eigenwerte von φ ist das **Spektrum** von φ.

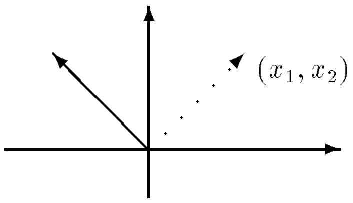
Beispiel:

1. φ Streckung $\iff S(\varphi) = \{\lambda\},\ E_\lambda = V$
2. Drehungen $\neq \pm\mathrm{id}$ des $\mathbb{R}^2$ haben keine Eigenwerte.

$\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{R}^2, \quad M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bzgl. der Standardbasis

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2), \quad \varphi\mathfrak{x} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}^T = (-x_2, x_1)$$

$\varphi\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x} = 0, \quad \|\varphi\mathfrak{x}\| = \|\mathfrak{x}\|$
Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn.



$\varphi\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x} \iff -x_2 = \lambda x_1, \quad x_1 = \lambda x_2 \iff (1+\lambda^2)x_2 = 0, \quad x_1 = \lambda x_2$
$\overset{\mathfrak{x}\neq\mathfrak{o}}{\Longrightarrow}\ 1 + \lambda^2 = 0$ keine Lösung im Rellen.
Fasse φ als komplexen Endomorphismus auf, $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{C}^2$. $S(\varphi) = \{i, -i\}$.

Satz 14.1: Es seien $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, $\dim V = n \geq 1$. Dann gilt:

1. $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ sind linear unabhängig
2. Die Summe $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_r}$ ist direkt

3. $r \leq n = \dim V$

Beweis: 1. Induktion über r: $r = 1$ $\surd$
Annahme: Behauptung richtig für $r-1$ Vektoren, $r \geq 2$
Es sei $\alpha_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + \alpha_r\mathfrak{x}_r = \mathfrak{o}$

$$(\varphi - \lambda_r)(\alpha_i\mathfrak{x}_i) = \alpha_i\varphi\mathfrak{x}_i - \alpha_i\lambda_r\mathfrak{x}_i = \alpha_i(\underbrace{\lambda_i - \lambda_r}_{0 \text{ für } i=r})\mathfrak{x}_i$$

$$(\varphi - \lambda_r)\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\mathfrak{x}_i = \sum_{i=1}^{r-1}\alpha_i(\underbrace{\lambda_i - \lambda_r}_{\neq 0})\mathfrak{x}_i = \mathfrak{o}$$

$$\Longrightarrow \alpha_i = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, r-1 \Longrightarrow \alpha_r = 0$$

2. $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}'_1 + \cdots + \mathfrak{a}'_r; \quad \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}'_i \in E_{\lambda_i}$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}'_1)}_{\mathfrak{x}_1} + \cdots + \underbrace{(\mathfrak{a}_r - \mathfrak{a}'_r)}_{\mathfrak{x}_r} = \mathfrak{o}; \qquad \mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_r = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{x}_i \in E_{\lambda_i}$$

Die Summe ist genau dann direkt, wenn der Nullvektor nur die triviale Darstellung hat.
Alle $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{o}$, da nach 1. Vektoren $\mathfrak{x}_i \neq \mathfrak{o}$ linear unabhängig sind.

3. $\dim V \geq \dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}) = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_r} \geq r$

Folgerung: $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathfrak{o}\}$, wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Satz 14.2: Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ alle verschiedenen Eigenwerte von $\varphi \in \operatorname{Hom} V$. Ihre geometrischen Ordnungen seien $g_1, \ldots, g_r$. Dann gilt:

1. Ein linear unabhängiges System aus Eigenvektoren von φ hat maximal $g_1 + \cdots + g_r$ Elemente.
2. V hat genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von φ, wenn $g_1 + \cdots + g_r = \dim V$ ist.

Beweis: 1. $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}; \quad B_i$ Basis von E_{λ_i}
$B = \bigcup_i B_i$ Basis von E, linear unabhängig

$$|B| = \sum_i |B_i| = g_1 + \cdots + g_r$$

Umgekehrt sei S ein linear unabhängiges System von Eigenvektoren

$$S = \bigcup_{i=1}^{r}(S \cap E_{\lambda_i}) \quad |S| = \sum_{i=1}^{r}|S \cap E_{\lambda_i}| \leq \sum_{i=1}^{r}\dim E_{\lambda_i} = g_1 + \cdots + g_r$$

2. folgt aus 1.

14.1 Diagonalisierbare Matrizen

Definition: $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, so daß $M(\varphi, B)$ eine Diagonalmatrix ist.

Satz 14.3: $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis B von V aus lauter Eigenvektoren von φ gibt.

Beweis: Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis aus Eigenvektoren. $\varphi\mathfrak{b}_i = \lambda_i\mathfrak{b}_i$

$$M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{Diagonalmatrix}$$

Umkehrung $\surd$

Folgerung: aus Satz 14.1 und 14.3:
Hat φ $n = \dim V$ verschiedene Eigenwerte, dann ist φ diagonalisierbar.

$A \in K^{n\times n}, \quad \varphi_A : K_n \to K_n, \quad \varphi_A(\mathfrak{x}) = A\mathfrak{x}$
Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum von $A \overset{\text{Def}}{=}$
Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum von φ_A
A diagonalisierbar $\overset{\text{Def}}{\iff}$ φ_A diagonalisierbar

Satz 14.4: $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Basis $B' = \{\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_n\}$ von K_n aus lauter Eigenvektoren von A existiert. Ist S die Matrix mit den Spaltenvektoren $\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_n$ und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte, dann ist

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis: B Standardbasis von K_n
S ist die Matrix der Basistransformation $B \to B'$

$$M(\varphi_A, B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = S^{-1}AS$$

A ist genau dann diagonalisierbar, wenn A zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

14.2 Berechnung von Eigenwerten

$A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$, $\quad I_n = (\delta_{ij})$ $n \times n$ – Einheitsmatrix
Das **charakteristische Polynom** $\chi_A(x)$ ist:

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}-x & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

Bemerkung: $K[x] \subseteq K(x) = \left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in K[x], g \neq 0 \right\}$

Körper der rationalen Funktionen über K; Determinantentheorie ist gültig

Satz 14.5: $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

1. Es ist $\chi_A(x) = (-x)^n + \alpha_{n-1}(-x)^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ mit
   $\alpha_0 = \det A$, $\quad \alpha_{n-1} = \text{Spur } A = a_{11} + \cdots + a_{nn}$
2. Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom

Beweis:

1. $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det A$
   $A - xI_n = (a_{ij} - x\delta_{ij})$
   $$\chi_A(x) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi (a_{1,\pi 1} - x\delta_{1,\pi 1}) \cdot \ldots \cdot (a_{n,\pi n} - x\delta_{n,\pi n})$$
   Es sei $\pi = \text{id}$:
   $$(a_{11} - x) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - x) = (-x)^n + (-x)^{n-1}(\underbrace{a_{11} + \cdots + a_{nn}}_{\text{Spur } A}) + \ldots$$
   Permutationen $\pi \neq \text{id}$ liefern nur noch Beiträge zu $(-x)^{n-2}$.
   $\pi \neq \text{id}$ läßt mindestens 2 Elemente nicht fest.
2. $B = S^{-1}AS$
   $\chi_B(x) = \det(B - xI_n) = \det(S^{-1}AS - xI_n) = \det(S^{-1}(A - xI_n)S) =$
   $\frac{1}{\det S} \cdot \det(A - xI_n) \cdot \det S = \chi_A(x)$

Folgerung: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.

Definition: Es sei $\varphi \in \text{Hom } V$, B Basis von V, $M(\varphi, B) = A$.
Dann ist das charakteristische Polynom von φ definiert durch:
$\chi_\varphi(x) = \chi_A(x)$. Spur φ = Spur A.
Diese Definition ist nach Satz 14.5 unabhängig von der Wahl der Basis B.

Satz 14.6: Eigenwerte von $\varphi \in \text{Hom } V$ bzw. $A \in K^{n\times n}$ sind genau die Nullstellen von $\chi_\varphi(x)$ bzw. $\chi_A(x)$.

Beweis: B Basis von V, $M(\varphi, B) = A$
λ Eigenwert von $\varphi \iff$ Kern $(\varphi - \lambda) \neq \{\mathfrak{o}\}$
$\iff (\varphi - \lambda)$ nicht injektiv $\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff \chi_\varphi(\lambda) = 0$

14.3 Algebraische Ordnung

$f \in K[x]$
λ Nullstelle von f, d.h. $f(\lambda) = 0 \iff f(x) = (x - \lambda)g(x), \quad g \in K[x]$
λ ist eine Nullstelle der Vielfachheit (Ordnung) α von $f(x)$, wenn
$f(x) = (x - \lambda)^\alpha g(x), \quad g \in K[x],\ g(\lambda) \neq 0.$
Ist λ eine a–fache Nullstelle von $\chi_\varphi(x)$ bzw. $\chi_A(x)$, dann heißt a die **algebraische Ordnung (Vielfachheit)** des Eigenwertes λ.

Satz 14.7: Es sei λ ein Eigenwert von $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ und g bzw. a seine geometrische bzw. algebraische Ordnung. Dann ist $g \leq a$.

Beweis: $\dim E_\lambda = g$. Erweitere eine Basis E_λ zu einer Basis von V.

$$B = \{\underbrace{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_g}_{\text{Basis von } E_\lambda}, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$$

$$M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \boxed{C} \end{pmatrix} \qquad \varphi\mathfrak{b}_i = \lambda\mathfrak{b}_i \text{ für } i = 1, \ldots, g$$

$$\chi_\varphi(x) = (\lambda - x)^g \chi_C(x) \implies a \geq g$$

Satz 14.8: Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ alle verschiedenen Eigenwerte von $\varphi \in \operatorname{Hom} V$. g_j bzw. a_j seien die geometrische bzw. algebraische Ordnung von λ_j. Genau dann ist φ diagonalisierbar, wenn $\chi_\varphi(x)$ in $K[x]$ in lauter Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert geometrische und algebraische Ordnung übereinstimmen. (Analog für $A \in K^{n \times n}$)

Beweis: $\chi_\varphi(x) = (x - \lambda_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{a_r} \cdot h(x), \quad h(x) \neq 0$ für alle $x \in K$.
$g_1 + \cdots + g_r \overset{\text{Satz 14.7}}{\leq} a_1 + \cdots + a_r \leq n = \dim V = \operatorname{Grad} \chi_\varphi(x)$
φ diagonalisierbar $\overset{\text{Satz 14.2, 14.3}}{\iff} g_1 + \cdots + g_r = n$

$$\iff g_j = a_j \text{ für alle } j \wedge \qquad \underbrace{a_1 + \cdots + a_r = n}_{\iff \chi_\varphi(x) \text{ zerfällt in lauter Linearfaktoren}}$$

14.4 Beispielaufgabe

$\varphi : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_4, \quad M(\varphi, B) = A, \quad B$ Standardbasis

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 2 \\ 6 & 12 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren von φ!

$$\chi_\varphi(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ -4 & -8 & -x & 2 \\ 6 & 12 & -2 & -x \end{vmatrix} = (3-x)^2(x^2+4)$$

Keine Basis von $\mathbb{R}_4$ aus lauter Eigenvektoren.
Einziger Eigenwert: $\lambda_1 = 3$, algebraische Ordnung $a_1 = 2$.

Bestimme eine Basis von E_{λ_1}:
$E_{\lambda_1} = \text{Kern } (\varphi - \lambda_1) = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathbb{R}_4,\ \varphi\mathfrak{x} - \lambda_1\mathfrak{x} = \mathfrak{o}\} = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathbb{R}_4,\ (A - \lambda_1, I_4)\mathfrak{x} = \mathfrak{o}\}$
Löse $(A - 3I_4)\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$

$$\begin{array}{cccc|cl} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -4 & -8 & -3 & 2 & 0 & \cdot(-\frac{1}{4}) \\ 6 & 12 & -2 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & (-6) \\ 6 & 12 & -2 & -3 & \leftarrow \\ \hline 1 & 2 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & 0 & \cdot(-\frac{2}{13}) \\ \hline 1 & 2 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \leftarrow \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (-\frac{3}{4}) \\ \hline 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

2 linear unabhängige Lösungen: $\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad \text{geometrische Ordnung von } \lambda_1 : \ g_1 = 2 = a_1$$

Fasse jetzt φ als Abbildung $\varphi : \mathbb{C}_4 \to \mathbb{C}_4$ auf.
$\chi_\varphi(x) = (3-x)^2(x-2i)(x+2i)$
$\lambda_2 = 2i,\ \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = -2i, \quad g_2 = a_2 = 1,\ g_3 = a_3 = 1$
$\mathbb{C}_4$ hat eine Basis aus lauter Eigenvektoren von φ.

Löse $(A - 2iI_4)\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$:

$$\begin{array}{cccc|llll}
3-2i & 0 & 0 & 0 & \cdot\frac{1}{3-2i} & & & \\
0 & 3-2i & 0 & 0 & \cdot\frac{1}{3-2i} & & & \\
-4 & -8 & -2i & 2 & & & & \\
6 & 12 & -2 & -2i & & & & \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 4 & (-6) & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & 8 & (-12) \\
-4 & -8 & -2i & 2 & \leftarrow & & \leftarrow & \\
6 & 12 & -2 & -2i & & \leftarrow & & \leftarrow \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & -2i & 2 & i & \cdot\frac{i}{2} & & \\
0 & 0 & -2 & -2i & \leftarrow & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & i & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \qquad E_{\lambda_2} = \left[\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -i\\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Bestimme E_{λ_3}:
$A = (a_{jk})$, $\overline{A} = (\overline{a_{jk}})$
$(A - \lambda_3 I_4)\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \iff \overline{(A - \lambda_3 I_4)\mathfrak{x}} = \mathfrak{o} \iff (\overline{A} - \overline{\lambda_3 I_4})\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{o} \iff (A - \lambda_2 I_4)\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{o}$,
da A, I_4 reell, $\overline{\lambda_3} = \lambda_2$

$$\Longrightarrow E_{\lambda_3} = \left[\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ i\\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\text{Basis von } \mathbb{C}_4\text{, aus Eigenvektoren: } B' = \left\{ \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -i\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ i\\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M(\varphi, B') = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} = S^{-1}AS$$

S Matrix der Basistransformation Standardbasis $\to B'$

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & i\\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kapitel 15

Die komplexe Erweiterung eines reellen Vektorraumes

Beispiel: $\mathbb{C}^n$ ist komplexe Erweiterung von $\mathbb{R}^n$; $\quad \mathfrak{x} \in \mathbb{C}^n$
$\mathfrak{x} = (a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n) = (a_1, \dots, a_n) + i(b_1, \dots, b_n) = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}; \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$

Es sei V Vektorraum über $\mathbb{R}$
$\widehat{V} = V \times V = \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V\}$
Definiere:

	$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \longleftrightarrow \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$
$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) + (\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)$	$(\mathfrak{a}_1 + i\mathfrak{b}_1) + (\mathfrak{a}_2 + i\mathfrak{b}_2) = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) + i(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)$
$(r + si)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (r\mathfrak{a} - s\mathfrak{b}, s\mathfrak{a} + r\mathfrak{b})$	$(r + si)(\mathfrak{a} + i\mathfrak{b}) = (r\mathfrak{a} - s\mathfrak{b}) + i(r\mathfrak{b} + s\mathfrak{a})$

Auf diese Weise wird $\widehat{V}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$. Nachprüfen!
$\widehat{V}$ heißt die **komplexe Erweiterung** von V.

$(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{o}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{o}); \qquad r(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}) = (r\mathfrak{a}, \mathfrak{o})$, wenn $r \in \mathbb{R}$
Wir schreiben $\mathfrak{a}$ statt $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}) \qquad V \subseteq \widehat{V}$

In V wird wie zuvor gerechnet, wenn nur mit reellen Skalaren multipliziert wird.

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}) + \underbrace{(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})}_{i(\mathfrak{b}, \mathfrak{o})} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$$

Jeder Vektor $\mathfrak{x} \in \widehat{V}$ hat eine eindeutige Darstellung:
$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}; \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V; \quad \mathfrak{a} = \Re\mathfrak{x},\ \mathfrak{b} = \Im\mathfrak{x}$

Es sei B eine Basis von V. $\quad B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$
$\lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}, \quad \lambda_j = r_j + is_j$

$$\sum_j (r_j + is_j)\mathfrak{b}_j = \sum_j r_j\mathfrak{b}_j + i\sum_j s_j\mathfrak{b}_j = \mathfrak{o}$$

$$\Longrightarrow \sum_j r_j\mathfrak{b}_j = \mathfrak{o}, \quad \sum_j s_j\mathfrak{b}_j = \mathfrak{o} \Longrightarrow \text{ alle } r_j, s_j = 0 \Longrightarrow \text{ alle } \lambda_j = 0$$

B ist auch in $\widehat{V}$ linear unabhängig.

Es sei $\mathfrak{x} \in \widehat{V}$, $\quad \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$; $\quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$

$\mathfrak{a} = \sum\limits_j r_j \mathfrak{b}_j, \quad \mathfrak{b} = \sum\limits_j s_j \mathfrak{b}_j$

$\mathfrak{x} = \sum\limits_j r_j \mathfrak{b}_j + i \sum\limits_j s_j \mathfrak{b}_j = \sum\limits_j (r_j + is_j)\mathfrak{b}_j$

Jede Basis von V ist auch Basis von $\widehat{V}$. $\quad \dim V = \dim \widehat{V}$

Satz 15.1: Es sei $\varphi : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung der reellen Vektorräume V_1, V_2. Sind $\widehat{V_1}, \widehat{V_2}$ die komplexen Erweiterungen von V_1, V_2, dann gibt es genau eine Fortsetzung von φ zu einer linearen Abbildung $\widehat{\varphi} : \widehat{V_1} \to \widehat{V_2}$.

Beweis: Fortsetzung bedeutet: $\widehat{\varphi} \restriction V_1 = \varphi$
B Basis von V_1. B ist auch von $\widehat{V_1}$
$\widehat{\varphi} = \varphi$ auf B. Damit ist $\widehat{\varphi}$ eindeutig bestimmt.
$\widehat{\varphi}$ ist die komplexe Fortsetzung von φ
$\widehat{\varphi}(\mathfrak{a} + i\mathfrak{b}) = \varphi\mathfrak{a} + i\varphi\mathfrak{b}$

Es sei $V_1 = V_2 = V$, $\quad B$ Basis, $|B| = n$
$M(\varphi, B) = A = M(\widehat{\varphi}, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \chi_\varphi = \chi_{\widehat{\varphi}} = \chi_A \in \mathbb{R}[x]$
Jeder Eigenwert von φ ist auch Eigenwert von $\widehat{\varphi}$.

Satz 15.2: Ein Skalarprodukt β eines reellen Raumes V kann auf genau eine Weise zu einem Skalarprodukt $\widehat{\beta}$ von $\widehat{V}$ fortgesetzt werden.
$\widehat{\beta}$ heißt die komplexe Fortsetzung von β.

Beweis: Fortsetzung bedeutet: $\widehat{\beta}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \beta(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$
$B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis von V. B ist auch Basis von $\widehat{V}$.
$\widehat{\beta}(\mathfrak{b}_j, \mathfrak{b}_k) = \beta(\mathfrak{b}_j, \mathfrak{b}_k)$ für alle j, k
Damit ist $\widehat{\beta}$ als HERMITEsche Form eindeutig definiert.
$\widehat{\beta}$ hat auf B nur reelle Werte, $\quad M(\beta, B) = M(\widehat{\beta}, B) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Ist $\widehat{\beta}$ auf $\widehat{V}$ positiv definit?
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$

$$\widehat{\beta}(\mathfrak{a} + i\mathfrak{b}, \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}) = \widehat{\beta}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + \widehat{\beta}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) + i(\underbrace{\widehat{\beta}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) - \widehat{\beta}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}_{\beta(\mathfrak{b},\mathfrak{a})-\beta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=0}) = \beta(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + \beta(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) \geq 0$$

$= 0 \iff \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \wedge \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$
$\Longrightarrow \widehat{\beta}$ ist Skalarprodukt

Folgerung: Jeder euklidische Raum läßt sich zu einem unitären Raum erweitern.
$(V, \beta) \to (\widehat{V}, \widehat{\beta})$
Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$, $B \subseteq V$ gilt:
$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ in $V \iff \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ in $\widehat{V}$, $\quad B$ ONB von $V \iff B$ ONB von $\widehat{V}$.

Beispiel: $\mathbb{C}^n = \widehat{\mathbb{R}^n}$ $\quad B$ Standardbasis, β Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^n$

$$M(\beta, B) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = M(\widehat{\beta}, B)$$

$$\mathfrak{x} = (x_i),\ \mathfrak{y} = (y_i) \in \mathbb{C}^n$$

$$\widehat{\beta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,j} \delta_{ij} x_i \overline{y_j} = \sum_i x_i \overline{y_i}$$

$\widehat{\beta}$ ist das Standardskalarprodukt von $\mathbb{C}^n$.

Kapitel 16

Normale Endomorphismen

16.1 Adjungierter Endomorphismus

Im folgenden sei V euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Satz 16.1: Wenn es zur Abbildung $\varphi \in V^V$ eine Abbildung $\varphi^* \in V^V$ gibt, so daß $\varphi\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \varphi^*\mathfrak{b}$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$ ist, dann ist φ^* eindeutig bestimmt und φ^* und φ sind linear.
φ^* heißt **der zu φ adjungierte Endomorphismus**.

Beweis: Annahme: $\varphi_1, \varphi_2 \in V^V$, so daß
$\varphi\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \varphi_1\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \varphi_2\mathfrak{b}$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$
$\Longrightarrow\ \mathfrak{a} \cdot (\varphi_1\mathfrak{b} - \varphi_2\mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$
$\Longrightarrow\ (\varphi_1\mathfrak{b} - \varphi_2\mathfrak{b})^2 = \mathfrak{o}, \quad \varphi_1\mathfrak{b} = \varphi_2\mathfrak{b}$ für alle $\mathfrak{b}$, $\varphi_1 = \varphi_2$
φ^* ist eindeutig bestimmt.

$\varphi\mathfrak{a} \cdot \lambda\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \varphi^*(\lambda\mathfrak{b}) = \overline{\lambda}(\varphi\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \overline{\lambda}(\mathfrak{a} \cdot \varphi^*\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \lambda\varphi^*\mathfrak{b}$
$\Longrightarrow\ \mathfrak{a} \cdot (\varphi^*(\lambda\mathfrak{b}) - \lambda\varphi^*\mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$
$\Longrightarrow\ \varphi^*(\lambda\mathfrak{b}) = \lambda\varphi^*(\mathfrak{b})$ für alle $\mathfrak{b}$
$\varphi\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{a} \cdot \varphi^*(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \varphi\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_1 + \varphi\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a} \cdot \varphi^*\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a} \cdot \varphi^*\mathfrak{b}_2$
$\mathfrak{a} \cdot (\varphi^*(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) - \varphi^*\mathfrak{b}_1 - \varphi^*\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{o}$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$
$\Longrightarrow\ \varphi^*(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \varphi^*\mathfrak{b}_1 + \varphi^*\mathfrak{b}_2$
φ^* ist linear. Ebenso folgt die Linearität von φ.

Satz 16.2:

1. $\varphi^{**} = \varphi$
2. $(\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*$
3. $(\varphi_1 + \varphi_2)^* = \varphi_1^* + \varphi_2^*$
4. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)^* = \varphi_2^* \circ \varphi_1^*$

Beweis:

1. $\varphi^*\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{b} \cdot \varphi^*\mathfrak{a}} = \overline{\varphi\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cdot \varphi\mathfrak{b} \ \Longrightarrow\ \varphi^{**} = \varphi$
2. $(\lambda\varphi)\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \lambda(\varphi\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a} \cdot \varphi^*\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \overline{\lambda}\varphi^*\mathfrak{b} \ \Longrightarrow\ (\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*$

3. $(\varphi_1+\varphi_2)\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \varphi_1\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+\varphi_2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\varphi_1^*\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cdot\varphi_2^*\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot(\varphi_1^*+\varphi_2^*)\mathfrak{b}$
$\Longrightarrow\ (\varphi_1+\varphi_2)^* = \varphi_1^*+\varphi_2^*$
4. $\varphi_1\circ\varphi_2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \varphi_2\mathfrak{a}\cdot\varphi_1^*\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\varphi_2^*\varphi_1^*\mathfrak{b}\ \Longrightarrow\ (\varphi_1\varphi_2)^* = \varphi_2^*\varphi_1^*$

Satz 16.3: 1. Kern $\varphi^* = (\text{Bild } \varphi)^\perp$
2. Kern $\varphi = (\text{Bild } \varphi^*)^\perp$

Beweis: 2. folgt aus 1. wegen $\varphi^{**}=\varphi$
$\mathfrak{b}\in\text{Kern } \varphi^* \iff \varphi^*\mathfrak{b}=\mathfrak{o} \iff \mathfrak{a}\cdot\varphi^*\mathfrak{b} = \varphi\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ für alle $\mathfrak{a} \iff \mathfrak{b}\in(\text{Bild } \varphi)^\perp$

Im folgenden sei stets $\dim V = n < \infty$.

Satz 16.4: 1. $\text{def } \varphi = \text{def } \varphi^*,\quad \text{rg } \varphi = \text{rg } \varphi^*$
2. φ bijektiv $\iff$ φ^* bijektiv, $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$
3. Ist λ Eigenwert von φ, dann ist $\overline{\lambda}$ Eigenwert von φ^* mit der gleichen geometrischen Ordnung wie λ.
$\dim E_\lambda = \text{def}(\varphi-\lambda) = \dim E^*_{\overline{\lambda}} = \text{def}(\varphi^*-\overline{\lambda}).\quad S(\varphi^*) = \overline{S(\varphi)}$

Beweis: 1. $\text{def } \varphi = \dim(\text{Kern } \varphi) \overset{\text{Satz 16.3}}{=} \dim(\text{ Bild } \varphi^*)^\perp = \dim V - \dim \text{ Bild } \varphi^*$
$= \text{def } \varphi^*$
$\text{rg } \varphi = \dim V - \text{ def } \varphi = \dim V - \text{ def } \varphi^* = \text{rg } \varphi^*$
2. φ bijektiv $\iff \text{def } \varphi = 0 \iff \text{def } \varphi^* = 0 \iff \varphi^*$ bijektiv
$\varphi^{-1}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \varphi^{-1}\mathfrak{a}\cdot\varphi^*\cdot(\varphi^*)^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot(\varphi^*)^{-1}\mathfrak{b} \Longrightarrow (\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$
3. $(\varphi-\lambda)^* = (\varphi-\lambda\text{id })^* = \varphi^*-\overline{\lambda}\,\text{id}$
1.: $\text{def}(\varphi-\lambda) = \text{def}(\varphi^*-\overline{\lambda}),\quad \dim E_\lambda = \dim E^*_{\overline{\lambda}}$

Es sei $A=(a_{ij})\in K^{n\times n},\quad K=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}\,;\quad A^* = (a^*_{ij}) = \overline{A}^T$ **die zu A adjungierte Matrix**
im Reellen: $A^* = A^T$

Satz 16.5: Es sei $\varphi\in\text{Hom } V$, $B=\{\mathfrak{e}_1,\dots,\mathfrak{e}_n\}$ eine ONB von V, $M(\varphi,B)=A$. Dann existiert φ^*, und es ist $M(\varphi^*,B) = A^* = \overline{A}^T$.

Beweis: $A=(a_{ij}),\ A^*=(a^*_{ij}),\ a^*_{ij}=\overline{a_{ji}}$
Definiere $\varphi^*\in\text{Hom } V$ durch $M(\varphi^*,B)=A^*$

$$\mathfrak{a}=\sum_j x_j\mathfrak{e}_j\,,\ \mathfrak{b}=\sum_k y_k\mathfrak{e}_k\,,\quad \varphi\mathfrak{e}_j=\sum_i a_{ij}\mathfrak{e}_i\,,\quad \varphi^*\mathfrak{e}_k=\sum_i a^*_{ik}\mathfrak{e}_i=\sum_i\overline{a_{ki}}\mathfrak{e}_i$$

$$\varphi\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = (\sum_j x_j\varphi\mathfrak{e}_j)\cdot\sum_k y_k\mathfrak{e}_k = \sum_{i,j,k} x_j a_{ij}\overline{y_k}\underbrace{\mathfrak{e}_i\cdot\mathfrak{e}_k}_{\delta_{ik}} = \sum_{j,k} x_j a_{kj}\overline{y_k}$$

$$\mathfrak{a}\cdot\varphi^*\mathfrak{b} = (\sum_j x_j\mathfrak{e}_j)\cdot(\sum_k y_k\varphi^*\mathfrak{e}_k) = \sum_{i,j,k} x_j\overline{y_k}a_{ki}\underbrace{\mathfrak{e}_j\cdot\mathfrak{e}_i}_{\delta_{ji}} = \sum_{j,k} x_j a_{kj}\overline{y_k}$$

φ^* ist der zu φ adjungierte Endomorphismus

16.2 Normaler Endomorphismus

Definition: $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ heißt **normal**, wenn $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$ ist.
$A \in K^{n\times n}$ heißt **normal**, wenn $AA^* = A^*A$ ist.

Es sei $A = M(\varphi, B)$ bzgl. einer ONB, dann gilt: φ normal $\iff$ A normal.

Satz 16.6: Es sei φ normal, $E_\lambda = \operatorname{Kern}(\varphi - \lambda)$, $E^*_{\overline{\lambda}} = \operatorname{Kern}(\varphi^* - \overline{\lambda})$.
Dann ist $E_\lambda = E^*_{\overline{\lambda}}$

Beweis: $\mathfrak{x} \in E_\lambda \iff \varphi\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x} \iff$

$$\begin{aligned}
0 &= (\varphi\mathfrak{x} - \lambda\mathfrak{x})\cdot(\varphi\mathfrak{x} - \lambda\mathfrak{x}) \\
&= \underbrace{\varphi\mathfrak{x}\cdot\varphi\mathfrak{x}}_{\mathfrak{x}\cdot\varphi^*\varphi\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\cdot\varphi\varphi^*\mathfrak{x} = \varphi^*\mathfrak{x}\cdot\varphi^*\mathfrak{x}} - \overline{\lambda}\varphi\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} - \lambda\mathfrak{x}\cdot\varphi\mathfrak{x} + \lambda\overline{\lambda}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} \\
&= \varphi^*\mathfrak{x}\cdot\varphi^*\mathfrak{x} - \overline{\lambda}\mathfrak{x}\cdot\varphi^*\mathfrak{x} - \lambda\varphi^*\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} + \lambda\overline{\lambda}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} \\
&= (\varphi^*\mathfrak{x} - \overline{\lambda}\mathfrak{x})\cdot(\varphi^*\mathfrak{x} - \overline{\lambda}\mathfrak{x}) \\
\iff &\quad \varphi^*\mathfrak{x} = \overline{\lambda}\mathfrak{x} \iff \mathfrak{x} \in E^*_{\overline{\lambda}}
\end{aligned}$$

Definition: Ein Unterraum U von V heißt **φ-invariant** ($\varphi \in \operatorname{Hom} V$),
wenn $\varphi U \subseteq U$ ist.

Satz 16.7:
1. U φ–invariant $\Longrightarrow$ $U^\perp$ φ^*–invariant.
2. Ist φ normal, dann sind E_λ und $E_\lambda^\perp$ sowohl φ–invariant als auch φ^*–invariant.

Beweis:
1. $\mathfrak{a} \in U \Longrightarrow \varphi\mathfrak{a} \in U$. Es sei $\mathfrak{x} \in U^\perp$
$\Longrightarrow \varphi\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\cdot\varphi^*\mathfrak{x} = 0$ für alle $\mathfrak{a} \in U \Longrightarrow \varphi^*\mathfrak{x} \in U^\perp$
2. $E_\lambda = E^*_{\overline{\lambda}}$ ist sowohl φ– als auch φ^*–invariant
$\stackrel{1.}{\Longrightarrow}$ $E_\lambda^\perp$ ist sowohl φ– als auch φ^*–invariant

Satz 16.8: Sind $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2 von φ und ist φ normal, dann sind $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ orthogonal.

Beweis: $V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_1}^\perp$
$\mathfrak{x}_2 \in E_{\lambda_2} \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} \in E_{\lambda_1},\ \mathfrak{b} \in E_{\lambda_1}^\perp$
$\varphi\mathfrak{x}_2 = \varphi\mathfrak{a} + \varphi\mathfrak{b} = \lambda_1\mathfrak{a} + \varphi\mathfrak{b}, \quad \lambda_1\mathfrak{a} \in E_{\lambda_1},\ \varphi\mathfrak{b} \in E_{\lambda_1}^\perp$ nach Satz 16.7
$\varphi\mathfrak{x}_2 = \lambda_2(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda_2\mathfrak{a} + \lambda_2\mathfrak{b}, \quad \lambda_2\mathfrak{a} \in E_{\lambda_1},\ \lambda_2\mathfrak{b} \in E_{\lambda_1}^\perp$
$\Longrightarrow \lambda_1\mathfrak{a} = \lambda_2\mathfrak{a}, \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \Longrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \Longrightarrow \mathfrak{x}_2 \in E_{\lambda_1}^\perp$

Satz 16.9: Spektralsatz für normale Endomorphismen

1. Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ normal mit den verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ und den Eigenräumen $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$. Dann ist
$$V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} \oplus \bigcap_{j=1}^{r} E_{\lambda_j}^{\perp}$$
direkte Summe paarweise orthogonaler, φ– und φ^*– invarianter Unterräume.
2. Ist V ein unitärer Vektorraum, dann gilt:
$\varphi \in \operatorname{Hom} V$ ist genau dann normal, wenn es eine ONB von V aus lauter Eigenvektoren von φ gibt.
3. Ist V ein euklidischer Vektorraum und hat $\chi_\varphi(x)$ nur reelle Nullstellen, dann gilt:
Genau dann ist φ normal, wenn es eine ONB von V aus lauter Eigenvektoren von φ gibt.

Beweis: $V = E_{\lambda_1} \oplus U_1, \quad U_1 = E_{\lambda_1}^{\perp}$ φ–invariant, φ^*–invariant
Satz 16.8: $E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_r} \subseteq U_1$
$\varphi_1 = \varphi \restriction U_1, \quad \varphi_1^* = \varphi^* \restriction U_1, \quad$ Satz 16.7: $\varphi_1, \varphi_1^* \in \operatorname{Hom} U_1$
$\varphi_1 \varphi_1^* = \varphi_1^* \varphi_1 \quad \varphi_1$ normal, Eigenwerte: $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$

$U_1 = E_{\lambda_2} \oplus U_2, \quad U_2$ orthogonales Komplement von E_{λ_2} in $E_{\lambda_1}^{\perp}$
$U_2 = E_{\lambda_1}^{\perp} \cap E_{\lambda_2}^{\perp} \qquad \varphi_2 = \varphi_1 \restriction U_2 = \varphi \restriction U_2,\ \varphi_2^* = \varphi_1^* \restriction U_2$
usw. bis folgt:
$$V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} \oplus \underbrace{\bigcap_{j=1}^{r} E_{\lambda_j}^{\perp}}_{U_r}$$

Summanden paarweise orthogonal, Satz 16.8. φ–invariant, Satz 16.7

U_r hat keine Eigenvektoren von φ. $\chi_{\varphi \restriction U_r}$ hat keine Nullstellen in K,
$K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Im Komplexen folgt: $\chi_{\varphi \restriction U_r}(x) = 1,\ \dim U_r = 0$
Also $U_r = \{\mathfrak{o}\}, \quad V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$
Der gleiche Schluß ist im Reellen möglich, wenn
$$\chi_\varphi(x) = \prod_{j=1}^{r} \chi_{\varphi \restriction E_{\lambda_j}} \cdot \chi_{\varphi \restriction U_r} \text{ nur reelle Nullstellen hat.}$$

B_j ONB von $E_{\lambda_j} \implies B = \bigcup_{j=1}^{r} B_j$ ONB von V aus Eigenvektoren von φ.

Umkehrung: Es sei B ONB von V aus Eigenvektoren von φ. Zu zeigen: φ normal.
$$M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = A \qquad \mu_j \text{ Eigenwerte von } \varphi$$

$$A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mu_n} \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} \mu_1\overline{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\overline{\mu_n} \end{pmatrix} = A^*A \quad \Longrightarrow \varphi \text{ normal}$$

Satz 16.10: Es sei $\dim V < \infty$, $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ normal. Dann gilt:

1. Bild $\varphi^2 =$ Bild φ
2. Kern $\varphi^2 =$ Kern φ
3. $V =$ Kern $\varphi \oplus$ Bild φ

Beweis: Spektralsatz: $V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} \oplus \bigcap_{j=1}^{r} E_{\lambda_j}^{\perp} = U_1 \oplus \cdots \oplus U_{r+1}$ ist direkte Summe φ–invarianter Unterräume.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_1 = 0$
$E_{\lambda_1} = U_1 =$ Kern φ, eventuell $U_1 = \{\mathfrak{o}\}$

$$\begin{aligned}
\text{Bild } \varphi &= \varphi V = \varphi U_1 \oplus \varphi U_2 \oplus \cdots \oplus \varphi U_{r+1} \\
U_1 \cap U_j &= \{\mathfrak{o}\} \text{ für } j > 1, \text{ d.h. Kern } \varphi \restriction U_j = \{\mathfrak{o}\}, \varphi U_j = U_j \\
\varphi V &= U_2 \oplus \cdots \oplus U_{r+1} \\
\varphi^2 V &= \varphi U_2 \oplus \cdots \oplus \varphi U_{r+1} = U_2 \oplus \cdots \oplus U_{r+1} = \varphi V \text{ , also 1.} \\
V &= U_1 \oplus (U_2 \oplus \cdots \oplus U_{r+1}) = \text{Kern } \varphi \oplus \text{ Bild } \varphi \text{ , also 3.} \\
\text{Bild } \varphi^2 &= \text{Bild}\varphi
\end{aligned}$$

$\dim V - \dim \text{Bild } \varphi = \dim \text{Kern } \varphi$, $\quad \dim V - \dim \text{Bild } \varphi^2 = \dim \text{Kern } \varphi^2$,
Kern $\varphi \subseteq$ Kern φ^2, $\quad \dim \text{Kern } \varphi = \dim \text{Kern } \varphi^2 \implies$ Kern $\varphi =$ Kern φ^2, also 2.

16.3 Reelle Normalform

Im folgenden sei V euklidisch.
$\widehat{V}$ komplexe Erweiterung versehen mit der komplexen Fortsetzung des Skalarproduktes.
B ONB von V; $\quad B$ ist auch ONB von $\widehat{V}$
$\varphi \in \operatorname{Hom} V$, $\quad M(\varphi, B) = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\quad M(\widehat{\varphi}, B) = A$
$M(\varphi^*, B) = A^T$, $\quad M((\widehat{\varphi})^*, B) = A^T \implies (\widehat{\varphi})^* = \widehat{\varphi^*}$
φ normal $\iff AA^T = A^TA \iff \widehat{\varphi}$ normal.

Satz 16.11: Es sei φ ein normaler Endomorphismus des euklidischen Raumes V. Ferner sei $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$ ein normierter Eigenvektor von $\widehat{\varphi}$ zum komplexen (nicht reellen) Eigenwert λ.
Dann ist $\overline{\mathfrak{e}} = \mathfrak{a} - i\mathfrak{b}$ ein normierter Eigenvektor von $\widehat{\varphi}$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. Ferner sind $\mathfrak{e}, \overline{\mathfrak{e}}$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ orthogonal.

Beweis: $\widehat{\varphi}(\mathfrak{a}+i\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a}+i\mathfrak{b}) \qquad \varphi\mathfrak{a}+i\varphi\mathfrak{b} = \lambda(\mathfrak{a}+i\mathfrak{b})$

$$\Longrightarrow \underbrace{\varphi\mathfrak{a}-i\varphi\mathfrak{b}}_{\widehat{\varphi}(\mathfrak{a}-i\mathfrak{b})} = \overline{\lambda(\mathfrak{a}+i\mathfrak{b})} = \overline{\lambda}(\mathfrak{a}-i\mathfrak{b})$$

$\Longrightarrow$ $\overline{\mathfrak{e}}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$

$$\overline{\mathfrak{e}}\cdot\overline{\mathfrak{e}} = (\mathfrak{a}-i\mathfrak{b})(\mathfrak{a}-i\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+i(\underbrace{\mathfrak{a}\mathfrak{b}-\mathfrak{b}\mathfrak{a}}_{0}) = \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e} = 1 \quad \|\overline{\mathfrak{e}}\| = 1$$

$\lambda \neq \overline{\lambda}$, $\widehat{\varphi}$ normal $\overset{\text{Satz 16.8}}{\Longrightarrow}$ $\mathfrak{e}, \overline{\mathfrak{e}}$ orthogonal

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{e} = \mathfrak{a}+i\mathfrak{b} \\ \overline{\mathfrak{e}} = \mathfrak{a}-i\mathfrak{b} \end{array}\right\} \quad \mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\mathfrak{e}+\overline{\mathfrak{e}}), \quad \mathfrak{b} = \frac{1}{2i}(\mathfrak{e}-\overline{\mathfrak{e}})$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -\frac{1}{4i}(\mathfrak{e}+\overline{\mathfrak{e}})(\mathfrak{e}-\overline{\mathfrak{e}}) = -\frac{1}{4i}(\mathfrak{e}^2-\overline{\mathfrak{e}}^2) = 0, \quad \mathfrak{a}\perp\mathfrak{b}$$

Satz 16.12: Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Genau dann ist $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ normal, wenn es eine ONB B von V gibt, so daß $M(\varphi, B) = A$ folgende Gestalt hat:

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_s & & & \\ & & & \boxed{\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{array}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{\begin{array}{cc} \alpha' & \beta' \\ -\beta' & \alpha' \end{array}} \end{pmatrix}$$

Dabei sind $\mu_1, \ldots, \mu_s$ die reellen Eigenwerte von φ, entsprechend ihrer Ordnung notiert. Jedes Kästchen gehört zu einem Paar $\lambda, \overline{\lambda}$ nicht reeller Eigenwerte von $\widehat{\varphi}$. Ist $\lambda = \alpha + i\beta$, dann ist $\boxed{\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{array}}$ das zugehörige Kästchen.

Wir nennen A die **reelle Normalform** der Matrix des normalen Endomorphismus φ.

Beweis: Es sei φ normal; $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen (reellen) Eigenwerte von φ.

$$\text{Satz 16.9: } V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} \oplus \underbrace{\bigcap_{j=1}^{r} E_{\lambda_j}^{\perp}}_{U}$$

Es sei B_j eine ONB von E_{λ_j}; $\qquad B' = \bigcup\limits_{j=1}^{r} B_j$
Wir bestimmen eine ONB B'' von U.
$B = B' \cup B''$ ist ONB von V.
$M(\varphi, B) = A$ beginnt wie skizziert mit reellen Eigenwerten.
U φ, φ^*–invariant $\Longrightarrow$ $\widehat{U}$ $\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}^*$–invariant. $\widehat{\varphi}$ normal auf $\widehat{U}$.
$\widehat{U} = E_{\lambda_{r+1}} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_t}$
$\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_t$ die verschiedenen nicht reellen Eigenwerte von φ bzw. $\widehat{\varphi}$
Man kann die Summanden zu Paaren $E_\lambda, E_{\overline{\lambda}}$ ordnen.
$\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ ONB von $E_\lambda \Longrightarrow \overline{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{e}}_m$ ONB von $E_{\overline{\lambda}}$
Man erhält so eine ONB von $\widehat{U}$ aus Paaren $\mathfrak{e}, \overline{\mathfrak{e}}$ von Eigenvektoren zu konjugiert komplexen Eigenwerten $\lambda, \overline{\lambda}$
$\mathfrak{e} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$, $\overline{\mathfrak{e}} = \mathfrak{a} - i\mathfrak{b}$; $\quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$
Ersetze $\mathfrak{e}, \overline{\mathfrak{e}}$ durch $\mathfrak{a}^0 = \frac{\mathfrak{a}}{\|\mathfrak{a}\|}$, $\mathfrak{b}^0 = \frac{\mathfrak{b}}{\|\mathfrak{b}\|} \in V$
So entsteht eine ONB B'' von U.
$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\mathfrak{e} + \overline{\mathfrak{e}})$, $\quad \|\mathfrak{a}\|^2 = \frac{1}{4}(\mathfrak{e}^2 + \overline{\mathfrak{e}}^2) = \frac{1}{2}$, $\|\mathfrak{a}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad \mathfrak{a}^0 = \sqrt{2}\mathfrak{a}$
$\mathfrak{b} = \frac{1}{2i}(\mathfrak{e} - \overline{\mathfrak{e}})$, $\quad \|\mathfrak{b}\|^2 = \frac{1}{4}(\mathfrak{e}^2 + \overline{\mathfrak{e}}^2) = \frac{1}{2}$, $\|\mathfrak{b}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad \mathfrak{b}^0 = \sqrt{2}\mathfrak{b}$
$\varphi\mathfrak{a}^0 = \widehat{\varphi}(\sqrt{2}\mathfrak{a}) = \widehat{\varphi}(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{e} + \overline{\mathfrak{e}})) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda\mathfrak{e} + \overline{\lambda\mathfrak{e}}) = \sqrt{2}\Re(\lambda\mathfrak{e})$
$\lambda = \alpha + i\beta$, $\quad \lambda\mathfrak{e} = (\alpha + i\beta)(\mathfrak{a} + i\mathfrak{b}) = \alpha\mathfrak{a} - \beta\mathfrak{b} + i(\alpha\mathfrak{b} + \beta\mathfrak{a})$
$\varphi\mathfrak{a}^0 = \sqrt{2}(\alpha\mathfrak{a} - \beta\mathfrak{b}) = \alpha\mathfrak{a}^0 - \beta\mathfrak{b}^0$
Ebenso folgt: $\varphi\mathfrak{b}^0 = \beta\mathfrak{a}^0 + \alpha\mathfrak{b}^0$

Zu den Basisvektoren $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{b}^0$ gehört das Kästchen $\boxed{\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{matrix}}$

Umkehrung: $M(\varphi, B)$ habe bzgl. einer ONB B die angegebene Form.

$$AA^T = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_s & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{matrix}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_s & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{matrix}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_s^2 & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta^2 \end{matrix}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = A^T A \Longrightarrow \varphi \text{ normal}$$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $\quad$ Standardskalarprodukt, $\quad B$ Standardbasis

$$M(\varphi, B) = A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die reelle Normalform des normalen Endomorphismus φ und eine zugehörige ONB B'

$$AA^T = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 10 \\ 0 & 10 & 14 \end{pmatrix} = A^T A \implies \varphi \text{ normal}$$

$$\chi_\varphi(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 2 & 2 \\ -2 & 3-x & 1 \\ -2 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-x & 2 & 0 \\ -2 & 3-x & x-2 \\ -2 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4-x & 2 & 0 \\ -4 & 4-x & 0 \\ -2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)((4-x)^2+8) = (2-x)(x^2-8x+24)$$

$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_{2,3} = 4 \pm \sqrt{16-24} = 4 \pm \sqrt{-2\cdot 4} = 4 \pm 2\sqrt{2}i$
Reelle Normalform von φ bzw. A:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Bestimme eine ONB B' mit $M(\varphi, B') = A'$
$\lambda_1 = 2$:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 2 & 2 & 1 & \cdot\frac{1}{2} & \\
-2 & 1 & 1 & \leftarrow & & \\
-2 & 1 & 1 & \leftarrow & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & \leftarrow & & \\
0 & 3 & 3 & (-\frac{1}{3}) & (-1) & \cdot\frac{1}{3} \\
0 & 3 & 3 & & \leftarrow & \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 1 & & & \\
0 & 0 & 0 & & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 4 + 2\sqrt{2}i$:

$$
\begin{array}{ccc|ll}
-2\sqrt{2}i & 2 & 2 & \cdot\frac{i}{2\sqrt{2}} & \\
-2 & -1-2\sqrt{2}i & 1 & & \\
-2 & 1 & -1-2\sqrt{2}i & & \\
\hline
1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 2 & \\
-2 & -1-2\sqrt{2}i & 1 & \leftarrow & \\
-2 & 1 & -1-2\sqrt{2}i & \leftarrow & \\
\hline
1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & & \\
0 & -1-\sqrt{2}i & 1+\sqrt{2}i & 1 & \cdot(-\frac{1}{1+\sqrt{2}i}) \\
0 & 1+\sqrt{2}i & -1-\sqrt{2}i & \leftarrow & \\
\hline
1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \leftarrow & \\
0 & 1 & -1 & (-\frac{i}{\sqrt{2}}) & \\
0 & 0 & 0 & & \\
\hline
1 & 0 & \sqrt{2}i & & \\
0 & 1 & -1 & & \\
0 & 0 & 0 & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$\mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b}^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B' = \{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{a}^0, \mathfrak{b}^0\}$ ist die gesuchte ONB.

$M(\varphi, B') = A' = S^{-1}AS$, S Matrix der Basistransformation $B \to B'$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

16.4 Selbstadjungierter Endomorphismus

Im folgenden sei V wieder unitär oder euklidisch.

Definition: $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ heißt **selbstadjungiert**, wenn $\varphi^* = \varphi$ ist.
$A \in K^{n \times n}$ heißt **selbstadjungiert**, wenn $A^* = A$ ist.

Ist B ONB von V und $A = M(\varphi, B)$, dann gilt:
φ selbstadjungiert $\iff$ A selbstadjungiert.
Im Reellen: A selbstadjungiert $\iff$ A **symmetrisch**
Im Komplexen: A selbstadjungiert $\iff$ A **hermitesch**
φ selbstadjungiert $\implies$ φ normal.
Im Reellen: φ selbstadjungiert $\implies$ $\widehat{\varphi}$ selbstadjungiert. $\quad \widehat{\varphi}^* = \widehat{\varphi^*} = \widehat{\varphi}$

Satz 16.13: Ist φ selbstadjungiert, dann hat $\chi_\varphi(x)$ nur reelle Nullstellen.

Beweis: Es sei V unitär. Wir zeigen: φ hat nur reelle Eigenwerte.
$\mathfrak{a}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ.
$\lambda(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}) = (\lambda\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{a} = \varphi\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \varphi\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \lambda\mathfrak{a} = \overline{\lambda}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}) \implies \lambda = \overline{\lambda}$, also λ reell.
Ist V euklidisch, dann ersetze man V durch $\widehat{V}$, φ durch $\widehat{\varphi}$.

Satz 16.14:

1. $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn es eine ONB B von V aus lauter Eigenvektoren von φ gibt, so daß $M(\varphi, B)$ eine reelle Diagonalmatrix ist.
2. Eine hermitesche bzw. symmetrische Matrix ist zu einer reellen Diagonalmatrix unitär bzw. orthogonal ähnlich.

Beweis:

1. folgt aus Satz 16.9 und 16.12
2. folgt aus 1.

Kapitel 17

Isometrien

V sei im folgenden ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $\dim V = n < \infty$

Definition: $f \in \operatorname{Hom} V$ heißt eine **Isometrie**, wenn für alle $\mathfrak{x} \in V$ gilt: $\|f(\mathfrak{x})\| = \|\mathfrak{x}\|$

Übung: Ist V euklidisch, $f : V \to V$, $f(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ und gilt
$\|f(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{y})\| = \|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}\|$ für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$, dann ist V linear.

Satz 17.1:

1. $f \in \operatorname{Hom} V$ Isometrie $\iff f(\mathfrak{x}) \cdot f(\mathfrak{y}) = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}$ für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$
2. Die Isometrien von V bilden eine Gruppe.
   Diese Gruppe heißt die **orthogonale Gruppe** $O(V)$, wenn V euklidisch ist bzw. die **unitäre Gruppe** $U(V)$, wenn V unitär ist.
   Isometrien heißen auch **orthogonale** bzw. **unitäre Abbildungen**.

Beweis:

1. Es sei f Isometrie. Übung:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} &= \frac{1}{4}\{\|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\|^2 - \|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}\|^2 + i(\|\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}\|^2 - \|\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}\|^2)\} \\
&= \frac{1}{4}\{\|f\mathfrak{x} + f\mathfrak{y}\|^2 - \|f\mathfrak{x} - f\mathfrak{y}\|^2 + i(\|f\mathfrak{x} + if\mathfrak{y}\|^2 - \|f\mathfrak{x} - if\mathfrak{y}\|^2)\} \\
&= f\mathfrak{x} \cdot f\mathfrak{y}
\end{aligned}$$

   Umkehrung: Es sei $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = f\mathfrak{x} \cdot f\mathfrak{y}$ für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$
   $\mathfrak{y} = \mathfrak{x};\quad \|\mathfrak{x}\|^2 = \|f(\mathfrak{x})\|^2 \implies \|f(\mathfrak{x})\| = \|\mathfrak{x}\|$

2. Es sei f Isometrie.
   $f\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \implies \|f\mathfrak{x}\| = \|\mathfrak{x}\| = 0,\ \mathfrak{x} = \mathfrak{o},$ Kern $f = \{\mathfrak{o}\} \implies f$ bijektiv
   $\|f^{-1}\mathfrak{x}\| = \|f(f^{-1}\mathfrak{x})\| = \|\mathfrak{x}\| \implies f^{-1}$ ist Isometrie
   id ist Isometrie.
   Es seien f, g Isometrien.
   $\|f \circ g\mathfrak{x}\| = \|g\mathfrak{x}\| = \|\mathfrak{x}\| \Rightarrow f \circ g$ ist Isometrie
   $O(V)$ bzw. $U(V)$ ist Untergruppe der lineare Gruppe von V $(GL(V))$.

Folgerung: Isometrien sind winkeltreu. $\quad \measuredangle(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \measuredangle(f\mathfrak{x}, f\mathfrak{y})$

Satz 17.2: Für $f \in \operatorname{Hom} V$ sind folgende Aussagen gleichwertig:

1. f ist Isometrie.
2. Für jede ONB $\{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ ist auch $\{f\mathfrak{b}_1, \dots, f\mathfrak{b}_n\}$ eine ONB von V.
3. Es gibt eine Basis $\{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$, so daß $\mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_j = f\mathfrak{b}_i \cdot f\mathfrak{b}_j$ für alle $i, j = 1, \dots, n$
4. $\|\mathfrak{x}\| = 1 \implies \|f\mathfrak{x}\| = 1$ für alle $\mathfrak{x} \in V$
5. $f^* = f^{-1}$

Beweis: $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \surd$ In 3. nehme man z.B. eine ONB.

$3. \Rightarrow 4.$ Es sei $\{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis mit $\mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_j = f\mathfrak{b}_i \cdot f\mathfrak{b}_j$ für alle i, j

$$\mathfrak{x} \in V,\ \|\mathfrak{x}\| = 1; \quad \mathfrak{x} = \sum_i \mathfrak{b}_i,\ f\mathfrak{x} = \sum_i x_i f\mathfrak{b}_i$$

$$\|f\mathfrak{x}\|^2 = f\mathfrak{x} \cdot f\mathfrak{x} = (\sum_i x_i f(\mathfrak{b}_i)) \cdot (\sum_j x_j f(\mathfrak{b}_j)) = \sum_{i,j} x_i \overline{x_j} (f\mathfrak{b}_i \cdot f\mathfrak{b}_j)$$

$$= \sum_{i,j} x_i \overline{x_j} (\mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_j) = (\sum_i x_i \mathfrak{b}_i) \cdot (\sum_j x_j \mathfrak{b}_j) = \|\mathfrak{x}\|^2 = 1$$

$4. \Rightarrow 1.$ $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ $\quad \left\| f\left(\frac{\mathfrak{x}}{\|\mathfrak{x}\|}\right) \right\| = \left\| \frac{\mathfrak{x}}{\|\mathfrak{x}\|} \right\| = 1 \implies \|f(\mathfrak{x})\| = \|\mathfrak{x}\|$

$1. \Rightarrow 5.$ $(f(\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{y}) = f^{-1}f\mathfrak{x} \cdot f^{-1}\mathfrak{y} = \mathfrak{x} \cdot f^{-1}\mathfrak{y} \implies f^* = f^{-1}$

$5. \Rightarrow 1.$ Es sei $f^* = f^{-1}$
$f\mathfrak{x} \cdot f\mathfrak{y} = \mathfrak{x} \cdot f^{-1}f\mathfrak{y} = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} \implies f$ ist Isometrie

Es sei B eine ONB von V, $M(f, B) = A$
$M(f^{-1}, B) = A^{-1}, \quad M(f^*, B) = A^* = \overline{A}^T$
f Isometrie $\iff f^* = f^{-1} \iff A^* = A^{-1}$

$$\iff \overline{A}^T = A^{-1} \iff A\overline{A}^T = I$$
$\iff$ Die Zeilen von A bilden eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$

$$\iff \overline{A}^T A = I \iff A^T \overline{A} = I$$
$\iff$ Die Spalten von A bilden eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$
$\iff$ A ist orthogonal bzw. unitär

Satz 17.3: $f \in \operatorname{Hom} V$ ist genau dann eine Isometrie, wenn f bzgl. einer ONB von V eine orthogonale bzw. unitäre Matrix hat. Die orthogonalen bzw. unitären $n \times n$–Matrizen bilden einen Gruppe, die **orthogonale Gruppe** $O(n)$ bzw. die **unitäre Gruppe** $U(n)$.
Folgende Aussagen sind gleichwertig:

1. Die Matrix A ist orthogonal bzw. unitär.

2. Die Spalten von A bilden eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bzgl. des Standardskalarproduktes.
3. Die Zeilen von A bilden eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bzgl. des Standardskalarproduktes.

Folgerung:

1. Sind B_1, B_2 Orthogonalbasen von V, dann ist die Matrix S der Basistransformation $B_1 \to B_2$ unitär bzw. orthogonal.
2. Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, dann gibt es eine unitäre Matrix S mit $S^{-1}AS = D$ Diagonalmatrix.
3. Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, dann gibt es eine orthogonale Matrix S mit $S^{-1}AS = D$ reelle Diagonalmatrix.

Beweis:

1. In den Spalten von S stehen die Koordinaten der Vektoren von B_2 bzgl. B_1. Sie bilden ein Orthonormalsystem.
2. folgt aus Satz 16.9
3. folgt aus Satz 16.13

Satz 17.4: Für eine Isometrie φ von V gelten:

1. $\widehat{\varphi}$ ist eine Isometrie
2. φ ist normal
3. Alle Eigenwerte von φ bzw. $\widehat{\varphi}$ haben den Betrag 1
4. $|\det\varphi| = 1$

Beweis:

1. $\varphi, \widehat{\varphi}$ haben dieselbe Matrix
2. $\varphi\varphi^* = \varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varphi^*\varphi$
3. Es sei $\mathfrak{x}$ Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ.

$$\left.\begin{aligned}\lambda\mathfrak{x}\cdot\lambda\mathfrak{x} &= \lambda\overline{\lambda}(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}) = |\lambda|^2\|\mathfrak{x}\|^2\\ &= \varphi\mathfrak{x}\cdot\varphi\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} = \|\mathfrak{x}\|^2\end{aligned}\right\} \Longrightarrow |\lambda|^2 = 1,\ |\lambda| = 1$$

4. Es sei B eine ONB von V. $\quad M(\varphi, B) = A, \quad A^* = \overline{A}^T = A^{-1}$

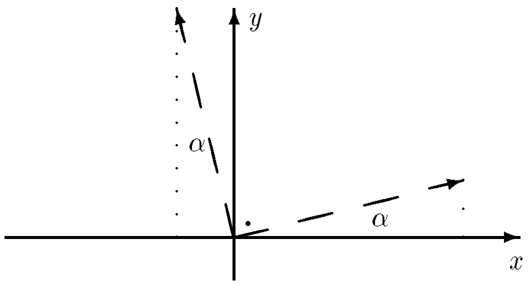
$$\det A^* = \overline{\det A} = \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \Longrightarrow \underbrace{\det A\cdot\overline{\det A}}_{|\det A|^2} = 1 \Longrightarrow |\det A| = 1$$

17.1 Eigentliche Isometrien

Definition: Eine Isometrie φ heißt **eigentlich unitär** bzw. **eigentlich orthogonal**, wenn $\det\varphi = 1$ ist.
Die eigentlich unitären bzw. orthogonalen Abbildungen bilden die **spezielle unitäre Gruppe** $SU(V)$ bzw. die **spezielle orthogonale Gruppe** $SO(V)$. Entsprechend definiert man für Matrizen die Gruppe

$SU(n)$ bzw. $SO(n)$.
Im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ nennt man eigentlich orthogonale Abbildungen auch **Drehungen**

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$



$B = \{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2\}$ Standardbasis
φ Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn.
$\|\varphi\mathfrak{x} - \varphi\mathfrak{y}\| = \|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}\|$, $\varphi(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$
Übung: φ ist Isometrie

$\varphi\mathfrak{e}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad \varphi\mathfrak{e}_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$

$$M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \det\varphi = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

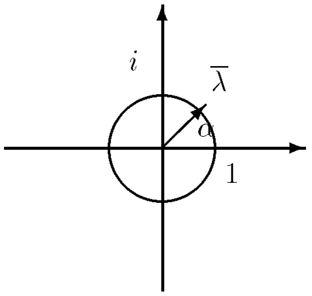
Satz 17.5: Es sei V euklidisch, $\dim V = n$.
$\varphi \in \operatorname{Hom} V$ ist genau dann eine orthogonale Abbildung, wenn es eine ONB B von V gibt, so daß $M(\varphi, B)$ die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& \boxed{} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \boxed{} \end{pmatrix}$$

Dabei hat jedes Kästchen die Form: $\boxed{\begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix}}$

Wir nennen diese Matrix die **Normalform** der Matrix von f.

Beweis: Die Spalten der angegebenen Matrix sind orthogonal $\Longrightarrow$ φ ist Isometrie.
Umkehrung:
Ist φ Isometrie, dann folgt die angegebene Form der Matrix aus Satz 16.11.
φ Isometrie $\Longrightarrow$ $\widehat{\varphi}$ Isometrie
$|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwert λ von $\widehat{\varphi}$. $\quad$ λ reell $\Longrightarrow$ $\lambda = \pm 1$
Jedes Kästchen gehört zu einem Paar $\lambda, \overline{\lambda}$ konjugiert komplexer Eigenwerte.



$$\lambda = a + ib \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}}$$

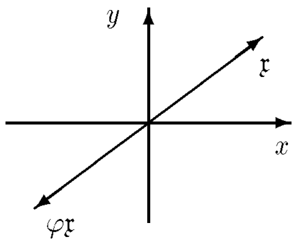
$$\overline{\lambda} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi,\ \alpha \neq 0, \pi$$

$$\lambda = \cos\alpha - i\sin\alpha \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix}}$$

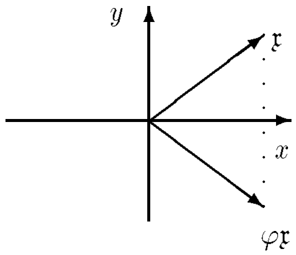
Beispiel: Normalformen einer orthogonalen Abbildung des $\mathbb{R}^2$:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Identität

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Punktspiegelung



3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Geradenspiegelung



4. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $0 \leq \alpha < 2\pi$
   Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeiger. Spur $\varphi = 2\cos\alpha$
   Für $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = \pi$ ergeben sich 1. bzw. 2.

1., 2., 4. $\in SO(\mathbb{R}^2)$

Beispiel: Normalformen einer orthogonalen Abbildung des $\mathbb{R}^3$:

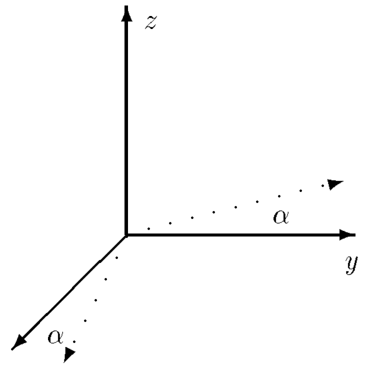
1. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ Identität

2. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ Ebenenspiegelung

3. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ Geradenspiegelung

4. $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ Punktspiegelung

5. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Drehung um die z–Achse mit dem Winkel α. Bei Fortschreiten in z–Richtung entsteht eine Rechtsschraube.

6. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Drehspiegelung

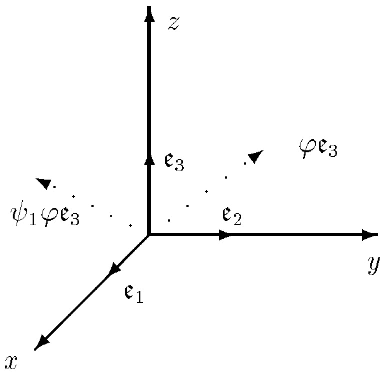
1., 3., 5. $\in SO(\mathbb{R}^3)$
1., 3. folgen aus 5. für $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = \pi$
φ Drehung $\Longrightarrow$ Spur $\varphi = 1 + 2\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } \varphi - 1)$
φ Drehung, $\varphi \neq \text{id} \Longrightarrow \dim E_1 = 1$, E_1 **Drehachse** von φ

Jede Drehung des $\mathbb{R}^3$ ist Produkt von Drehungen um die Koordinatenachsen.

Satz 17.6: Zu $\varphi \in SO(\mathbb{R}^3)$ gibt es Drehungen φ_1, φ_3 um die z–Achse, φ_2 um die y–Achse mit $\varphi = \varphi_1\varphi_2\varphi_3$. Die auftretenden Drehwinkel heißen die **Eulerschen Winkel** von φ.

Beweis:

ψ_1 Drehung um die z–Achse, so daß $\psi(\varphi\mathfrak{e}_3)$ in der x, z–Ebene.
ψ_2 Drehung um die y–Achse, so daß $\psi_2\psi_1\varphi\mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_3$.
$\psi_2\psi_1\varphi = \varphi_3$ Drehung mit Drehachse $[\mathfrak{e}_3]$.
$\varphi = \psi_1^{-1}\psi_2^{-1}\varphi_3 = \varphi_1\varphi_2\varphi_3$.



Wähle man die Drehachse so, daß bei Fortschreiten in Richtung der Drehachse eine Rechtsschraube entsteht, dann sind die Drehwinkel eindeutig bestimmt.

17.2 Hyperebenenspiegelungen

Es sei V unitär oder euklidisch, $\dim V = n < \infty$
U Unterraum von V. $V = U \oplus U^\perp$

Jeder Vektor $\mathfrak{x} \in V$ hat eine eindeutige Darstellung
$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{x}_1 = P_U(\mathfrak{x}),\ \mathfrak{x}_2 \in U^\perp$
Definiere $S_U \in \operatorname{Hom} V$ durch $S_U(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$
S_U heißt die **Spiegelung am Unterraum** U.

$\|S_U(\mathfrak{x})\|^2 = \|\mathfrak{x}_1\|^2 + \|\mathfrak{x}_2\|^2 = \|\mathfrak{x}\|^2$ Pythagoras
S_U ist Isometrie
$S_U^2 = \mathrm{id}\,, \quad S_U^{-1} = S_U = S_U^*$
U Eigenraum zum Eigenwert 1, $U^\perp$ zum Eigenwert -1, keine weiteren Eigenwerte.
H Unterraum der Dimension $n-1$
$H^\perp = [\mathfrak{n}],\ \mathfrak{n} \neq \mathfrak{o}$ Normalenvektor von H. $H = \mathfrak{n}^\perp$
$S_H = S_\mathfrak{n}$ **Hyperebenenspiegelung**

Satz 17.7: Es sei V euklidisch, $\dim V = n \geq 2$; $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m \in V$, $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_m \in V$. Es gelte $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j = \mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_j$ für alle i, j. Dann gibt es eine Isometrie f von V mit $f\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i$ für alle i. Dabei ist f Produkt von höchstens m Hyperebenenspiegelungen. Ist $\{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m\}$ eine Basis von V, dann ist f eindeutig bestimmt.

Beweis: Induktion über m
$m = 1, \quad \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{b}_1^2$
Ist $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1$ dann nehme man für f die Spiegelung an einer Hyperebene H, die $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1$ enthält.
Es sei $\mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{b}_1$. $\quad \mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{b}_1^2 \iff (\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_1)(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1) = 0 \quad$ (da V euklidisch)
Setze $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_1$, $f = S_\mathfrak{n}$.

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 \in \mathfrak{n}^\perp \implies \begin{array}{c} S_\mathfrak{n}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 \\ S_\mathfrak{n}(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_1) = -\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 \\ \hline 2S_\mathfrak{n}(\mathfrak{a}_1) = 2\mathfrak{b}_1 \end{array} \implies S_\mathfrak{n}(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{b}_1$$

Annahme: Behauptung richtig für m Vektoren, $1 \leq m$
$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r+1};\ \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_m, \mathfrak{b}_{m+1}; \quad \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j = \mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_j$ für alle i, j
Es gibt eine Isometrie f_m, die Produkt von höchstens m Hyperebenenspiegelungen ist, mit $f_m(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{b}_i$ für $i = 1, \ldots, m$
Setze $f = f_m$, wenn $f_m(\mathfrak{a}_{m+1}) = \mathfrak{b}_{m+1}$ ist.
Es sei $f_m(\mathfrak{a}_{m+1}) \neq \mathfrak{b}_{m+1}$.
$\|f_m(\mathfrak{a}_{m+1})\| = \|\mathfrak{a}_{m+1}\| = \|\mathfrak{b}_{m+1}\|$
Setze $\mathfrak{n} = f_m(\mathfrak{a}_{m+1}) - \mathfrak{b}_{m+1}, \quad f = S_\mathfrak{n} \circ f_m$
$f(\mathfrak{a}_{m+1}) = S_\mathfrak{n}(f_m(\mathfrak{a}_{m+1})) = \mathfrak{b}_{m+1} \quad$ (siehe oben)
Bleibt zu zeigen: $f(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{b}_i$ für $i = 1, \ldots, m$
$f_m(\mathfrak{a}_i) \cdot \mathfrak{n} = f_m(\mathfrak{a}_i) \cdot (f_m(\mathfrak{a}_{m+1}) - \mathfrak{b}_{m+1})$

$$= \underbrace{f_m(\mathfrak{a}_i) \cdot f_m(\mathfrak{a}_{m+1})}_{\underbrace{\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_{m+1}}_{\mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_{m+1}}} - \underbrace{f_m(\mathfrak{a}_i)}_{\mathfrak{b}_i} \mathfrak{b}_{m+1} = 0$$

$f_m(\mathfrak{a}_i) \in \mathfrak{n}^\perp \implies f(\mathfrak{a}_i) = S_\mathfrak{n}(f_m\mathfrak{a}_i) = f_m\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i$ für $i = 1, \ldots, m$

$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ Basis $\implies m = n$
$f(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{b}_i$. f ist durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

Folgerung: Jede orthogonale Abbildung eines n–dimensionalen euklidischen Raumes V ist Produkt von höchstens n Hyperebenenspiegelungen ($n \geq 2$).

Beweis: Es sei $\varphi \in O(V)$, $\quad B = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$ Basis von V.
Setze $\mathfrak{b}_1 = \varphi\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n = \varphi\mathfrak{a}_n$ $\quad$ Dann gilt:
$\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j = \mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_j$ für alle i, j.
Also existiert eine Isometrie f, die Produkt von höchstens n Hyperebenenspiegelungen ist, mit $f(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{b}_i = \varphi\mathfrak{a}_i$ für alle $i \implies f = \varphi$

Kapitel 18

Quadratische Formen

Im folgenden sei V Vektorraum über K, $\chi(K) \neq 2$, d.h. $\frac{1}{2} \in K$.
β sei symmetrische Bilinearform (SF) von V
$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in K$, linear in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, $\quad \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$.
$q(\mathfrak{x}) = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ ist die zu β gehörige **quadratische Form (QF)**.
β ist durch q eindeutig bestimmt:
$q(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}, \mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})+\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})-2\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathfrak{x})+q(\mathfrak{y})-q(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}))$
β ist die zu q gehörende symmetrische Bilinearform.
Im folgenden verwenden wir für β und q dasselbe Symbol q.
Wir unterscheiden $q(\mathfrak{x})$, $q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.

Ein **quadratischer Raum** (V, q) über K besteht aus einem Vektorraum V über q und einer quadratischen Form q.
Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis von V.
Matrix von q bzgl. B: $M(q, B) = A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = q(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j)$
q symmetrisch $\iff A = A^T$

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathfrak{b}_i\,,\ \mathfrak{y} = \sum_{j=1}^{n} y_i \mathfrak{b}_i \implies q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

Es sei $A \in K^{n\times n}$, $A^T = A$; $\quad \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in K^n, \quad \mathfrak{x} = (x_i),\ \mathfrak{y} = (y_i)$
Die zu A gehörende symmetrische Bilinearform q_A auf K^n ist definiert durch

$$q_A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = \mathfrak{x} A \mathfrak{y}^T$$

$M(q_A, B_s) = A$, B_s Standardbasis
Auch eine nichtsymmetrische Matrix A definiert durch $\sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ eine quadratische Form.

Symmetrisiere A: $\quad \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j} \underbrace{\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}}_{a'_{ij}\text{symmetrisch}} x_i x_j$

Es sei B' eine weitere Basis von V, S Matrix der Basistransformation $B \to B'$.
Satz 11.12: $A' = M(q, B') = S^T A S \quad (S^T A \overline{S}$ bei HERMITEschen Formen)

rg $A' =$ rg A, rg $q =$ rg A
Matrizen A, A' heißen **kongruent**, wenn es eine reguläre Matrix S gibt mit $A' = S^T AS$.
Quadratische Formen bzw. symmetrische Formen heißen **äquivalent** , wenn sie bzgl. geeigneter Basen diesselbe Matrix haben.

q heißt **entartet (ausgeartet)**, wenn $V^\perp \neq \{\mathfrak{o}\}$, d.h. wenn ein Vektor $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ existiert mit $q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ für alle $\mathfrak{y} \in V$.
Insbesondere ist dann $q(\mathfrak{x}) = 0$; solche Vektoren heißen **isotrop** bzgl. q.
anisotrop = nicht isotrop

Satz 18.1: Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis von V, $M(q, B) = A$,

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathfrak{b}_i, \quad \mathfrak{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{Dann gilt:}$$

1. $\mathfrak{x} \in V^\perp \iff A\mathfrak{x}' = \mathfrak{o}$
2. $\dim V^\perp = n -$ rg A
3. q nicht entartet $\iff$ A regulär

Beweis: Es sei $\mathfrak{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathfrak{b}_i$

$$\mathfrak{x} \in V^\perp \iff q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{o} \text{ für alle } \mathfrak{y} \in V$$

$$\iff \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = \sum_j (\sum_i a_{ij} x_i) y_j = 0 \text{ für alle } y_j \in K$$

$$\iff \sum_i a_{ij} x_i = \sum_j a_{ij} x_j = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \iff A\mathfrak{x}' = \mathfrak{o}$$

Es sei σ Koordinaten–Isomorphismus bzgl. B, $\sigma(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}'$
$\dim V^\perp = \dim \sigma(V^\perp) = \dim\{\mathfrak{x}' \mid A\mathfrak{x}' = \mathfrak{o}\} = n -$ rg A
q nicht entartet $\iff \dim V^\perp = 0 \iff$ rg $A = n$, A regulär.

Satz 18.2: Es sei $\dim V = n < \infty$, U Unterraum, q nicht entartet. Dann gilt:

1. $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$
2. $U^{\perp\perp} = U$

Beweis:

1. Definiere $\sigma : V \to V^*$, $\sigma(\mathfrak{y}) = f_\mathfrak{y} \in V^*$, $f_\mathfrak{y}(\mathfrak{x}) = q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$
   σ ist linear.
   Es sei $\mathfrak{y} \in$ Kern σ, $\sigma(\mathfrak{y}) f_\mathfrak{y} = \mathfrak{o}$
   $f_\mathfrak{y}(\mathfrak{x}) = q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ für alle $\mathfrak{x} \in V$, $\mathfrak{y} \in V^\perp = \{\mathfrak{o}\}$, da q nicht entartet.

Kern $\sigma = \{\mathfrak{o}\}$, $\dim V = \dim V^* \implies \sigma$ ist Isomorphismus.
Zu jeder Linearform $f \in V^*$ gibt es genau ein $\mathfrak{y} \in V$ mit $f = f_{\mathfrak{y}}$

$U^\perp = \{\mathfrak{x} \mid \underbrace{q(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0}_{f_{\mathfrak{y}}(\mathfrak{x})=0}$ für alle $\mathfrak{y} \in U\}$

$U' = \{f_{\mathfrak{y}} \mid \mathfrak{y} \in U\} = \sigma(U)$
$U^\perp = V \setminus U'$
$\dim U^\perp = \dim V - \dim U' = \dim V - \dim U$

2. $\dim (U^\perp)^\perp = \dim V - \underbrace{\dim U^\perp}_{\dim V - \dim U} = \dim U$

$U \subseteq U^{\perp\perp} \implies U = U^{\perp\perp}$

Satz 18.3:
1. Paarweise orthogonale, anisotrope Vektoren $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r$ sind linear unabhängig.
2. Ist $\{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r\}$ eine Orthogonalbasis von V und q nicht entartet, dann sind $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ anisotrop.

Beweis:
1. $\lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_r\mathfrak{b}_r = \mathfrak{o}$
$q(\mathfrak{b}_1, \lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_r\mathfrak{b}_r) = \lambda_1 \underbrace{q(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1)}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda_1 = 0$
entsprechend $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
2. Annahme: $q(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1) = 0$, d.h. $\mathfrak{b}_1$ isotrop
$\implies q(\mathfrak{b}_1, \lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n) = 0$ für alle λ_i
$\mathfrak{b}_1 \in V^\perp$, $\mathfrak{b}_1 \neq \mathfrak{o} \implies q$ entartet **Widerspruch!**

Satz 18.4:
1. Jeder quadratische Raum (V, q), $\dim V = n < \infty$, hat eine Orthogonalbasis.
2. Es gibt einen Unterraum U mit:
$V = U \oplus U^\perp$, $q \restriction U$ nicht entartet, $q \restriction U^\perp = \mathfrak{o}$
3. Besteht $B' = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r\}$ aus paarweise orthogonalen, anisotropen Vektoren, dann kann B' zu einer Orthogonalbasis von V erweitert werden.

Beweis: Klar, wenn $q = \mathfrak{o}$. Es sei $q \neq \mathfrak{o}$
Es existiert $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ mit $q(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \neq 0$
$q(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) - q(\mathfrak{x}) - q(\mathfrak{y})) \neq 0$. Nicht alle Summanden $= 0$.
Es existiert ein $\mathfrak{b}_1 \in V$ mit $q(\mathfrak{b}_1) = \alpha_1 \neq 0$. $B_1 = \{\mathfrak{b}_1\}$, $U_1 = B_1^\perp$
Satz 18.2: $\dim U_1 = \dim V - 1$

Es sei $q \restriction U_1 \neq \mathfrak{o}$
Dann existiert in U_1 ein $\mathfrak{b}_2$ mit $q(\mathfrak{b}_2) = \alpha_2 \neq 0$. $B_2 = \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$, $U_2 = B_2^\perp$
B_2 besteht aus paarweise orthogonalen anisotropen Vektoren.
Satz 18.3: B_2 linear unabhängig $\dim U_2 = \dim V - 2$
usw. bis folgt $q \restriction U_r = \mathfrak{o}$

$U_r = B_r^\perp$, $B_r = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r\}$ paarweise orthogonale, anisotrope Vektoren.
$\dim U_r = \dim V - r$. Es sei $\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_n$ Basis von U_r

$B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r, \mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}\}$ Orthogonalsystem bzgl q.
Es sei $\mathfrak{a} = \lambda_1 \mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}$
$q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1) = \lambda_1 \underbrace{q(\mathfrak{b}_1)}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda_1 = 0$
Entsprechend folgt $\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. Dann sind auch $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n = 0$

B ist Orthogonalbasis von V.
Setze $U = [B_r]$, $\quad U^\perp = B_r^\perp = U_r = [\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_n]$
$V = [\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r] \oplus [\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_n] = U \oplus U^\perp$
$q \restriction U$ nicht entartet, $q \restriction U^\perp = \mathfrak{o}$

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_i \neq 0,\ r = \operatorname{rg} q$$

zu 3. Das Verfahren zur Bestimmung von B kann so eingerichtet werden, daß B' unverändert bleibt.

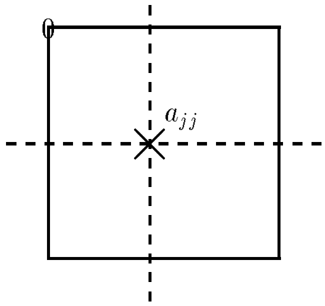
Folgerung: Jede symmetrische Matrix ist zu einer Diagonalmatrix kongruent.

Es sei $A \in K^{n \times n}$ symmetrisch. Es existiert eine Matrix S mit
$S^T A S = D$ Diagonalmatrix

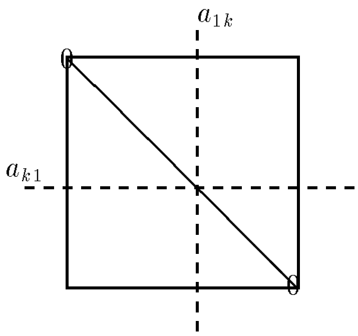
Verfahren zur Bestimmung von S:
S ist Produkt von Elementarmatrizen, siehe 9.3
$S = S_1 \ldots S_k$, $\quad S^T = S_k^T \ldots S_1^T$, $\quad S_k^T \ldots (S_1^T A S_1) \ldots S_k = D$
$S_1^T A S_1$ entsteht aus A durch eine elementare Spaltenumformung (AS_1) gefolgt von der entsprechenden Zeilenumformung $S_1^T(AS_1)$.
Versuche A durch solche Operationspaare auf Diagonalform zu bringen.
Beachte: $(S_1^T A S_1)^T = S_1^T A S_1$ symmetrisch, wenn A symmetrisch.

$A = (a_{ij})$. Wir versuchen zunächst $a_{11} \neq 0$ zu erreichen.

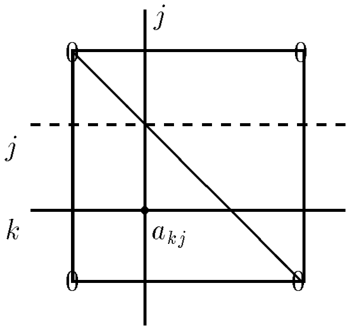
Es sei $a_{11} = 0$, $a_{jj} \neq 0$ für ein $j > 1$
Vertausche die j–te Spalte mit der 1. Spalte,
danach die j–te Zeile mit der 1. Zeile
$a_{11} = a_{jj} \neq 0$



(∗) Es seien jetzt alle $a_{jj} = 0$, aber $a_{1k} = a_{k1} \neq 0$
Addiere die k–te Spalte zur 1. Spalte,
danach die k–te Zeile zur 1. Zeile
$a_{11} = 2a_{1k} \neq 0 \quad (\chi(k) \neq 2\ !)$



Es seien nur Nullen in der 1. Zeile, 1. Spalte und in der Hauptdiagonalen.
$a_{jk} \neq 0;\ k, j > 1;\ k \neq j$
Addiere die j–te Spalte zur 1. Spalte,
danach die j–te Zeile zur 1. Zeile
$\Longrightarrow\ a_{k1} = a_{kj} \neq 0.$ Weiter mit (∗)



Es sei jetzt $a_{11} \neq 0$. $a_{1j} = a_{j1} \neq 0$
Multipliziere die 1. Spalte mit $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$,
addiere zur j–ten Spalte.
Multipliziere dann die 1. Zeile mit $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$,
addiere zur j–ten Zeile.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Neben und unter a_{11} werden so lauter Nullen erzeugt.
Wiederhole das Vorgehen für A' bis
$A^{(r)} = \mathfrak{o}$ oder $\emptyset$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ \cdots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$S_1, \ldots, S_k$ Elementarmatrizen zu den Spaltenoperationen

$S_k^T \ldots S_1^T A \underbrace{S_1 \ldots S_k}_{S}, \quad S = IS_1 \ldots S_k$

S entsteht aus der Einheitsmatrix I, wenn man auf I dieselben Spaltenoperationen anwendet wie auf A.

Im folgenden sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum.

Satz 18.5: Es sei V euklidisch bzw. unitär, β eine symmetrische Bilinearform bzw. HERMITEsche Form von V. Dann gibt es genau einen selbstadjungierten Endomorphismus $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, so daß für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ gilt:
$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{x} \cdot (\varphi\mathfrak{y}) = (\varphi\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{y}$
Dabei ist für eine beliebige ONB $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ von V:
$M(\varphi, B) = \overline{M(\beta, B)}$

Beweis: Eindeutigkeit:
$\mathfrak{x} \cdot \varphi_1\mathfrak{y} = \mathfrak{x} \cdot \varphi_2\mathfrak{y}$ für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$

$\Longrightarrow\ \mathfrak{x}\cdot(\varphi_1\mathfrak{y}-\varphi_2\mathfrak{y})=0$ für alle $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in V$
$\Longrightarrow\ \varphi_1\mathfrak{y}=\varphi_2\mathfrak{y}$ für alle $\mathfrak{y}\in V$, $\quad \varphi_1=\varphi_2$
Existenz:
Es sei $A=(a_{ij})=M(\beta,B)$. $\quad \overline{A}^T=A$
Definiere $\varphi\in\operatorname{Hom} V$ durch: $M(\varphi,B)=\overline{A}$
φ selbstadjungiert: $\overline{M(\varphi,B)}^T=A^T=\overline{A}=M(\varphi,B)$
Setze $\beta'(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\mathfrak{x}\cdot\varphi\mathfrak{y}$. Wir zeigen: $\beta'=\beta$
β' linear in $\mathfrak{x}$
$\beta'(\mathfrak{y},\mathfrak{x})=\mathfrak{y}\cdot\varphi\mathfrak{x}=\overline{\varphi\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}}=\overline{\mathfrak{x}\cdot\varphi\mathfrak{y}}=\overline{\beta'(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}$
β' ist SF bzw. HF

$$\beta'(\mathfrak{b}_i,\mathfrak{b}_j)=\mathfrak{b}_i\cdot\varphi\mathfrak{b}_j=\mathfrak{b}_i\cdot(\sum_k\overline{a_{kj}}\mathfrak{b}_k)=\sum_k a_{kj}\underbrace{(\mathfrak{b}_i\cdot\mathfrak{b}_k)}_{\delta_{ik}}=a_{ij}=\beta(\mathfrak{b}_i,\mathfrak{b}_j)$$

für alle $i,j\ \Longrightarrow\ \beta'=\beta$

Satz 18.6: Es sei β eine symmetrische Bilinearform bzw. HERMITEsche Form von V. Dann gibt es eine Basis $B=\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ von V, so daß $M(\beta,B)=D$ eine reelle Diagonalmatrix ist. Dabei kann B als ONB gewählt werden, wenn V euklidisch bzw. unitär ist.

Beweis: $B'=\{\mathfrak{b}'_1,\dots,\mathfrak{b}'_n\}$ beliebige Basis von V.
Ist V euklidisch oder unitär, dann sei B' eine ONB. Andernfalls mache man B' zur ONB durch Einführen des Standardskalarproduktes bzgl. B':

$$\mathfrak{x}=\sum_i x_i\mathfrak{b}'_i,\quad \mathfrak{y}=\sum_i y_i\mathfrak{b}'_i,\quad \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}=\sum_i x_i\overline{y_i}$$

Satz 18.5: Es existiert $\varphi\in\operatorname{Hom} V$ mit $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\mathfrak{x}\cdot\varphi\mathfrak{y}$ für alle $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in V$
φ selbstadjungiert.
Satz 16.13: Alle Eigenwerte $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ von φ sind reell. Es existiert eine ONB $B=\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ aus lauter Eigenvektoren von φ.

$$M(\beta,B)=\overline{M(\varphi,B)}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}=D\quad\text{reelle Diagonalmatrix}$$

18.1 Hauptachsensystem

$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ Eigenwerte von φ bzw. $M(\varphi,B')$ bzw. $M(\beta,B')$
$B=\{\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n\}$ ONB aus Eigenvektoren von φ, **Hauptachsensystem von** β.

$\mathfrak{x}=\sum_i x_i\mathfrak{b}_i,\ \mathfrak{y}=\sum_i y_i\mathfrak{b}_i\ \Longrightarrow\ \beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\sum_i\lambda_i x_i\overline{y_i},$ **Hauptachsenform von** β

$q(\mathfrak{x})=\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{x})$ zu β gehörende quadratische Form bzgl. B: $q(\mathfrak{x})=\sum_i\lambda_i|x_i|^2$.
Jede quadratische Form kann auf diese Hauptachsenform gebracht werden. $\lambda_i\in\mathbb{R}$

s Anzahl der positiven, t Anzahl der negativen Eigenwerte.
etwa: $\lambda_1, \ldots, \lambda_s > 0; \quad \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_{s+t} < 0$
bzgl. B:

$$\begin{aligned} \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= |\lambda_1| x_1 \overline{y_1} + \cdots + |\lambda_s| x_s \overline{y_s} - \cdots - |\lambda_{s+t}| x_{s+t} \overline{y_{s+t}} \\ q(\mathfrak{x}) &= |\lambda_1| \, |x_1|^2 + \cdots + |\lambda_s| \, |x_s|^2 - \cdots - |\lambda_{s+t}| \, |x_{s+t}|^2 \end{aligned}$$

Es sei B' beliebige Basis. $M(\beta, B') = A = M(q, B'), \quad n = \dim V$
β, q bzw. A heißen

- **positiv definit**, wenn $s = n$
- **negativ definit**, wenn $t = n$
- **positiv semidefinit**, wenn $t = 0, \ s < n$
- **negativ semidefinit**, wenn $s = 0, \ t < n$
- **indefinit**, wenn $s > 0 \wedge t > 0$

Für diese Definition erforderlich: s, t unabhängig von B'.

Satz 18.7: Trägheitssatz von Sylvester
Es sei β eine symmetrische Bilinearform oder HERMITEsche Form von V. $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$, $B' = \{\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_n\}$ Basen von V.
$A = M(\beta, B), \ A' = M(\beta, B')$
s, s' Anzahl der positiven Eigenwerte von A bzw. A'
t, t' Anzahl der negativen Eigenwerte von A bzw. A'
Dann ist $s = s', \ t = t'$.

Beweis: Wir können voraussetzen, daß B, B' Hauptachsensysteme sind.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_s & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_{s+t} & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{A} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mu_{s'} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \mu_{s'+t'} & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{A'}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_s; \ \mu_1, \ldots, \mu_{s'} > 0$
$\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_{s+t}; \ \mu_{s'+1}, \ldots, \mu_{s'+t'} < 0$
$\operatorname{rg} \beta = r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A', \quad s + t = s' + t'$

Wir zeigen: $t = t'$
$U = [\mathfrak{b}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{b}_{s+t}], \quad \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) < 0$ für $\mathfrak{x} \in U, \mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$
$W = [\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_{s'}, \mathfrak{b}'_{s'+t'+1}, \ldots, \mathfrak{b}'_n], \quad \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geq 0$ für $\mathfrak{x} \in W$
$U \cap W = \{\mathfrak{o}\} \qquad U \oplus W$ direkt.
$\dim (U \oplus W) = \dim U + \dim W = t + s' + (n - s' - t') \leq n \implies t \leq t'$
Entsprechend folgt: $t' \leq t$, also $t = t'$

Folgerung: Es seien A, A' symmetrische bzw. hermitesche Matrizen $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$, $S \in GL(n, \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C})$
Es sei $A' = S^T A\overline{S}$. Dann haben A, A' den gleichen Rang, die gleiche Anzahl positiver Eigenwerte und die gleiche Anzahl negativer Eigenwerte.

Beweis: $A' = S^T A\overline{S}$ ist das Transformationsgesetz für eine SF bzw. HF; siehe Satz 11.12

Bemerkung: Das Verfahren nach Satz 18.4 enthält für eine reelle symmetrische Matrix ein lineares Verfahren zur Bestimmung von s, t

Satz 18.8: Es sei β eine symmetrische Bilinearform oder HERMITEsche Form.
$M(\beta, B) = A$ bzgl. einer beliebigen Basis B.
Genau dann ist β positiv definit (also ein Skalarprodukt), wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

Beweis: β positiv definit $\iff$ $s = \dim V$

18.2 Bestimmung von Extrema

Beispiel: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, relle Funktion mit n Variablen $f(x_1, \ldots, x_n)$
f sei genügend oft stetig differenzierbar in $P = (a_1, \ldots, a_n)$
$\xi_i = x_i - a_i$. TAYLOR–Entwicklung an der Stelle P:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(P) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P)\xi_i + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(P)\xi_i\xi_j}_{\text{Quadratische Form } q \text{ von } \mathbb{R}^n} + \ldots$$

B Standardbasis. $M(q, B) = (f_{x_i x_j}(P))$
Notwendige Bedingung für ein Extremum in P: $f_{x_i}(P) = 0$ für alle i
In diesem Fall bestimmt q (falls $q \neq \mathfrak{o}$) das Verhalten von f in der näheren Umgebung von P.
f hat relatives Minimum $\iff$ q positiv definit
f hat relatives Maximum $\iff$ q negativ definit

Es sei z.B. $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte } \lambda_1, \lambda_2$$

A positiv definit $\iff \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0 \iff \underbrace{\lambda_1 \cdot \lambda_2}_{\det A} > 0 \wedge \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2}_{\mathrm{Spur} A} > 0$
$\iff \det A > 0 \wedge \mathrm{Spur}\ A > 0$
$\iff f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2 > 0 \wedge f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} > 0$
$\iff f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2 > 0 \wedge f_{x_1x_1} > 0$
$\iff$ f hat relatives Minimum in P
Entsprechend folgt: f hat relatives Maximum in P $\iff \det A > 0 \wedge f_{x_1x_1} < 0$
Kein Extremum, wenn $\det A < 0$.

Satz 18.9: Simultane Diagonalisierung
Es seien β_1, β_2 symmetrische Bilinearformen bzw. HERMITEsche Formen. Ist β_1 positiv definit, dann gibt es eine Basis $B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$,

so daß für $\mathfrak{x} = \sum_i x_i \mathfrak{b}_i, \quad \mathfrak{y} = \sum_i y_i \mathfrak{b}_i$ gilt:

$$\beta_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_i x_i \overline{y_i}\,, \quad \beta_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_i \lambda_i x_i \overline{y_i}$$

Beweis: β_1 ist Skalarprodukt.
Satz 18.4: Es existiert eine ONB, so daß β_2 die angegebene Form hat.

Es sei V euklidisch bzw. unitär, $q(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} \cdot \varphi\mathfrak{x}$ quadratische Form, φ selbstadjungiert.

$R(\mathfrak{x}) = \dfrac{q(\mathfrak{x})}{\|\mathfrak{x}\|^2}$ **Rayleigh Quotient**, $\quad R : V \setminus \{\mathfrak{o}\} \to \mathbb{R}$

$R(\lambda\mathfrak{x}) = \dfrac{\lambda\mathfrak{x} \cdot \varphi(\lambda\mathfrak{x})}{\|\lambda\mathfrak{x}\|^2} = \dfrac{\mathfrak{x} \cdot \varphi\mathfrak{x}}{\|\mathfrak{x}\|^2} = R(\mathfrak{x})$ für alle $\lambda \neq 0$

$S = \{\mathfrak{x} \in V \mid \|\mathfrak{x}\| = 1\}$ Einheitssphäre von V
Bild $R = \{q(\mathfrak{x}) \mid \mathfrak{x} \in S\}$

Satz 18.10: Das Maximum (Minimum) der Funktion q auf S ist der größte (kleinste) Eigenwert von φ. Die Maximalstellen (Minimalstellen) sind genau die zugehörigen, normierten Eigenvektoren von φ.

Beweis: Eigenwerte von $\varphi : \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.
φ selbstadjungiert. Es existiert eine ONB $B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ aus lauter Eigenvektoren von φ. $\quad \varphi\mathfrak{b}_i = \lambda_i \mathfrak{b}_i$
q hat bzgl. B Hauptachsenform.

$$\mathfrak{x} = \sum_i x_i \mathfrak{b}_i\,, \quad \|\mathfrak{x}\|^2 = \sum_i |x_i|^2 = 1$$

$$\lambda_1(\underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{1}) \leq q(\mathfrak{x}) = \lambda_1|x_1|^2 + \dots + \lambda_n|x_n|^2 \leq \lambda_n(\underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{1})$$

$\lambda_1 \leq q(\mathfrak{x}) \leq \lambda_n$. Es sei $\mathfrak{x}$ normierter Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ.
$q(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} \cdot \varphi\mathfrak{x} = \lambda\|\mathfrak{x}\|^2 = \lambda \quad$ (λ reell!)
$\Longrightarrow \lambda_1 = \min\{q(\mathfrak{x}) \mid \mathfrak{x} \in S\}, \quad \lambda_n = \max\{q(\mathfrak{x}) \mid \mathfrak{x} \in S\}$

Es sei $\mathfrak{x} \in S$, $q(\mathfrak{x})\lambda_1$.
Wir zeigen: $\mathfrak{x}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. (Entsprechend für λ_n)
$q(\mathfrak{x}) = \lambda_1 \Longrightarrow$ alle Koordinaten x_i mit $\lambda_i \neq \lambda_1$ sind $0 \Longrightarrow \mathfrak{x} \in E_{\lambda_1}$

Kapitel 19

Quadratische Funktionen und Quadriken

19.1 Quadratische Funktionen

Es sei im folgenden stets $V = \mathbb{R}_n$, $\cdot$ Standardskalarprodukt.

Definition: Eine **quadratische Funktion** F von V ist eine Abbildung $F : V \to \mathbb{R}$ der Form $F(\mathfrak{x}) = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) + 2f(\mathfrak{x}) + c$.
Dabei ist $\beta \neq \mathfrak{o}$ eine symmetrische Bilinearform, f eine Linearform und $c \in K$.
F heißt entartet, wenn β entartet ist. rg $\beta < n$.

Beispiel: $V = \mathbb{R}_2, \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$F(\mathfrak{x}) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1 + 3x_2 - 10; \quad B_s$ Standardbasis.

$$M(\beta, B_s) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} = (a_{ij}) = A, \quad \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j$$

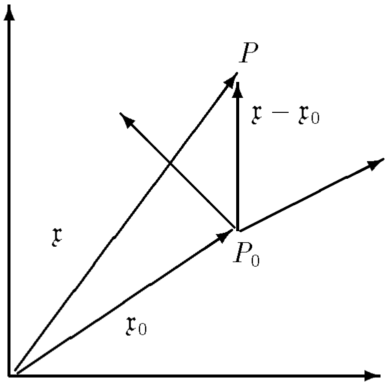
$f(\mathfrak{x}) = 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}; \quad c = -10.$

$F(\mathfrak{x}) = (A\mathfrak{x})\mathfrak{x} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{x} + c$

Wir fassen V als affinen Raum auf.
Identifiziere $\mathfrak{x}$ mit dem Punkt $\{\mathfrak{x}\}$
Fasse F als Funktion der Punkte von V auf.

Ein **kartesisches Koordinatensystem** $(\mathfrak{x}_0, B)$ besteht aus einem **Ursprung** $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}$ und einer ONB $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$.
Standard-Koordinatensystem: $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$, $B = B_S$ Standardbasis

$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{y} = y_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + y_n\mathfrak{b}_n$
$y_1, \ldots, y_n$ sind die Koordinaten des Punktes $P = \{\mathfrak{x}\}$ im Koordinatensystem $(\mathfrak{x}_0, B)$
$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{y}$



$F(P) = F(\mathfrak{x}) = \beta(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{y}) + 2f(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{y}) + c$

$$(1) \qquad F(\mathfrak{x}) = \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) + 2(\underbrace{\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0) + f(\mathfrak{y})}_{g(\mathfrak{y})}) + \underbrace{\beta(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_0) + 2f(\mathfrak{x}_0) + c}_{F(\mathfrak{x}_0)=d}$$

g ist Linearform.

Es sei $M(\beta, B) = (\alpha_{ij})$, $\quad g(\mathfrak{b}_i) = \alpha_i$, $\quad \mathfrak{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathfrak{b}_i$

$$F(\mathfrak{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}y_iy_j + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i + d = F_{\mathfrak{x}_0,B}(y_1, \ldots, y_n)$$

$F_{\mathfrak{x}_0,B}$ heißt die **Darstellung von F im Koordinatensystem** $(\mathfrak{x}_0, B)$.
Wir gehen stets davon aus, daß die Standarddarstellung $F_{\mathfrak{o},B_S}$ gegeben ist.

Aufgabe: Finde ein Koordinatensystem $(\mathfrak{x}_0, B)$, so daß $F_{\mathfrak{x}_0,B}$ möglichst einfach wird (euklidische Normalform von F)

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{x}) &= F_{\mathfrak{o},B_S}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + c \\ &= (A\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{x} + 2\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} + c = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) + 2f(\mathfrak{x}) + c \end{aligned}$$

Es sei $\mathfrak{x}_0 = (\overset{\circ}{x}_i)$, $\quad \mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = (\lambda_i)$
Lasse zunächst B_s unverändert. Versuche $\mathfrak{x}_0$ so zu wählen, daß in (1) der lineare Teil verschwindet.
$g(\mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0) + f(\mathfrak{y}) = 0$ für alle $\mathfrak{y}$

$$\iff \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i \overset{\circ}{x}_j + \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overset{\circ}{x}_j + a_i)\lambda_i = 0 \text{ für alle } \lambda_i$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overset{\circ}{x}_j = -a_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

$$\iff A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- **Fall A:** $A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$ ist lösbar
  Insbesondere der Fall, wenn rg $A = n$, β nicht entartet ist. Es sei $\mathfrak{x}_0$ Lösung von

$A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$, B ein Hauptachsensystem von β, d.h. eine ONB aus Eigenvektoren von A.

$$M(\beta, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \text{ Eigenwerte von } A$$

$$F_{\mathfrak{x}_0,B}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2 + d, \quad d = F(\mathfrak{x}_0)$$

- **Fall B:** $A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$ ist nicht lösbar
  $\varphi_A : V \to V, \quad \varphi_A\mathfrak{x} = A\mathfrak{x}; \quad \varphi_A$ ist selbstadjungiert und damit normal.
  Satz 16.10: Bild $\varphi_a^2 =$ Bild φ_A
  Zu $\varphi_A(-\mathfrak{a})$ existiert ein $\mathfrak{x}_0$ mit $\varphi_A^2(\mathfrak{x}_0) = \varphi_A(-\mathfrak{a})$.
  $A^2\mathfrak{x}_0 = -A\mathfrak{a}$ ist lösbar (das ist die obige Gleichung mit A multipliziert).
  Es sei $\mathfrak{x}_0$ eine Lösung.
  Setze $A\mathfrak{x} + \mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ nach Voraussetzung.
  $A\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, d.h. $\mathfrak{b}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 0, $\mathfrak{b} \in E_0$.

  Setze $\mathfrak{b}_n = -\dfrac{\mathfrak{b}}{||\mathfrak{b}||}$.

  $\mathfrak{b}_n$ kann in eine ONB aus Eigenvektoren von A eingebaut werden.
  $B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r, \underbrace{\mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_n}_{\text{Basis von } E_0}\}, \quad r = \text{rg } A,$

$$M(\beta, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

  Setze $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{x}_0', \quad \mathfrak{x}_0' = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_1 = \gamma\mathfrak{b}$.
  $\mathfrak{x}_1 \in E_0, \quad \gamma$ wird noch bestimmt.
  Beachte $\beta(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1) = (A\mathfrak{x}_1) \cdot \mathfrak{z} = \mathfrak{o} \cdot \mathfrak{z} = \mathfrak{o}$ für alle $\mathfrak{z}$.

  $F(\mathfrak{x}) = F(\mathfrak{y} + \mathfrak{x}_0') \overset{(1)}{=} \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) + 2(\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0') + f(\mathfrak{y})) + \beta(\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0') + 2f(\mathfrak{x}_0') + c$
  $\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0') = \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1) = \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0) + \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_1) = \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0)$
  $\beta(\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0') = \beta(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1) = \beta(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_0)$, $f(\mathfrak{x}_0') = f(\mathfrak{x}_0) + f(\mathfrak{x}_1)$

$$F(\mathfrak{y} + \mathfrak{x}_0') = \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) + 2(\underbrace{\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0) + f(\mathfrak{y})}_{g(\mathfrak{y})}) + \underbrace{\beta(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_0) + 2f(\mathfrak{x}_0) + c}_{F(\mathfrak{x}_0)} + 2f(\mathfrak{x}_1)$$

$$g(\mathfrak{y}) = (A\mathfrak{x}_0)\cdot\mathfrak{y} + \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{y} = (A\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{a})\cdot\mathfrak{y} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{y}$$

$$\mathfrak{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathfrak{b}_i; \quad g(\mathfrak{y}) = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}_n)y_n = -||\mathfrak{b}||y_n$$

$$F_{\mathfrak{x}_0',B} = \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_r y_r^2 - ||\mathfrak{b}||y_n + F(\mathfrak{x}_0) + 2\gamma f(\mathfrak{b})$$

$$g(\mathfrak{b}) = \beta(\mathfrak{b},\mathfrak{x}_0) + f(\mathfrak{b}) = \underbrace{(A\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{x}_0}_{\mathfrak{o}} + f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$$

Setze: $\gamma = -\dfrac{F(\mathfrak{x}_0)}{2||\mathfrak{b}||^2}$

Dann wird $F_{\mathfrak{x}_0',B} = \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_r y_r^2 - ||\mathfrak{b}||y_n$
$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ Eigenwerte $\neq 0$ von A.

19.2 Quadriken

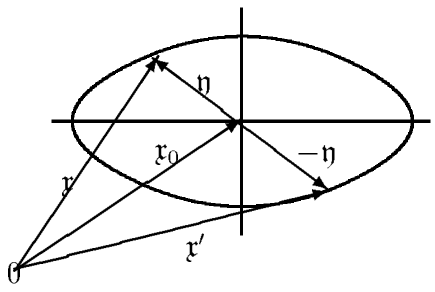
Definition: Eine **Quadrik** ist die Nullstellenmenge einer quadratischen Funktion F.
$Q = \{\mathfrak{x} | F(\mathfrak{x}) = 0\}$
Q heißt entartet, wenn F entartet ist.
$F_{\mathfrak{x}_0,B} = 0$ ist die Gleichung der Quadrik im Koordinatensystem $(\mathfrak{x}_0, B)$

Satz 19.1: Die Gleichung einer Quadrik in $\mathbb{R}^n$ läßt sich durch geeignete Wahl eines kartesischen Koordinatensystems auf eine der folgenden euklidischen Normalformen bringen.

$$\begin{array}{lcrcl} \text{Fall } A_0 & : & \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_r y_r^2 & = & 0 \\ \text{Fall } A_1 & : & \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_r y_r^2 & = & 1 \\ \text{Fall } B & : & \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_r y_r^2 & = & y_n \end{array}$$

$F(\mathfrak{x}) = (A\mathfrak{x})\cdot\mathfrak{x} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{x} + c = 0$
$r = \text{rg } A$, B ist eine ONB aus Eigenvektoren von A. Die Basis B nennen wir auch ein Hauptachsensystem der Quadrik. Die α_i gehen aus den Eigenwerten von A durch Division hervor. Ihre Vorzeichen bestimmen den Typ der Quadrik (Typenliste).
Im Fall A ist $A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$ lösbar.
Q ist eine **Mittelpunktsquadrik**, $\{\mathfrak{x}_0\}$ ein Mittelpunkt von Q. An einem Mittelpunkt $P_0 = \{\mathfrak{x}_0\}$ können die Punkte der Quadrik in einen anderen Quadrikpunkt gespiegelt werden.

Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{y} \in Q$, $\quad \mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{y}$
$F(\mathfrak{x}) = \beta(\mathfrak{y},\mathfrak{y}) + F(\mathfrak{x}_0) = 0$
$F(\mathfrak{x}') = \beta(-\mathfrak{y},-\mathfrak{y}) + F(\mathfrak{x}) = F(\mathfrak{x}) = 0$
$\Longrightarrow \mathfrak{x}' \in Q$



19.3 Beispiele

Beispiel: Man bestimme den Typ der folgenden Quadrik Q in $\mathbb{R}^3$

$F(\mathfrak{x}) = F(x_1, x_2, x_3)$

$$= \underbrace{x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3}_{\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{x})} + 2\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{f(\mathfrak{x})} + \underbrace{2}_{c} = 0$$

$$M(\beta, B_s) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} = A, \quad f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 2$$

Ist $A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$ lösbar?

$$\begin{array}{rrr|rcc}
1 & 2 & 1 & -1 & (-2) & (-1) \\
2 & 5 & 5 & -1 & \leftarrow & | \\
1 & 5 & 10 & -1 & & \leftarrow \\
\hline
1 & 2 & 1 & -1 & & \\
0 & 1 & 3 & 1 & (-3) & \\
0 & 3 & 9 & 0 & \leftarrow & \\
\hline
1 & 2 & 1 & -1 & & \\
0 & 1 & 3 & 1 & & \\
0 & 0 & 0 & -3 & & \\
\hline
\end{array}$$

ist nicht lösbar, Fall B.

$A^2\mathfrak{x}_0 = -A\mathfrak{a}$ hat eine Lösung $\mathfrak{x}_0$, $\quad \mathfrak{b} = A\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$

$F_{\mathfrak{x}_0', B} = \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_r y_r^2 - ||\mathfrak{b}|| y_n = 0$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sind die Eigenwerte $\neq 0$ von A, B ist eine ONB aus Eigenvektoren. Die Vorzeichen der α_i sind nach Division durch $||\mathfrak{b}||$ unverändert. Gesucht ist die Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte. Mache elementare Spaltenumformungen gefolgt von den entsprechenden elementaren Zeilenumformungen. Übergang zu einer kongruenten Matrix. (Kapitel 18)

$$\begin{array}{ccc} (-2) & \downarrow & \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & (-2) \\ 2 & 1 & 5 & \leftarrow \\ 1 & 3 & 10 & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} (-1) & \rightarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & (-1) \\ 0 & 1 & 3 & | \\ 1 & 3 & 9 & \leftarrow \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} & (-3) & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & (-3) \\ 0 & 3 & 0 & \leftarrow \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2 positive Eigenwerte, 1 Eigenwert 0.

Normalform der Gleichung von Q:

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 = y_3, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

elliptisches Paraboloid

Beispiel: Man bestimme den Typ der folgenden Quadrik Q und gebe ein kartesisches Koordinatensystem $(\mathfrak{x}_0, B)$ an, in dem die Gleichung von Q Normalform hat.

$$Q: \underbrace{3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4z}_{F(x,y,z)} - 2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = -2; \qquad (A\mathfrak{x})\mathfrak{x} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{x} + c = 0$$

Ist $A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$ lösbar ?

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \quad \text{ist nicht lösbar, Fall B}$$

Löse $A^2\mathfrak{x}_0 = -A\mathfrak{a}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}; \quad \text{Lösung } \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o} \qquad \mathfrak{b} = A\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b}_3 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenwerte von } A: \quad \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ 1 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x((3-x)^2 - 1) = 0$$

$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 0$
ONB von $\mathbb{R}_3$ aus Eigenvektoren:

$$\mathfrak{b}_3 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ siehe oben.}$$

$$\alpha_1 = 2: \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \qquad \mathfrak{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = 4: \quad \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \qquad \mathfrak{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\}$

$$\mathfrak{x}_0' = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{x}_1 = \gamma \mathfrak{b}, \quad \gamma = -\frac{F(\mathfrak{x}_0)}{2f(\mathfrak{b})} = -\frac{F(\mathfrak{x}_0)}{2\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$$

$$F(\mathfrak{x}_0) = F(\mathfrak{o}) = c = -2, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2 = 4, \quad \gamma = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4}, \quad \mathfrak{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{x}_0'$$

Im Koordinatensystem $(\mathfrak{x}_0', B)$ hat die Gleichung von Q die Form:
$2x'^2 + 4y'^2 - \alpha z' = 0, \quad \alpha = 2||\mathfrak{b}|| = 4$
$z' = \frac{1}{2}x'^2 + y'^2$ **elliptisches Paraboloid.**

Beispiel: Man bestimme den Typ folgender Quadriken:

1. $4xy - z^2 - 2z - 2 = 0$
2. $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4z^2 - 2 = 0$

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = -2$

   Ist $A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$ lösbar ?

   $$\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \Longrightarrow \mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Q ist echte Mittelpunktsquadrik

   $F(\mathfrak{x}_0) = (A\mathfrak{x}_0)\mathfrak{x}_0 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{x}_0 + c = -1 + 2 - 2 = -1$

   Eigenwerte:

   $$\begin{vmatrix} -x & 2 & 0 \\ 2 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = -(1+x)(x^2-4) = 0$$

   $\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 2$
   Normalform:
   $-x'^2 - 2y'^2 + 2z'^2 + \underbrace{F(\mathfrak{x}_0)}_{-1} = 0$
   $-x'^2 - 2y'^2 + 2z'^2 = -1$ **zweischaliges Hyperboloid**

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = -2$

   Ist $A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$ lösbar ?

   $$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \Longrightarrow \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o} \qquad F(\mathfrak{x}_0) = c = -2$$

Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ 1 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = (4-x)((3-x)^2-1)$$

$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 4$
Normalform:
$4x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 - 2 = 0$
$2x'^2 + y'^2 + 2z'^2 = 1$ **Ellipsoid**

19.4 Schnitt von Gerade und Quadrik

$V = K_n, \quad$ Quadrik Q: $F(\mathfrak{x}) = 0$

$$F(\mathfrak{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + c = \beta(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) + 2f(\mathfrak{x}) + c$$

$A = (a_{ij}), \quad \mathfrak{a} = (a_i), \quad F(\mathfrak{x}) = (A\mathfrak{x})\cdot\mathfrak{x} + 2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x} + c$
Gerade g: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda\mathfrak{b}$

$$F(\mathfrak{x}_1 + \lambda\mathfrak{b}) = \lambda^2\beta(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) + 2\lambda(\underbrace{\beta(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{b})}_{(A\mathfrak{x}_1)\cdot\mathfrak{b}} + \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) + \beta(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_1) + 2f(\mathfrak{x}_1) + c = 0$$

$(*) \qquad \lambda^2\beta(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) + 2\lambda\mathfrak{b}\cdot(A\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a}) + F(\mathfrak{x}_1) = 0$

Eine Gerade, die nicht ganz auf Q liegt, trifft Q in höchstens zwei Punkten.
Es sei $V = \mathbb{R}_3$ (analog $\mathbb{R}_2$). $\quad P_1 = \{\mathfrak{x}_1\}$
Es sei $\mathfrak{x}_1 \in Q, \quad F(\mathfrak{x}_1) = 0.$
$\lambda(\lambda\beta(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) + 2\mathfrak{b}\cdot(A\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a})) = 0$
Zu $\lambda_1 = 0$ gehört der Schnittpunkt P_1.

$\lambda_2 = -2\dfrac{\mathfrak{b}\cdot(A\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a})}{\beta(\mathfrak{b},\mathfrak{b})}$ Dabei sei $\beta(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) \neq 0$. Ferner sei $A\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a} = \mathfrak{n} \neq \mathfrak{o}$.

$\lambda_2 = 0 = \lambda_1 \implies \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n} = 0,\ \mathfrak{b}\perp\mathfrak{n}$
Die Ebene in P_1 mit dem Normalvektor $\mathfrak{n}$ ist die Tangentialebene in P_1 an Q.

Beispiel: Q : Ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & \\ & \frac{1}{b^2} & \\ & & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$

$$\mathfrak{n} = A\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{a^2} \\ \frac{y_1}{b^2} \\ \frac{z_1}{c^2} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

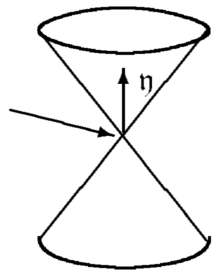
Gleichung der Tangentialebene in P_1:

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{x} = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{x}_1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

entsprechend für ein Hyperboloid.

Ist $\mathfrak{n} = A\mathfrak{x} + \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, dann bleibt die Tangentialebene unbestimmt.
$\{\mathfrak{x}_1\} = P_1$ ist in diesem Fall Mittelpunkt von Q.
$P_1 \in Q$
Ein Mittelpunkt von Q, der auf Q liegt, heißt **Doppelpunkt** von Q.



Der Kegel ist die einzige nichttriviale Quadrik mit einem Doppelpunkt.
Verschiebe den Koordinatenursprung in den Doppelpunkt P_1:

$F_{\mathfrak{x}_1,B_s} = \beta(\mathfrak{y},\mathfrak{y}) = 0, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1 \implies \beta(\lambda\mathfrak{y},\lambda\mathfrak{y}) = 0$ für alle λ

Jede Gerade durch den Doppelpunkt P_1 und einen Punkt $P_2 \neq P_1$, $P_2 \in Q$, liegt ganz auf Q. Geraden, die ganz auf Q liegen, heißen **erzeugende Geraden** von Q.
Q heißt **Regelfläche**, wenn durch jeden Punkt von Q eine erzeugende Gerade geht.
Quadriken mit Doppelpunkten sind Regelflächen.

Keine Regelflächen: Ellipsoid, elliptisches Paraboloid, zweischaliges Hyperboloid.
Alle anderen nicht trivialen Quadriken sind Regelflächen.

Kapitel 20

Polynome

K sei Körper. Ein **Polynom** über K ist ein Ausdruck der Form

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad \text{Grad } f = n$

f heißt **normiert**, wenn $a_n = 1$ ist.
Ist $|K| = \infty$, dann kann man f äquivalent auch als Abbildung
$f : K \to K$ auffassen.
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$
$f = g \iff a_j = b_j$ für alle j.
o **Nullpolynom**, lauter Koeffizienten 0. Grad $\mathsf{o} = -\infty$

$K[x]$ ist die Menge der Polynome über K.
Polynome werden wie üblich addiert und multipliziert.
$K[x]$ ist bzgl. $+, \cdot$ ein kommutativer Ring, assoziative K–Algebra.
Einselement: $f(x) = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_j = 0$ für $j > 0$.
Grad $(f \cdot g) =$ Grad $f +$ Grad g
$fg = \mathsf{o} \iff f = \mathsf{o} \vee g = \mathsf{o}$. $K[x]$ ist **nullteilerfrei**
Kürzungsregel:
$fg = fh \wedge f \neq \mathsf{o} \implies f(g-h) = \mathsf{o} \implies g = h$

20.1 Teilbarkeitstheorie in $K[x]$

vgl. dazu die analoge Theorie in $\mathbb{Z}$, Übung.

Definition: $g|f \overset{\text{Def}}{\iff} \exists q \quad (q \in K[x] \wedge f = qg)$

Satz 20.1:
1. $g|f \wedge f|h \implies g|h$
2. $g|f_1 \wedge g|f_2 \implies g|(q_1 f_1 + q_2 f_2)$ für alle $q_1, q_2 \in K[x]$
3. $g|f \wedge f|g \iff f = cg$ für ein $c \neq 0$ aus K.

Beweis: 1. wie in $\mathbb{Z}$.

2. wie in $\mathbb{Z}$.
3. $f = cg$ mit $c \neq 0$ aus $K \implies g|f \wedge fg$.
   Umkehrung:
   Es gelte $g|f \wedge f|g$.
   $f = q_1 g$, $g = q_2 f$; $f = q_1 q_2 f$
   $f \neq \mathsf{o} \implies$ Grad q_1 = Grad $q_2 = 0$, $\quad f = cg$, $c = q_1 \neq \mathsf{o}$
   $f = \mathsf{o} \implies g = \mathsf{o} \implies f = 1 \cdot g$, $c = 1$.

Definition: Polynome, die sich nur durch einen konstanten Faktor $c \neq 0$ unterscheiden, heißen **assoziiert**, $f \sim g$. $\sim$ ist Äquivalenzrelation. Assoziierte Polynome haben dieselben Teilbarkeitseigenschaften.

Das Divisionsverfahren für Polynome

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
 & & & f & & & & & g & & q \\
 & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & : \; 2x^2+x+1 \; = \; \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \\
-(& x^4 & + & \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{1}{2}x^2 &) & & & & \\
\hline
 & & & \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{1}{4}x^2 & + & x & + & 1 & \\
 & & -(& \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{1}{4}x^2 & + & \frac{1}{4}x &) & & \\
\hline
 & & & & & \frac{1}{4}x^2 & + & \frac{3}{4}x & + & 1 & \\
 & & & & -(& \frac{1}{4}x^2 & + & \frac{1}{8}x & + & \frac{1}{8} &) \\
\hline
 & & & & & & & \frac{5}{8}x & + & \frac{7}{8} & = \; r \qquad \text{Rest}
\end{array}
$$

$f = q \cdot g + r$, Grad $r <$ Grad g

Satz 20.2: Zu je zwei Polynomen $f, g \in K[x]$, $g \neq \mathsf{o}$, gibt es eine **Euklidische Zerlegung** von f bzgl. g:

$$f = q \cdot g + r, \qquad \text{Grad } r < \text{Grad } g$$

Dabei sind $q, r \in K[x]$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Existenz $\surd$
Eindeutigkeit:
$f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$, $\quad$ Grad $r_1, r_2 <$ Grad g
$(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$, $\quad$ Grad $r_2 - r_1 <$ Grad g
$\implies q_1 = q_2 \implies r_1 = r_2$

Definition: Es seien $f, g, d \in K[x], \neq \mathsf{o}$.
d heißt ein gemeinsamer Teiler von f und g, wenn $d|f \wedge d|g$.
d heißt ein **größter gemeinsamer Teiler** (ggT) von f unf g, wenn $d|f \wedge d|g \wedge \forall d'(d'|f \wedge d'|g \implies d'|d)$.
Es seien d, d' größte gemeinsame Teiler von f und g. $\implies d|d' \wedge d'|d$.

Der größte gemeinsame Teiler ist nur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.
ggT(f,g) bezeichne den normierten ggT von f und g.
f,g **teilerfremd** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ ggT$(f,g)=1$

Satz 20.3: Zu je zwei Polynomen $f,g \in K[x]$ existiert ein ggT d.
Es gibt $h_1,h_2 \in K[x]$ mit $d = h_1 f + h_2 g$.

Beweis: EUKLIDischer Algorithmus wie in $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{rcl}
f &=& q_1 g + r_1 \quad , \ \text{Grad } r_1 < \text{Grad } g \\
g &=& q_2 r_1 + r_2 \quad , \ \text{Grad } r_2 < \text{Grad } r_1 \\
r_1 &=& q_3 r_2 + r_3 \quad , \ \text{Grad } r_3 < \text{Grad } r_2 \\
\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
r_{n-2} &=& q_n r_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &=& q_{n+1} r_n
\end{array}$$

r_n ist der letzte nicht verschwindende Rest. $r_n|f \wedge r_n|g$

$r_n = h_1 f + h_2 g \implies r_n$ ist ggT von f,g

Definition: Ein Polynom $f \in K[x]$, Grad $f \geq 1$, heißt **reduzibel** in $K[x]$ oder über K, wenn es nicht konstante Polynome $g,h \in K[x]$ gibt mit $f = g \cdot h$.
Andernfalls heißt f **irreduzibel**.
f irreduzibel $\implies$ f hat nur triviale Teiler d, $d \sim 1 \vee d \sim f$.

Satz 20.4: Es sei $f \in K[x]$, Grad $f \geq 1$.

1. Ein nicht konstantes Polynom g kleinsten Grades, das f teilt, ist irreduzibel
2. f ist Produkt irreduzibler Polynome

Beweis:
1. $f = q \cdot g$. Annahme: g sei reduzibel.
   $g = g_1 \cdot g_2$, Grad $g_1, g_2 \geq 1 \quad \wedge \quad$ Grad $g_1, g_2 < g$.
   $f = q \cdot g_1 \cdot g_2$, $g_1|f$, $1 \leq$ Grad $g_1 < g$ **Widerspruch!**
2. Spalte gemäß 1. fortlaufend irreduzible Faktoren von f ab.
   $f = p_1 f_1$, p_1 irreduzibel, Grad $f_1 <$ Grad f
   $f_1 = p_2 f_2$, p_2 irreduzibel, Grad $f_2 <$ Grad f
   usw. bis Grad $f_j = 0$ wird.

Satz 20.5: Euklidsches Lemma
Es seien $f,g,h \in K[x]$, $\neq 0$. Dann gilt:

$$f|gh \wedge \text{ggT}(f,g) = 1 \implies f|h.$$

Beweis: ggT$(f,g) = 1 \implies 1 = q_1 f + q_2 g$, $\quad \cdot h$
$h = q_1 fh + q_2 gh$, $f|fh \wedge f|gh \implies f|h$.

Satz 20.6: Jedes Polynom $f \in K[x]$, Grad $f \geq 1$, kann bis auf die Reihenfolge der Faktoren und bis auf konstante Faktoren eindeutig als Produkt irreduzibler Polynome geschrieben werden.

Beweis: Existenz nach Satz 20.4
Eindeutigkeit:
Es sei $f = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$; $\quad p_i, q_j$ irreduzibel.
$p_1 | q_1(q_2 \cdots q_s)$. $p_1 | q_1 \implies p_1 \sim q_1$
$p_1 \not| q_1 \implies \mathrm{ggT}(p_1, q_1) = 1 \overset{\text{Satz 20.5}}{\implies} p_1 | q_2 \cdots q_s$
Wiederhole den Schluß bis folgt: $p_1 | q_{j_1}$, $p_1 \sim q_{j_1}$. Kürze dann p_1 gegen q_{j_i}.
Zeige dann $p_2 \sim q_{j_2}$ usw.

Definition: Primpotenzdarstellung:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

f hat eine bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige Darstellung

$$f = a_n p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

mit irreduziblen, normierten, verschiedenen Faktoren p_i, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Es seien $f, g, h \in K[x]$, $\neq 0$.
h heißt ein gemeinsames Vielfaches von f und g, wenn $f|h \wedge g|h$.
h heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** (kgV) von f und g, wenn
$f|h \wedge g|h \wedge \forall h'(f|h' \wedge g|h' \implies h|h')$.

Es seien h, h' kleinste gemeinsame Vielfache von f und g.
$\implies h|h' \wedge h'|h \implies h \sim h'$. Das kgV ist nur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.
$\mathrm{kgV}(f, g)$ bezeichnet das normierte kgV von f und g.

Satz 20.7: Die Primpotenzdarstellungen von $f, g \in K[x]$ seien:

$$f = a \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \quad g = b \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}, \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0 \text{ ganz}$$

Dann gilt:

1. $\mathrm{ggT}(f, g) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min\{\alpha_i, \beta_i\}}$
2. $\mathrm{kgV}(f, g) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max\{\alpha_i, \beta_i\}}$
3. $\mathrm{ggT}(f, g) \cdot \mathrm{kgV}(f, g) \sim fg$
4. $\mathrm{kgV}(f, g) \sim fg \iff \mathrm{ggT}(f, g) = 1$

Beweis: wie in $\mathbb{Z}$, Übung.

Folgerung: f, g normiert $\implies \mathrm{kgV}(f, g) = \frac{fg}{\mathrm{ggT}(f,g)}$

20.2 Nullstellen

Definition: $\alpha \in K$ heißt **Nullstelle** von $f \in K[x]$, wenn $f(\alpha) = 0$ ist.

Satz 20.8: α ist Nullstelle von $f \iff (x-\alpha)|f$

Beweis: EUKLIDische Zerlegung: $f(x) = q(x)(x-\alpha) + r(x)$, Grad $r \leq 0$, $r(x)$ konstant.
$f(\alpha) = 0 \iff r = \mathbf{o} \iff (x-\alpha)|f$.

α heißt Nullstelle der **Ordnung** t von f, wenn

$f(x) = (x-\alpha)^t q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$

f habe die Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in K$, darunter evtl. auch mehrfache Nullstellen. Dann hat f die Form

$f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_s)g(x)$

Grad $f = n \implies f$ hat höchstens n Nullstellen (mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Ordnung gezählt).

Der Körper K heißt **algebraisch abgeschlossen** , wenn jedes nicht konstante Polynom $f \in K[x]$ wenigstens eine Nullstelle $\alpha \in K$ hat.

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind nicht algebraisch abgeschlossen, aber $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen (Fundamentalsatz der Algebra).
K läßt sich stets zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper erweitern.

Satz 20.9: Ist K algebraisch abgeschlossen, dann hat jedes Polynom $f \in K[x]$, Grad $f = n \geq 1$, genau n Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, wobei jede Nullstelle entsprechend ihrer Ordnung gezählt wird.
Ist $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, dann gilt:
$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$. **Linearfaktorzerlegung** von f.

Beweis: f hat eine Nullstelle α_1. $(x-\alpha_1)|f$
$f(x) = (x-\alpha_1)f_1(x), \quad$ Grad $f_1 = n-1$
Ist $n-1 \geq 1$, dann hat f_1 eine Nullstelle α_2. $\quad (x-\alpha_2)|f_1$
$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x)$, Grad $f_2 = n-2$
usw. bis folgt: $f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)f_n, \quad$ Grad $f_n = 0, \quad f_n = a_n$.

V sei Vektorraum über K.
Hom V Algebra der Endomorphismen von V.
Hom V ist ein Ring bzgl. $+$ und $\circ$ (Produkt von Abbildungen).

Satz 20.10: Es sei $\varphi \in$ Hom V. Definiere $\psi : K[x] \to$ Hom V durch $\psi(f) = f(\varphi)$.
Dann ist ψ ein Ring–Homomorphismus.

Beweis: $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$.

1.

$$\begin{aligned}
\psi(f+g) &= \psi(f)+\psi(g). \\
(f+g)(x) &= \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i \\
\psi(f+g) &= \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)\varphi^i = \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi^i + \sum_{i=0}^{n} b_i\varphi^i = f(\varphi)+g(\varphi) \\
&= \psi(f)+\psi(g)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\psi(fg) &= \psi(f)\circ\psi(g) \\
fg &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j x^{i+j} \\
\psi(fg) &= \sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j \varphi^{i+j} = \sum_{i,j=0}^{n} a_i\varphi^i \circ a_j\varphi^j \\
&= (\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi^i)\circ(\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi^j) = f(\varphi)\circ g(\varphi) = \psi(f)\circ\psi(g)
\end{aligned}$$

ψ heißt Einsetzungs–Homomorphismus.
Bild $\psi = K[\varphi]$ besteht aus allen Polynomen in φ:

$$f(\varphi) = a_n\varphi^n + \cdots + a_1\varphi^1 + a_0 \underbrace{\varphi^0}_{\mathrm{id}_V} = a_n\varphi^n + \cdots + a_0$$

$K[\varphi]$ ist ein kommutativer Ring (da homomorphes Bild von $K[x]$)
Insbesondere: $f(\varphi)\circ g(\varphi) = g(\varphi)\circ f(\varphi)$.

Kapitel 21

Das Minimalpolynom

21.1 Das Minimalpolynom

Es sei V Vektorraum über K, $\dim V = n \geq 1$.

Satz 21.1: Cayley–Hamilton
Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V$. Dann ist $\chi_\varphi(\varphi) = \mathfrak{o}$ (Nullabbildung).

Beweis: Es sei $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis von V. $M(\varphi, B) = A = (a_{ij})$.

$$\chi_\varphi(\varphi) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varphi & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \varphi & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \varphi \end{vmatrix} = \det(a_{ij} - \varphi\delta_{ij}).$$

$c_{ij}(\varphi) = a_{ij} - \varphi\delta_{ij} \in K[\varphi]$. Satz 10.10:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \underbrace{\operatorname{Adj}(k, j)}_{A_{kj}(\varphi)} = \delta_{ik} \underbrace{\det\, c_{ij}}_{\chi_\varphi(\varphi)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \varphi\delta_{ij}) \circ A_{kj}(\varphi) = \delta_{ik}\chi_\varphi(\varphi)$$

Wende beide Seiten auf $\mathfrak{b}_i \in B$ an. Summiere über i:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \varphi\delta_{ij}) \circ A_{kj}(\varphi)\mathfrak{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik}\chi_\varphi(\varphi)\mathfrak{b}_i = \chi_\varphi(\varphi)\mathfrak{b}_k$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{kj}(\varphi) \circ (a_{ij} - \varphi\delta_{ij})\mathfrak{b}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{kj}(\varphi)(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\mathfrak{b}_i - \delta_{ij}\varphi\mathfrak{b}_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{kj}(\varphi)\underbrace{(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathfrak{b}_i - \varphi\mathfrak{b}_j)}_{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}$$

$$\chi_\varphi(\varphi)\mathfrak{b}_k = \mathfrak{o} \text{ für alle } k = 1, \ldots, n \implies \chi_\varphi(\varphi) = \mathfrak{o}$$

Satz 21.2: Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, $\dim V = n \geq 0$.

1. Es gibt genau ein normiertes Polynom m_φ kleinsten Grades aus $K[x]$ mit $m_\varphi(\varphi) = \mathfrak{o}$. Grad $m_\varphi \leq n = \dim V$.
2. $f \in K[x] \wedge f(\varphi) = \mathfrak{o} \implies m_\varphi | f$.
3. $m_\varphi | \chi_\varphi$.

m_φ heißt das **Minimalpolynom** von φ

Beweis: Satz 21.1: Es exisitiert ein normiertes Polynom m_φ kleinsten Grades mit $m_\varphi(\varphi) = \mathfrak{o}$. Grad $m_\varphi \leq$ Grad $\chi_\varphi = n$.
Es sei $f \in K[x]$, $f(\varphi) = \mathfrak{o}$.
EUKLIDische Zerlegung von f bzgl. m_φ: $f = qm_\varphi + r$, Grad $r <$ Grad m_φ

$$f(\varphi) = q(\varphi) \circ m_\varphi(\varphi) + r(\varphi) = r(\varphi) = \mathfrak{o} \implies r = \mathfrak{o} \text{ Nullpolynom} \implies m_\varphi | f$$

Insbesondere: $m_\varphi | \chi_\varphi$
Es sei $f \in K[x]$ ebenfalls normiertes Polynom kleinsten Grades mit $f(\varphi) = \mathfrak{o} \implies m_\varphi | f \wedge f | m_\varphi \implies f = m_\varphi$ eindeutig bestimmt.

$$m_\varphi = 1 \iff \varphi^0 = \mathrm{id} = \mathfrak{o} \iff V = \{\mathfrak{o}\}$$

Satz 21.3: Die Nullstellen von m_φ sind genau die Eigenwerte von $\varphi \in \operatorname{Hom} V$.

Beweis: $m_\varphi(x) = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots + a_0$
Es sei $\mathfrak{a}$ Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ.

$$\begin{aligned} m_\varphi(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o} &= \varphi^q\mathfrak{a} + a_{q-1}\varphi^{q-1}\mathfrak{a} + \cdots + a_0\varphi^0\mathfrak{a} \\ &= (\lambda^q + a_{q-1}\lambda^{q-1} + \cdots + a_0)\mathfrak{a} \\ &= m_\varphi(\lambda)\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o} \implies m_\varphi(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Umkehrung: Es sei $m_\varphi(\lambda) = 0$.

$$m_\varphi | \chi_\varphi \implies \chi_\varphi = qm_\varphi \implies \chi_\varphi(\lambda) = 0, \quad \lambda \text{ ist Eigenwert}$$

$\varphi \in \operatorname{Hom} V$, B Basis von V, $M(\varphi, B) = A$.
$m_\varphi(\varphi) = \mathfrak{o}$ Nullabbildung $\iff m_\varphi(A) = M(m_\varphi(\varphi), B) = \mathfrak{o}$ Nullmatrix
m_φ ist das normierte Polynom kleinsten Grades, für das $m_\varphi(A) = \mathfrak{o}$ ist. Wir nennen $m_\varphi = m_A$ auch das **Minimalpolynom von** $A \in K^{n \times n}$.
A ähnlich $A' \implies m_A = m_{A'}$.

21.2 φ–zyklischer Unterraum

Satz 21.4: Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V$.

1. $f \in K[x] \implies$ Kern $f(\varphi)$ ist φ–invariant.
   Insbesondere ist der Eigenraum $E_\lambda =$ Kern $(\varphi - \lambda)$ φ–invariant.
2. $f \in K[x], \quad U$ φ–invariant $\implies U$ $f(\varphi)$-invariant.
3. $\mathfrak{a} \in V$. $[\mathfrak{a}]_\varphi = [\varphi^0\mathfrak{a}, \varphi^1\mathfrak{a}, \varphi^2\mathfrak{a}, \dots]$ ist φ–invariant.

$[\mathfrak{a}]_\varphi$ heißt der von $\mathfrak{a}$ erzeugte φ–**zyklische Unterraum**

Beweis:

1. $\mathfrak{x} \in$ Kern $f(\varphi), \quad f(\varphi)\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$.
   Zu zeigen: $\varphi\mathfrak{x} \in$ Kern $f(\varphi), \quad f(\varphi)(\varphi\mathfrak{x}) = \mathfrak{o}$
   $$f(\varphi)(\varphi\mathfrak{x}) = f(\varphi) \circ \varphi\mathfrak{x} = \varphi \circ f(\varphi)\mathfrak{x} = \varphi(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$$
2. $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_0, \quad \mathfrak{x} \in U, \varphi^j\mathfrak{x} \in U$
   $$f(\varphi)\mathfrak{x} = a_k \underbrace{\varphi^k\mathfrak{x}}_{\in U} + \cdots + a_0 \underbrace{\varphi^0\mathfrak{x}}_{\in U} \in U$$
3. $\surd$

Es sei U ein φ–invarianter Unterraum von V.
$m_{\varphi|U}$ **Minimalpolynom von** φ **bzgl.** U (φ–Annullator von U)
$m_{\varphi|[\mathfrak{a}]_\varphi} = m_{\varphi,\mathfrak{a}}$ **Minimalpolynom von** φ **bzgl.** $\mathfrak{a}$ (φ–Annullator von $\mathfrak{a}$)

$[\mathfrak{a}]_\varphi = [\varphi^0\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \varphi^1\mathfrak{a}, \varphi^2\mathfrak{a}, \dots]$

Es sei m^* normiertes Polynom kleinsten Grades mit $m^*(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

$m^*(\varphi)(\varphi^j\mathfrak{a}) = m^*(\varphi) \circ \varphi^j\mathfrak{a} = \varphi^j \circ m^*(\varphi)\mathfrak{a} = \varphi^j(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$

$\implies m^* = m_{\varphi,\mathfrak{a}}$.
$m_{\varphi,\mathfrak{a}}$ ist das normierte Polynom kleinsten Grades mit $m_{\varphi,\mathfrak{a}}(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.
$m_{\varphi,\mathfrak{a}} = 1 \iff \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$

$f \in K[x], \quad f(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \implies f(\varphi)$ verschwindet auf $[\mathfrak{a}]_\varphi \implies m_{\varphi,\mathfrak{a}} | f$

Satz 21.5: Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V$.

1. Es sei $q \geq 0$ die kleinste ganze Zahl, so daß $\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^q$ linear abhängig sind, und es gelte: $\varphi^q + a_{q-1}\varphi^{q-1} + \cdots + a_0\varphi^0 = \mathfrak{o}$.
   Dann ist $\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^{q-1}$ eine Basis von $K[\varphi]$ und
   $m_\varphi(x) = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots + a_0, \quad \dim K[\varphi] =$ Grad m_φ
2. Es sei $q \geq 0$ die kleinste ganze Zahl, so daß $\varphi^0(\mathfrak{a}), \varphi^1(\mathfrak{a}), \dots, \varphi^q(\mathfrak{a})$ linear abhängig sind, und es gelte: $\varphi^q\mathfrak{a} + b_{q-1}\varphi^{q-1}\mathfrak{a} + \cdots + b_0\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.
   Dann ist $\varphi^0\mathfrak{a}, \varphi^1\mathfrak{a}, \dots, \varphi^{q-1}\mathfrak{a}$ eine Basis von $[\mathfrak{a}]_\varphi$ und
   $m_{\varphi,\mathfrak{a}} = x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_0, \quad \dim[\mathfrak{a}]_\varphi =$ Grad $m_{\varphi,\mathfrak{a}}$
   Man nennt $\varphi^0\mathfrak{a}, \varphi^1\mathfrak{a}, \dots, \varphi^{q-1}\mathfrak{a}$ eine φ–**zyklische Basis** von $[\mathfrak{a}]_\varphi$.

Beweis:

1. $x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots + a_0 = m_\varphi \checkmark$
   $\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^{q-1}$ linear unabhängig. $f \in K[x], \quad f(\varphi) \in K[\varphi]$
   Euklidische Zerlegung von f bzgl. m_φ:

   $f = g m_\varphi + r, \quad \text{Grad } r < \text{Grad } m_\varphi = q$

   $f(\varphi) = \underbrace{g(\varphi) \circ m(\varphi)}_{=\mathfrak{o}} + r(\varphi) = r(\varphi)$ Linearkombination von $\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^{q-1}$

   $\Longrightarrow \varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^{q-1}$ ist Basis von $K[\varphi]$

2. Es sei $f(x) = x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_0$, $f(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.
   f ist das normiert Polynom kleinsten Grades mit dieser Eigenschaft
   $\Longrightarrow f = m_{\varphi,\mathfrak{a}}$.
   $\varphi^0\mathfrak{a}, \varphi^1\mathfrak{a}, \ldots, \varphi^{q-1}\mathfrak{a}$ sind linear unabhängig.
   $\mathfrak{x} \in [\mathfrak{a}]_\varphi, \quad \mathfrak{x} = h(\varphi)\mathfrak{a}$. Zerlege $h = g \cdot f + r, \quad \text{Grad } r < \text{Grad } f$.

   $h(\varphi)(\mathfrak{a}) = g(\varphi) \underbrace{f(\varphi)\mathfrak{a}}_{=\mathfrak{o}} + r(\varphi)\mathfrak{a} = r(\varphi)\mathfrak{a}$

   Linearkombination von $\underbrace{\varphi^0\mathfrak{a}, \varphi^1\mathfrak{a}, \ldots, \varphi^{q-1}\mathfrak{a}}_{\text{Basis von } [\mathfrak{a}]_\varphi}$

Satz 21.6: U_1, U_2 φ–invariant $\Longrightarrow \underbrace{m_{\varphi|(U_1+U_2)}}_{f} = \underbrace{\text{kgV}(m_{\varphi|U_1}, m_{\varphi|U_2})}_{g}$

Beweis: $U_1 + U_2$ φ–invariant.
$f(\varphi)$ verschwindet auf U_1 und auf U_2.
$\Longrightarrow m_{\varphi|U_1}|f \wedge m_{\varphi|U_2}|f \Longrightarrow g|f$
$g(\varphi)$ verschwindet auf U_1 und auf U_2, also auch auf $U_1 + U_2 \Longrightarrow f|g$. Also $f = g$.

21.3 Bestimmung des Minimalpolynoms

Es sei $\varphi \in \text{Hom } V$. $\quad B = \{\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n\}$ Basis von V.
Wähle $\mathfrak{e}_{j_1} \in B, \quad U_1 = [\mathfrak{e}_{j_1}]_\varphi$.
Bestimme $m_{\varphi|U_1} = m_{\varphi,\mathfrak{e}_{j_1}}$ gemäß Satz 21.5.
Wähle $\mathfrak{e}_{j_2} \in B \setminus U_1. \quad U_2 = U_1 + [\mathfrak{e}_{j_2}]_\varphi$
Bestimme $m_{\varphi|\mathfrak{e}_{j_2}}$. Berechne

$$m_{\varphi|U_2} = \text{kgV}(m_{\varphi|U_1}, m_{\varphi,\mathfrak{e}_{j_2}}) = \frac{m_{\varphi|U_1} \cdot m_{\varphi,\mathfrak{e}_{j_2}}}{\text{ggT}(m_{\varphi|U_1}, m_{\varphi,\mathfrak{e}_{j_2}})}$$

Hier ist eventuell der Euklidische Algorithmus anzuwenden.
Wähle $\mathfrak{e}_{j_3} \in B \setminus U_2. \quad U_3 = U_2 + [\mathfrak{e}_{j_3}]_\varphi$ usw.
$U_1 \subsetneqq U_2 \subsetneqq U_3 \subsetneqq \ldots$
bis nach höchstens n Schritten $U_{j_k} = V$ ist.
Dann ist $m_{\varphi|U_{j_k}} = m_\varphi$.

Beispiel: Man bestimme das Minimalpolynom der folgenden Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
$\varphi = \varphi_A : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_4, \quad \varphi\mathfrak{x} = A\mathfrak{x}, \quad m_A = m_\varphi$.
$B = \{\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_4\}$ Standardbasis.

Beginne mit $\mathfrak{e}_{j_1} = \mathfrak{e}_1$

			A									
	1	0	2	0								
	1	−1	1	0								
	−2	0	−3	0								
	−5	3	−2	2	$\mathfrak{e}_1$	$\varphi\mathfrak{e}_1$	$\varphi^2\mathfrak{e}_1$	$\varphi^3\mathfrak{e}_1$	$\varphi^4\mathfrak{e}_1$			
	1	0	0	0	1	1	−3	5	⋮	←		
E_4	0	1	0	0	0	1	−2	3	⋮	(−1)	(2)	(5)
	0	0	1	0	0	−2	4	−6	⋮		←	
	0	0	0	1	0	−5	−8	−15	⋮			←
	1	−1	0	0	1	0	−1	2	⋮			
	0	1	0	0	0	1	−2	3	⋮			
	0	2	1	0	0	0	0	0	⋮	←		
	0	5	0	1	0	0	−18	0	⋮	$-\frac{1}{18}$		
	1	−1	0	0	1	0	−1	2	⋮		←	
	0	1	0	0	0	1	−2	3	⋮	←		
	0	$-\frac{5}{18}$	0	$-\frac{1}{18}$	0	0	1	0	⋮	(2)	(1)	
	0	2	1	0	0	0	0	0	⋮			
	1	$-\frac{23}{18}$	0	$-\frac{1}{18}$	1	0	0	2	⋮			
E^*	0	$\frac{8}{18}$	0	$-\frac{2}{18}$	0	1	0	3	⋮			
	0	$-\frac{5}{18}$	0	$-\frac{1}{18}$	0	0	1	0	⋮			
	0	2	1	0	0	0	0	0	⋮			

letzte Spalte: $E^*(\varphi^3 e_1)$

Löse: $\varphi^3\mathfrak{e}_1 + a_2\varphi^2\mathfrak{e}_1 + a_1\varphi^1\mathfrak{e}_1 + a_0\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{o}$
$a_0 = -2, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 0, \quad m_{\varphi,\mathfrak{e}_1} = x^3 - 3x^1 - 2$

Wähle $\mathfrak{e}_{j_2}$, $\mathfrak{e}_{j_2} \notin [\mathfrak{e}_1]_\varphi$
$\mathfrak{e}_{j_2}$ ist so zu wählen, daß die entsprechende Spalte in E^* linear unabhängig ist von den nebenstehenden Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$.
$\mathfrak{e}_{j_2} = \mathfrak{e}_4$ scheidet aus! Man nehme etwa $\mathfrak{e}_{j_2} = \mathfrak{e}_2$.
Wiederhole das Verfahren für $\mathfrak{e}_2$.

$\mathfrak{e}_1, \varphi\mathfrak{e}_1, \varphi^2\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ sind linear unabhängig.
$[\mathfrak{e}_1]_\varphi + [\mathfrak{e}_2]_\varphi = V; \quad m_\varphi = \mathrm{kgV}(m_{\varphi,\mathfrak{e}_1}, m_{\varphi,\mathfrak{e}_2})$

$$
\begin{array}{c|cccc|ccc}
 & & & A & & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 0 & & & \\
 & 1 & -1 & 1 & 0 & & & \\
 & -2 & 0 & -3 & 0 & & & \\
 & -5 & 3 & -2 & 2 & e_2 & \varphi e_2 & \varphi^2 e_2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3
\end{array}
$$

$\varphi^2\mathfrak{e}_2 - \varphi\mathfrak{e}_2 - 2\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{o} \implies m_{\varphi,\mathfrak{e}_2} = x^2 - x - 2$

$$
\begin{array}{lllll}
x^3 & & -3x & -2 & : \; x^2 - x - 2 = x + 1 \\
-(x^3 & -x^2 & -2x) & & \\
\hline
 & x^2 & -x & -2 & \\
 & -(x^2 & -x & -2) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$\implies \mathrm{kgV}(m_{\varphi,\mathfrak{e}_1}, m_{\varphi,\mathfrak{e}_2}) = m_{\varphi,\mathfrak{e}_1}$
$m_\varphi = m_{\varphi,\mathfrak{e}_1} = x^3 - 3x - 2$

21.4 1. Zerlegungssatz

Satz 21.7: Es seien $f, g \in K[x], \quad \varphi \in \mathrm{Hom}\, V$. Dann gilt:

1. $f | g \implies \mathrm{Kern}\, f(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}\, g(\varphi)$.
2. $\mathrm{ggT}(f, g) = 1 \implies \mathrm{Kern}\, f(\varphi) \cap \mathrm{Kern}\, g(\varphi) = \{\mathfrak{o}\}$

Beweis: 1. $\mathfrak{x} \in \mathrm{Kern}\, f(\varphi), \quad f(\varphi)\mathfrak{x} = \mathfrak{o}, \quad g = q \cdot f$

$g(\varphi)\mathfrak{x} = q(\varphi) \circ f(\varphi)\mathfrak{x} = q(\varphi)(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{x} \in \mathrm{Kern}\, g(\varphi)$

2. Es sei $\mathfrak{a} \in \mathrm{Kern}\, f(\varphi) \cap \mathrm{Kern}\, g(\varphi)$.

$f(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \implies m_{\varphi,\mathfrak{a}} | f, \quad g(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \implies m_{\varphi,\mathfrak{a}} | g \implies m_{\varphi,\mathfrak{a}} = 1 \implies \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

Satz 21.8: $\mathrm{ggT}(f_1, f_2) = 1 \implies \mathrm{Kern}\, f_1 f_2(\varphi) = \mathrm{Kern}\, f_1(\varphi) \oplus \mathrm{Kern}\, f_2(\varphi)$

Beweis: Die Summe ist direkt nach Satz 21.7.
$\mathrm{Kern}\, f_1(\varphi) \subset \mathrm{Kern}\, f_1 f_2(\varphi), \quad \mathrm{Kern}\, f_2(\varphi) \subset \mathrm{Kern}\, f_1 f_2(\varphi)$.
$\implies \mathrm{Kern}\, f_1(\varphi) \oplus \mathrm{Kern}\, f_2(\varphi) \subset \mathrm{Kern}\, f_1 f_2(\varphi)$
Zu zeigen: Jeder Vektor $\mathfrak{x} \in \mathrm{Kern}\, f_1 f_2(\varphi)$ hat eine Darstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ mit $\mathfrak{x}_1 \in \mathrm{Kern}\, f_1(\varphi)$, $\mathfrak{x}_2 \in \mathrm{Kern}\, f_2(\varphi)$.
$\mathrm{ggT}(f_1, f_2) = 1 \implies 1 = q_1 f_1 + q_2 f_2$ mit $q_1, q_2 \in K[x]$.

$\varphi^0 = q_1 f_1(\varphi) + q_2 f_2(\varphi)$ Wende beide Seiten auf $\mathfrak{x}$ an

$$\mathfrak{x} = \underbrace{q_1 f_1(\varphi)\mathfrak{x}}_{\mathfrak{x}_2} + \underbrace{q_2 f_2(\varphi)\mathfrak{x}}_{\mathfrak{x}_1}$$

$$f_2(\varphi) \circ q_1(\varphi) \circ f_1(\varphi)\mathfrak{x} = q_1(\varphi) \circ f_1 f_2(\varphi)\mathfrak{x} = q_1(\varphi)\mathfrak{o} = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{x}_2 \in \text{Kern } f_2(\varphi)$$

Ebenso folgt $\mathfrak{x}_1 \in$ Kern $f_2(\varphi)$

Satz 21.9: 1. Zerlegungssatz

1. Es sei $m_\varphi = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ die Primpotenzdarstellung des Minimalpolynoms von $\varphi \in \text{Hom } V$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

   $$V = \text{Kern } p_1^{\alpha_i}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \text{Kern } p_r^{\alpha_r}(\varphi)$$

   Dabei ist $U_i = \text{Kern } p_i^{\alpha_i}(\varphi) \neq \{\mathfrak{o}\}$ und $m_{\varphi|U_i} = p_i^{\alpha_i}$.
2. Es sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ direkte Summe φ–invarianter Unterräume mit: $m_{\varphi|W_i} = p_i^{\alpha_i}$, p_i irreduzibel, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$.
   Dann ist $m_\varphi = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $W_i = \text{Kern } p_i^{\alpha_i}(\varphi)$.

Beweis:

1. Die Existenz der Zerlegung folgt aus Satz 21.8. Kern $m_\varphi(\varphi) = V$. Das Polynom $p_i^{\alpha_i}(\varphi)$ verschwindet auf U_i. $m_{\varphi|U_i}|p_i^{\alpha_i}$.
   $m_{\varphi|U_i} = p_i^{\beta_i}, \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.
   $m_\varphi = \text{kgV}(p_1^{\beta_1}, \ldots, p_r^{\beta_r}) = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \implies \beta_i = \alpha_i$ für alle i.

   $$m_{\varphi|U_i} = p_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \geq 1 \implies m_{\varphi|U_i} \neq 1 \implies U_i \neq \{\mathfrak{o}\}.$$
2. $m_\varphi = \text{kgV}(p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_r^{\alpha_r}) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.
   $p_i^{\alpha_i}(\varphi)$ verschwindet auf W_i, $\quad W_i \subset \text{Kern } p_i^{\alpha_i}(\varphi)$.
   Umkehrung:
   Es sei $\mathfrak{x} \in \text{Kern } p_i^{\alpha_i}(\varphi)$; $\quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_r$, $\mathfrak{x}_i \in W_i$
   $p_i^{\alpha_i}(\varphi)\mathfrak{x} = \mathfrak{o} = \underbrace{p_i^{\alpha_i}(\varphi)\mathfrak{x}_i}_{\in W_1} + \cdots + \underbrace{p_i^{\alpha_i}(\varphi)\mathfrak{x}_r}_{\in W_r}$ da W_j φ–invariant ist.
   $\implies p_i^{\alpha_i}(\varphi)\mathfrak{x}_j = \mathfrak{o}$ für alle j, da die Summe der W_i direkt ist.
   $\implies m_{\varphi,\mathfrak{x}_j}|p_i^{\alpha_i}, \quad m_{\varphi,\mathfrak{x}_j}|m_{\varphi|W_j} = p_j^{\alpha_j}$ für alle j.
   $\implies m_{\varphi,\mathfrak{x}_j} = 1$ für $j \neq i$, $\quad \mathfrak{x}_j = \mathfrak{o}$ für alle $j \neq i$.

   $$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_i \in W_i$$

Satz 21.10: Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von $\varphi \in \text{Hom } V$.
Dann gilt:
φ diagonalisierbar $\iff m_\varphi(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$,
d.h. φ ist genau dann diagonalisierbar, wenn m_φ in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Beweis: Es sei $m_\varphi = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_r)$. Satz 21.9:
$V = \text{Kern } (\varphi - \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \text{Kern } (\varphi - \lambda_r) = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$
$\iff \varphi$ ist diagonalisierbar

Umkehrung:
Es sei φ diagonalisierbar. $V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$
$m_{\varphi|E_{\lambda_i}} = x - \lambda_i, \quad m_\varphi = \text{kgV}(x - \lambda_1, \ldots, x - \lambda_r) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_r)$

Satz 21.11: Es sei B Basis von V, $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, $m_\varphi = p^\alpha$, p irreduzibel, $\alpha \in \mathbb{N}$.
Dann gibt es einen Vektor $\mathfrak{a} \in B$ mit $m_{\varphi,\mathfrak{a}} = p^\alpha$.
Es ist $[\mathfrak{a}]_\varphi$ ein φ–zyklischer Unterraum von V maximaler Dimension.

Beweis: $p^{\alpha-1}(\varphi)$ verschwindet nicht auf allen Vektoren von B.
Es existiert $\mathfrak{a} \in B$ mit $p^{\alpha-1}(\varphi)\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$.

$$m_{\varphi,\mathfrak{a}} | m_\varphi = p^\alpha, \quad m_{\varphi,\mathfrak{a}} = p^j, \quad 1 \leq j \leq \alpha$$

Annahme: Es sei $j < \alpha$. $p^j(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

$$\Longrightarrow \; p^{\alpha-1}(\varphi)\mathfrak{a} = p^{\alpha-1-j}(\varphi) \circ p^j(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \quad \textbf{Widerspruch!}$$

Also ist $m_{\varphi,\mathfrak{a}} = m_\varphi = p^\alpha$ und $\dim [\mathfrak{a}]_\varphi = \operatorname{Grad} m_{\varphi,\mathfrak{a}} = \operatorname{Grad} p^\alpha$ maximal.

Satz 21.12: Es seien $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, $\operatorname{Grad} m_{\varphi,\mathfrak{a}} = s$ und $f_0, \ldots, f_{s-1} \in K[x]$ mit $\operatorname{Grad} f_j = j$.
Dann ist $B = \{f_0(\varphi)\mathfrak{a}, \ldots, f_{s-1}(\varphi)\mathfrak{a}\}$ eine Basis von $[\mathfrak{a}]_\varphi$.

Beweis: Bekannt (Satz 21.5): $\varphi^0\mathfrak{a}, \ldots, \varphi^{s-1}\mathfrak{a}$ ist Basis von $[\mathfrak{a}]_\varphi$.
Zu zeigen: Die Vektoren aus B sind linear unabhängig.

$$\lambda_0 f_0(\varphi)\mathfrak{a} + \cdots + \lambda_{s-1} f_{s-1}(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \qquad (*)$$

Schreibe $f_j(\varphi)\mathfrak{a}$ als Linearkombination von $\varphi^0\mathfrak{a}, \ldots, \varphi^j\mathfrak{a}$.
Koeffizient vor φ^{s-1} in $(*)$ ist $a_{s-1}\lambda_{s-1}$, $a_{s-1} \neq 0 \Longrightarrow \lambda_{s-1} = 0$
Koeffizient vor φ^{s-2} in $(*)$ ist $a_{s-2}\lambda_{s-2}$, $a_{s-2} \neq 0 \Longrightarrow \lambda_{s-2} = 0$
usw. bis $\lambda_0 = 0$ folgt.

Satz 21.13: Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, $V = [\mathfrak{a}]_\varphi$, $m_\varphi = m_{\varphi,\mathfrak{a}} = p^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\operatorname{rg} p^{j-1}(\varphi) - \operatorname{rg} p^j(\varphi) = \begin{cases} \operatorname{Grad} p & \text{für } j = 1, \ldots, \alpha \\ 0 & \text{für } j > \alpha \end{cases}$$

Beweis: $p^{j-1}(\varphi) = p^j(\varphi) = \mathfrak{o}$ für $j > \alpha$.
Es sei $1 \leq j \leq \alpha$; $\operatorname{Grad} p = q$.
Bilde gemäß Satz 21.12 die verallgemeinerte φ–zyklische Basis B^* von $[\mathfrak{a}]_\varphi$:

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^0\mathfrak{a}\,, & \varphi^1\mathfrak{a}\,, \ldots, & \varphi^{q-1}\mathfrak{a} \\
p(\varphi)\mathfrak{a}\,, & \varphi^1 \circ p(\varphi)\mathfrak{a}\,, \ldots, & \varphi^{q-1} \circ p(\varphi)\mathfrak{a} \\
p^2(\varphi)\mathfrak{a}\,, & \varphi^1 \circ p^2(\varphi)\mathfrak{a}\,, \ldots, & \varphi^{q-1} \circ p^2(\varphi)\mathfrak{a} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
p^{\alpha-1}(\varphi)\mathfrak{a}\,, & \varphi^1 \circ p^{\alpha-1}(\varphi)\mathfrak{a}\,, \ldots, & \varphi^{q-1} \circ p^{\alpha-1}(\varphi)\mathfrak{a}
\end{array}$$

Wende $p^j(\varphi)$ auf die Vektoren von B^* an.

$$p^j(\varphi) \circ p^{\alpha-j}(\varphi)\mathfrak{a} = p^j(\varphi) \circ \varphi^1 \circ p^{\alpha-j}(\varphi)\mathfrak{a} = \cdots = \mathfrak{o}$$

Alle anderen Vektoren von B^* werden wieder auf Vektoren aus B^* abgebildet.

$$\operatorname{rg} p^j(\varphi) = (\alpha - j)q, \quad \operatorname{rg} p^{j-1}(\varphi) - \operatorname{rg} p^j(\varphi) = (\alpha - (j-1))q - (\alpha - j)q = q.$$

Kapitel 22

Der Quotientenraum

Es sei V Vektorraum über K, U Unterraum von V.

Kongruenz modulo U: $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ (modulo U) $\iff \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in U$.

Übung:
U ist Untergruppe von V bzgl. $+$.
$\equiv$ ist Äquivalenzrelation auf V.
Die Äquivalenzklassen nennt man Nebenklassen von U: $\mathfrak{a} + U$
$\mathfrak{a} \in \mathfrak{a} + U$, $\mathfrak{a}$ ist Repräsentant der Nebenklasse
$\mathfrak{b} \in \mathfrak{a} + U \iff \mathfrak{a} + U = \mathfrak{b} + U$.

Satz 22.1: Die Kongruenz modulo U ist mit den Vektorraum–Verknüpfungen verträglich:
$$\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}' \implies \lambda\mathfrak{a} \equiv \lambda\mathfrak{a}', \quad \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}' \wedge \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}' \implies \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$$

Beweis: $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}' \implies \mathfrak{a} - \mathfrak{a}' \in U \implies \lambda(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}') \in U, \quad \lambda\mathfrak{a} - \lambda\mathfrak{a}' \in U \implies \lambda\mathfrak{a} \equiv \lambda\mathfrak{a}'$
$\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}', \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}' \implies \mathfrak{a} - \mathfrak{a}', \mathfrak{b} - \mathfrak{b}' \in U$
$\implies (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}') + (\mathfrak{b} - \mathfrak{b}') \in U, \quad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}') \in U \implies \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$.

$V/U = \{\mathfrak{a} + U | \mathfrak{a} \in V\}$
Die natürliche Surjektion von V auf V/U:

$\nu : V \to V/U, \quad \nu(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + U = \ulcorner\mathfrak{a}\urcorner$

Satz 22.2: Durch $\lambda\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = \ulcorner\lambda\mathfrak{a}\urcorner$ und $\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner + \ulcorner\mathfrak{b}\urcorner = \ulcorner\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\urcorner$ werden auf V/U eindeutig eine Multiplikation mit Skalaren und eine Addition definiert. Mit diesen Verknüpfungen wird ν eine lineare Abbildung und damit V/U ein Vektorraum über K.
V/U heißt der **Quotientenraum** von V nach U.

Beweis: Eindeutigkeit der Verknüpfungen:
$\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = \ulcorner\mathfrak{a}'\urcorner \implies \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}' \overset{\text{Satz 22.1}}{\implies} \lambda\mathfrak{a} \equiv \lambda\mathfrak{a}' \implies \ulcorner\lambda\mathfrak{a}\urcorner = \ulcorner\lambda\mathfrak{a}'\urcorner$
$\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = \ulcorner\mathfrak{a}'\urcorner, \quad \ulcorner\mathfrak{b}\urcorner = \ulcorner\mathfrak{b}'\urcorner \implies \mathfrak{a} = \mathfrak{a}', \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}' \implies \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$
$\implies \ulcorner\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\urcorner \equiv \ulcorner\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\urcorner$

$\nu(\lambda\mathfrak{a}) = \ulcorner\lambda\mathfrak{a}\urcorner = \lambda\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = \lambda\nu(\mathfrak{a})$
$\nu(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \ulcorner\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\urcorner = \ulcorner\mathfrak{a}\urcorner + \ulcorner\mathfrak{b}\urcorner = \nu(\mathfrak{a}) + \nu(\mathfrak{b})$
$\nu : V \to V/U$ ist linear. Bild $\nu = V/U$ ist Vektorraum über K

$\nu(\mathfrak{o}) = \ulcorner\mathfrak{o}\urcorner = U$ ist Nullvektor von V/U; Kern $\nu = U$.

Im folgenden sei $\dim V < \infty$

Satz 22.3: $\dim V/U = \dim V - \dim U$

Beweis: Dimensionsformel: $\dim \underbrace{\text{Bild } \nu}_{V/U} = \dim V - \dim \underbrace{\text{Kern } \nu}_{U}$

Satz 22.4: Es sei $\varphi \in \text{Hom } V$ und U ein φ–invarianter Unterraum von V. Dann wird durch

$$\tilde{\varphi}(\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner) = \ulcorner\varphi\mathfrak{a}\urcorner$$

eindeutig ein Endomorphismus von V/U definiert. Für $f \in K[x]$ gilt:

$$\nu \circ f(\varphi) = f(\tilde{\varphi}) \circ \nu$$

Beweis: $\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = \ulcorner\mathfrak{a}'\urcorner \implies \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}' \implies \mathfrak{a} - \mathfrak{a}' \in U$
$\implies \varphi(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}') = \varphi\mathfrak{a} - \varphi\mathfrak{a}' \in U \implies \varphi\mathfrak{a} \equiv \varphi\mathfrak{a}' \implies \ulcorner\varphi\mathfrak{a}\urcorner = \ulcorner\varphi\mathfrak{a}'\urcorner$
$\tilde{\varphi}(\lambda\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner) = \tilde{\varphi}\ulcorner\lambda\mathfrak{a}\urcorner = \ulcorner\lambda\varphi\mathfrak{a}\urcorner = \lambda\ulcorner\varphi\mathfrak{a}\urcorner = \lambda\tilde{\varphi}(\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner)$
$\tilde{\varphi}(\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner + \ulcorner\mathfrak{b}\urcorner) = \tilde{\varphi}(\ulcorner\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\urcorner) = \ulcorner\varphi\mathfrak{a}+\varphi\mathfrak{b}\urcorner = \ulcorner\varphi\mathfrak{a}\urcorner + \ulcorner\varphi\mathfrak{b}\urcorner = \tilde{\varphi}\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner + \tilde{\varphi}\ulcorner\mathfrak{b}\urcorner$
$\implies \tilde{\varphi} \in \text{Hom } V/U$
$\nu \circ \varphi(\mathfrak{a}) = \ulcorner\varphi\mathfrak{a}\urcorner = \tilde{\varphi}\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = (\tilde{\varphi} \circ \nu)\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a} \in V$
$\implies \nu \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ \nu.$
$\nu \circ \varphi^j = \nu \circ \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ \cdots \circ \tilde{\varphi} \circ \nu = \tilde{\varphi}^j \circ \nu$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j x^j$$

$$\nu \circ f(\varphi) = \nu \circ \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi^j = \sum_{j=1}^{r} a_j(\nu \circ \varphi^j) = \sum_{j=1}^{r} a_j(\tilde{\varphi}^j \circ \nu) = (\sum_{j=1}^{r} a_j \tilde{\varphi}^j) \circ \nu$$

$$= f(\tilde{\varphi}) \circ \nu$$

$\tilde{\varphi}$ heißt **der durch φ induzierte Endomorphismus** von V/U.

Satz 22.5:
1. $m_{\tilde{\varphi}} | m_\varphi$
2. $m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner} | m_{\varphi,\mathfrak{a}}$

Beweis:
1. $m_\varphi(\tilde{\varphi})\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = m_\varphi(\tilde{\varphi}) \circ \nu\mathfrak{a} = \nu \circ m_\varphi(\varphi)\mathfrak{a} = \nu\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$
$m_\varphi(\tilde{\varphi}) = \mathfrak{o} \implies m_{\tilde{\varphi}} | m_\varphi$

2. $m_{\varphi,\mathfrak{a}}(\tilde{\varphi})\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = m_{\varphi,\mathfrak{a}}(\tilde{\varphi}) \circ \nu\mathfrak{a} = \nu \circ m_{\varphi,\mathfrak{a}}(\varphi)\mathfrak{a} = \nu\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$
   $\Longrightarrow \; m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner} | m_{\varphi,\mathfrak{a}}$

Satz 22.6: Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, $m_\varphi = p^\alpha$, $p \in K[x]$ irreduzibel, $\alpha \in \mathbb{N}$. Ferner sei $\mathfrak{a}_0 \in V$ mit $m_{\varphi,\mathfrak{a}_0} = m_\varphi = p^\alpha$ ($\mathfrak{a}_0$ existiert nach Satz 21.11), $U = [\mathfrak{a}_0]_\varphi$. Dann gibt es in jeder Nebenklasse $\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner \in V/U$ einen Vektor $\mathfrak{a}'$ mit $m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner} = m_{\varphi,\mathfrak{a}'}$

Beweis: $m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner} | m_{\varphi,\mathfrak{a}} | m_\varphi = p^\alpha; \quad m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner} = p^\beta, \quad 0 \le \beta \le \alpha$
$m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner}(\tilde{\varphi})\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = \mathfrak{o} = p^\beta(\tilde{\varphi})\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = p^\beta(\tilde{\varphi}) \circ \nu\mathfrak{a} = \nu(p^\beta(\varphi)\mathfrak{a})$
$p^\beta(\varphi)\mathfrak{a} \in \operatorname{Kern} \nu = U = [\mathfrak{a}_0]_\varphi$

Es existiert $f \in K[x]$ mit $p^\beta(\varphi)\mathfrak{a} = f(\varphi)\mathfrak{a}_0$.
Wende auf beide Seiten $p^{\alpha-\beta}(\varphi)$ an:
$p^\alpha(\varphi)\mathfrak{a} = \mathfrak{o} = p^{\alpha-\beta}(\varphi) \circ f(\varphi)\mathfrak{a}_0 \Longrightarrow m_{\varphi,\mathfrak{a}_0} = p^\alpha | p^{\alpha-\beta} f \Longrightarrow p^\beta | f$,
$f = q \cdot p^\beta, q \in K[x]$
Setze $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} - \underbrace{q(\varphi)\mathfrak{a}_0}_{\in U}, \quad \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}', \quad \ulcorner\mathfrak{a}\urcorner = \ulcorner\mathfrak{a}'\urcorner$
$m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}'\urcorner} = m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}\urcorner} = p^\beta, \quad m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}'\urcorner} | m_{\varphi,\mathfrak{a}'}$

$$m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}'\urcorner}(\varphi)\mathfrak{a}' = p^\beta(\varphi)\mathfrak{a}' = p^\beta(\varphi)\mathfrak{a} - \underbrace{\underbrace{p^\beta(\varphi) \circ q(\varphi)\mathfrak{a}_0}_{f(\varphi)\mathfrak{a}_0}}_{p^\beta(\varphi)\mathfrak{a}} = \mathfrak{o}$$

$\Longrightarrow \; m_{\varphi,\mathfrak{a}'} | m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}'\urcorner} \Longrightarrow m_{\tilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}'\urcorner} = m_{\varphi\mathfrak{a}'}$

Kapitel 23

Normalformen

23.1 2. Zerlegungssatz

Sei $\dim V = n \geq 0$, $\varphi \in \text{Hom } V$.
Finde eine Basis B von V, so daß $M(\varphi, B)$ möglichst einfach wird.
Wir zerlegen V in eine direkte Summe φ–invarianter Unterräume U_i.

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r, \quad B_i \text{ Basis von } U_i, \qquad B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i \quad \text{Basis von } V$$

$A_i = M(\varphi \upharpoonright U_i, B_i)$

$$M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix} = \text{diag}(A_1, \ldots, A_r) \textbf{ diagonale Blockmatrix}$$

Zerlege V in eine direkte Summe φ–invarianter Unterräume möglichst kleiner Dimension.
1. Zerlegungssatz:

$$m_\varphi = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \Longrightarrow V = \text{ Kern } p_1^{\alpha_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \text{ Kern } p_r^{\alpha_r}(\varphi)$$

Die Kerne werden weiter zerlegt.

Satz 23.1: 2. Zerlegungssatz
Es sei $\varphi \in \text{Hom } V$, $\quad m_\varphi = p^\alpha$, $\quad p$ irreduzibel, $\quad \alpha \in \mathbb{N}$.
Dann ist V eine direkte Summe φ–zyklischer Unterräume
$V = [\mathfrak{a}_1]_\varphi \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{a}_s]_\varphi$.
Dabei sind die Polynome $m_{\varphi,\mathfrak{a}_i} = p^{\alpha_i}$, $1 \leq \alpha_i \leq \alpha$, bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.
Bezeichnet $D(j)$ die Anzahl der Polynome mit $m_{\varphi,\mathfrak{a}_i} = p^j$, dann ist

$$D(j) + D(j+1) + \cdots + D(\alpha) = \frac{1}{\text{Grad } p}(\text{rg } p^{j-1}(\varphi) - \text{rg } p^j(\varphi)) \quad (1)$$

Beweis: Existenz der Zerlegung
Vollständige Induktion über $n = \dim V$
$n = 1$: $V = [\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}]_\varphi$
Es sei $n > 1$ und die Behauptung für alle Räume kleinerer Dimension als n bereits bewiesen.
Satz 21.11: Es exisitiert $\mathfrak{a}_0 \in V$ mit $m_{\varphi,\mathfrak{a}_0} = m_\varphi = p^\alpha$.
Es sei $U = [\mathfrak{a}_0]_\varphi$; $\dim U = \text{Grad } p^\alpha \geq 1$
$\dim V/U = \dim V - \dim U < \dim V = n$
Sei $\widetilde{\varphi}$ der von φ induzierte Endomorphismus von V/U.
$m_{\widetilde{\varphi}} | m_\varphi = p^\alpha$; $m_{\widetilde{\varphi}} = p^\beta$. $\beta \geq 1$, da man sonst mit $V = U$ fertig wäre.
Induktionsannahme: V/U ist direkte Summe $\widetilde{\varphi}$–zyklischer Unterräume.
$V/U = [\ulcorner\mathfrak{a}_1\urcorner]_{\widetilde{\varphi}} \oplus \cdots \oplus [\ulcorner\mathfrak{a}_s\urcorner]_{\widetilde{\varphi}}$
Satz 22.6 : $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ können so gewählt werden, daß $m_{\widetilde{\varphi},\ulcorner\mathfrak{a}_i\urcorner} = m_{\varphi,\mathfrak{a}_i}$.
Es sei $\text{Grad } m_{\varphi,\mathfrak{a}_i} = q_i$, $\text{Grad } p^\alpha = q_0$

$$\begin{aligned}
\widetilde{B_i} &= \{\widetilde{\varphi}^0\ulcorner\mathfrak{a}_i\urcorner, \widetilde{\varphi}^1\ulcorner\mathfrak{a}_i\urcorner, \ldots, \widetilde{\varphi}^{q_i-1}\ulcorner\mathfrak{a}_i\urcorner\} && \text{zyklische Basis von } [\ulcorner\mathfrak{a}_i\urcorner]_{\widetilde{\varphi}} \\
B_i &= \{\varphi^0\mathfrak{a}_i, \varphi^1\mathfrak{a}_i, \ldots, \varphi^{q_i-1}\mathfrak{a}_i,\} && \text{zyklische Basis von } [\mathfrak{a}_i]_\varphi \\
B_0 &= \{\varphi^0\mathfrak{a}_0, \varphi^1\mathfrak{a}_0, \ldots, \varphi^{q_0-1}\mathfrak{a}_0,\} && \text{zyklische Basis von } U = [\mathfrak{a}_0]_\varphi \\
\widetilde{B} &= \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{B_i} && \text{ist Basis von } V/U
\end{aligned}$$

Wir zeigen: $B = \bigcup_{i=0}^{s} B_i$ ist linear unabhängig.

Es sei
$$\sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{q_i-1} \lambda_{ij}\varphi^j \mathfrak{a}_i = \mathfrak{o} \qquad (2)$$

Wende auf beide Seiten die natürliche Surjektion $\nu : V \to V/U$ an.
Beachte: $\nu(B_0) = \{\mathfrak{o}\}$. Satz 22.4:

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{q_i-1} \lambda_{ij}\widetilde{\varphi}^j\ulcorner\mathfrak{a}_i\urcorner = \mathfrak{o} \implies \lambda_{ij} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, s; \quad j = 0, \ldots, q_i - 1$$

In (2) bleibt: $\sum_{j=0}^{q_0-1} \lambda_{0,j} \underbrace{\varphi^j\mathfrak{a}_0}_{\in B_0} = \mathfrak{o} \implies$ alle $\lambda_{ij} = 0$

$$V' = [B_0] \oplus [B_1] \oplus \cdots \oplus [B_s] = [\mathfrak{a}_0]_\varphi \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{a}_s]_\varphi$$

$$\dim V' = |B_0| + (|B_1| + \cdots + |B_s|) = \dim U + \dim V/U = \dim V \qquad V' = V.$$

Eindeutigkeitsaussage für die Polynome $m_{\varphi,\mathfrak{a}_i} = p^{\alpha_i}$.
Es genügt (1) zu beweisen.

$$V = [\mathfrak{a}_0]_\varphi \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{a}_s]_\varphi, \quad U_i = [\mathfrak{a}_i]_\varphi, \quad m_{\varphi|U_i} = p^{\alpha_i}, \quad 1 \leq \alpha_i \leq \alpha$$

Beachte: $\dim \mathrm{Kern}\, f = \mathrm{def}\, f = \dim V - \mathrm{rg}\, f$
Übung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}\; p^j(\varphi) &= \mathrm{Kern}\; p^j(\varphi) \cap U_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Kern}\; p^j(\varphi) \cap U_s \\
\mathrm{def}\; p^j(\varphi) &= \mathrm{def}\; p^j(\varphi) \restriction U_1 + \cdots + \mathrm{def}\; p^j(\varphi) \restriction U_s \\
\mathrm{rg}\; p^{j-1}(\varphi) - \mathrm{rg}\; p^j(\varphi) &= \mathrm{def}\; p^j(\varphi) - \mathrm{def}\; p^{j-1}(\varphi) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \mathrm{def}\; p^j(\varphi) \restriction U_i - \mathrm{def}\; p^{j-1}(\varphi) \restriction U_i \\
&= \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\mathrm{rg}\;(p^{j-1}(\varphi) \restriction U_i) - \mathrm{rg}\;(p^j(\varphi) \restriction U_i)}_{\text{Grad } p \text{ für } j \leq \alpha_i, \quad 0 \text{ für } j > \alpha_i} \\
&\overset{\text{Satz 21.13}}{=} (D(j) + D(j+1) + \cdots + D(\alpha))\mathrm{Grad}\; p
\end{aligned}$$

23.2 Elementare Divisoren

Definition: Es sei $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$. Ein Unterraum $U \subseteq V$ heißt φ–**irreduzibel**, wenn er φ–invariant ist und keine Zerlegung $U = U_1 \oplus U_2$; U_1, U_2 φ–invariant; $U_1, U_2 \neq \{\mathfrak{o}\}$ zuläßt.

Satz 23.2: U φ–irreduzibel $\iff$ U φ–zyklisch $\wedge$ $m_{\varphi|U} = p^\alpha$, $p \in K[x]$ irreduzibel.

Beweis: Es sei $U = [\mathfrak{a}]_\varphi$, $m_{\varphi,\mathfrak{a}} = p^\alpha$, p irreduzibel.
Annahme: $U = U_1 \oplus U_2$, $U_1, U_2 \neq \{\mathfrak{o}\}$, φ–invariant.
$m_{\varphi|U_i} = p^{\beta_i}$; U_1, U_2 lassen sich nach Satz 23.1 weiter zerlegen.
Widerspruch! zur Eindeutigkeitsaussage in Satz 23.1.

Umkehrung:
Es sei U φ–irreduzibel. Hat $m_{\varphi|U}$ verschiedene irreduzible Faktoren p_1, p_2, dann ist eine Zerlegung nach dem 1. Zerlegungssatz möglich.
Also $m_{\varphi|U} = p^\alpha$. Zerlege nach dem 2. Zerlegungsatz $\Longrightarrow$ U φ–zyklisch.

Satz 23.3: Es sei $m_\varphi = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ die Primpotenzdarstelllung von m_φ. Dann kann V als direkte Summe φ–irreduzibler Unterräume geschrieben werden.
$V = [\mathfrak{a}_1]_\varphi \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{a}_s]_\varphi$
Ist $V = [\mathfrak{a}'_1]_\varphi \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{a}'_t]_\varphi$ eine zweite derartige Darstellung, dann ist $t = s$ und $m_{\varphi,\mathfrak{a}_i} = m_{\varphi,\mathfrak{a}'_i}$ für $i = 1, \ldots, s$ bei geeigneter Nummerierung. Die Polynome $m_{\varphi,\mathfrak{a}_i}$, die die Form $m_{\varphi,\mathfrak{a}_i} = p_\varrho^{\beta_i}$, $0 \leq \beta_i \leq \alpha_\varrho$, haben, heißen die **elementaren Divisoren** von φ.

Beweis: Zusammenfassung des 1. und 2. Zerlegungssatzes

Satz 23.4: Es sei $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$, $m_\varphi = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ Primpotenzdarstellung vom m_φ. Ferner seien $d_1, \ldots, d_s$ die elementaren Divisoren von φ. Dann gilt:

1. $p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ treten unter den elementaren Divisoren auf.

2. $\chi_\varphi = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} d_i, \quad n = \dim V$

Beweis: 1. $m_\varphi = \mathrm{kgV}(d_1, \dots, d_s) \implies p_i^{\alpha_i}$ elementarer Divisor

2. $V = \bigoplus_{i=1}^{s} [\mathfrak{a}_i]_\varphi, \quad m_{\varphi,\mathfrak{a}_i} = d_i$

$\dim[\mathfrak{a}_i]_\varphi = \text{Grad } d_i, \quad d_i | \chi_{\varphi|[\mathfrak{a}_i]_\varphi} \quad \implies \chi_{\varphi|[\mathfrak{a}_i]_\varphi} = \pm d_i$

$$\chi_\varphi = \prod_{i=1}^{s} \chi_{\varphi|[\mathfrak{a}_i]_\varphi} = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} d_i$$

Es wird hier nochmals deutlich: $m_\varphi | \chi_\varphi$

23.3 Normalmatrix

Es sei $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V, \quad V = [\mathfrak{a}]_\varphi, \quad m_\varphi = m_{\varphi,\mathfrak{a}} = p^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}$,
$p(x) = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \dots + a_0$
Bilde die Basis B^* von V wie im Beweis zu Satz 21.13:
(verallgemeinerte φ–zyklische Basis)

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^0\mathfrak{a}\,, & \varphi^1\mathfrak{a}\,, \dots, & \varphi^{q-1}\mathfrak{a} \\
p(\varphi)\mathfrak{a}\,, & \varphi^1 p(\varphi)\mathfrak{a}\,, \dots, & \varphi^{q-1}p(\varphi)\mathfrak{a} \\
p^2(\varphi)\mathfrak{a}\,, & \varphi^1 p^2(\varphi)\mathfrak{a}\,, \dots, & \varphi^{q-1}p^2(\varphi)\mathfrak{a} \\
\dots & \dots & \dots \\
p^{\alpha-1}(\varphi)\mathfrak{a}\,, & \varphi^1 p^{\alpha-1}(\varphi)\mathfrak{a}\,, \dots, & \varphi^{q-1}p^{\alpha-1}(\varphi)\mathfrak{a}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
p^{j+1}(\varphi) &= p(\varphi) \circ p^j(\varphi) = (\varphi^q + a_{q-1}\varphi^{q-1} + \dots + a_0) \circ p^j(\varphi) \\
&= \varphi^q p^j(\varphi) + a_{q-1}\varphi^{q-1}p^j(\varphi) + \dots + a_0 p^j(\varphi) \\
\varphi^q p^j(\varphi)\mathfrak{a} &= \underbrace{p^{j+1}(\varphi)}_{\mathfrak{o} \text{ für } j=\alpha-1}\mathfrak{a} - a_{q-1}\varphi^{q-1}p^j(\varphi)\mathfrak{a} - \dots - a_0 p^j(\varphi)\mathfrak{a}
\end{aligned}$$

Wir bestimmen $M(\varphi, B^*)$:

$$\begin{pmatrix}
0 & & & & -a_0 & & & & & & & \\
1 & 0 & & & -a_1 & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & \vdots & & & & & & & \\
& & 1 & 0 & -a_{q-2} & & & & & & & \\
& & & 1 & -a_{q-1} & & & & & & & \\
& & & & 1 & 0 & & & & -a_0 & & \\
& & & & & 1 & 0 & & & -a_1 & & \\
& & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & & \\
& & & & & & & 1 & 0 & -a_{q-2} & & \\
& & & & & & & & 1 & -a_{q-1} & & \\
& & & & & & & & & 1 & \ddots & \\
& & & & & & & & & & & \ddots
\end{pmatrix}$$

$$M(p) = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{q-2} \\ & & & 1 & -a_{q-1} \end{pmatrix} \qquad \textbf{Begleitmatrix des Polynoms } p$$

$$M(\varphi, B^*) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{M(p)}} & & & & \\ {}_1 & \boxed{\mathrm{M(p)}} & & & \\ & {}_1 & \boxed{\mathrm{M(p)}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & {}_1 & \boxed{\mathrm{M(p)}} \end{pmatrix} = M^*(p^\alpha)$$

verallgemeinerte Begleitmatrix von p^α.
$M(p), M^*(p^\alpha)$ werden besonders einfach, wenn $p = x - \lambda$ linear ist. $M(x - \lambda) = \lambda$

$$M^*((x-\lambda)^\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \alpha \times \alpha \textbf{ Jordan–Block}$$

Es sei jetzt V beliebig, $\dim V = n < \infty$,
$d_1, \dots, d_s$ seien die elementaren Divisoren von $\varphi \in \operatorname{Hom} V$.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} [\mathfrak{a}_i]_\varphi, \quad m_{\varphi,\mathfrak{a}_i} = d_i = p_i^{\beta_i}$$

Wähle in jedem Unterraum $[\mathfrak{a}_i]_\varphi$ eine Basis B_i^* wie oben. Bilde die Basis $B^* = \bigcup_{i=1}^{s} B_i^*$ von V.

$$M(\varphi, B^*) = \begin{pmatrix} \boxed{M^*(d_1)} & & & \\ & \boxed{M^*(d_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{M^*(d_s)} \end{pmatrix}$$

$M(\varphi, B^*)$ heißt die allgemeine **Normalmatrix** von φ (Normalform der Matrix von φ). Zerfällt m_φ in lauter Linearfaktoren, dann sind alle Matrizen $M^*(d_i)$ JORDAN–Blöcke.
Man nennt dann $M(\varphi, B^*)$ die **Jordansche Normalform** der Matrix von φ.
z.B. existiert über $\mathbb{C}$ stets die JORDANsche Normalform.
Die Normalmatrix ist bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig bestimmt.

Definition: Es sei $A \in K^{n \times n}$, $\quad \varphi_A : K_n \to K_n$, $\quad \varphi_A \mathfrak{x} = A\mathfrak{x}$.
Die elementaren Divisoren von A sind die elementaren Divisoren von φ_A. Die Normalmatrix von A ist die Normalmatrix von φ_A.

Satz 23.5: Matrizen A_1, A_2 sind genau dann ähnlich, wenn sie dieselben elementaren Divisoren bzw. dieselben Normalmatrizen (bis auf die Reihenfolge der Blöcke) haben.

Beweis: Normalmatrix und elementare Divisoren bestimmen sich gegenseitig eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Blöcke bzw. Divisoren).
Wir zeigen: A_1, A_2 haben dieselben elementaren Divisoren $\iff$ A_1, A_2 ähnlich.
Es sei $\varphi_1 = \varphi_{A_1}, \quad \varphi_2 = \varphi_{A_2}, \quad B$ Standardbasis von K_n,
$M(\varphi_1, B) = A_1, \quad M(\varphi_2, B) = A_2$.

1. A_1, A_2 haben dieselben elementaren Divisoren.
   A ist gemeinsame Normalmatrix.
   Es gibt Basen B_1, B_2 mit $M(\varphi_1, B_1) = A = M(\varphi_2, B_2)$
   $\Longrightarrow$ A ähnlich zu A_1, A ähnlich zu A_2 $\Longrightarrow$ A_1 ähnlich zu A_2.
2. Es sei A_1 ähnlich zu A_2; $\quad A_2 = SA_1S^{-1}$, $S \in GL(n, K)$.
   Es sei $\sigma \in \operatorname{Hom} K_n, \quad \sigma\mathfrak{x} = S\mathfrak{x}$.
   Dann ist $\varphi_2 = \sigma\varphi_1\sigma^{-1}$.
   Es sei $K_n = [\mathfrak{a}_1]_{\varphi_1} \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{a}_s]_{\varphi_1}$ direkte Summe φ_1–irreduzibler Unterräume.
   $m_{\varphi_1,\mathfrak{a}_1}, \ldots, m_{\varphi_1,\mathfrak{a}_s}$ elementare Divisoren von φ_1.
   Übung: $\sigma(K_n) = K_n = \sigma([\mathfrak{a}_1]_{\varphi_1}) \oplus \cdots \oplus \sigma([\mathfrak{a}_s]_{\varphi_1})$
   Übung: $K_n = [\sigma\mathfrak{a}_1]_{\varphi_2} \oplus \cdots \oplus [\sigma\mathfrak{a}_s]_{\varphi_2}$
   Dabei ist $m_{\varphi_1,\mathfrak{a}_1} = m_{\varphi_2,\sigma\mathfrak{a}_1}$. Also haben φ_1, φ_2 und damit A_1, A_2 dieselben elementaren Divisoren.

Folgerung: Es sei $\varphi \in \operatorname{Hom} V, \quad B$ Basis von $V, \quad M(\varphi, B) = A$.
Dann haben φ und A dieselben elementaren Divisoren.

Beweis: Man kann voraussetzen, daß A Normalmatrix ist.

23.4 Beispielaufgaben

Man bestimme die Normalmatrix A' der folgenden Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und eine Matrix $S \in$GL$(4, \mathbb{R})$ mit $A' = S^{-1}AS$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\varphi = \varphi_A : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_4, \quad B$ Standardbasis von $\mathbb{R}_4, \quad M(\varphi, B) = A$.
m_φ wurde in Kapitel 21 bestimmt:

$m_\varphi = x^3 - 3x - 2 = (x^2 - x - 2)(x + 1) = (x - 2)(x + 1)^2$

m_φ zerfällt in Linearfaktoren. A' ist eine JORDANsche Normalform.
$x - 2, (x + 1)^2$ sind elementare Divisoren.
χ_φ ist Produkt der elementaren Divisoren und hat den Grad 4.
Also fehlt noch ein elementarer Divisor $x - 2$ oder $x + 1$.

Wir bestimmen die Häufigkeit des elementaren Divisors $x-2$ mit der Formel aus dem 2. Zerlegungssatz.

$$D(j)+D(j+1)+\cdots+D(\alpha)=\frac{1}{\text{Grad }p}(\text{rg }p^{j-1}(\varphi)-\text{rg }p^{j}(\varphi))$$

Dabei arbeiten wir in Kern $(\varphi-2)=E_2$; $\quad$ $\dim E_2=1$ siehe unten.
$p(x)=x-2$, $\alpha=1=j$.

$D(1)=\text{rg }p^0(\varphi)-\text{rg }p^1(\varphi)=\dim E_2-\dim\{\mathfrak{o}\}=1-0=1$

$\varphi-2$ hat die Matrix $A-2I$.

$$\begin{array}{rrrr|ccc}
-1 & 0 & 2 & 0 & (-2) & (-5) & (-1)\\
1 & -3 & 1 & 0 & \leftarrow & | & |\\
-2 & 0 & -5 & 0 & & \leftarrow & |\\
-5 & 3 & -2 & 0 & & & \leftarrow\\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & & & \\
0 & -3 & 3 & 0 & (-\frac{1}{3}) & & \\
0 & 0 & -9 & 0 & | & \cdot(-\frac{1}{9}) & \\
0 & 3 & -12 & 0 & \leftarrow & & \\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & & \leftarrow & \\
0 & 1 & -1 & 0 & \leftarrow & | & \\
0 & 0 & 1 & 0 & (1) & (2) & (9)\\
0 & 0 & -9 & 0 & & & \leftarrow\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
\hline
\end{array}$$

Elementare Zeilenumformungen

$\dim E_2=1$; $\quad D(1)=1 \implies x+1$ ist elementarer Divisor. $E_2=\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$.

Dies kann auch aus einer Übungsaufgabe geschlossen werden.
Elementare Divisoren: $x-2, x+1, (x+1)^2$

$$A'=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

Wir bestimmen eine Basis B' mit $M(\varphi,B')=A'$; $\quad A'=S^{-1}AS$.
S ist Matrix der Basistransformation $B\to B'$. Die Spaltenvektoren von S sind die Vektoren aus B'.

$\mathbb{R}_4=[\mathfrak{a}_1]_\varphi\oplus[\mathfrak{a}_2]_\varphi\oplus[\mathfrak{a}_3]_\varphi$

$m_{\varphi,\mathfrak{a}_1}=x-2,\quad m_{\varphi,\mathfrak{a}_2}=x+1,\quad m_{\varphi,\mathfrak{a}_3}=(x+1)^2$

1. Zerlegungssatz:
$[\mathfrak{a}_1]_\varphi=\text{Kern }(\varphi-2)=E_2,$

$[\mathfrak{a}_2]_\varphi \oplus [\mathfrak{a}_3]_\varphi = \text{Kern }(\varphi+1)^2$

$\dim\,[\mathfrak{a}_1]_\varphi = \text{Grad } m_{\varphi,\mathfrak{a}_1} = 1$

Man nehme für $\mathfrak{a}_1$ einen beliebigen Eigenvektor zum Eigenwert 2. Wir haben bereits elementare Zeilenumformungen der Matrix $A-2I$ von $\varphi-2$ durchgeführt.

$$E_2 = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right], \quad \mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Wir bestimmen eine Basis von Kern $(\varphi+1) = E_{-1}$

$(\varphi+1)\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \iff (A+E)\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$

$$\begin{array}{rrrr|ccc}
2 & 0 & 2 & 0 & \leftarrow & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & (-2) & (2) & (5) \\
-2 & 0 & -2 & 0 & & \leftarrow & | \\
-5 & 3 & -2 & 3 & & & \leftarrow \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 3 & 3 & 3 & \cdot(\frac{1}{3}) & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Kern }(\varphi+1) = [\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\mathfrak{x}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\mathfrak{x}_2}]$$

Wir bestimmen eine Basis von Kern $(\varphi+1)^2$.

$$\begin{pmatrix}2&0&2&0\\1&0&1&0\\-2&0&-2&0\\-5&3&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2&0\\1&0&1&0\\-2&0&-2&0\\-5&3&-2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-18&9&-9&9\end{pmatrix} \quad \cdot\left(-\frac{1}{18}\right)$$

$$\begin{array}{cccc}
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\mathfrak{y}_1' = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathfrak{y}_2' = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathfrak{y}_3' = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{Kern }(\varphi+1)^2 = [\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}}_{\mathfrak{y}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\0\end{pmatrix}}_{\mathfrak{y}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}}_{\mathfrak{y}_3}]$$

Kern $(\varphi+1) \subsetneqq$ Kern $(\varphi+1)^2$, $\quad \mathfrak{a}_3 \in$ Kern $(\varphi+1)^2 \setminus$ Kern $(\varphi+1)$

$$(\varphi+1)\mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -2 & 0\\ -5 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix} \neq \mathfrak{o}$$

$\mathfrak{y}_1 \in$ Kern $(\varphi+1)^2 \setminus$ Kern $\varphi+1$, $\quad m_{\varphi,\mathfrak{y}_1} = (x+1)^2$. Setze $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{y}_1$.

$$(\varphi+1)\mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix} \in \text{Kern }(\varphi+1), \quad (\varphi+1)\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix} = (\varphi+1)^2\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{o}.$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix} = \lambda\mathfrak{x}_1 + \mu\mathfrak{x}_2 = (-2)\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_1\}$ Basis von Kern $(\varphi+1)^2$
$\{\mathfrak{x}_1, (\varphi+1)\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_1\}$ Basis von Kern $(\varphi+1)^2$, Austauschsatz.

$$\text{Kern }(\varphi+1)^2 = \underbrace{[\mathfrak{x}_1]}_{[\mathfrak{x}_1]_\varphi = [\mathfrak{a}_2]_\varphi} \oplus \underbrace{[\mathfrak{y}_1, (\varphi+1)\mathfrak{y}_1]}_{\text{Basis } B^* \text{ von } [\mathfrak{y}_1]_\varphi = [\mathfrak{a}_3]_\varphi}$$

$$B' = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, (\varphi+1)\mathfrak{a}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Systeme linearer Differentialgleichungen
$y_1, \ldots, y_n;\ b_1, \ldots, b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned}$$

Anfangsbedingung: $y_1(0) = \alpha_1, \quad y_n(0) = \alpha_n$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathfrak{y}$ gesucht.

Gegeben: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Matrixform des Systems: $\mathfrak{y}' = A\mathfrak{y} + \mathfrak{b}$

Transformation des Systems: $\mathfrak{y} = S\mathfrak{z}, \quad S \in GL(n, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

$$\mathfrak{y}' = S\mathfrak{z}' = AS\mathfrak{z} + \mathfrak{b} \implies \mathfrak{z}' = \underbrace{S^{-1}AS}_{\widetilde{A}}\mathfrak{z} + \underbrace{S^{-1}\mathfrak{b}}_{\widetilde{\mathfrak{b}}}$$

$\mathfrak{z}' = \widetilde{A}\mathfrak{z} + \widetilde{\mathfrak{b}}$

Wähle S so, daß $\widetilde{A}$ Normalform hat.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} y_1' = \lambda_1 y_1 + b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = \lambda_n y_n + b_n \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rcrcl} y_1' &=& & + \lambda y_1 + b_1 & \implies y_1 \\ y_2' &=& y_1 & + \lambda y_2 + b_2 & \implies y_2 \\ \dots & & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ y_n' &=& y_{n-1} & + \lambda y_n + b_n & \implies y_n \end{array}$$

Kapitel 24

Lineare Differenzengleichungen

24.1 Differenzenoperator

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$,
$\mathcal{F} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} = \{f | f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}\}, \quad f = (f(0), f(1), \dots)$,
$\mathcal{F}$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$.
Differenzenoperator $\Delta \in \operatorname{Hom} \mathcal{F}$:

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Homogenes System linearer Differenzengleichungen:

$$\begin{array}{rcccccccl}
\Delta f_1 & = & a_{11} f_1 & + & \dots & + & a_{1n} f_n & & \\
\Delta f_2 & = & a_{21} f_1 & + & \dots & + & a_{2n} f_n & & f_i \in \mathcal{F} \\
\multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & & a_{ij} \in \mathbb{C} \\
\Delta f_n & = & a_{n1} f_1 & + & \dots & + & a_{nn} f_n & &
\end{array}$$

$\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathfrak{f} = A\mathfrak{f}$ Matrixform des Systems.

$\Delta\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{pmatrix}; \quad \Delta$ kann als Endomorphismus von $\mathcal{F}^n$ aufgefaßt werden.

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von $\Delta\mathfrak{f} = A\mathfrak{f}$ ist Unterraum von $\mathcal{F}^n$
$\dim \mathcal{F}^n = n \cdot \dim \mathcal{F} = \infty$.

Satz 24.1: Das System $\Delta\mathfrak{f} = A\mathfrak{f}$ hat zu vorgegebenem Anfangswert

$$\mathfrak{f}(0) = \begin{pmatrix} f_1(0) \\ \vdots \\ f_n(0) \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung, nämlich $\mathfrak{f}(k) = (A + I)^k \mathfrak{f}(0)$.
Es ist $\dim \mathcal{L} = n$.

Beweis: $\Delta\mathfrak{f}(k) = \mathfrak{f}(k+1) - \mathfrak{f}(k) = A\mathfrak{f}(k)$,
$\mathfrak{f}(k+1) = (A+I)\mathfrak{f}(k), \quad k = 0, 1, \ldots$
$\Longrightarrow \mathfrak{f}(k) = (A+I)^k \mathfrak{f}(0)$.
Definiere $\sigma : \mathcal{L} \to \mathbb{C}^n, \quad \sigma(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}(0)$
σ ist linear und bijektiv. $\mathcal{L} \simeq \mathbb{C}^n, \quad \dim \mathcal{L} = n$.

Satz 24.2: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

eine JORDAN–Matrix. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
Die eindeutig bestimmte Lösung von $\Delta\mathfrak{f} = A\mathfrak{f}$ zu vorgegebenem $\mathfrak{f}(0)$ ist

$$f_m(k) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{k}{j} (\lambda+1)^{k-j} f_{m-j}(0), \quad m = 1, \ldots, n.$$

Für $\lambda \neq -1$ ist $f_m(k) = p_m(k)(\lambda+1)^k, \quad p_m \in \mathbb{C}[x]$,
Grad $p_m \leq m-1 \leq n-1$.

Beweis:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

$$N^j = (j+1) \to \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ 1 & & \ddots & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^n = \mathfrak{o}$$

$(N^j)_m$ m–te Zeile von N^j, $(N^j)_m = \mathfrak{o}$ für $m \leq j$.
Satz 24.1: $\mathfrak{f}(k) = (A+I)^k\mathfrak{f}(0) + ((\lambda+1)I + N)^k \mathfrak{f}(0)$
Binomischer Satz:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^{k-j} N^j \mathfrak{f}(0) \\ f_m(k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^{k-j} (N^j)_m \mathfrak{f}(0) \end{aligned}$$

Es genügt die Summe bis $j = m-1$ zu erstrecken.
Für $m > j$ ist $(N^j)_m\mathfrak{f}(0) = f_{m-j}(0)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow f_m(k) &= \sum_{j=0}^{m-1}\binom{k}{j}(\lambda+1)^{k-j}f_{m-j}(0)\\ &= \underbrace{(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f_{m-j}(0)}{j!(\lambda+1)^j}k(k-1)\cdots(k-j+1))}_{p_m(k)}(\lambda+1)^k\end{aligned}$$

Grad $p_m \leq m-1$

Satz 24.3: Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $m_A = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(x-\lambda_r)^{\alpha_r}$, $\quad \lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.
Dann hat jede Lösung von $\Delta\mathfrak{f} = A\mathfrak{f}$ die Form

$$f_m(k) = \sum_{j=1}^{r} p_{m,j}(k)(\lambda_j+1)^k, \quad m = 1,\ldots,n, \quad \text{Grad } p_{m,j} \leq \alpha_j - 1$$

Beweis: Es sei A' die Normalmatrix von A.

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_t}\end{pmatrix}, \qquad A_i = \begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{pmatrix} \qquad \text{JORDAN–Block}$$

$A' = S^{-1}AS, \quad S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}(n,K)$.

Transformiere: $\mathfrak{f} = S\mathfrak{z}, \quad \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} \in \mathcal{F}^n, \quad \mathfrak{z} = S^{-1}\mathfrak{f},$

$\Delta\mathfrak{z} = S^{-1}\Delta\mathfrak{f} = S^{-1}A\mathfrak{f} = S^{-1}AS\mathfrak{z} = A'\mathfrak{z}; \quad \Delta\mathfrak{z} = A'\mathfrak{z}$

Löse dieses System blockweise.

$\Delta\mathfrak{z}^{(i)} = A_i\mathfrak{z}^{(i)}, \quad m_{A_i} = (x-\lambda_{q_i})^{\beta_i}, \quad \beta_i \leq \alpha_{q_i},$

$\beta_i = \alpha_{q_i}$ wird für ein i angenommen, Satz 23.4,

$$\mathfrak{z}^{(i)} = \begin{pmatrix} z_1^{(1)}\\ \vdots\\ z_{\beta_i}^{(i)}\end{pmatrix}$$

Satz 24.2: $z_\mu^{(i)} = p_\mu^{(i)}(k)(\lambda_{q_i}+1)^k, \quad \text{Grad } p_\mu^{(i)} \leq \beta_i - 1 \leq \alpha_{q_i} - 1, \quad \mu = 1,\ldots,\beta_i$

$\mathfrak{f} = S\mathfrak{z}, \quad S = (s_{ij})$

$$f_m = \sum_{u=1}^{n} s_{m,u}z_u = \sum_{j=1}^{r} p_{m,j}(k)(\lambda_j+1)^k, \quad \text{Grad } p_{m,j} \leq \alpha_{j-1}$$

24.2 Lineare Rekursion der Ordnung n

$$f(k+n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f(k+j) = a_{n-1}f(k+n-1) + \cdots + a_0 f(k), \quad a_0 \neq 0$$

$f(0), f(1), \ldots, f(n-1)$ bestimmen f eindeutig. Lösungsraum $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$.

$g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ seien die Lösungen zu den Anfangswerten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann ist $f = f(0)g_0 + f(1)g_1 + \cdots + f(n-1)g_{n-1} \implies \dim \mathcal{L} = n$.
Das charakteristische Polynom der Rekursion $(*)$:

$\chi(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0$

Satz 24.4: Es sei $\chi(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x-\lambda_r)^{\alpha_r}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$
Dann hat jede Lösung von $(*)$ die Form

$$f(k) = \sum_{j=1}^{r} p_j(k)\lambda_j^k, \quad \text{Grad } p_j \leq \alpha_j - 1 \quad (\text{allgemeine Lösung von } (*))$$

$k^0\lambda_j^k, k^1\lambda_j^k, \ldots, k^{\alpha_j-1}\lambda_j^k, \quad j = 1, \ldots, r$ bilden eine Basis von $\mathcal{L}$.

Beweis: Setze $f_1(k) = f(k), f_2(k) = f(k+1), \ldots, f_n(k) = f(k+n-1)$.

$m < n: \quad \Delta f_m(k) = f_m(k+1) - f_m(k) = f_{m+1}(k) - f_m(k)$ für alle k.

(1) $\quad \Delta f_m = f_{m+1} - f_m$

$$\Delta f_n(k) = \underbrace{f_n(k+1)}_{f(k+n)=a_0f(k)+\cdots+a_{n-1}f(k+n-1)=a_0f_1(k)+\cdots+a_{n-1}f_n(k)} - f_n(k)$$

(2) $\quad \Delta f_n = a_0f_1 + a_1f_2 + \cdots + a_{n-2}f_{n-1} + (a_{n-1}-1)f_n$

(1), (2) bilden ein System von Differenzengleichungen für $\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathfrak{f} = A\mathfrak{f}$.

Wir bestimmen $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & (a_{n-1}-1) \end{pmatrix} \qquad m_A(x) = m_{A^T}(x)$

$\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ Standardbasis von $\mathbb{C}^n$.
$(A^T)^j\mathfrak{e}_1$ hat eine 1 in der Position $j+1$, danach lauter Nullen ($j \leq n-1$).
$\implies (A^T)^0\mathfrak{e}_1, \ldots, (A^T)^{n-1}\mathfrak{e}_1$ sind linear unabhängig.

$\Longrightarrow$ Grad $m_{A^T} = n, \quad m_{A^T} = \pm\chi_{A^T}$.
Es sei $x = y - 1$

$$\chi_{A^T}(x) = \chi_{A^T}(y-1) = \begin{vmatrix} -y & & & a_0 \\ 1 & -y & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} - y \end{vmatrix}$$

Das ist das charakteristische Polynom der Begleitmatrix von $\chi(x)$.
$\Longrightarrow \chi_{A^T}(x) = \pm\chi(y) = \pm\chi(x+1)$
$\Longrightarrow m_A(x) = (x+1)^n - a_{n-1}(x+1)^{n-1} - \cdots - a_0$,
ist normiertes Polynom mit $a_0 \neq 0$, $\Longrightarrow$ -1 ist keine Nullstelle.
$m_A(x) = (x - (\lambda_1 - 1))^{\alpha_1} \cdots (x - (\lambda_r - 1))^{\alpha_r}$

Satz 24.3: $f(k) = f_1(k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} p_j(k)\lambda_j^k, \quad$ Grad $p_j \leq \alpha_j - 1$

f ist Linearkombination von $k^0\lambda_j^k, k^1\lambda_j^k, \ldots, k^{\alpha_j - 1}\lambda_j^k, \quad j = 1, \ldots, r$
Das sind $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n$ Funktionen. Sie spannen einen Unterraum $U \subseteq \mathcal{F}$ auf.
dim $U \leq n$.
$\mathcal{L} \subseteq U, \quad \dim \mathcal{L} = n \Longrightarrow \mathcal{L} = U, \quad \dim U = n$
Die angegebenen Funktionen sind eine Basis von $\mathcal{L}$.

24.3 Beispiele

Beispiel: Fibonacci–Folge:

$$f(k+2) = f(k+1) + f(k), \qquad f(0) = f(1) = 1$$

$\chi(x) = x^2 - x - 1$.
Nullstellen: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$
$\chi(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$
Allgemeine Lösung der Rekursion: $f(k) = a_1\lambda_1^k + a_2\lambda_2^k$

$$\begin{array}{rclcll} f(0) & = & a_1 + a_2 & = & 1 & (-\lambda_2) \\ f(1) & = & a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 & = & 1 & \leftarrow \end{array}$$

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 1 - \lambda_2$$

$$a_1 = \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad a_2 = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$$

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{k+1} + \underbrace{\frac{(-1)^k}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{k+1}}_{\to 0}$$

Beispiel: $f(k+2) = \dfrac{1}{2}(f(k+1) + f(k))$

$\chi(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(1 \pm 3), \quad \lambda_1 = 1,\, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$
$f(k) = a_1 + a_2(-\frac{1}{2})^k, \quad \lim\limits_{k\to\infty} f(k) = a_1$

$$\begin{array}{rcll} f(0) & = & a_1 + a_2 & \leftarrow \\ f(1) & = & a_1 - \frac{1}{2}a_2 & (2) \end{array}$$

$3a_1 = f(0) + 2f(1) \implies \lim\limits_{k\to\infty} f(k) = a_1 = \frac{1}{3}(f(0) + 2f(1))$
Anfangswerte rational $\implies$ Grenzwert rational

Beispiel: $f(k+n) = \underbrace{\sum_{j=o}^{n-1} \alpha_j f(k+j)}_{\text{gewichtetes Mittel}}, \quad \alpha_j > 0$ reell , $\quad \sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_j = 1$

$$\chi(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j x^j$$

$$\chi(1) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j = 0$$

$$\chi'(1) = n - \sum_{j=0}^{n-1} j\alpha_j = n\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j - \sum_{j=0}^{n-1} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{(n-j)\alpha_j}_{>0} > 0$$

$\implies \lambda_1 = 1$ ist eine einfache Nullstelle von $\chi(x)$
Wir zeigen: $\chi(\lambda) = 0,\ \lambda \neq 1 \implies |\lambda| < 1$.
Es sei $\chi(\lambda) = 0, \quad |\lambda| \geq 1$.

$$\lambda^n - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda^j = 0$$

$$|\lambda^n| = \left|\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda^j\right| \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j |\lambda|^j \leq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j |\lambda|^{n-1} = |\lambda|^{n-1}$$

$\implies |\lambda| = 1$, Gleichheit in der Dreiecksungleichung
$\implies$ alle Summanden haben die gleiche Richtung (als Vektoren der GAUSSschen Zahlenebene)
$\implies \lambda^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$ haben dieselbe Richtung wie $\lambda^0 = 1$
$\implies \lambda$ positiv reell, $|\lambda| = 1 \implies \lambda = 1$.
Also $\chi(\lambda) = 0,\ \lambda \neq 1 \implies |\lambda| < 1$.
Es sei $\chi(x) = (x-1)(x-\lambda_2)^{\alpha_2} \cdots (x-\lambda_r)^{\alpha_r}$,
$\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j, \quad |\lambda_i| < 1$ für $i > 1$

Allgemeine Lösung:

$$f(k) = a_1 + \sum_{j=2}^{r} p_j(k)\lambda_j^k, \quad \text{Grad } p_j \le \alpha_j - 1$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(k) = a_1$ existiert für alle Lösungen f der Rekursion.
Wir bestimmen a_1 aus den Anfangswerten $f(0),\dots,f(n-1)$.
Definiere $\sigma_1 : \mathbb{C}^n \to \mathcal{L}$ (Lösungsraum)
$\sigma_1(c_0,\dots,c_{n-1}) = f \in \mathcal{L}$ mit $f(0) = c_0,\dots,f(n-1) = c_{n-1}$
σ_1 ist Isomorphismus.
Definiere $\sigma_2 : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$, $\quad \sigma_2(f) = \lim\limits_{k\to\infty} f(k)$; $\quad \sigma_2$ ist linear.

$\sigma = \sigma_2\sigma_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ist Linearform in $\mathbb{C}^n$.
Jede Linearform von $\mathbb{C}^n$ ist inneres Produkt, d.h. es existiert $r_0,\dots,r_{n-1} \in \mathbb{C}$ mit $\sigma(c_0,\dots,c_{n-1}) = r_0c_0 + \dots + r_{n-1}c_{n-1}$ für alle $(c_0,\dots,c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

$$(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j c_j)$$

erzeugt dieselbe Folge bis auf c_0. Diese Folge hat den gleichen Grenzwert.

$$r_0c_0 + \dots r_{n-1}c_{n-1} = r_0c_1 + \dots + r_{n-2}c_{n-1} + r_{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j c_j$$

$c_0(r_0 - \alpha_0 r_{n-1}) + c_1(r_1 - r_0 - \alpha_1 r_{n-1}) + \dots + c_{n-1}(r_{n-1}r_{n-2} - \alpha_{n-1}r_{n-1}) = 0$ für alle $c_0,\dots,c_{n-1} \Longrightarrow$ alle Klammern $= 0$.

$$\begin{array}{rcl}
r_0 &=& \alpha_0 r_{n-1} \\
r_1 &=& r_0 + \alpha_1 r_{n-1} \\
r_2 &=& r_1 + \alpha_2 r_{n-1} \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
r_{n-1} &=& r_{n-2} + \alpha_{n-1} r_{n-1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
r_0 &=& \alpha_0 r_{n-1} \\
r_1 &=& (\alpha_0 + \alpha_1) r_{n-1} \\
r_2 &=& (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) r_{n-1} \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
r_{n-1} &=& \underbrace{(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})}_{1} r_{n-1}
\end{array}$$

Zu den Anfangswerten $1, 1, \dots, 1$ gehört die Lösung $f(k) = 1$ für alle k.
$\Longrightarrow 1 \cdot r_0 + \dots + 1 \cdot r_{n-1} = 1$
Setze $b_j = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_j$, $\quad j = 0, 1, \dots, n-1$, $\quad b_{n-1} = 1$.
$r_j = b_j r_{n-1}$ für $j = 0,\dots,n-1$

$$r_0 + \dots + r_{n-1} = (b_0 + \dots + b_{n-1})r_{n-1} = 1 \Longrightarrow r_{n-1} = \frac{1}{b_0 + \dots + b_{n-1}}$$

$$r_j = \frac{b_j}{b_0 + \dots + b_{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} f(k) &= r_0 f(0) + r_1 f(1) + \dots + r_{n-1} f(n-1) \\
&= \frac{b_0 f(0) + b_1 f(1) + \dots + b_{n-1} f(n-1)}{b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}}
\end{aligned}$$

Spezialfall: $\alpha_j = \frac{1}{n}$ für alle $j = 0, \ldots, n-1$.

$$b_j = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_j = \frac{j+1}{n}$$

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} = \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \frac{1f(0) + 2f(1) + \cdots + nf(n-1)}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1f(0) + 2f(1) + \cdots + nf(n-1)}{1 + 2 + \cdots + n}$$

gewichtetes Mittel der Anfangswerte

Anhang A

Zeichenerklärung

A.1 Griechische Buchstaben

Bezeichnung	Kleinbuchstaben	Großbuchstaben
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ, ε	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ, ϑ	Θ
Jota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Ksi	ξ	Ξ
Omikron	o	O
Pi	π, ϖ	Π
Rho	ρ, ϱ	P
Sigma	σ, ς	Σ
Tau	τ	T
Ypsilon	υ	Υ
Phi	ϕ, φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

A.2 Vektorzeichen

mit Pfeil	Frakturschrift	Deutsche Schrift
$\vec{a}$	$\mathfrak{a}$	
$\vec{b}$	$\mathfrak{b}$	
$\vec{c}$	$\mathfrak{c}$	
$\vec{d}$	$\mathfrak{d}$	
$\vec{e}$	$\mathfrak{e}$	
$\vec{f}$	$\mathfrak{f}$	
$\vec{g}$	$\mathfrak{g}$	
$\vec{h}$	$\mathfrak{h}$	
$\vec{i}$	$\mathfrak{i}$	
$\vec{j}$	$\mathfrak{j}$	
$\vec{k}$	$\mathfrak{k}$	
$\vec{l}$	$\mathfrak{l}$	
$\vec{m}$	$\mathfrak{m}$	
$\vec{n}$	$\mathfrak{n}$	
$\vec{o}$	$\mathfrak{o}$	
$\vec{p}$	$\mathfrak{p}$	
$\vec{q}$	$\mathfrak{q}$	
$\vec{r}$	$\mathfrak{r}$	
$\vec{s}$	$\mathfrak{s}$	
$\vec{t}$	$\mathfrak{t}$	
$\vec{u}$	$\mathfrak{u}$	
$\vec{v}$	$\mathfrak{v}$	
$\vec{w}$	$\mathfrak{w}$	
$\vec{x}$	$\mathfrak{x}$	
$\vec{y}$	$\mathfrak{y}$	
$\vec{z}$	$\mathfrak{z}$	
$\vec{0}$	$\mathfrak{0}$	

Anhang B

Hilfestellungen

In diesem Kapitel folgen Kurzübersichten aus wichtigen Sätzen und Definitionen sowie Lösungsverfahren aus den Vorlesungen Lineare Algebra 1 und 2 sowie eine Quadrikenliste, die als Hilfestellung für das Lösen der Hausaufgaben und Klausuren gedacht sind.
Bei den Klausuren zur Linearen Algebra 1 bzw. 2 ist das Mitbringen eines beidseitig beschriebenen DIN A4 – Zettels und der Quadrikenliste erlaubt. Die Kurzübersichten in diesem Kapitel können als Grundlage für solche Klausurzettel dienen. Wir empfehlen jedoch jedem Studenten dringend, den eigenen Zettel selbst zu erarbeiten.
Allein mit diesen Übersichten sind die Klausuren nicht zu lösen. Ein Verständnis sollte zumindest in Ansätzen vorhanden sein.
Der Inhalt dieser Übersichten darf keinesfalls als Hinweis auf mögliche Aufgabenstellungen der Klausuren gewertet werden.

WICHTIGER HINWEIS:
Die Aussage im Impressum über Nichthaftung für Fehler gilt insbesondere für diese von uns erstellten Übersichten.

B.1 Lineare Algebra 1 - Übersicht

Abbildungen: f: $A \to B$
surjektiv: Bild $f = B$
injektiv: $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ bzw. $f(x) = f(y) \implies x = y$
bijektiv: surjektiv und injektiv

Gruppe
Halbgruppe: algebraische Struktur mit assoziativer Verknüpfung
abelsche Halbgruppe: Halbgruppe mit kommutativer Verknüpfung
Monoid: Halbgruppe mit neutralem Element (multiplikative Schreibweise)
Gruppe: Halbgruppe mit neutralem Element; zu jedem Element existiert ein Inverses
abelsche Gruppe: Gruppe mit kommutativer Verknüpfung

Untergruppenkriterium
$\forall a, b \in U \implies a \cdot b \in U; \quad e \in U; \quad \forall a \in U \implies a^{-1} \in U$

Ring $(R, +, \cdot)$ — Körper $(K, +, \cdot)$
Ring: algebraische Struktur mit $(R, +)$ abelsche Gruppe, $(R, \cdot)$ Halbgruppe und Gültigkeit der Distributivgesetzte
Körper:$(K, +, \cdot)$ Ring mit $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe

Vektorraum V über K $(V, K, \cdot)$
$(V, +)$ abelsche Gruppe, $(K, +, \cdot)$ Körper, Skalarmultiplikation $\cdot : K \times V \to V$; $(\lambda, \mathfrak{a}) \mapsto \lambda\mathfrak{a}$ mit folgenden Axiomen: (wobei $\lambda, \mu \in K$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$)
$(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathfrak{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathfrak{a})$;
$(\lambda + \mu) \cdot \mathfrak{a} = \lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{a}$; $\qquad \lambda \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda \cdot \mathfrak{a} + \lambda \cdot \mathfrak{b}$;
$1 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$
Unterraumkriterium: $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U$; $\forall \lambda, \mu \in K \implies \lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b} \in U$

Austauschsatz von Steinitz
$B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis; $\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{b}_n$; $\lambda_1 \neq 0 \implies B' = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$ Basis

lineare Abbildungen
Homomorphismus: lineare Abbildung
f: $V \to V'$ mit $f(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}) = \lambda f(\mathfrak{a}) + \mu f(\mathfrak{b}) \quad \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V, \lambda, \mu \in K$
Endomorphismus: Homomorphismus $V \to V$
Isomorphismus: bijektiver Homomorphismus
Automorphismus: bijektiver Endomorphismus

Regeln zu linearen Abbildungen
Sei $M \subseteq V$, dann $f[M] = [f(M)]$.
$\dim \text{Bild } f = \dim V - \dim \text{Kern } f$; $\quad \text{def } f = \dim \text{Kern } f$; $\quad \text{rg } f = \dim \text{Bild } f$
$\dim V = \dim V' < \infty \implies (f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv})$

Matrizen
A symmetrisch: $A^T = A$; $\quad A$ schiefsymmetrisch: $A^T = -A$
$(A + B)^T = A^T + B^T$; $\quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
A regulär = A invertierbar
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar $\implies \overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$
Rang: rg A = maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilen bzw. Spalten
$A \in K^{n \times n}$ invertierbar $\iff \text{rg } A = n \iff \det A \neq 0$

Basistransformation
$M(f, B_2, B_2') = \underbrace{M(\mathrm{id}_{V'}, B_1', B_2')}_{M(\mathrm{id}_{V'}, B_2', B_1')^{-1}} \cdot M(f, B_1, B_1') \cdot M(\mathrm{id}_V, B_2, B_1)$
mit $M(\mathrm{id}_V, B_2, B_1)$ Matrix der Basistransformation $B_1 \to B_2$
In den Spalten stehen die Koordinaten der Vektoren von B_2 bzgl. B_1.
$M(f, B', B)$ enthält in der j-ten Spalte die Koordinaten von $f(\mathfrak{b}_j')$ bzgl. B.

Determinanten
$\det I = 1$; $\det A = \det A^T$; $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ für $A \in K^{n\times n}$
$\det A = (-1)^j \det A'$, wobei A' aus A durch Vertauschen von j Zeilen oder Spalten entsteht
$\det(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0 \iff \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ linear abhängig
$\det A \neq 0 \iff \mathrm{rg}\, A = n \iff A$ invertierbar
$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$; $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$; $\det(A^\alpha) = (\det A)^\alpha$; $\alpha \in \mathbb{N}$
B Dreiecksmatrix $\implies \det B = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn}$
$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2$

Entwicklung nach der i-ten Zeile (Spalte analog):
$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}\ \mathrm{Adj}(i,j)$; $\mathrm{Adj}(i,j) := (-1)^{i+j} \det A'$,
wobei A' aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Cramersche Regel
$A \in K^{n\times n}$ regulär; $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$; $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$; $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$
$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & b_1 & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & b_n & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$; $\mathfrak{b}$ statt i-ter Spalte

Skalarprodukt $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit β: $V \times V \to \mathbb{R}$
Vorrausetzungen:
β linear in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, d.h. $\beta(\lambda\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \lambda\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{x}, \lambda\mathfrak{y})$ $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$; $\lambda \in \mathbb{R}$
β symmetrisch, d.h. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$ $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$
β positiv definit, d.h. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geq 0$ $\forall \mathfrak{x} \in V$; $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0 \iff \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$
$A = M(\beta, B)$ mit $a_{ij} = \beta(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j)$ $(i, j = 1, \dots, n)$ ist die Matrix von β bzgl. $B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$.
$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_i \sum_j x_i a_{ij} y_j = \mathfrak{x} A \mathfrak{y}$ ($\mathfrak{x}$ als Zeilen-, $\mathfrak{y}$ als Spaltenvektor bzgl. B)

Hermitesche Form $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit β: $V \times V \to \mathbb{C}$ (V ist komplexer Vektorraum)
Vorrausetzungen:
β linear in $\mathfrak{x}$, d.h. $\beta(\lambda\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \lambda\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$; $\lambda \in \mathbb{C}$
$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \overline{\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})}$ $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$

Skalarprodukt $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit β: $V \times V \to \mathbb{C}$ zusätzlich:
β positiv definit, d.h. $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geq 0$ $\forall \mathfrak{x} \in V$; $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0 \iff \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$
$A = M(\beta, B)$ mit $a_{ij} = \beta(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j)$ $(i, j = 1, \dots, n)$ ist die Matrix von β bzgl. $B = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$.
$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_i \sum_j x_i a_{ij} \overline{y_j} = \mathfrak{x} A \overline{\mathfrak{y}}$ ($\mathfrak{x}$ als Zeilen-, $\mathfrak{y}$ als Spaltenvektor bzgl. B)

Norm: $\|\mathfrak{x}\| := \sqrt{\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})}$
$\|\mathfrak{x}\| \geq 0$; $\|\mathfrak{x}\| = 0 \iff \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$; $\|\lambda\mathfrak{x}\| = |\lambda|\, \|\mathfrak{x}\|$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (V euklidisch/unitär)
$|\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}| \leq \|\mathfrak{x}\| \cdot \|\mathfrak{y}\|$ $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$; $|\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}| = \|\mathfrak{x}\| \cdot \|\mathfrak{y}\| \iff \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ linear abhängig

Dreiecksungleichung (V euklidisch/unitär)
$\|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\| \leq \|\mathfrak{x}\| + \|\mathfrak{y}\|$ $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$; $\|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\| = \|\mathfrak{x}\| + \|\mathfrak{y}\| \iff \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \vee \mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y}$; $\lambda \geq 0$

orthogonale Vektoren: $\mathfrak{x}\perp\mathfrak{y}$, falls $\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=0$
Orthogonalsystem: System aus paarweise orthogonalen Vektoren
Orthonormalsystem: Orthogonalsystem aus Einheitsvektoren
Orthonormalbasis: Basis aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren

Orthonormalisierungsverfahren
$U=[\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n]$ endlich oder abzählbar
$\mathfrak{b}_1=\frac{\mathfrak{a}_1}{\|\mathfrak{a}_1\|}$; $\quad \mathfrak{b}_i'=\mathfrak{a}_i-\sum_{j=1}^{i-1}(\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_j)\mathfrak{b}_j$; $\quad \mathfrak{b}_i=\frac{\mathfrak{b}_i'}{\|\mathfrak{b}_i'\|}$; $\quad i=2,\ldots,n$

QR*-Zerlegung der Matrix *A
in Q orthogonale bzw. unitäre Matrix und R obere Dreiecksmatrix:
Orthonormalisiere die Spalten von A bzgl. des Standardskalarproduktes und trage diese in die Spalten von Q ein. R hat als Spalten die Koordinaten der Vektoren von A bzgl. Q.
Es ist also: $A=QR$ mit

$$A=\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_n\end{pmatrix};\quad Q=\begin{pmatrix}\mathfrak{b}_1\cdots\mathfrak{b}_n\end{pmatrix};\quad R=\begin{pmatrix}\|\mathfrak{b}_1'\| & (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1) & \cdots & (\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_1)\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & (\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_{n-1})\\ 0 & \cdots & 0 & \|\mathfrak{b}_n'\|\end{pmatrix}.$$

S^TS-Zerlegung einer positiv definiten Matrix *A*, auch: Cholesky-Zerlegung
Orthonormalisiere die Standardbasis B_S bzgl. des zu A gehörigen Skalarproduktes zu B'.
Die Matrix S der Basistransformation $B'\to B_S$ ist eine reguläre obere Dreiecksmatrix.
Umkehrung: Ist $A=S^TS$, S regulär, so ist A positiv definit.
(für $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ entsprechend: $A=S^T\overline{S}$)

orthogonales Komplement $M^\perp$
$M^\perp=\{\mathfrak{x}\mid\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}_1=0\quad\forall\mathfrak{x}_1\in M\}$
Sei $M\subseteq V$, dann gilt: $M\cap M^\perp\subseteq\{\mathfrak{o}\}$; $\quad M^\perp$ ist Unterraum von V; $\quad M^\perp=[M]^\perp$.

orthogonale Projektion von $\mathfrak{x}$ auf den Unterraum U: $P_U(\mathfrak{x})$
$\mathfrak{y}=P_U(\mathfrak{x})\overset{Def}{\iff}\mathfrak{x}=\mathfrak{y}+\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{y}\in U$; $\mathfrak{z}\in U^\perp$
$B=\{\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n\}$ ONB von $V\implies P_U(\mathfrak{x})=\sum_{i=1}^n(\mathfrak{x}\mathfrak{b}_i)\mathfrak{b}_i$

affine Menge $L=\mathfrak{x}+U(L)$
Sei $A,B\subseteq V$, dann $A+B:=\{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}\in A;\ \mathfrak{b}\in B\}$.
Sei $U(L)$ Unterraum von V, dann $\mathfrak{x}+U(L):=\{\mathfrak{x}+\mathfrak{u}\mid\mathfrak{u}\in U(L)\}$; $\dim L:=\dim U(L)$.
$\dim L^\perp=1\overset{Def}{\iff}L$ Hyperebene
$L_1\parallel L_2\overset{Def}{\iff}U(L_1)\subseteq U(L_2)\vee U(L_2)\subseteq U(L_1)$
$L_1\parallel L_2\implies L_1\cap L_2=\emptyset\vee L_1\subseteq L_2\vee L_2\subseteq L_1$
$L_1\parallel L_2\wedge L_1\cap L_2\neq\emptyset\wedge\dim L_1=\dim L_2<\infty\implies L_1=L_2$
L_1 orthogonal L_2, d.h. $L_1\perp L_2\overset{Def}{\iff}U(L_1)\perp U(L_2)$

Abstand
Der Abstand $d(M_1,M_2)$ zwischen M_1 und M_2 mit $\emptyset\neq M_i\subseteq V$ ist definiert durch:
$d(M_1,M_2)=\inf\{d(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2)\mid\mathfrak{x}_1\in M_1;\ \mathfrak{x}_2\in M_2\}$. Dabei ist $d(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2)=\|\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2\|$.
Ist U Unterraum, so ist $d(\mathfrak{x},U)=\|\mathfrak{x}-P_U(\mathfrak{x})\|$.

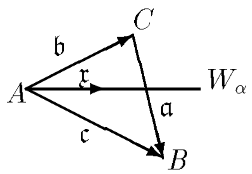
Mittelpunkt, Seitenhalbierende, Schwerpunkt
P heißt Mittelpunkt von $\overline{P_0P_1}$, wenn P auf $L(P_0,P_1)$ liegt und $\frac{P-P_0}{P_1-P_0}=\frac{1}{2}$.
Eine Seitenhalbierende eines Dreiecks ist eine Gerade durch eine Ecke und den Mittelpunkt der beiden anderen Ecken.
Der Schwerpunkt $\mathfrak{x}_S$ der Punkte $\mathfrak{x}_0,\ldots,\mathfrak{x}_n$ ist definiert durch: $\mathfrak{x}_S=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}\mathfrak{x}_i$.
Die 3 Seitenhalbierenden eines Dreieckes schneiden sich im Schwerpunkt.

Lot und Abstand
Eine Gerade g, die die affine Menge L trifft und senkrecht zu L ist, heißt Lot von L.
Das Lot g trifft L in genau einem Punkt, dem Lotfußpunkt.
Seien L_1, L_2 affine Mengen mit $\dim L_1, L_2 < \infty$. Dann gilt:
$d(L_1, L_2) = \|\mathfrak{x}_0 - P_W(\mathfrak{x}_0)\|$ mit $\mathfrak{x}_0 \in L_1 - L_2$; $W = U(L_1) + U(L_2)$.

Hessesche Normalform (HNF) der Hyperebenengleichung; skalare Gleichung
Sei $H = \mathfrak{x}_0 + U$ Hyperebene. Dann existiert $\mathfrak{a}$ mit $H^\perp = [\mathfrak{a}]$. $\mathfrak{a}$ heißt Normalenvektor von H und ist bis auf Faktor $\neq 0$ eindeutig. H läßt sich darstellen als $H = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{a}\mathfrak{x} = b\}$ mit $b = \mathfrak{a}\mathfrak{x}_0$. $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = b$ heißt skalare Gleichung von H.
Normieren von $\mathfrak{a}$ liefert die Hessesche Normalform (HNF) der Hyperebenengleichung:
$\mathfrak{e}\mathfrak{x} = c$ mit $\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{a}}{\|\mathfrak{a}\|}$Normaleneinheitsvektor (im Reellen bis auf Faktor ± 1 eindeutig);
$c = \frac{b}{\|\mathfrak{a}\|}$; $|c|$ ist der Abstand der Hyperebene vom Ursprung.
Für den Abstand der Hyperebene H vom Punkt $P = \{\mathfrak{x}_P\}$ gilt: $d(P, H) = |\mathfrak{e}\mathfrak{x}_p - c|$.

Mittellot, Dreiecksumkreis
Das Mittellot von $\overline{P_0P_1}$ ist das Lot auf den Mittelpunkt von $\overline{P_0P_1}$. Die Mittellote eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Dreiecksumkreises.

Winkelhalbierende, Dreiecksinkreis
Gleichung der Winkelhalbierenden durch A:
$W_\alpha: \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_A + \lambda\left(\frac{\mathfrak{c}}{\|\mathfrak{b}\|} + \frac{\mathfrak{c}}{\|\mathfrak{c}\|}\right)$
Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Dreiecksinkreises.



Spat
$\mathrm{Sp}(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_o + \alpha_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathfrak{a}_n;\ 0 \leq \alpha_i \leq 1\}$
Spatvolumen: $V(\mathrm{Sp}) = V(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = \sqrt{\det(\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j)} = \sqrt{(\det S)^2} = |\det S|$,
wobei $\det(\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j) = \det(S^TS) = (\det S)^2$ Gramsche Determinante heißt. S enthält in den Spalten die Koordinaten von $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ bzgl. einer beliebigen ONB.
Für $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ orthogonal gilt: $V(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) = \|\mathfrak{a}_1\| \cdot \ldots \cdot \|\mathfrak{a}_n\|$ (Quadervolumen).

Vektorprodukt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ in $\mathbb{R}^3$
Sei $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathfrak{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$; $\{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Dann ist:
$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$
$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ist linear in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear abhängig $\implies \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.
$\mathfrak{b} \times \mathfrak{a} = -(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ (anitkommutativ)
$\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3$; $\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_1$; $\mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2$
$\|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\| = \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \cdot \sin\alpha$; $\alpha = \measuredangle\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ (Fläche des von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogrammes)
Spatprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ist: $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})\mathfrak{a} = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a})\mathfrak{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.
$|(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c}| = V(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ Spatvolumen (=0, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ linear abhängig).
Grassmann-Indentität: $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{b} - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$
Jacobi-Identität: $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + \mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) + \mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$

B.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

Lineares Gleichungssystem über den Körper K: $(a_{ij}, b_i \in K)$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} A := \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} & \text{Koeffizientenmatrix} \\ \mathfrak{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} & \text{rechte Seite des Systems} \\ \mathfrak{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} & \text{Lösungsvektor} \end{cases}$$

Matrixdarstellung des homogenen linearen Gleichungssystems: $A\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$
Matrixdarstellung des inhomogenen linearen Gleichungssystems: $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$

$A\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ ist stets lösbar durch die triviale Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$.
$A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathfrak{b} \in$ Bild φ_A.

Die Lösungsmenge des homogenen Systems $A\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ ist Vektorraum der Dimension p mit $p := n - r$; $r :=$ rg A; d.h. es gibt $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p \in K_n$, so daß die allgemeine Lösung die Gestalt hat: $\mathfrak{x} = \lambda_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + \lambda_p\mathfrak{x}_p$ mit $\lambda_i \in K$.

Ist $\mathfrak{x}_0$ eine Lösung des inhomogenen Systems $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{x}_h$ die allgemeine Lösung des homogenen Systems $A\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ (s.o.), so lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_h = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + \lambda_p\mathfrak{x}_p$ mit $\lambda_i \in K$.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Schreibe das Gleichungssystem in vereinfachter Form:

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Erlaubte elementare Umformungen sind:
- Multiplikation einer Zeile mit $c \neq 0 \in K$
- Addition einer Zeile zu einer anderen
- Vertauschen zweier Zeilen
- Vertauschen von Spalten auf der linken Seite
  (Achtung: Umnummerierung der Unbekannten rückgängig machen!)

Beachte: Mit a_{ij}, b_i sind im folgenden nicht mehr die ursprünglichen Werte im Gleichungssystem gemeint, sondern der aktuelle Wert an der entsprechenden Stelle.

Vereinfachen der Koeffizientenmatrix A durch elementare Umformungen $(j = 1, \ldots, r)$:
- Durch Zeilen- und Spaltentauschen erreicht man: $a_{jj} \neq 0$.
- Durch Multiplikation der j. Zeile mit $\frac{1}{a_{jj}}$ erreicht man: $a_{jj} = 1$.
- Durch Addition des $-a_{ij}$-fachen der j. Zeile zur i. Zeile erhält man $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.
- Fahre fort mit nächsten j.

Nun stehen ab der $(r+1)$. Zeile nur noch 0 – Einträge.
Die Darstellung hat die Form:

$$\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdot & 0 & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\ 0 & 1 & & \cdot & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\ \cdot & & \cdot & 0 & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} & & b_r \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b_{r+1} \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b_m \end{array}$$

Das System ist lösbar, wenn $b_{r+1}, \ldots, b_m = 0$. Man erhält die Partikulärlösung $\mathfrak{x}_0$ und $n - r = p$ linear unabhängige Lösungen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p$ des homogenen Systems:

$$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_r \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} -a_{1,r+1} \\ \cdot \\ -a_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} -a_{1,r+2} \\ \cdot \\ -a_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ldots \quad ; \quad \mathfrak{x}_p = \begin{pmatrix} -a_{1n} \\ \cdot \\ -a_{rn} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

B.3 Lineare Algebra 2 - Übersicht

Eigenwerte und Eigenvektor
$\lambda \in K$ Eigenwert $\overset{Def}{\iff}$ $\exists \mathfrak{x} \in V \setminus \{\mathfrak{o}\}$ mit $\varphi(\mathfrak{x}) = \lambda\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}$ heißt Eigenvektor, $E_\lambda = \{\mathfrak{x} \mid \varphi\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x}\}$ zugehöriger Eigenraum, $\dim E_\lambda$ die geometrische Ordnung von λ.
Die Menge aller Eigenwerte λ von φ heißt das Spektrum $S(\varphi)$.

charakteristisches Polynom χ_A

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

Die Eigenwerte λ von A sind genau die Nullstellen von $\chi_A(x)$.

zu φ adjungierter Endomorphismus φ^*
Wenn φ^* existiert mit $\varphi\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\varphi^*\mathfrak{b} \quad \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$, dann gilt: φ^* eindeutig und linear.
$\varphi^{**} = \varphi$; $\quad (\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*$; $\quad (\varphi_1 + \varphi_1)^* = \varphi_1^* + \varphi_2^*$; $\quad (\varphi_1 \circ \varphi_2)^* = \varphi_2^* \circ \varphi_1^*$
Kern $\varphi^* = (\text{Bild } \varphi)^\perp$; $\quad$ Kern $\varphi = (\text{Bild } \varphi^*)^\perp$ $\quad$ def φ = def φ^*; $\quad$ rg φ = rg φ^*
φ bijektiv $\Leftrightarrow$ φ^* bijektiv; $\quad (\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$
λ EW von $\varphi \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ EW von φ^*; $\quad \overline{S(\varphi)} = S(\varphi^*)$
U φ-invariant $\Leftrightarrow$ $U^\perp$ φ^*-invariant
φ normal $\Rightarrow E_\lambda = E^{\varphi^*}_{\overline{\lambda}}$

reelle Normalform von φ normal
Bestimme eine ONB B aus Eigenvektoren $\mathfrak{x}_k$ (λ_k zugehöriger Eigenwert), wobei die Paare von komplexen Eigenvektoren $\mathfrak{x}_j = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$, $\mathfrak{x}_{j+1} = \overline{\mathfrak{x}_j} = \mathfrak{a} - i\mathfrak{b}$ jeweils durch $\frac{\mathfrak{a}}{\|\mathfrak{a}\|}$, $\frac{\mathfrak{b}}{\|\mathfrak{b}\|}$ ersetzt werden.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{matrix}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \Box \end{pmatrix}$$

$\lambda_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, \dots, r)$ reelle Eigenwerte
Für Paare von komplexen Eigenwerte λ_j, λ_{j+1}:
$\alpha = \Re\, \lambda_j$; $\quad \beta = \Im\, \lambda_j$
$S = (\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_r \ \frac{\mathfrak{a}}{\|\mathfrak{a}\|} \ \frac{\mathfrak{b}}{\|\mathfrak{b}\|} \cdots)$
Matrix der Basistransformation $B_S \to B$

komplexe Normalform von φ normal
Bestimme eine ONB $B = \{\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n\}$ aus Eigenvektoren (λ_k zugehöriger Eigenwert).

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$\lambda_k \in \mathbb{C} \quad (k = 1, \dots, n)$ Eigenwerte
$S = (\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n)$ Matrix der Basistransformation $B_S \to B$

β Bilinearform
$M(\beta, B') = S^T M(\beta, B_S)\overline{S}$; $\quad S = (b'_1 \dots b'_n)$ $\quad$ (S Matrix der Basistransf. $B_S \to B'$)
rg β := rg $M(\beta, B)$. $\quad \beta$ heißt entartet, wenn rg $\beta < \dim V$.
$N(\beta) = \{\mathfrak{x} \mid \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0 \quad \forall \mathfrak{y} \in v\}$ heißt Nullraum von β. $N(\beta)$ ist Unterraum.
$\dim N(\beta) = \dim V - \text{rg}\, \beta$.

quadratische Form
Sei β Skalarprodukt, dann ist $q(\mathfrak{x}) := \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ die zugehörige quadratische Form.
q bestimmt β eindeutig. Es gilt:
$\beta(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) + 2\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \rightsquigarrow q(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = q(\mathfrak{x}) + 2\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + q(\mathfrak{y})$
$\Longrightarrow \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) - q(\mathfrak{x}) - q(\mathfrak{y}))$

Simultane Diagonalisierung $M(q_1, B_s) = A_1;\ M(q_2, B_s) = A_2$
Teste, ob q_1 Skalarprodukt (symmetrisch und positiv definit).
Orthonormalisiere B_s zu $B' = \{\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_n\}$ bzgl. A_1; $(M(q_1, B') = \mathrm{I})$.
$S = M(\mathrm{id}\,, B', B_s) = (\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_n)$ ist Transf.matrix $B_s \to B'$.
$M(q_2, B') = S^T M(q_2, B_s) S = S^T A_2 S =: A'$
Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A' und Eigenvektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ bestimmen und letztere normieren. Die Koordinaten von $\mathfrak{x}_i$ gelten bzgl. B'. Die Berechnung der $\mathfrak{x}_i$ bzgl. der Standardbasis liefert Hauptachsensystem $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$.
Umrechnung $\mathfrak{x}_i \to \mathfrak{b}_i$ mittels: $\mathfrak{b}_i = \sum\limits_k x_{ik}\mathfrak{b}'_k$, wobei $\mathfrak{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$;
Es ist nun: $M(q_1, B) = I$; $M(q_2, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Normalform (euklidische) einer Quadrik $F(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}A\mathfrak{x} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{x} + c = 0$
- Bestimme A, $\mathfrak{a}$, c. (Beachte: A symmetrisch $\Rightarrow n$ reelle Eigenwerte)
- 1. Fall: $A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$ lösbar: ($\mathfrak{x}_0$ eindeutig $\Rightarrow$ Mittelpunktsquadrik)
  - Bestimme $\mathfrak{x}_0$, EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A, $F(\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{a}\mathfrak{x}_0 + c$.
  - $F_{\mathfrak{x}_0, B} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + F(\mathfrak{x}_0) = 0$; ($B$ ONB aus EV)
- 2. Fall: $A\mathfrak{x}_0 = -\mathfrak{a}$ nicht lösbar: ($r = \mathrm{rg}\ A < n$)
  - Löse $A^2\mathfrak{x}_0 = -A\mathfrak{a}$.
  - Bestimme $\mathfrak{b} := A\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{a}$, EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$; $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n = 0$ von A.
  - $F_{\mathfrak{x}'_0, B} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 - 2\|\mathfrak{b}\| y_n = 0$;
    wobei $B = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r, \underbrace{\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_n}_{\text{Basis von Nullraum } E_0}\}$; $\mathfrak{b}_n = -\frac{\mathfrak{b}}{\|\mathfrak{b}\|}$; $\mathfrak{x}'_0 = \mathfrak{x}_0 + \frac{F(\mathfrak{x}_0)}{2\mathfrak{b}^2}\mathfrak{b}$

$p \in K[x]$ Polynom
A_1 ähnlich $A_2 \implies p(A_1)$ ähnlich $p(A_2)$
A diagonalisierbar $\implies p(A)$ diagonalisierbar
$A\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x} \implies p(A)\mathfrak{x} = p(\lambda)\mathfrak{x}$
λ EW zu $A \implies p(\lambda)$ EW zu $p(A)$
A ähnlich Dreiecksmatrix $\implies S(\varphi_{p(A)}) = p(S(\varphi_A))$

m_A Minimalpolynom
$m_A | \chi_A$; $m_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$
V $\varphi-$zyklisch $\implies \chi_\varphi = (-1)^j m_\varphi$
$f(A) = 0 \implies m_A | f$
Geometrische Ordnung von λ ($= \dim E_\lambda$) = Anzahl der elementaren Divisoren $(x - \lambda)^\alpha$
d_i elementarer Divisor (Elementarteiler) $\implies d_i | m_A$; $\chi_A = (-1)^n \prod\limits_i d_i$
$m_A(x) = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \implies p_i^{\alpha_i}$ ist elementarer Divisor.

Normalform bzgl. verallgemeinerter φ-zyklische Basis von V
Sei $V = [\mathfrak{a}_1]_\varphi \oplus \ldots \oplus [\mathfrak{a}_r]_\varphi$ mit $m_{\varphi, \mathfrak{a}_i} = p_i^{\alpha_i} = d_i$ Elementarteiler.
Dann ist $B = \bigcup\limits_{i=1}^r B_i$ φ-zyklische Basis von V mit B_i Basis von $[\mathfrak{a}_i]_\varphi$.

$$B_i = \{ \underbrace{\begin{matrix} \mathfrak{a}_i; & \varphi\,\mathfrak{a}_i; & \ldots; & \varphi^{q_i - 1}\,\mathfrak{a}_i \\ p_i(\varphi)\,\mathfrak{a}_i; & \varphi p_i(\varphi)\,\mathfrak{a}_i; & \ldots; & \varphi^{q_i - 1} p_i(\varphi)\,\mathfrak{a}_i \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ p_i^{\alpha_i - 1}(\varphi)\,\mathfrak{a}_i; & \varphi p_i^{\alpha_i - 1}(\varphi)\,\mathfrak{a}_i; & \ldots; & \varphi^{q_i - 1} p_i^{\alpha_i - 1}(\varphi)\,\mathfrak{a}_i \end{matrix}}_{q_i = \text{Grad } p_i} \}$$

Speziell für $\varphi = (x - \lambda)^2 \Rightarrow$
$\mathrm{Basis}[\mathfrak{a}]_\varphi = \{\mathfrak{a};\ (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\,\mathfrak{a}\}$.

Dann ist die verallgemeinerte Normalmatrix: $M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} \boxed{M(p_1^{\alpha_1})} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{M(p_r^{\alpha_r})} \end{pmatrix}$

wobei: $\boxed{M(p^\alpha)} = \begin{pmatrix} \boxed{M(p)} & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \boxed{M(p)} \end{pmatrix}$ Verallgemeinerte Begleitmatrix von p^α hat α Kästchen $\boxed{M(p)}$ entlang der Hauptdiagonalen und Einsen unter der Hauptdiagonale.

und $\boxed{M(p)} = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{q-2} \\ & & 1 & -a_{q-1} \end{pmatrix}$ für $p(x) = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Speziell ist: $M(x-\lambda) = (\ \lambda\ )$; $\quad M(x^2+bx+c) = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1 & -b \end{pmatrix}$

$M((x-\lambda)^\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 \ \lambda \end{pmatrix}$ heißt $\boldsymbol{\alpha \times \alpha}$ **– Jordanblock.**

$M(\varphi, B)$ heißt **Jordansche Normalform**, wenn sie aus lauter Jordanblöcken besteht, d.h. $p_i = x - \lambda_i$ sind linear. Über $\mathbb{C}$ existiert stets die Jordansche Normalform.

Lineare Rekursion $f(k+n) - a_{n-1}f(k+(n-1)) - \cdots - a_0 f(k) = 0, (a_0 \neq 0)$
$\chi(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0 = (x-\lambda_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{\beta_r}$ (λ_i Nullstelle mit Ordnung β_i)
Allgemeine Lösung: $f(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i(x)\lambda_i^x$; Grad $p_i \leq \beta_i - 1$;
d.h. $p_i(x) = c_{i0} + c_{i1}x + \cdots + c_{i,\beta_i-1}x^{\beta_i-1}$; $(c_{ij} \in \mathbb{R};\ j = 1, \ldots, \beta_i - 1,\ i = 1, \ldots, r)$
Speziell: $\beta_i = 1 \Rightarrow p_i(x) = a$ sowie $\beta_i = 2 \Rightarrow p_i(x) = a + bx$.

A **normal**
$\iff A\overline{A}^T = \overline{A}^T A;\ A^* := \overline{A}^T$
$\iff \exists$ ONB aus EV von φ_A (V unitär)
$\iff \exists$ ONB aus EV von φ_A (V euklidisch, alle EW reell)
$\implies (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ EV zu versch. EW $\Rightarrow \mathfrak{x}_1 \perp \mathfrak{x}_2)$

A **selbstadjungiert** $\iff$ ***A*** **ist symmetrisch / hermitesch**
$\iff \overline{A}^T = A;\ A^* := \overline{A}^T \quad \implies A$ normal
$\iff \exists$ ONB aus EV, so daß $M(\varphi, B) = S^{-1}AS = D$; S orthogonal oder unitär, D reelle Diagonalmatrix
$\implies$ EW reell

f **Isometrie**
$\iff \exists$ ONB B mit $A = M(f, B)$ orthogonal bzw. unitär, d.h Zeilen / Spalten bilden eine ONB.
$\iff \|f\mathfrak{x}\| = \|\mathfrak{x}\| \quad \forall \mathfrak{x} \in V$ (Längentreue)
$\iff (\|\mathfrak{x}\| = 1 \Rightarrow \|f(\mathfrak{x})\| = 1) \iff |\lambda_i| = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$
$\iff f\mathfrak{x} \cdot f\mathfrak{y} = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} \quad \forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ (Winkeltreue)
$\iff \exists$ Basis $\{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$, so daß $f(\mathfrak{b}_i)f(\mathfrak{b}_j) = \mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_j \quad \forall i, j.$
$\iff \forall$ Basis $\{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n\}$, gilt $f(\mathfrak{b}_i)f(\mathfrak{b}_j) = \mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_j \quad \forall i, j.$
$\iff B$ ONB $\Rightarrow f(B)$ ONB
$\iff f^{-1}$ Isometrie
$\implies f$ bijektiv, Kern $f = \{0\}$
$\iff f^* = f^{-1}$
$\iff \overline{A}^T = A^{-1}$, d.h. $A\overline{A}^T = I \quad \implies A$ normal
$\implies |\det A| = 1$
$\implies$ Spur $A = \pm 1 + 2\cos\alpha$ (in $\mathbb{R}^3$)

A_1 ähnlich A_2

$\overset{Def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ S regulär, so daß $A_2 = S^{-1}A_1S$;
$\Longrightarrow$ $\chi_{A_1} = \chi_{A_2}$
$\Longrightarrow$ $m_{A_1} = m_{A_2}$
$\Longrightarrow$ rg A_1 = rg A_2
$\Longrightarrow$ Spur A_1 = Spur A_2
$\Longrightarrow$ gleiche EW
$\Longleftrightarrow$ dieselbe Normalform
$\Longleftrightarrow$ gleiche Elementarteiler

A diagonalisierbar

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ Basis aus lauter EV
$\Longleftrightarrow$ $D = S^{-1}AS$; $S = (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ mit $\mathfrak{b}_i$ EV
$\Longleftrightarrow$ m_A zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren
$\Longleftrightarrow$ χ_A zerfällt in Linearfaktoren und für alle EW gilt:
geometrische Ordnung = algebraische Ordnung ($\sum \dim E_{\lambda_i} = n$)
$\Longleftarrow$ n versch. EW

Übersicht über die Endomorphismen

Endomorphismus	Eigenwerte λ	Matrix reell	Matrix komplex
φ bijektiv Automorphismus	$\lambda \neq 0$	A regulär, invertierbar	
$\varphi^2 = \varphi$ Projektion	$\lambda \in \{0,1\}$	$A^2 = A$, idempotent	
$\varphi^2 = \mathrm{id}$ Involution	$\lambda \in \{-1,1\}$	$A^2 = I$	
$\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^*$ normal		$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \square & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \square \end{pmatrix}$ mit $\boxed{\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{matrix}}$ bzgl. ONB !	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ bzgl. ONB !
$\varphi^* = \varphi$ selbstadjungiert	$\lambda \in \mathbb{R}$	$A = A^T$ symmetrisch bzgl. ONB !	$A = \overline{A}^T$ hermitesch bzgl. ONB !
$\varphi^* = -\varphi$ antiselbstadjungiert	$\lambda \in i\mathbb{R}$	$-A = A^T$ schiefsymmetrisch bzgl. ONB !	$-A = \overline{A}^T$ schiefhermitesch bzgl. ONB !
$\forall \mathfrak{x}\ \Vert\varphi\mathfrak{x}\Vert = \Vert\mathfrak{x}\Vert$ Isometrie	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$A^T = A^{-1}$ orthogonal $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \square \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \square \end{pmatrix}$ mit $\boxed{\begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix}}$ bzgl. ONB !	$\overline{A}^T = A^{-1}$ unitär $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \lambda_i \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lvert\lambda\rvert = 1$ bzgl. ONB !

B.4 Typenliste der Quadriken in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Es seien $\alpha, \beta, \gamma > 0$

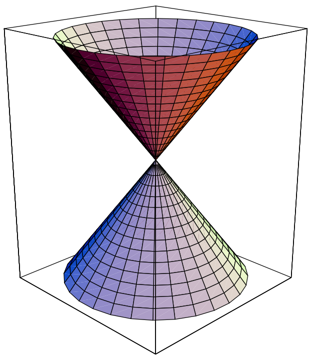
1. $\mathbb{R}^2$:

Typ	Rang	Gleichung	Bezeichnung
A_0	$r = 2$	$x^2 + \beta y^2 = 0$	Punkt
		$x^2 - \beta y^2 = 0$	2 sich schneidende Geraden
	$r = 1$	$x^2 = 0$	Gerade
A_1	$r = 2$	$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$	Ellipse
		$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	Hyperbel
		$-\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	leer
	$r = 1$	$\alpha x^2 = 1$	2 parallele Geraden
		$-\alpha x^2 = 1$	leer
B	$r = 1$	$\alpha x^2 = y$	Parabel

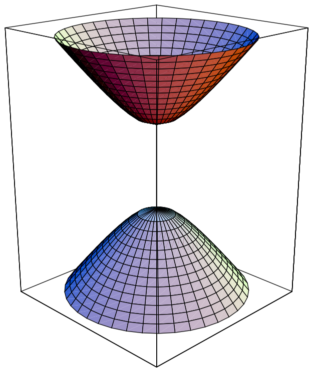
2. $\mathbb{R}^3$:

Typ	Rang	Gleichung	Bezeichnung
A_0	$r = 3$	$x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$	Punkt
		$x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 = 0$	elliptischer Kegel
	$r = 2$	$x^2 + \beta y^2 = 0$	Gerade
		$x^2 - \beta y^2 = 0$	2 sich schneidende Ebenen
	$r = 1$	$x^2 = 0$	Ebene
A_1	$r = 3$	$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$	Ellipsoid
		$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 = 1$	einschaliges Hyperboloid
		$\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 = 1$	zweischaliges Hyperboloid
		$-\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 = 1$	leer
	$r = 2$	$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$	elliptischer Zylinder
		$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	hyperbolischer Zylinder
		$-\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	leer
	$r = 1$	$\alpha x^2 = 1$	2 parallele Ebenen
		$-\alpha x^2 = 1$	leer
B	$r = 2$	$\alpha x^2 + \beta y^2 = z$	elliptisches Paraboloid
		$\alpha x^2 - \beta y^2 = z$	hyperbolisches Paraboloid
	$r = 1$	$\alpha x^2 = z$	parabolischer Zylinder

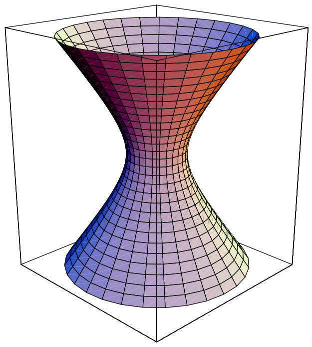
B.5 Quadriken im $\mathbb{R}^3$



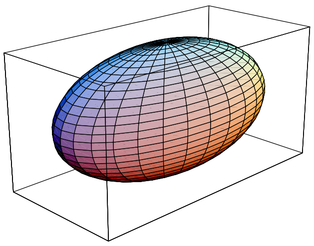
Kegel
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



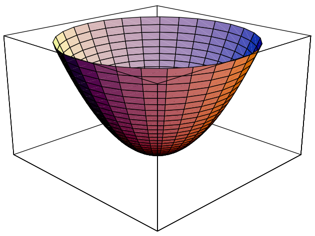
Zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



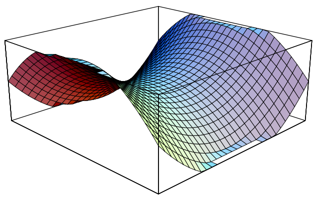
Einschaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



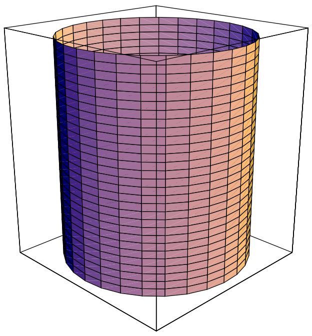
Ellipsoid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



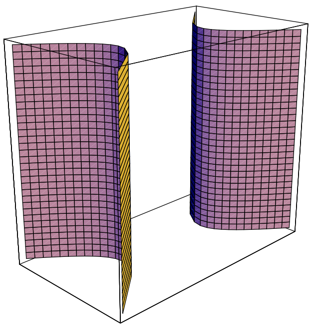
Elliptisches Paraboloid
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



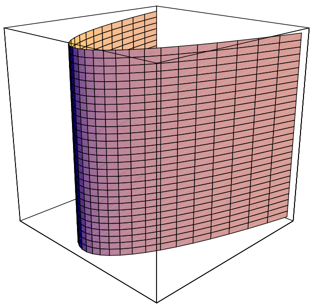
Hyperbolisches Paraboloid
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$



Elliptischer Zylinder
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Hyperbolischer Zylinder
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Parabolischer Zylinder
$y = \alpha x^2$

Literaturverzeichnis

[1] F. Lorenz; Lineare Algebra 1, 2; 1988

[2] H.–J. Kowalsky; Lineare Algebra; 1979

[3] Klingenberg; Lineare Algebra und Geometrie; 1990

[4] M. Koecher; Lineare Algebra und analytische Geometrie; 1985

[5] E. Brieskorn; Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, 2; 1983

Index