KOMMUTATIVE ALGEBRA II

Robert W. Berger

Sommersemester 1997

Adresse des Autors:

Robert W. Berger
Fachbereich Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
D-66041 Saarbrücken
Germany

E-mail address: rberger@math.uni-sb.de

Vorwort

Dies ist das Skript meiner vierstündigen Vorlesung „Kommutative Algebra II“, die ich Sommersemester 1997 an der Universität des Saarlandes gehalten habe. Sie ist die Fortsetzung der vorhergehenden Vorlesungen „Algebra I“, „Algebra II“ und „Kommutative Algebra I“.
In dieser Vorlesung stehen die homologischen Methoden im Vordergrund. Daher werden in dem ersten Kapitel die Grundlagen der homologischen Algebra behandelt, wobei naturgemäß besonderer Wert auf das Studium der abgeleiteten Funktoren gelegt wird.
Das zweite Kapitel ist der homologischen Dimension und Kodimension von Moduln gewidmet, wobei das Hilfsmittel des Koszul-Komplexes eine zentrale Rolle spielt.
Im dritten Kapitel werden, soweit es die Zeit des Semesters zuließ, als Anwendungen des Vorhergehenden spezielle Cohen-Macaulay Ringe behandelt: Reguläre lokale Ringe, vollständige Durchschnitte und Gorensteinringe.
Schließlich möchte ich nicht vergessen, den Hörern meiner Vorlesung für ihre Aufmerksamkeit zu danken. Mein besonderer Dank gilt dabei, wie schon im Teil I dieser Vorlesung, den Herren Dipl.-Math. Martin Baumgartner und Dipl.-Math. Johannes Heinrich, die in mühevoller Kleinarbeit das Skript auf Druck- und andere Fehler durchgesehen und wertvolle Verbesserungsvorschläge gemacht haben.

Saarbrücken, im Juli 1997

R. Berger

Inhaltsverzeichnis

1. Homologische Algebra

1.1. **Homologie von Komplexen.**

1.1.1. Definition. Sei R ein Ring. Als graduierter Ring sei R mit der trivialen Graduierung versehen ($R_0 = R$ und $R_i = 0$ für $i \neq 0$).
Ein „absteigender (oder linker) Komplex von R-Moduln" $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ ist ein graduierter R-Modul $\mathcal{M}$ zusammen mit einer R-linearen Abbildung $\mathrm{d} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, die homogen vom Grad -1 ist und für die gilt $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$. Es ist dann

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i \text{ und } \mathrm{d} = (\mathrm{d}_i \mid i \in \mathbb{Z})$$

mit R-Moduln M_i und R-linearen Abbildungen d_i, so daß gilt

$$\mathrm{d}_i \circ \mathrm{d}_{i+1} = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z} \quad (\text{d.h. } \operatorname{Im} \mathrm{d}_{i+1} \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}_i\,).$$

Man hat also eine Folge

$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} M_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} M_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} M_0 \xrightarrow{\mathrm{d}_0} M_{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{-1}} M_{-2} \xrightarrow{\mathrm{d}_{-2}} \ldots .$$

Ein „aufsteigender (oder rechter) Komplex von R-Moduln" $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ ist ein graduierter R-Modul $\mathcal{M}$ zusammen mit einer R-linearen Abbildung $\mathrm{d} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, die homogen vom Grad $+1$ ist und für die gilt $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$. Es ist dann

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i \text{ und } \mathrm{d} = (\mathrm{d}^i \mid i \in \mathbb{Z})$$

mit R-Moduln M^i und R-linearen Abbildungen d^i, so daß gilt

$$\mathrm{d}^i \circ \mathrm{d}^{i-1} = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z} \quad (\text{d.h. } \operatorname{Im} \mathrm{d}^{i-1} \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}^i\,).$$

Man hat also eine Folge

$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{d}^{-2}} M^{-2} \xrightarrow{\mathrm{d}^{-1}} M^{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^0} M^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} M^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^2} M^2 \xrightarrow{\mathrm{d}^3} \ldots ,$$

mit R-Moduln M^i und R-linearen Abbildungen d^i, so daß gilt

$$\mathrm{d}^i \circ \mathrm{d}^{i-1} = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z} \quad (\text{d.h. } \operatorname{Im} \mathrm{d}^{i-1} \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}^i\,).$$

Bezeichnung: d heißt auch die Differentiation oder der Randoperator bzw., bei aufsteigenden Komplexen, der Korandoperator des Komplexes.
Statt d_i bzw. d^i schreibt man auch d, wenn klar ist, zwischen welchen homogenen Komponenten des Komplexes die Abbildung gemeint ist. Den Komplex schreibt man auch einfach $\mathcal{M}$.

1.1.2. *Anmerkung.* Die Theorie der absteigenden und der aufsteigenden Komplexe ist formal dieselbe. Man muß nur die Pfeile umkehren und ggfs. die Indizes entsprechend ändern. Wir führen daher im folgenden alles für den absteigenden Fall durch und wenden die Definitionen und Resultate auch analog im aufsteigenden Fall an.

1.1.3. Definition. Sei $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ ein (absteigender) Komplex von R-Moduln.
Die Elemente von $\mathrm{Z}_i(\mathcal{M}) := \operatorname{Ker} \mathrm{d}_i$ heißen „i-Zyklen" von $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$.
Dann ist $\mathrm{Z}(\mathcal{M}) := \bigoplus \mathrm{Z}_i(\mathcal{M}) = \operatorname{Ker} \mathrm{d}$.
Die Elemente von $\mathrm{B}_i(\mathcal{M}) := \operatorname{Im} \mathrm{d}_{i+1}$ heißen „i-Ränder" von $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$.
Dann ist $\mathrm{B}(\mathcal{M}) := \bigoplus \mathrm{B}_i(\mathcal{M}) = \operatorname{Im} \mathrm{d}$.
Wegen $\mathrm{d}_i \circ \mathrm{d}_{i+1} = 0$ gilt $\mathrm{B}_i(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Z}_i(\mathcal{M})$.
$\mathrm{H}_i(\mathcal{M}) := \mathrm{Z}_i(\mathcal{M})/B_i(\mathcal{M})$ heißt der „i-te Homologiemodul" von $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$.

$\mathrm{H}(\mathcal{M}) := \bigoplus \mathrm{H}_i(\mathcal{M}) = \mathrm{Z}(\mathcal{M}) / \mathrm{B}(\mathcal{M})$ heißt auch „die Homologie“ des Komplexes $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$.
(Da die d_i R-lineare Abbildungen sind, sind die $\mathrm{Z}_i(\mathcal{M}), \mathrm{B}_i(\mathcal{M}), \mathrm{H}_i(\mathcal{M})$ alles R-Moduln und die $\mathrm{Z}(\mathcal{M}), \mathrm{B}(\mathcal{M}), \mathrm{H}(\mathcal{M})$ alles graduierte R-Moduln.)

Entsprechende Definitionen gelten für aufsteigende Komplexe. Hier schreibt man die Indizes als Exponenten und bezeichnet die Z^i als Kozykeln, die B^i als Koränder und sprechend die $\mathrm{H}^i(\mathcal{M})$ als „Kohomologiemoduln“.

1.1.4. Definition. Seien $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ und $(\mathcal{M}', \mathrm{d}')$ zwei Komplexe.
Ein „Morphismus (von Komplexen)
$f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ vom Grad r“ ist eine homogene R-lineare Abbildung vom Grad r, so daß für die Folge der homogenen Komponenten $f_i : M_i \longrightarrow M'_{i+r}$ gilt
$\mathrm{d}'_{i+r} \circ f_i = f_{i-1} \circ \mathrm{d}_i$ für alle i .

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\mathrm{d}_i} & M_{i-1} \\ {\scriptstyle f_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} \\ M'_{i+r} & \xrightarrow{\mathrm{d}'_{i+r}} & M'_{i-1+r} \end{array}$$

Wir schreiben auch $f = (f_i)$, wenn wir die homogenen Komponenten von f benennen wollen.
„Morphismus“ ohne Angabe des Grades bedeutet Morphismus vom Grad 0.

1.1.5. *Anmerkung.* Seien
$f = (f_i) : (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{M}', \mathrm{d}')$ und
$g = (g_i) : (\mathcal{M}', \mathrm{d}') \to (\mathcal{M}'', \mathrm{d}'')$
Morphismen von Komplexen.
Dann ist auch
$g \circ f := (g_i \circ f_i) : (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{M}'', \mathrm{d}'')$
ein Morphismus von Komplexen.

Beweis. Aus $\mathrm{d}''_i \circ g_i = g_{i-1} \circ \mathrm{d}'_i$ und $\mathrm{d}'_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \mathrm{d}_i$ für alle i folgt
$\mathrm{d}''_i \circ (g \circ f)_i = \mathrm{d}''_i \circ g_i \circ f_i = g_{i-1} \circ \mathrm{d}'_i \circ f_i = g_{i-1} \circ f_{i-1} \circ \mathrm{d}_i = (g \circ f)_{i-1} \circ \mathrm{d}_i$ für alle i.
Daher ist $g \circ f : (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{M}'', \mathrm{d}'')$ ein Morphismus von Komplexen. □

1.1.6. *Anmerkung.* Die Komplexe mit ihren Morphismen bilden offenbar eine Unterkategorie der Kategorie der R-Moduln.

(1) Kern, Cokern und Bild eines Morphismus f sind einfach Kern, Cokern und Bild der R-linearen Abbildung f. Genauer gilt, weil f eine homogene Abbildung ist:
Ist
$f = (f_i) : \mathcal{M} = \bigoplus M_i \to \bigoplus M'_i = \mathcal{M}'$
ein Morphismus von Komplexen, so ist
$\operatorname{Ker} f = \bigoplus \operatorname{Ker} f_i$,
$\operatorname{Coker} f = \bigoplus \operatorname{Coker} f_i$,
$\operatorname{Im} f = \bigoplus \operatorname{Im} f_i$.
Insbesondere gilt:
(2) Eine Folge $0 \to (\mathcal{N}, \mathrm{d}') \xrightarrow{f} (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \xrightarrow{g} (\mathcal{L}, \mathrm{d}'') \to 0$ von Morphismen von Komplexen ist genau dann exakt, wenn sie als Folge R-linearer Abbildungen exakt ist. Das ist nach obigem genau dann der Fall, wenn
$0 \to N_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} L_i \to 0$ für alle i eine exakte Folge von R-linearen Abbildungen ist.
(3) Sind
$(\mathcal{M}', \mathrm{d}')$ mit $\mathcal{M}' = \bigoplus M'_i$ und $\mathrm{d} = (\mathrm{d}'_i)$ sowie

$(\mathcal{M}'', \mathrm{d}'')$ mit $\mathcal{M}'' = \bigoplus M_i''$ und $\mathrm{d}'' = (\mathrm{d}_i'')$
Komplexe, so ist auch
$(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ mit $\mathcal{M} := \bigoplus (M_i' \oplus M_i'')$ und $\mathrm{d} = (\mathrm{d}_i)$ mit $\mathrm{d}_i := \mathrm{d}_i' \oplus \mathrm{d}_i''$ ein Komplex. Als R-Modul ist dieser die direkte Summe der R-Moduln $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}''$. Man überlegt aber leicht, daß $\mathcal{M}$ auch in der Kategorie der Komplexe die Eigenschaft der direkten Summe hat, so daß wir schreiben können
$(\mathcal{M}, \mathrm{d}) = (\mathcal{M}', \mathrm{d}') \oplus (\mathcal{M}'', \mathrm{d}'')$.

(4) Seien $(\mathcal{M}', \mathrm{d}')$ mit $\mathcal{M}' = \bigoplus M_i'$ und $\mathrm{d} = (\mathrm{d}_i')$,
$(\mathcal{M}'', \mathrm{d}'')$ mit $\mathcal{M}'' = \bigoplus M_i''$ und $\mathrm{d}'' = (\mathrm{d}_i'')$ sowie
$(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ mit $\mathcal{M} := \bigoplus M_i$ und $\mathrm{d} = (\mathrm{d}_i)$ Komplexe und
$j' = (j_i') : \ \mathcal{M}' \to \mathcal{M}, \quad p' = (p_i') : \ \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$,
$j'' = (j_i'') : \mathcal{M}'' \to \mathcal{M}, \quad p'' = (p_i'') : \mathcal{M} \to \mathcal{M}''$
Morphismen von Komplexen.
Es sind äquivalent:
   (a) $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ ist direkte Summe von $(\mathcal{M}', \mathrm{d}')$ und $(\mathcal{M}'', \mathrm{d}'')$ mit j' bzw. j'' als kanonischen Injektionen und p' bzw. p'' als kanonischen Projektionen.
   (b) Es gilt:
   $p' \circ j' = \mathrm{id}_{\mathcal{M}'}, \quad p'' \circ j'' = \mathrm{id}_{\mathcal{M}''}$
   $p'' \circ j' = 0, \qquad p' \circ j'' = 0,$
   $j' \circ p' + j'' \circ p'' = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$.
   (c) Für alle i gilt:
   $p_i' \circ j_i' = \mathrm{id}_{M_i'}, \quad p_i'' \circ j_i'' = \mathrm{id}_{M_i''}$
   $p_i'' \circ j_i' = 0, \qquad p_i' \circ j_i'' = 0,$
   $j_i' \circ p_i' + j_i'' \circ p_i'' = \mathrm{id}_{M_i}$.
   (d) Für alle i ist M_i direkte Summe von M_i' und M_i'' mit j_i' bzw. j_i'' als kanonischen Injektionen und p_i' bzw. p_i'' als kanonischen Projektionen.

In diesem Fall ist insbesondere die Folge $0 \to \mathcal{M}' \xrightarrow{j'} \mathcal{M} \xrightarrow{p''} \mathcal{M}'' \to 0$ exakt.

(5) Da für zwei R-Moduln die direkte Summe isomorph zum direkten Produkt ist, gelten die Aussagen (3) und (4) auch, wenn man die direkte Summe durch das direkte Produkt von Komplexen ersetzt.

(6) Sei $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ ein Komplex und $\mathcal{F}$ ein additiver Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich. Dann ist
$\big(\mathcal{F}(\mathcal{M}), \mathcal{F}(\mathrm{d})\big) := \big((\mathcal{F}(M_i), \mathcal{F}(\mathrm{d}_i)\big)$ wieder ein Komplex.
Sei $f = (f_i) : (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{M}', \mathrm{d}')$ ein Morphismus von Komplexen, so ist
$\mathcal{F}(f) := \big(\mathcal{F}(f_i)\big) : \big(\mathcal{F}(\mathcal{M}), \mathcal{F}(\mathrm{d})\big) \to \big(\mathcal{F}(\mathcal{M}'), \mathcal{F}(\mathrm{d}')\big)$, wenn $\mathcal{F}$ kovariant ist, bzw.
$\mathcal{F}(f) := \big(\mathcal{F}(f_i)\big) : \big(\mathcal{F}(\mathcal{M}'), \mathcal{F}(\mathrm{d}')\big) \to \big(\mathcal{F}(\mathcal{M}), \mathcal{F}(\mathrm{d})\big)$,wenn $\mathcal{F}$ kontravariant ist,
wieder ein Morphismus von Komplexen.
$\mathcal{F}$ induziert auf diese Weise einen additiven Funktor der Kategorie der Komplexe in sich.

Beweis von(4). Die angebenen Bedingungen (4b) für j', j'', p', p'' sind offenbar äquivalent zu den entsprechenden Bedingungen (4c) für die j_i', j_i'', p_i', p_i'' in den homogenen Komponenten. Das bedeutet aber $M_i = M_i' \oplus M_i''$ für alle i mit j_i' bzw. j_i'' als kanonischen Injektionen und p_i' bzw. p_i'' als kanonischen Projektionen. Nach (3) ist ferner (4d): $M_i = M_i' \oplus M_i''$ für alle i äquivalent zu $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \oplus \mathcal{M}''$, und offenbar sind dann

die j' bzw. j'' die kanonischen Injektionen und p' bzw. p'' die kanonischen Projektionen.
Die Exaktheit der angegebenen Folge ergibt sich aus der Exaktheit in den Komponenten. □

1.1.7. Hilfssatz. *Sei $\mathcal{F}$ ein additiver Funktor und $M = M' \oplus M''$ eine direkte Summe von R-Moduln oder von Komplexen. Dann ist*
$\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(M') \oplus \mathcal{F}(M'')$. *Genauer:*
Sind
j', j'' *die kanonischen Injektionen und*
p', p'' *die kanonischen Projektionen der direkten Summe,*
so gilt:
Ist $\mathcal{F}$ kovariant (kontravariant), so sind
$\mathcal{F}(j'), \mathcal{F}(j'')$ *die kanonischen Injektionen (Projektionen) und*
$\mathcal{F}(p'), \mathcal{F}(p'')$ *die kanonischen Projektionen (Injektionen) der direkten Summe (des direkten Produktes)*
$\mathcal{F}(M') \oplus \mathcal{F}(M'')$.

Beweis. Die direkte Summe ist mittels der kanonischen Injektionen und Projektionen gekennzeichnet durch $p' \circ j' = \mathrm{id}_{M'}$, $p'' \circ j'' = \mathrm{id}_{M''}$, $p'' \circ j' = 0$, $p' \circ j'' = 0$ und $j' \circ p' + j'' \circ p'' = \mathrm{id}_M$. Falls $\mathcal{F}$ kovariant ist, folgt daraus $\mathcal{F}(p') \circ \mathcal{F}(j') = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(M')}$, $\mathcal{F}(p'') \circ \mathcal{F}(j'') = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(M'')}$, $\mathcal{F}(p'') \circ \mathcal{F}(j') = 0$, $\mathcal{F}(p') \circ (j'') = 0$ und
$\mathcal{F}(j') \circ \mathcal{F}(p') + \mathcal{F}(j'') \circ \mathcal{F}(p'') = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(M)}$.
Analog im kontravarianten Fall. □

1.1.8. *Anmerkung.* Sei $f = (f_i) : (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \longrightarrow (\mathcal{M}', \mathrm{d}')$ ein Morphismus (vom Grad 0). Dann gilt:

$$f_i\,(\mathrm{Z}_i(\mathcal{M})) \subseteq \mathrm{Z}_i(\mathcal{M}')\,,$$
$$f_i\,(\mathrm{B}_i(\mathcal{M})) \subseteq \mathrm{B}_i(\mathcal{M}')\,.$$

Also induziert f einen Homomorphismus vom Grad 0

$$\mathrm{H}(f) : \mathrm{H}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{H}(\mathcal{M}')\,, \qquad \text{d.h.}$$
$$\mathrm{H}_i(f) : \mathrm{H}_i(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{H}_i(\mathcal{M}') \quad \text{vermöge}$$
$$\mathrm{H}_i(f)(\bar{x}) := \overline{f_i(x)} \text{ für alle } \bar{x} \in \mathrm{H}_i(\mathcal{M}).$$

Beweis. $z \in \mathrm{Z}_i(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \mathrm{d}_i(z) = 0$. Dann ist $0 = f_{i-1} \circ \mathrm{d}_i(z) = \mathrm{d}'_i \circ f_i(z)$. Also ist $f_i(z) \in \mathrm{Z}_i(\mathcal{M}')$.
Ebenso $x \in \mathrm{B}_i(\mathcal{M}) \Leftrightarrow x = \mathrm{d}_{i+1}(y)$ für ein $y \in M_{i+1}$. Dann ist
$f_i(x) = f_i \circ \mathrm{d}_{i+1}(y) = \mathrm{d}'_{i+1} \circ f_{i+1}(y)$. Also ist $f_i(x) \in \mathrm{B}_i(\mathcal{M}')$. □

1.1.9. *Anmerkung.* Da die $\mathrm{H}_i(f)$ durch f auf den Faktormoduln induziert werden, sieht man, daß H ein kovarianter additiver Funktor der Kategorie der Komplexe von R-Moduln mit Morphismen (vom Grad 0) in die Kategorie der graduierten R-Moduln ist.

1.1.10. Satz. *Sei* $0 \to (\mathcal{N}, \mathrm{d}') \xrightarrow{f} (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \xrightarrow{g} (\mathcal{L}, \mathrm{d}'') \to 0$ *eine exakte Folge von Morphismen von Komplexen.*
Dann gibt es einen „Verbindungshomomorphismus“
$\partial = \partial(f, g) : \mathrm{H}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{H}(\mathcal{M})$ *vom Grad* -1 *(bzw.* $+1$ *bei aufsteigenden Komplexen),*
so daß die Folge

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}(\mathcal{N}) \arrow[rr, "\mathrm{H}(f)"] & & \mathrm{H}(\mathcal{M}) \arrow[dl, "\mathrm{H}(g)"] \\
& \mathrm{H}(\mathcal{L}) \arrow[ul, "\partial"] &
\end{tikzcd}$$

exakt ist, d.h. man hat eine „lange exakte Homologiefolge“:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{i+1}} \mathrm{H}_i(\mathcal{N}) \xrightarrow{\mathrm{H}_i(f)} \mathrm{H}_i(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{H}_i(g)} \mathrm{H}_i(\mathcal{L}) \xrightarrow{\partial_i} \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\mathrm{H}_{i-1}(f)} \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{H}_{i-1}(g)} \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\partial_{i-1}} \ldots$$

Die Definition von ∂ wird im ersten Teil des Beweises beschrieben.

Diese Zuordnung der langen exakten Homologiefolge zu einer exakten Folge von Morphismen von Komplexen ist funktoriell:
Ist

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{M} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}' \arrow[r, "f'"] & \mathcal{M}' \arrow[r, "g'"] & \mathcal{L}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Morphismen von Komplexen mit exakten Zeilen, so erhält man daraus ein kommutatives Diagramm der langen exakten Homologiefolgen:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\partial_{i+1}"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{N}) \arrow[r, "\mathrm{H}_i(f)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_i(\alpha)"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{M}) \arrow[r, "\mathrm{H}_i(g)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_i(\beta)"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{L}) \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "\mathrm{H}_i(\gamma)"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{N}) \arrow[r, "\mathrm{H}_{i-1}(f)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_{i-1}(\alpha)"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\mathrm{H}_{i-1}(g)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_{i-1}(\beta)"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\partial_{i-1}"] \arrow[d, "\mathrm{H}_{i-1}(\gamma)"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "\partial'_{i+1}"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{N}') \arrow[r, "\mathrm{H}_i(f')"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{M}') \arrow[r, "\mathrm{H}_i(g')"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{L}') \arrow[r, "\partial'_i"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{N}') \arrow[r, "\mathrm{H}_{i-1}(f')"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{M}') \arrow[r, "\mathrm{H}_{i-1}(g')"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{L}') \arrow[r, "\partial'_{i-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Die kovarianten Funktoreigenschaften von H *übertragen sich dann auf diese Zuordnung bzgl. des Tripels (α, β, γ).*

Beweis. 1) *Konstruktion der Verbindungshomomorphismen ∂_i:* Sei $\bar{z} \in \mathrm{H}_i(\mathcal{L})$ und $z \in \mathrm{Z}_i(\mathcal{L})$ ein Vertreter. Da g_i surjektiv ist, gibt es ein $x \in M_i$ mit $z = g_i(x)$. Weil z ein Zykel ist, gilt $0 = \mathrm{d}''_i z = \mathrm{d}''_i \circ g_i(x) = g_{i-1}(\mathrm{d}_i(x))$, also $\mathrm{d}_i x \in \operatorname{Ker} g_{i-1} = \operatorname{Im} f_{i-1}$ wegen der Exaktheit der Folge. Daher gibt es ein $y \in N_{i-1}$ mit $\mathrm{d}_i x = f_{i-1}(y)$ und y ist wegen der Injektivität von f_{i-1} durch die Wahl von x, genauer durch $\mathrm{d}_i x$, eindeutig bestimmt. Wir zeigen:

(1) y ist ein Zykel, d.h. $\mathrm{d}' y = 0$.
(2) Die Klasse von y modulo $\mathrm{B}_{i-1}(\mathcal{N})$ ist unabhängig von der speziellen Wahl von z und x (sondern hängt nur von $\bar{z}$ ab).

Beweis: (1): $\mathrm{d}'_{i-1} y \overset{!}{=} 0$.
Da f_{i-2} injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß $f_{i-2} \circ \mathrm{d}'_{i-1} y = 0$ ist:
Es ist $f_{i-2} \circ \mathrm{d}'_{i-1} y = \mathrm{d}_{i-1} \circ f_{i-1}(y) = \mathrm{d}_{i-1} \circ \mathrm{d}_i x = 0$, weil $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ ist. q.e.d.

(2): a) Halte zunächst z fest.
Sei $x' \in M_i$ mit $z = g_i(x')$ ein anderes Urbild von z. Dann ist
$g_i(x - x') = 0$, also
$x - x' \in \operatorname{Ker} g_i = \operatorname{Im} f_i$.
Daher gibt es ein $a \in N_i$ mit
$x - x' = f_i(a)$. Es folgt
$\mathrm{d}_i x - \mathrm{d}_i x' = \mathrm{d}_i \circ f_i(a) = f_{i-1}(\mathrm{d}'_i a)$.
Dann ist
$\mathrm{d}_i x' = \mathrm{d}_i x - f_{i-1}(\mathrm{d}'_i a) = f_{i-1}(y - \mathrm{d}'_i a)$, d.h.
$y' := y - \mathrm{d}'_i a$ ist das (eindeutig bestimmte) Urbild von $\mathrm{d}_i x'$ unter f_{i-1}.
Es folgt:
$y - y' = \mathrm{d}'_i a \in \mathrm{B}_{i-1}(\mathcal{N})$,

$$\begin{tikzcd}
 & & M_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[dd, "\mathrm{d}_{i+1}"'] & L_{i+1} \arrow[r] \arrow[dd, "\mathrm{d}''_{i+1}"] & 0 & \text{ex.} \\
 & & & & & \\
 & N_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[ddd, "\mathrm{d}'_i"'] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[ddd, "\mathrm{d}_i"] & L_i \arrow[r] \arrow[ddd, "\mathrm{d}''_i"] & 0 & \text{ex.} \\
 & & \boldsymbol{x} \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \boldsymbol{z} & & \\
 & & \mathbf{d}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{x} & & & \\
0 \arrow[r] & N_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[dd, "\mathrm{d}'_{i-1}"'] & M_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] \arrow[dd, "\mathrm{d}_{i-1}"] & L_{i-1} & & \text{ex.} \\
 & \boldsymbol{y} \arrow[r, mapsto] & \mathbf{d}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{x} & & & \\
0 \arrow[r] & N_{i-2} \arrow[r, "f_{i-2}"] & M_{i-2} & & & \text{ex.}
\end{tikzcd}$$

also liegen y und y' in derselben Klasse modulo $\mathrm{B}_{i-1}(\mathcal{N})$. q.e.d.

b) Sei nun z' ein weiterer Vertreter für $\bar{z}$, also $z' - z \in \mathrm{B}_i(\mathcal{L})$. Dann gibt es ein $b \in L_{i+1}$ mit $z' - z = \mathrm{d}''_{i+1} b$. Da g_{i+1} surjektiv ist, gibt es ein $c \in M_{i+1}$ mit $b = g_{i+1}(c)$.
Es folgt $z' - z = \mathrm{d}''_{i+1} \circ g_{i+1}(c) = g_i(\mathrm{d}_{i+1} c)$.
Sei nun $x \in M_i$ mit $z = g_i(x)$. Dann ist
$g_i(x + \mathrm{d}_{i+1} c) = g_i(x) + g_i(\mathrm{d}_{i+1} c) = z + (z' - z) = z'$, d.h.
$x' := x + \mathrm{d}_{i+1} c$ ist ein Urbild von z' unter g_i.
Es folgt $\mathrm{d}_i x' = \mathrm{d}_i x + \mathrm{d}_i \circ \mathrm{d}_{i+1} c = \mathrm{d}_i x$.
Wenn man von z ausgeht, erhält man y als das eindeutig bestimmte Urbild von $\mathrm{d}_i x$ unter f_{i-1}, und wenn man von z' ausgeht, erhält man ein y' als das eindeutig bestimmte Urbild von $\mathrm{d}_i x'$ unter f_{i-1}. Da aber $\mathrm{d}_i x = \mathrm{d}_i x'$ ist, ist $y = y'$ und daher erst recht $\bar{y} = \bar{y'}$ dieselbe Klasse modulo $\mathrm{B}_{i-1}(\mathcal{N})$. q.e.d.

Wir definieren daher mit den obigen Bezeichnungen:

$$\partial_i \bar{z} := \bar{y} \quad \text{also } \partial = \overline{f^{-1} \circ \mathrm{d} \circ \overset{-1}{g} \circ \overset{-1}{h}}\,,$$

wobei $h : L_i \to \mathrm{H}_i(\mathcal{L})$ die kanonische Restklassenabbildung bezeichnet.

2) *Exaktheit der langen Homologiefolge*

a) Exaktheit bei $\xrightarrow{\mathrm{H}(f)} \mathrm{H}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{H}(g)}$:
Wegen $g \circ f = 0$ ist $\mathrm{H}(g) \circ \mathrm{H}(f) = 0$ und daher $\operatorname{Im} \mathrm{H}(f) \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{H}(g)$.
Umgekehrt:
Sei $\bar{z} \in \operatorname{Ker} \mathrm{H}_i(g)$ und $z \in \mathrm{Z}_i(\mathcal{M})$ ein Vertreter für $\bar{z}$. Dann ist
$\mathrm{H}_i(g)(\bar{z}) = 0$ also
$g_i(z) \in \mathrm{B}_i(\mathcal{L})$. Es gibt also ein $x \in L_{i+1}$ mit
$g_i(z) = \mathrm{d}''_{i+1} x$. Nun ist g_{i+1} surjektiv, also gibt es

$$\begin{tikzcd}
 & & M_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[ddd, "\mathrm{d}_{i+1}"'] & L_{i+1} \arrow[r] \arrow[ddd, "\mathrm{d}''_{i+1}"] & 0 & \text{ex.} \\
 & & y \arrow[r, mapsto] & x \arrow[d] & & \\
 & & z \arrow[r, mapsto, "g_i"'] & g_i(z) & & \\
0 \arrow[r] & N_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dd, "\mathrm{d}'_i"'] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[dd, "\mathrm{d}_i"] & L_i & & \text{ex.} \\
 & w \arrow[r, mapsto] & z - \mathrm{d}_{i+1} y & & & \\
0 \arrow[r] & N_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & M_{i-1} & & & \text{ex.}
\end{tikzcd}$$

ein $y \in M_{i+1}$ mit $x = g_{i+1}(y)$. Dann ist $g_i(z) = \mathrm{d}''_{i+1} \circ g_{i+1}(y) = g_i(\mathrm{d}_{i+1} y)$ und daher
$z - \mathrm{d}_{i+1} y \in \operatorname{Ker} g_i = \operatorname{Im} f_i$, weil $\overset{f}{\to} M \overset{g}{\to}$ exakt ist. Also gibt es ein $w \in N_i$ mit $z - \mathrm{d}_{i+1} y = f_i(w)$.

w ist ein Zykel:
$f_{i-1}\circ \mathrm{d}'_i w = \mathrm{d}_i \circ f_i(w) = \mathrm{d}_i z - \mathrm{d}_i \circ \mathrm{d}_{i+1} y = \mathrm{d}_i z = 0$, weil z ein Zykel ist.
Da f_{i-1} injektiv ist, folgt dann $\mathrm{d}'_i w = 0$.
Ferner ist $\mathrm{H}_i(f)(\bar w) = \overline{f_i(w)} = \bar z$, weil $\overline{\mathrm{d}_{i+1} y} = 0$ ist als Rand.
Also ist $\bar z \in \operatorname{Im} \mathrm{H}_i(f)$. q.e.d.

b) Exaktheit bei $\xrightarrow{\mathrm{H}(g)} \mathrm{H}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\partial}$:
Sei $\bar x \in \mathrm{H}_i(M)$ und $x \in \mathrm{Z}_i(\mathcal{M})$ ein Vertreter für $\bar x$. Dann ist $\mathrm{H}_i(g)(\bar x) = \overline{g_i(x)}$ und $\partial_i \circ \mathrm{H}_i(g)(\bar x) = \overline{f_{i-1}^{-1} \circ \mathrm{d}_i\big(\overset{-1}{g_i}(g_i(x)\big)} = \overline{f_{i-1}^{-1}(\underbrace{\mathrm{d}_i x}_{=0 \text{ weil } x \text{ Zykel}})} = \bar 0$. ($f_{i-1}$ ist injektiv und daher ist 0 das eindeutig bestimmte Urbild von 0.) Also ist $\operatorname{Ker}\partial \supseteq \operatorname{Im}\mathrm{H}(g)$.

Umgekehrt: Sei $\bar z \in \operatorname{Ker}\partial_i$ und $z \in \mathrm{Z}_i(\mathcal{L})$ ein Vertreter für $\bar z$. Ferner sei $x \in M_i$ mit $z = g_i(x)$. Nach Definition ist dann $\partial_i \bar z$ die Klasse von $y := \mathrm{f}_{i-1}^{-1}(\mathrm{d}_i x)$. Nach Voraussetzung ist $\partial_i \bar z = 0$, d.h. es existiert ein $\eta \in N_i$ mit $y = \mathrm{d}'_i \eta$. Dann ist $\mathrm{d}_i x = f_{i-1}(y) = f_{i-1} \circ \mathrm{d}'_i \eta = \mathrm{d}_i \circ f_i(\eta)$ und daher $\mathrm{d}_i\,(x - f_i(\eta)) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & N_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[ddd, "\mathrm{d}'_i"'] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[ddd, "\mathrm{d}_i"'] & L_i \arrow[r] & 0 & \text{ex.} \\
 & \eta \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & z & & \\
 & y \arrow[r, mapsto] & \mathrm{d}_i x & & & \\
0 \arrow[r] & N_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"'] & M_{i-1} & & & \text{ex.}
\end{tikzcd}$$

Das bedeutet, daß $\xi := x - f_i(\eta) \in \mathrm{Z}_i(\mathcal{M})$ ein Zykel ist.
Ferner ist $\mathrm{H}_i(g)(\bar\xi) = \overline{g_i(\xi)} = \overline{g_i(x) - \underbrace{g_i \circ f_i}_{=0}(\eta)} = \overline{g_i(x)} = \bar z$.
Also ist $\bar z \in \operatorname{Im}\mathrm{H}_i(g)$ und daher $\operatorname{Ker}\partial \subseteq \operatorname{Im} g$. q.e.d.

c) Exaktheit bei $\xrightarrow{\partial} \mathrm{H}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\mathrm{H}(f)}$:
Sei $\bar y \in \operatorname{Im}\partial_i \subseteq \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{N})$ ein beliebiges Element aus dem Bild von ∂_i. Dann ist $\bar y = \partial_i \bar z$ mit einem $\bar z \in \mathrm{H}_i(\mathcal{L})$. Nach Definition von ∂_i gibt es dann zu einem beliebigen Vertreter $z \in \mathrm{Z}_i(\mathcal{L}) \subseteq L_i$ für $\bar z$ ein $x \in M_i$ so daß gilt $z = g_i(x)$, und $y = f_{i-1}^{-1}(\mathrm{d}_i x)$ ist ein Vertreter für $\bar y$. Dann ist $\mathrm{H}_{i-1}(f)(\bar y) = \overline{f_{i-1}(y)} = \overline{\mathrm{d}_i x} = 0$, weil $\mathrm{d}_i x \in \mathrm{B}_{i-1}(\mathcal{M})$ ein Rand ist. Es gilt also $\operatorname{Im}\partial_i \subseteq \operatorname{Ker}\mathrm{H}_{i-1}(f)$.

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[rr, "g_i"] \arrow[ddd, "\mathrm{d}_i"'] & & L_i \arrow[ddd, "\mathrm{d}''_i"'] \\
 & x \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & z & \\
 & & & \\
N_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & M_{i-1} \arrow[rr, "g_{i-1}"] & & L_{i-1} \\
y \arrow[r, mapsto] & \mathrm{d}_i x & &
\end{tikzcd}$$

Umgekehrt: Sei $\bar y \in \operatorname{Ker}\mathrm{H}_{i-1}(f) \subseteq \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{N})$ beliebig und $y \in \mathrm{Z}_{i-1}(\mathcal{N}) \subseteq N_{i-1}$ ein Vertreter für $\bar y$.
Dann ist $\bar 0 = \mathrm{H}_{i-1}(f)(\bar y) = \overline{f_{i-1}(y)}$, d.h. $f_{i-1}(y) \in \mathrm{B}_{i-1}(\mathcal{N})$. Also gibt es ein $x \in M_i$ mit $f_{i-1}(y) = \mathrm{d}_i x$. Sei $z := g_i(x)$. Dann ist z ein Zykel; denn es ist $\mathrm{d}''_i z = \mathrm{d}''_i \circ g_i(x) = g_{i-1} \circ \mathrm{d}_i(x) = g_{i-1} \circ f_{i-1}(y) = 0$, weil $\xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}}$ exakt ist.
Nach Definition von ∂_i ist dann $\bar y = \partial_i \bar z \in \operatorname{Im}\partial_i$.
Also ist auch $\operatorname{Ker}\mathrm{H}_{i-1}(f) \subseteq \operatorname{Im}\partial_i$. q.e.d.

3) *Funktoreigenschaft der langen exakten Homologiefolge*: Es ist zu zeigen, daß jede Masche des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\partial_{i+1}"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{N}) \arrow[r, "\mathrm{H}_i(f)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_i(\alpha)"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{M}) \arrow[r, "\mathrm{H}_i(g)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_i(\beta)"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{L}) \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "\mathrm{H}_i(\gamma)"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{N}) \arrow[r, "\mathrm{H}_{i-1}(f)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_{i-1}(\alpha)"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\mathrm{H}_{i-1}(g)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_{i-1}(\beta)"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\partial_{i-1}"] \arrow[d, "\mathrm{H}_{i-1}(\gamma)"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "\partial'_{i+1}"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{N}') \arrow[r, "\mathrm{H}_i(f')"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{M}') \arrow[r, "\mathrm{H}_i(g')"] & \mathrm{H}_i(\mathcal{L}') \arrow[r, "\partial'_i"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{N}') \arrow[r, "\mathrm{H}_{i-1}(f')"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{M}') \arrow[r, "\mathrm{H}_{i-1}(g')"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{L}') \arrow[r, "\partial'_{i-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Aus der Tatsache, daß die H_i kovariante Funktoren sind, folgt die Kommutativität aller Maschen bis auf die Maschen der Form:
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_i(\mathcal{L}) \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "\mathrm{H}_i(\gamma)"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{N}) \arrow[d, "\mathrm{H}_{i-1}(\alpha)"] \\
\mathrm{H}_i(\mathcal{L}') \arrow[r, "\partial'_i"] & \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{N}')\,.
\end{tikzcd}$$
Deren Kommutativität ist noch zu zeigen. Betrachte dazu das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[dl, "\mathrm{d}_i"'] \arrow[dd, "\beta_i"'] & L_i \arrow[dd, "\gamma_i"] \\
N_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[dd, "\alpha_{i-1}"'] & M_{i-1} \arrow[dd, "\beta_{i-1}"] & & \\
 & & M'_i \arrow[r, "g'_i"'] \arrow[dl, "\mathrm{d}'_i"] & L'_i \\
N'_{i-1} \arrow[r, "f'_{i-1}"'] & M'_{i-1} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{d}_i x \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & z \arrow[d, mapsto] \\
\alpha_{i-1}(y) \arrow[r, mapsto] & \mathrm{d}'_i \circ \beta_i(x) & \beta_i(x) \arrow[r, mapsto] & \gamma_i(z)
\end{tikzcd}$$

Sei $\bar{z} \in \mathrm{H}_i(\mathcal{L})$ und $z \in L_i$ ein Vertreter für $\bar{z}$. Nach Definition von ∂_i wählt man ein $x \in M_i$ mit $z = g_i(x)$. Sei $y \in N_{i-1}$ das Element mit $f_{i-1}(y) = \mathrm{d}_i x$. Dann ist $\partial_i \bar{z} = \bar{y}$ und daher $\mathrm{H}_{i-1}(\alpha) \circ \partial_i \bar{z} = \overline{\alpha_{i-1}(y)}$. Auf der anderen Seite ist $\mathrm{H}_i(\gamma)(\bar{z}) = \overline{\gamma_i(z)}$. Um $\partial'_i \circ \mathrm{H}_i(\gamma)(\bar{z})$ zu berechnen wählt man ein beliebiges Urbild von $\gamma_i(z)$ unter g'_i in M'_{i-1}. Wegen der Kommutativität der rechten Masche des Diagramms ist $\beta_i(x)$ ein solches Urbild.

Ferner ist $f'_{i-1} \circ \alpha_{i-1}(y) = \beta_{i-1} \circ f_{i-1}(y) = \beta_{i-1} \circ \mathrm{d}_i(x) = \mathrm{d}'_i \circ \beta_i(x)$ wegen der Kommutativität der linken und der mittleren Masche. Also ist $\alpha_{i-1}(y)$ das Urbild von $\mathrm{d}'(\beta_i(x))$ unter f'_{i-1}. Nach Definition von ∂'_i ist dann $\partial'_i \circ \mathrm{H}_i(\gamma)(\bar{z}) = \overline{\alpha_{i-1}(y)}$, also $\partial'_i \circ \mathrm{H}_i(\gamma)(\bar{z}) = \mathrm{H}_{i-1}(\alpha) \circ \partial_i \bar{z}$ für alle $\bar{z} \in \mathrm{H}_i(\mathcal{L})$, d.h. $\partial'_i \circ \mathrm{H}_i(\gamma) = \mathrm{H}_{i-1}(\alpha) \circ \partial_i$. □

1.2. **Homotopien von Komplexen.**

1.2.1. Definition. Seien $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ und $(\mathcal{N}, \mathrm{d}')$ zwei Komplexe,
$f, g : (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathrm{d}')$ Morphismen.
Eine „Homotopie zwischen f und g“ ist eine homogene R-lineare Abbildung $s : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ vom Grad $+1$ (kein Morphismus!) mit
$$f - g = \mathrm{d}' \circ s + s \circ \mathrm{d}\,,$$
d.h. $s = (s_i)$, wobei $s_i : M_i \longrightarrow N_{i+1}$ alles R-lineare Abbildungen sind, für die gilt $f_i - g_i = \mathrm{d}'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ \mathrm{d}_i : M_i \to N_i$ für alle i.

1.2.2. *Anmerkung.* Homotope stetige Abbildungen topologischer Räume induzieren auf zugehörigen singulären Komplexen gerade homotope Morphismen im Sinne von Definition 1.2.1. Daher der Name.

1.2.3. Satz. *Seien*
$f, g : (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathrm{d}')$ *homotope Morphismen von Komplexen. Dann gilt* $\mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(g)$.

Beweis. Sei s eine Homotopie zwischen f und g, sowie $z \in \mathrm{Z}_i(\mathcal{M})$ ein Zykel. Dann ist $f_i(z) - g_i(z) = \mathrm{d}'_{i+1}\big(s_i(z)\big) + s_{i-1}\big(\underbrace{\mathrm{d}_i z}_{=0}\big) = \mathrm{d}'_{i+1}\big(s_i(z)\big) \in \mathrm{B}_i(\mathcal{N})$, also
$$\mathrm{H}_i(f)(\bar{z}) - \mathrm{H}_i(g)(\bar{z}) = \overline{f_i(z) - g_i(z)} = \bar{0}.$$
□

1.2.4. Definition. Zwei Komplexe $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ und $(\mathcal{N}, \mathrm{d}')$ heißen “homotop“, wenn es Morphismen
$f : (\mathcal{M}, \mathrm{d}) \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathrm{d}')$ und $h : (\mathcal{N}, \mathrm{d}') \longrightarrow (\mathcal{M}, \mathrm{d})$ gibt, so daß gilt:

$f \circ h$ ist homotop zu $\mathrm{id}_{\mathcal{N}}$ und $h \circ f$ ist homotop zu $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$.
f und h heißen in diesem Fall „Homotopismen“.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich unmittelbar:

1.2.5. Satz. *Homotope Komplexe haben isomorphe Homologien.*

1.3. **Auflösungen eines Moduls. Projektive und injektive Moduln.**

1.3.1. Definition. Sei M ein R-Modul.

(1) Eine „linke Auflösung“ $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ von M ist ein absteigender Komplex von R-Moduln $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$ mit $P_i = 0$ für $i < 0$ zusammen mit einer R-linearen Abbildung $p : P_0 \to M$, so daß die Folge
$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_{n+1}} P_n \xrightarrow{\mathrm{d}_n} P_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_2} P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$
exakt ist.

(2) Eine „rechte Auflösung“$(\mathcal{E}, \mathrm{d}; e)$ von M ist ein aufsteigender Komplex von R-Moduln $(\mathcal{E}, \mathrm{d})$ mit $E^i = 0$ für $i < 0$ zusammen mit einer R-linearen Abbildung $e : M \to E^0$, so daß die Folge
$0 \longrightarrow M \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} E^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^2} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} E^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^n} E^n \xrightarrow{\mathrm{d}^{n+1}} \cdots$ exakt ist.

(3) Eine Auflösung von M heißt „endlich“, wenn nur endlich viele der P_i bzw. E^i von Null verschieden sind. In diesem Fall heißt
$$\left.\begin{array}{rl} & \ell := \min\{n \mid P_i = 0 \text{ für } i > n\} \\ \text{bzw.} & \ell := \min\{n \mid E^i = 0 \text{ für } i > n\} \end{array}\right\} \text{ die „Länge der Auflösung“.}$$

Der Komplex $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$ bzw. $(\mathcal{E}, \mathrm{d})$ heißt „auflösender Komplex“.

1.3.2. Definition. Eine „projektive (bzw. freie bzw. flache) Auflösung“ eines R-Moduls M ist eine linke Auflösung $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ von M, so daß alle P_i projektiv (bzw. frei bzw. flach) sind.

Eine „injektive Auflösung“ eines R-Moduls M ist eine rechte Auflösung $(\mathcal{E}, \mathrm{d}, e)$ von M, so daß alle E^i injektiv sind.

Dabei ist:

1.3.3. Definition.

(1) Ein R-Modul P heißt „projektiv“, wenn gilt:
Zu jeder exakten Folge von R-Moduln
$A \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$ und jeder R-linearen Abbildung $f : P \longrightarrow B$ existiert eine R-lineare Abbildung $\tilde{f} : P \longrightarrow A$ mit $f = p \circ \tilde{f}$.
$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ A \arrow[rr, "p"] & & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{ex.}$$

(2) Ein R-Modul E heißt „injektiv“, wenn gilt:
Zu jeder exakten Folge von R-Moduln
$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} A$ und jeder R-linearen Abbildung $f : B \longrightarrow E$ existiert eine R-lineare Abbildung $\tilde{f} : A \longrightarrow E$ mit $f = \tilde{f} \circ i$ (Fortsetzung von f).
$$\begin{tikzcd} & & E & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[ul, dotted, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd} \quad \text{ex.}$$

(3) Ein R-Modul M heißt „dividierbar“, wenn es zu jedem $x \in M$ und jedem $0 \neq r \in R$ ein $y \in M$ gibt mit $x = r \cdot y$.

1.3.4. *Beispiele.*

(1) Der Nullmodul ist sowohl projektiv als auch injektiv.
(2) Jeder freie R-Modul ist projektiv.

(3) Sei R ein Hauptidealring und M ein R-Modul. Dann gilt:
M ist injektiv $\Leftrightarrow$ M ist dividierbar (folgt aus Korollar 1.3.11.).
z. B. $R := \mathbb{Z}$. Dann sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektive R-Moduln.

1.3.5. *Anmerkung.* Auf Grund der Definitionen sieht man sofort, daß eine endliche direkte Summe von projektiven (bzw. injektiven) Moduln wieder ein projektiver (bzw. injektiver) Modul ist.

1.3.6. Satz. *Sei P ein R-Modul. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *P ist projektiv.*
(2) *P ist direkter Summand eines projektiven R-Moduls.*
(3) *P ist direkter Summand eines freien R-Moduls.*
(4) *Jede exakte Folge von R-Moduln*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0$$

zerfällt; d.h. es gibt eine R-lineare Abbildung $\varphi : P \to B$ mit $p \circ \varphi = \mathrm{id}_P$.
Zusatz: *In diesem Falle ist $B = i(A) \oplus \varphi(P)$ und $P \overset{\varphi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \varphi(P)$.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(4): Betrachte das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dotted, "\varphi"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "p"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{ex.}$$

Da P projektiv ist, existiert nach Definition ein $\varphi : P \to B$ mit $p \circ \varphi = \mathrm{id}_P$.
Beweis des Zusatzes: Sei $x \in B$ beliebig. Dann ist
$p\big(x - \varphi(p(x))\big) = p(x) - \underbrace{(p \circ \varphi)}_{=\mathrm{id}_P}(p(x)) = 0$. Also ist $x - \varphi(p(x)) \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$ und es gibt ein $a \in A$ mit $x - \varphi(p(x)) = i(a)$. Also ist $x = i(a) + \varphi(p(x)) \in i(A) + \varphi(P)$ und daher $B = i(A) + \varphi(P)$. Die Summe ist direkt:
Sei $z \in i(A) \cap \varphi(P)$. Dann ist $z = i(y)$ mit einem $y \in A$ und $z = \varphi(\eta)$ mit einem $\eta \in P$. Es folgt $0 = p(i(y)) = p(z) = p \circ \varphi(\eta) = \eta$, also $z = \varphi(\eta) = 0$. Wegen $p \circ \varphi = \mathrm{id}_P$ ist φ injektiv und daher $P \overset{\varphi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \varphi(P)$.
(4)$\Rightarrow$(3): Stelle P dar als homomorphes Bild eines freien R-Moduls F:
$0 \to K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} P \to 0$. Nach dem Zusatz zu (4) ist dann $F = i(K) \oplus \varphi(P)$ und $P \simeq \varphi(P)$. Also ist P direkter Summand des freien Moduls F.
(3)$\Rightarrow$(2) gilt nach Beispiel 1.3.4. (2).
(2)$\Rightarrow$(1): Sei F ein projektiver R-Modul, so daß P ein direkter Summand von F ist:

$F = C \oplus P$ und sei $\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "?"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$ ex. gegeben.

Sei $\pi : F \to P$ die Projektion und $j : P \to F$ die Injektion der direkten Summe.
Man hat dann $f \circ \pi : F \to B$, und da F projektiv ist, gibt es ein $g : F \to A$ mit $f \circ \pi = p \circ g$. Sei $\tilde{f} := g \circ j$. Dann ist
$p \circ \tilde{f} = p \circ (g \circ j) = (p \circ g) \circ j = (f \circ \pi) \circ j = f \circ \underbrace{(\pi \circ j)}_{=\mathrm{id}_P} = f$. Also ist P projektiv.

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, shift left, "\pi"] \arrow[dd, "g"'] & & & \\
& P \arrow[ul, shift left, "j"] \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
A \arrow[rr, "p"] & & B \arrow[r] & 0 \text{ ex.}
\end{tikzcd}
$$

□

1.3.7. Korollar. *Sei $\psi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und P ein projektiver R-Modul. Dann ist $S \otimes_R P$ ein projektiver S-Modul.*

Beweis. Als projektiver R-Modul ist P nach Satz 1.3.6. direkter Summand eines freien R-Moduls F, also $F = P \oplus Q$ mit einem R-Modul Q. Es folgt $S \otimes_R F = S \otimes_R P \oplus S \otimes_R Q$. Da $S \otimes_R F$ ein freier S-Modul ist, folgt wiederum mit Satz 1.3.6., daß $S \otimes_R P$ ein projektiver S-Modul ist. □

1.3.8. Satz. *Sei R ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt:*
M ist projektiv $\Longleftrightarrow$ M ist frei.

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: Ist trivial (s.a. Beispiel 1.3.4. (2).)
$\underline{\Rightarrow}$: Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein minimales Erzeugendensystem für M. Bilde den freien R-Modul $F := R \cdot X_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot X_n$ mit der Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ und definiere eine R-lineare Abbildung $p : F \to M$ durch $p(X_i) := x_i$ für alle i. Dann hat man eine exakte Folge
$0 \to K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} M \to 0$
und, weil M projektiv ist, zerfällt diese nach Satz 1.3.6. (4). Insbesondere ist dann mit dem φ aus diesem Satz $K \simeq F/\varphi(M)$, also ist K auch endlich erzeugt. Da die Folge zerfällt, bleibt sie auch modulo $\mathfrak{m}$ mit den induzierten Abbildungen exakt:
$0 \to K/\mathfrak{m} \cdot K \xrightarrow{\bar{i}} F/\mathfrak{m} \cdot F \xrightarrow{\bar{p}} M/\mathfrak{m} \cdot M \to 0$
$F/\mathfrak{m} \cdot F$ ist ein $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum mit den Restklassen $\bar{X}_i$ der X_i als Basis und, weil die x_i ein minimales Erzeugendensystem für M bilden, sind die Restklassen $\bar{x}_i$ der x_i eine $R/\mathfrak{m}$-Basis von $M/\mathfrak{m} \cdot M$ als $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum. Wegen $\bar{p}(\bar{X}_i) = \bar{x}_i$ ist dann $\bar{p}$ ein $R/\mathfrak{m}$-Isomorphismus, also $K/\mathfrak{m} \cdot K = 0$ und daher, weil K endlich erzeugt ist, nach Krull-Nakayama $K = 0$. Es folgt $F \xrightarrow[\sim]{p} M$, also ist M frei. □

1.3.9. Satz. *Sei R ein Ring und M ein endlich präsentierbarer R-Modul. Dann gilt: M ist projektiv $\Longleftrightarrow$ $M_{\mathfrak{m}}$ ist ein freier $R_{\mathfrak{m}}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R.*

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$: Wenn M projektiv ist, ist M nach Satz 1.3.6. (3) direkter Summand eines freien R-Moduls. Lokalisiert man eine solche direkte Summe nach einem $\mathfrak{m}$, so sieht man, daß $M_{\mathfrak{m}}$ direkter Summand eines freien $R_{\mathfrak{m}}$-Moduls ist. Also ist $M_{\mathfrak{m}}$ ein projektiver $R_{\mathfrak{m}}$-Modul. Da M als endlich präsentierbarer Modul ein endlich erzeugter R-Modul ist, ist auch $M_{\mathfrak{m}}$ ein endlich erzeugter $R_{\mathfrak{m}}$-Modul. Da $R_{\mathfrak{m}}$ lokal ist, ist dann nach Satz 1.3.8. $M_{\mathfrak{m}}$ sogar ein freier $R_{\mathfrak{m}}$-Modul. q.e.d.
$\underline{\Leftarrow}$: Sei $A \xrightarrow{p} B \to 0$ eine exakte Folge von R-Moduln und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, B)$ beliebig vorgegeben. Nach Definition von „projektiv“ muß man zeigen, daß es ein $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(M, A)$ gibt mit

$f = p \circ \tilde{f}$. Das bedeutet, daß die Abbildung
$\mathrm{Hom}(M,p) : \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B)$ surjektiv ist (vgl. Beispiel 1.5.4. (3)).
Betrachte die exakte Folge von R-Moduln
$\mathrm{Hom}_R(M,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,p)} \mathrm{Hom}_R(M,B) \to \mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}(M,p)\big) \to 0\,.$
Da Lokalisieren ein exakter Funktor ist, erhält man daraus für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R die exakte Folge von $R_\mathfrak{m}$-Moduln
$\big(\mathrm{Hom}_R(M,A)\big)_\mathfrak{m} \xrightarrow{(\mathrm{Hom}(M,p))_\mathfrak{m}} \big(\mathrm{Hom}_R(M,B)\big)_\mathfrak{m} \to \big(\mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}(M,p)\big)\big)_\mathfrak{m} \to 0\,.$
Da M endlich präsentierbar ist, ist nach [4, § 2, no.10, Prop 11]
$\big(\mathrm{Hom}_R(M,A)\big)_\mathfrak{m} = \mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{m}}\big(M_\mathfrak{m}, A_\mathfrak{m}\big)$ und
$\big(\mathrm{Hom}_R(M,B)\big)_\mathfrak{m} = \mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{m}}\big(M_\mathfrak{m}, B_\mathfrak{m}\big)$ sowie
$\big(\mathrm{Hom}(M,p)\big)_\mathfrak{m} = \mathrm{Hom}\big(M_\mathfrak{m}, p_\mathfrak{m}\big)$.
Aus der Exaktheit der obigen Folge erhält man dann
$\big(\mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}(M,p)\big)\big)_\mathfrak{m} = \mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}(M_\mathfrak{m}, p_\mathfrak{m})\big)$.
Da nach Voraussetzung $M_\mathfrak{m}$ frei und damit projektiv ist, ist
$\mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}(M_\mathfrak{m}, p_\mathfrak{m})\big) = 0$. Folglich ist
$\big(\mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}(M,p)\big)\big)_\mathfrak{m} = 0$ für alle maximalen Ideale von R. Daraus folgt¶
$\mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}(M,p)\big) = 0$, d.h. $\mathrm{Hom}(M,p)$ ist surjektiv und folglich ist M projektiv. □

1.3.10. Satz (Satz von Baer).
Sei E ein R-Modul. Es gilt:
E ist genau dann injektiv, wenn es für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ und jede R-lineare Abbildung $f : \mathfrak{a} \to E$ ein $y \in E$ gibt mit $f(\xi) = \xi \cdot y$ für alle $\xi \in \mathfrak{a}$. (D.h. mit den Bezeichnungen von Definition 1.3.3. (2) genügt es, den Fall $A = R$ zu betrachten.)

$$\begin{tikzcd} & & E & \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i"] & & R \arrow[ul, dotted, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$ *ex.*

Beweis. $\Rightarrow$: Da E nach Voraussetzung injektiv ist, läßt sich f zu einer R-linearen Abbildung $\tilde{f} : R \to E$ fortsetzen. Sei $y := \tilde{f}(1)$.
Dann ist $f(\xi) = \tilde{f} \circ i(\xi) = \tilde{f}(\xi \cdot 1) = \xi \cdot y$ für alle $\xi \in \mathfrak{a}$. q.e.d.

$\Leftarrow$: Seien nun eine exakte Folge $0 \to B \xrightarrow{i} A$ und eine R-lineare Abbildung $f : B \to E$ beliebig vorgegeben. Betrachte die Menge $\mathfrak{M}$ aller Paare (A', f') wobei A' Untermodul von A ist mit $i(B) \subseteq A'$, so daß es eine lineare Abbildung

$$\begin{tikzcd} & & E & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[ul, dotted, "?"'] \end{tikzcd}$$ ex.

$f' : A' \to E$ gibt mit $f = f' \circ i$. Es ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$; denn $\big(i(B), f \circ i^{-1}\big) \in \mathfrak{M}$. Führe auf $\mathfrak{M}$ eine teilweise Ordnung ein durch $(A'_1, f'_1) \leq (A'_2, f'_2) \Leftrightarrow A'_1 \subseteq A'_2$ und $f'_2|A'_1 = f'_1$. Mit dieser Ordnung ist $\mathfrak{M}$ offensichtlich induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn gibt es also ein maximales Element $(A'_0, f'_0) \in \mathfrak{M}$.
Behauptung: $A'_0 = A$. (Daraus folgt dann die Behauptung des Satzes.)
Beweis (indirekt): Andernfalls gäbe es ein $x \in A \setminus A'_0$. Sei
$\mathfrak{a} := \{\xi \mid \xi \in R, \xi \cdot x \in A'_0\} = (A'_0 : R \cdot x)$. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R. Sei ferner
$g : \mathfrak{a} \to E$ definiert durch $g(\xi) := f'_0(\xi \cdot x)$.

¶Sei C ein R-Modul und $C_\mathfrak{m} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R. Sei $x \in C$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $\mathfrak{m}$ ein $s^\mathfrak{m} \in R \setminus \mathfrak{m}$ mit $s^\mathfrak{m} \cdot x = 0$. Sei $\mathfrak{x}$ das von allen $s^\mathfrak{m}$ erzeugte Ideal. Dieses liegt in keinem maximalen Ideal von R. Also ist $\mathfrak{x} = R$. Andererseits ist aber nach Definition $\mathfrak{x} \cdot x = 0$ und daher ist $x = 0$. Da dies für alle $x \in C$ gilt, folgt $C = 0$.

g ist R-linear. Nach Voraussetzung gibt es also ein $y \in E$ mit $g(\xi) = \xi \cdot y$ für alle $\xi \in \mathfrak{a}$. Sei nun
$A'' := A'_0 + R \cdot x$ und
$f'' : A'' \to E$ definiert durch $f''(z + r \cdot x) := f'_0(z) + r \cdot y$ für alle $z \in A'_0$ und alle $r \in R$. (Diese Definition ist sinnvoll; denn aus $z_1 + r_1 \cdot x = z_2 + r_2 \cdot x$ folgt $(r_1 - r_2) \cdot x = z_2 - z_1 \in A'_0$ und daher $r_1 - r_2 \in \mathfrak{a}$. Also ist
$r_1 \cdot y - r_2 \cdot y = (r_1 - r_2) \cdot y = g(r_1 - r_2) = f'_0\big((r_1 - r_2) \cdot x\big) = f'_0(z_2 - z_1) = f'_0(z_2) - f'_0(z_1)$, d.h. $f'_0(z_1) + r_1 \cdot y = f'_0(z_2) + r_2 \cdot y$.)
Offensichtlich ist f'' eine R-lineare Abbildung, $i(B) \subseteq A''_0$ und $f''_0|A'_0 = f'_0$. Da schon $i(B) \subseteq A'_0$ ist, gilt dann $f'' \circ i = f' \circ i = f$. Dann wäre $(A'', f'') \in \mathfrak{M}$, aber $(A'_0, f'_0) \lneq (A'', f'')$ im Widerspruch zur Maximalität von (A'_0, f'_0) bzgl. $\leq$ in $\mathfrak{M}$. □

1.3.11. Korollar. *Sei R ein Integritätsbereich und M ein R-Modul. Es gilt:*

(1) *Wenn M injektiv ist, ist M dividierbar.*
(2) *Wenn M torsionsfrei ist gilt:*
M injektiv $\Leftrightarrow$ M ist dividierbar.
(Dagegen gibt es bei R-Moduln mit Torsion Beispiele für dividierbare Moduln, die nicht injektiv sind:
Sei $R := k[X, Y]$ Polynomring in X, Y über einem Körper k und
$M := \mathrm{Quot}(R)/R$. Dann ist M dividierbar, aber nicht injektiv.)
(3) *Wenn R Hauptidealring ist gilt:*
M injektiv $\Leftrightarrow$ M ist dividierbar.

Beweis. (1): Sei M injektiv, $x \in M$ und $0 \neq r \in R$ beliebig. Sei $\mathfrak{a} = R \cdot r$ das von r erzeugte Hauptideal in R. Definiere eine R-lineare Abbildung $f : \mathfrak{a} \to M$ durch $f(s \cdot r) := s \cdot x$ für alle $s \in R$. Diese Definition ist sinnvoll; denn, da R Integritätsbereich ist, hat jedes Element von $\mathfrak{a}$ eine eindeutige Darstellung der Form $s \cdot r$. Da M injektiv ist, gibt es dann nach Satz 1.3.10 ein Element $y \in M$ mit $s \cdot x = f(s \cdot r) = s \cdot r \cdot y$ für alle $s \in R$. Für $s = 1$ hat man dann $x = r \cdot y$. q.e.d.
(2): „$\Rightarrow$“ gilt allgemein nach (1).
„$\Leftarrow$“: Sei M dividierbar, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R und $f : \mathfrak{a} \to M$ eine R-lineare Abbildung. Zu jedem $0 \neq \xi \in \mathfrak{a}$ gibt es dann wegen der Dividierbarkeit von M ein (wegen der Torsionsfreiheit von M eindeutig bestimmtes) $y_\xi \in M$ mit $f(\xi) = \xi \cdot y_\xi$. Ist auch $0 \neq \eta \in \mathfrak{a}$, so ist $\eta \cdot \xi \cdot y_\xi = \eta \cdot f(\xi) = f(\eta \cdot \xi) = \xi \cdot f(\eta) = \xi \cdot \eta \cdot y_\eta$. Weil R nullteilerfrei und M torsionsfrei ist, folgt daraus $y_\xi = y_\eta =: y$, also ist für alle $\xi \in \mathfrak{a}$ dann $f(\xi) = \xi \cdot y$. (Falls $\mathfrak{a} = (0)$ ist, tut es trivialerweise $y = 0$). Aus Satz 1.3.10 folgt daraus, daß M injektiv ist. q.e.d.
(3): „$\Rightarrow$“ gilt allgemein nach (1).
„$\Leftarrow$“: Sei M dividierbar, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R und $f : \mathfrak{a} \to M$ eine R-lineare Abbildung. Weil R Hauptidealring ist, ist $\mathfrak{a} = R \cdot a$ mit einem $a \in R$. Weil M dividierbar ist, gibt es ein $y \in M$ mit $f(a) := a \cdot y$. Da jedes $\xi \in \mathfrak{a}$ von der Gestalt $\xi = r \cdot a$ ist, gilt also $f(\xi) = f(r \cdot a) = r \cdot f(a) = r \cdot a \cdot y = \xi \cdot y$. Aus Satz 1.3.10 folgt dann, daß M injektiv ist. □

Da jeder freie R-Modul projektiv ist, und man jeden R-Modul als Faktormodul eines freien R-Moduls darstellen kann, ist jeder R-Modul Faktormodul eines projektiven R-Moduls. Nicht ganz so einfach zeigt man die „duale“ Aussage:

1.3.12. Satz. *Jeder R-Modul ist Untermodul eines injektiven R-Moduls, d.h. es existiert zu jedem R-Modul M ein injektiver R-Modul E und eine R-lineare Abbildung i, so daß man eine exakte Folge $0 \to M \xrightarrow{i} E$ hat.*

Zum Beweis brauchen wir zwei Hilfssätze:

1.3.13. Hilfssatz. *Jeder $\mathbb{Z}$-Modul ist Untermodul eines injektiven $\mathbb{Z}$-Moduls.*

Beweis. Da $\mathbb{Z}$ ein nullteilerfreier Hauptidealring ist, ist ein $\mathbb{Z}$-Modul genau dann injektiv, wenn er dividierbar ist (Korollar 1.3.11. (3)). Sei M ein beliebiger $\mathbb{Z}$-Modul. Stelle M dar als Faktormodul eines freien $\mathbb{Z}$-Moduls nach einem Untermodul K. Es ist $F \simeq \bigoplus_{\iota\in I}\mathbb{Z} \subset \bigoplus_{\iota\in I}\mathbb{Q} =: D$ und D ist offenbar dividierbar. Dann ist $M \simeq F/K \subseteq D/K$ und D/K ist als Faktormodul eines dividierbaren Moduls ebenfalls dividierbar, also injektiv. □

1.3.14. Hilfssatz. *Sei Q ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul. Dann ist $E := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ ein injektiver R-Modul.*
(Dabei ist die R-Modulstruktur von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ gegeben durch:
Sei $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ und $r \in R$ dann ist $(r\cdot\lambda)(\xi) := \lambda(r\cdot\xi)$ für alle $\xi \in R$.)

Beweis. Wir wenden das Kriterium von Satz 1.3.10. an:
Seien ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R und eine R-lineare Abbildung $f : \mathfrak{a} \to E = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ gegeben. Wir definieren dazu eine Abbildung
$g : \mathfrak{a} \to Q$ durch $g(\xi) := f(\xi)(1)$.
g ist jedenfalls additiv, also eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung. Da Q nach Voraussetzung ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist, gibt es also eine $\mathbb{Z}$-lineare Fortsetzung $g' : R \to Q$. Definiere nun eine Abbildung
$\tilde{f} : R \to E$ durch $\tilde{f}(s)(r) := g'(s\cdot r)$ für alle $r, s \in R$.
In der Tat ist $\tilde{f}(s)$ $\mathbb{Z}$-linear, liegt also in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$; denn es ist $\tilde{f}(s)(r_1 + r_2) = g'\left(s\cdot(r_1+r_2)\right) = g'(s\cdot r_1 + s\cdot r_2) = g'(s\cdot r_1) + g'(s\cdot r_2) = \tilde{f}(s)(r_1) + \tilde{f}(s)(r_2)$.
Wir zeigen nun:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \tilde{f}|\mathfrak{a} = f. \\ 2)\ \tilde{f} \text{ ist } R\text{-linear.}\end{array}\right. \overset{1.3.10.}{\Longrightarrow} E \text{ ist ein injektiver } R\text{-Modul.} \quad \text{q.e.d.}$$

Beweis: 1) Für $\xi \in \mathfrak{a}$ und $r \in R$ ist
$\tilde{f}(\xi)(r) = g'(\underbrace{\xi\cdot r}_{\in\mathfrak{a}}) = g(\xi\cdot r) = f(\xi\cdot r)(1) = \underbrace{\left(r\cdot f(\xi)\right)}_{R-\text{lin.}}(1) \underset{\substack{R-\text{Strukt.}\\ \text{auf } E}}{=} f(\xi)(r\cdot 1) =$
$f(\xi)(r)$ für alle $r \in R$, also $\tilde{f}(\xi) = f(\xi)$ für alle $\xi \in \mathfrak{a}$.
2) Seien $t, s, s_1, s_2, r \in R$ beliebig. Dann ist
$\tilde{f}(s_1+s_2)(r) = g'\big((s_1+s_2)\cdot r\big) = g'(s_1\cdot r + s_2\cdot r) = g'(s_1\cdot r) + g'(s_2\cdot r) = \tilde{f}(s_1)(r) + \tilde{f}(s_2)(r) = \big(\tilde{f}(s_1)+\tilde{f}(s_2)\big)(r)$, also $\tilde{f}(s_1+s_2) = \tilde{f}(s_1) + \tilde{f}(s_2)$.
Ebenso
$\tilde{f}(t\cdot s)(r) = g'\big((t\cdot s)\cdot r\big) = g'\big(s\cdot(t\cdot r)\big) = \tilde{f}(s)(t\cdot r) = \big(t\cdot\tilde{f}(s)\big)(r)$ für alle $r \in R$,
also $\tilde{f}(t\cdot s) = t\cdot\tilde{f}(s)$ für alle $s \in R$. □

Beweis von Satz 1.3.12. Betrachte M zunächst nur als $\mathbb{Z}$-Modul.
Nach Hilfssatz 1.3.13. gibt es dann einen injektiven $\mathbb{Z}$-Modul und eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung i, so daß die Folge $0 \to M \xrightarrow{i} Q$ exakt ist. Wende auf diese Folge den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\bullet)$ an und erhalte eine exakte Folge von $\mathbb{Z}$-Moduln

$$(*) \qquad 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M) \xrightarrow{i'} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q).$$

Dabei ist $i' = \mathrm{Hom}(\mathrm{id}_R, i)$ definiert durch $i'(f) := i \circ f$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$. Aber i' ist nicht nur $\mathbb{Z}$-linear sondern sogar R-linear; denn es ist $\big(i'(r \cdot f)\big)(\xi) = \big(i \circ (r \cdot f)\big)(\xi) = i\big(f(r \cdot \xi)\big) = i \circ f(r \cdot \xi) = \big(i'(f)\big)(r \cdot \xi) = \big(r \cdot i'(f)\big)(\xi)$ für alle $\xi \in R$. Also $i'(r \cdot f) = r \cdot i'(f)$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "i'(f)"'] & M \arrow[r, "i"] & Q \end{tikzcd}$$

Die obige Folge $(*)$ ist also sogar eine exakte Folge von R-Moduln.
Nach Hilfssatz 1.3.14. ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ ein injektiver R-Modul. Da ferner jede R-lineare Abbildung insbesondere auch eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung ist, ist
$\mathrm{Hom}_R(R, M) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$. Nun ist aber $\mathrm{Hom}_R(R, M) \underset{R}{\simeq} M$ vermöge $f \mapsto f(1)$, so daß man schließlich eine injektive Einbettung von M in einen injektiven R-Modul erhält durch:
$M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(R, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \xrightarrow{i'} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$. □

Genauer hat man gezeigt:

1.3.15. Korollar. *Für den injektiven R-Modul E aus Satz 1.3.12. kann man $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ nehmen, wobei Q ein injektiver (d.h. ein dividierbarer) $\mathbb{Z}$-Modul ist, der M als $\mathbb{Z}$-Untermodul enthält.*

1.3.16. Satz (Dualer Satz zu Satz 1.3.6.). *Sei E ein R-Modul. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *E ist injektiv.*
(2) *E ist direkter Summand (Faktor) eines injektiven R-Moduls.*
(3) *Jede exakte Folge*
$0 \to E \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} B \to 0$
zerfällt; d.h. es gibt eine R-lineare Abbildung $g : A \to E$ mit $g \circ i = \mathrm{id}_E$.
Zusatz: *In diesem Falle ist $A = i(E) \oplus \mathrm{Ker}\, g$ und $\mathrm{Ker}\, g \underset{p}{\xrightarrow{\sim}} B$.*
Das bedeutet: E ist direkter Summand eines jeden Obermoduls.

Beweis. (1)⇒(3): Betrachte das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & E & & & \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "i"] & A \arrow[ul, dotted, "g"'] \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0 \quad \text{ex.} \end{tikzcd}$$

Weil E injektiv ist, gibt es eine R-lineare Abbildung $g : A \to E$ mit $g \circ i = \mathrm{id}_E$.
Beweis des Zusatzes: Sei $U := \{x - i \circ g(x) \mid x \in A\}$ Dann ist U ein Untermodul von A und es ist
$A = i(E) + U$;
denn jedes $x \in A$ schreibt sich als
$x = i\big(\underbrace{g(x)}_{\in E}\big) + \underbrace{(x - i \circ g(x))}_{\in U}$. Ferner ist:
$U \overset{!}{=} \mathrm{Ker}\, g$.
Beweis: Sei $x \in \mathrm{Ker}\, g$. Dann ist $g(x) = 0$, also auch $i \circ g(x) = 0$ und daher trivialerweise $x = x - i \circ g(x) \in U$.
Umgekehrt gilt für jedes $y \in U$ auch $y = x - i \circ g(x)$ für ein $x \in A$, und daher ist $g(y) = g(x) - g\big(i \circ g(x)\big) = g(x) - \underbrace{(g \circ i)}_{=\mathrm{id}_E} \circ g(x) = 0$. q.e.d.

Es folgt $i(E) \cap U = (0)$; denn wenn für ein $y \in E$ gilt $i(y) \in U = \mathrm{Ker}\, g$, hat man

$y = g(i(y)) = 0$ und daher $i(y) = 0$. Also ist
$A = i(E) \oplus \operatorname{Ker} g$.
Wegen der Exaktheit der Folge $0 \to E \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} B \to 0$ ist $i(E) = \operatorname{Ker} p$ und daher $B = p(A) = p(\operatorname{Ker} g) \simeq \operatorname{Ker} g/(\operatorname{Ker} g \cap i(E)) \simeq \operatorname{Ker} g$. q.e.d.

(3)⇒(2): Nach Satz 1.3.12. gibt es einen injektiven R-Modul $\widetilde{E} \supseteq E$ und nach (3) ist E ein direkter Summand von $\widetilde{E}$. q.e.d.

(2)⇒(1): Sei $\widetilde{E}$ ein injektiver Modul so daß E ein direkter Summand von $\widetilde{E}$ ist: $\widetilde{E} = C \oplus E$ und sei

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & A \arrow[ul, dotted, "?"'] \end{tikzcd} \quad \text{ex.}$$

gegeben.

Sei $\pi : \widetilde{E} \to E$ die Projektion und $j : E \to \widetilde{E}$ die Injektion der direkten Summe.
Man hat dann $j \circ f : B \to \widetilde{E}$, und da $\widetilde{E}$ injektiv ist, gibt es ein $g : A \to \widetilde{E}$ mit $j \circ f = g \circ i$. Sei $\tilde{f} := \pi \circ g$.
Dann ist
$\tilde{f} \circ i = (\pi \circ g) \circ i = \pi \circ (g \circ i) = \pi \circ (j \circ f) = \underbrace{(\pi \circ j)}_{=\mathrm{id}_E} \circ f = f$. Also ist E injektiv.

$$\begin{tikzcd} & & \widetilde{E} \arrow[dl, shift left, "\pi"] \\ & E \arrow[ur, shift left, "j"] & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & A \arrow[ul, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd} \quad \text{ex.}$$

□

Zuletzt noch zwei Abschwächungen der Definition 1.3.3.:

1.3.17. Satz. *Ein R-Modul P ist projektiv genau dann, wenn gilt: Zu jeder exakten Folge von R-Moduln $E \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$, wobei E ein injektiver R-Modul ist, und jeder R-linearen Abbildung $f : P \longrightarrow B$ existiert eine R-lineare Abbildung $\tilde{f} : P \longrightarrow E$ mit $f = p \circ \tilde{f}$.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ E \arrow[rr, "p"] & & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \textit{ex.}$$

Beweis. Wenn P projektiv ist, existiert $\tilde{f}$ nach Definition.

Umgekehrt: Sei

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "?"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ A \arrow[rr, "p"] & & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{ex.}$$

gegeben.

Nach Satz 1.3.12. existiert ein injektiver Modul E und eine injektive R-lineare Abbildung $j : A \to E$. Sei $K := \operatorname{Ker} p$. Bezeichne mit $K' := j(K)$ und sei $q : E \to E/K'$ kanonisch. Dann gibt es eine injektive R-lineare Abbildung $j' : B \to E/K'$ mit $j' \circ p = q \circ j$. Betrachte das nebenstehende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddl, bend right=60, "f'"'] & & \\ A \arrow[rr, "p"] \arrow[d, "j"] & & B \arrow[r] \arrow[d, "j'"] & 0 \quad \text{ex.} \\ E \arrow[rr, "q"] & & E/K' \arrow[r] & 0 \quad \text{ex.} \end{tikzcd}$$

Weil E injektiv ist, gibt es nach Voraussetzung zu $j' \circ f$ eine R-lineare Abbildung f' mit $j' \circ f = q \circ f'$. Wir zeigen, daß es für jedes $x \in P$ ein $y \in A$ gibt mit $f'(x) = j(y)$. Da j injektiv ist, ist dann y durch x eindeutig bestimmt, so daß wir eine Abbildung $\tilde{f} : P \to A$ definieren können durch $\tilde{f}(x) := y$. Offenbar ist $\tilde{f}$ eine R-lineare Abbildung, und es gilt nach Definition $f' = j \circ \tilde{f}$. Man

hat dann $j' \circ p \circ \tilde{f} = q \circ j \circ \tilde{f} = q \circ f' = j' \circ f$. Da j' injektiv ist, folgt $p \circ \tilde{f} = f$, und damit ist dann gezeigt, daß P projektiv ist.
Bleibt zu zeigen, daß es zu $x \in P$ ein $y \in A$ gibt mit $f'(x) = j(y)$:
Weil p surjektiv ist, gibt es ein $z \in A$ mit $f(x) = p(z)$. Dann ist $q \circ f'(x) = j' \circ f(x) = j' \circ p(z) = q \circ j(z)$. Also ist $f'(x) - j(z) \in \operatorname{Ker} q = j(K)$. Es gibt also ein $z' \in K \subseteq A$ mit $f'(x) = j(z) + j(z') = j(y)$ mit $y := z + z' \in A$. ☐

1.3.18. Satz. *Ein R-Modul E ist injektiv genau dann, wenn gilt:*
Zu jeder exakten Folge von R-Moduln
$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} P$, wobei P ein projektiver R-Modul ist, und jeder R-linearen Abbildung $f : B \longrightarrow E$ existiert eine R-lineare Abbildung $\tilde{f} : P \longrightarrow E$ mit $f = \tilde{f} \circ i$ (Fortsetzung von f).

$$\begin{tikzcd} & & E & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i"] & & P \arrow[ul, dotted, "\tilde{f}"'] \quad \textit{ex.} \end{tikzcd}$$

Beweis. Wenn E injektiv ist, existiert $\tilde{f}$ nach Definition.

Umgekehrt: Sei
$$\begin{tikzcd} & & E & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[ul, dotted, "?"'] \quad \text{ex.} \end{tikzcd}$$
gegeben.

Stelle A dar als homomorphes Bild eines freien Moduls F:
$p : F \to A$ mit einer surjektiven R-linearen Abbildung p. Sei $K := \operatorname{Ker} p$ und $B' := \overset{-1}{p}\big(i(B)\big) \subseteq F$. Sei $j : B' \to F$ die Inklusionsabbildung. Dann gibt es eine surjektive R-lineare Abbildung $p' : B' \to B$ mit $i \circ p' = p \circ j$. Dabei ist $\operatorname{Ker} p' = K$; denn für $y \in B'$ ist $p'(y) = 0 \Leftrightarrow 0 = i \circ p'(y) = p \circ j(y) \Leftrightarrow y = j(y) \in \operatorname{Ker} p$. Betrachte das nebenstehende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & & & E & \\ \text{ex.} & 0 \arrow[r] & B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[ul, dotted, "\tilde{f}"'] \\ \text{ex.} & 0 \arrow[r] & B' \arrow[u, "p'"'] \arrow[rr, "j"] & & F \arrow[u, "p"'] \arrow[uul, bend right, "f'"'] \end{tikzcd}$$

Weil F als freier Modul projektiv ist, gibt es nach Voraussetzung zu $f \circ p'$ eine R-lineare Abbildung f' mit $f \circ p' = f' \circ j$. Es ist $f'(K) = 0$; denn für alle $y \in K$ ist
$f'(y) = f' \circ j(y) = f \circ p'(y) = 0$ weil $K = \operatorname{Ker} p'$ ist. Also induziert f' eine R-lineare Abbildung $\tilde{f} : p(F) = A \to E$ mit $\tilde{f} \circ p = f'$. Dann ist
$f \circ p' = f' \circ j = \tilde{f} \circ p \circ j = \tilde{f} \circ i \circ p'$. Da p' surjektiv ist, folgt daraus $f = \tilde{f} \circ i$. Also ist E injektiv. ☐

Im Beweis von Satz 1.3.18. wurde nur benutzt, daß für freie R-Moduln P die angegebene Eigenschaft erfüllt ist. Daher hat man:

1.3.19. Korollar. *Die Aussage von Satz 1.3.18. gilt auch, wenn man „projektiv" durch „frei" ersetzt.*

1.3.20. *Beispiele* (Beispiele für Auflösungen).

(1) Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring und M ein R-Modul. Stelle M dar als Faktormodul eines freien R-Moduls. Man hat dann eine exakte Folge $F_0 \xrightarrow{p} M \to 0$. Weil R Hauptidealring ist, ist $F_1 := \operatorname{Ker} p$ als Untermodul eines freien R-Moduls auch ein freier R-Modul. Ist $\mathrm{d}_1 : F_1 \to F_0$ die Inklusionsabbildung, so hat man dann die exakte Folge $0 \to F_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} F_0 \xrightarrow{p} M \to 0$. Somit hat in diesem Fall jeder R-Modul eine freie und damit auch projektive Auflösung einer Länge ≤ 1.

(2) Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring und M ein R-Modul. Nach Satz 1.3.12. gibt es dann eine injektive Abbildung e von M in einen injektiven R-Modul E^0. Sei $E^1 := E^0/\operatorname{Im} e$ und $\mathrm{d}^1 : E^0 \to E^1$ kanonisch. Dann hat man eine exakte Folge $0 \to M \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} E^1 \to 0$. Als injektiver R-Modul ist E^0 dividierbar (Korollar 1.3.11. (1)), also ist auch E^1 dividierbar als Faktormodul eines dividierbaren Moduls. Da aber R ein Hauptidealring ist, ist jeder dividierbare R-Modul auch injektiv (Korollar 1.3.11. (3)). Also ist E^1 sogar injektiv, und die oben angegebene Folge ist ein injektive Auflösung von M. Somit hat in diesem Fall jeder R-Modul eine injektive Auflösung einer Länge ≤ 1.

1.4. **Zusammenhänge zwischen Auflösungen.** Zum Vergleich verschiedener projektiver und injektiver Auflösungen eines Moduls brauchen wir zunächst vier technische Hilfssätze:

1.4.1. Hilfssatz ([8] §3,No1,Lemma 1)**.** *Sei R ein Ring, P ein projektiver R-Modul. Betrachte das nebenstehende (nichtkommutative!) Diagramm von R-Modul-Homomorphismen: Dabei sei in der oberen Zeile $\alpha \circ \alpha' = 0$ und in der unteren Zeile die Folge $\xrightarrow{\beta'} N \xrightarrow{\beta}$ exakt. Ferner sei $f \circ \alpha' = \beta \circ f'$ und $f = \beta \circ \kappa + \kappa'' \circ \alpha$.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, dotted, "\kappa'"'] \arrow[dr, "f'"] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\kappa"] \arrow[dr, "f"] & M'' \arrow[d, "\kappa''"] & \alpha\circ\alpha'=0 \\ N' \arrow[r, "\beta'"'] & N \arrow[r, "\beta"'] & N'' & \text{ex.} \end{tikzcd}$$

Dann gibt es eine R-lineare Abbildung $\kappa' : P \to N'$ mit $f' = \beta' \circ \kappa' + \kappa \circ \alpha'$.

Beweis. Sei $g := f' - \kappa \circ \alpha' : P \to N$. Dann ist

$$\beta \circ g = \beta \circ f' - \beta \circ \kappa \circ \alpha' = f \circ \alpha' - \beta \circ \kappa \circ \alpha' = (f - \beta \circ \kappa) \circ \alpha' = \kappa'' \circ \underbrace{\alpha \circ \alpha'}_{=0} = 0$$

Also ist $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \beta'$.
Betrachte die eingeschränkten Abbildungen.
$\beta' : N' \to \operatorname{Im} \beta'$ und $g : P \to \operatorname{Im} \beta'$.
Da P projektiv ist, gibt es eine R-lineare Abbildung $\kappa' : P \to N'$ mit
$g = \beta' \circ \kappa'$ d.h.
$f' = g + \kappa \circ \alpha' = \beta' \circ \kappa' + \kappa \circ \alpha'$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\kappa'"'] \arrow[d, "g"] & & \\ N' \arrow[r, "\beta'"] & \operatorname{Im} \beta' \arrow[r] & 0 & \text{ex.} \end{tikzcd}$$

□

1.4.2. Hilfssatz ([8] §3,No1,Lemma 2)**.** *Sei R ein Ring, P ein projektiver R-Modul. Betrachte das nebenstehende Diagramm von R-Modul Homomorphismen: Dabei sei in der oberen Zeile $\alpha \circ \alpha' = 0$ und in der unteren Zeile die Folge $\xrightarrow{\beta'} N \xrightarrow{\beta}$ exakt. Ferner sei die rechte Masche kommutativ: $u'' \circ \alpha = \beta \circ u$.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, dotted, "u'"'] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"] & M'' \arrow[d, "u''"] & \alpha\circ\alpha'=0 \\ N' \arrow[r, "\beta'"'] & N \arrow[r, "\beta"'] & N'' & \text{ex.} \end{tikzcd}$$

Dann gibt es eine R-lineare Abbildung $u' : P \to N'$, die die linke Masche kommutativ macht: $u \circ \alpha' = \beta' \circ u'$.

Beweis. Setze in Hilfssatz 1.4.1. $\kappa'' := u''$, $\kappa := -u$, $f := 0$, $f' := 0$. Dann ist $u' := \kappa'$ die gesuchte Abbildung. □

Analoge Hilfssätze gelten auch im dualen Fall:

1.4.3. Hilfssatz ([8] §3,No1,Lemma 1 bis). *Sei R ein Ring, E ein injektiver R-Modul. Betrachte das nebenstehende (nichtkommutative!) Diagramm von R-Modul-Homomorphismen:*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\kappa'"'] \arrow[dr, "f'"] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\kappa"] \arrow[dr, "f"] & M'' \arrow[d, dashed, "\kappa''"] & \text{ex.} \\ N' \arrow[r, "\beta'"'] & N \arrow[r, "\beta"'] & E & \beta\circ\beta'=0 \end{tikzcd}$$

Dabei sei in der unteren Zeile $\beta \circ \beta' = 0$ und in der oberen Zeile die Folge $\xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha}$ exakt. Ferner sei $f \circ \alpha' = \beta \circ f'$ und $f' = \beta' \circ \kappa' + \kappa \circ \alpha'$. Dann gibt es eine R-lineare Abbildung $\kappa'' : M'' \to E$ mit $f = \beta \circ \kappa + \kappa'' \circ \alpha$.

Beweis. Sei $g := f - \beta \circ \kappa : M \to E$. Dann ist

$$g \circ \alpha' = f \circ \alpha' - \beta \circ \kappa \circ \alpha' = \beta \circ f' - \beta \circ \kappa \circ \alpha' = \beta \circ (f' - \kappa \circ \alpha') = \underbrace{\beta \circ \beta'}_{=0} \circ \kappa' = 0$$

Also ist $\operatorname{Ker} g \supseteq \operatorname{Im} \alpha' = \operatorname{Ker} \alpha$.
Seien $\pi : M \to M/\operatorname{Ker}\alpha$ und $i : M/\operatorname{Ker}\alpha \to M''$ kanonisch. Dann ist also $\alpha = i \circ \pi$.
g induziert eine R-lineare Abbildung $\bar{g} : M/\operatorname{Ker}\alpha \to E$ mit $g = \bar{g} \circ \pi$.
Da E injektiv ist, gibt es eine R-lineare Abbildung $\kappa'' : M'' \to E$ mit $\bar{g} = \kappa'' \circ i$ d.h.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ 0 \arrow[r] & M/\operatorname{Ker}\alpha \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\bar{g}"'] & M'' \arrow[d, dashed, "\kappa''"] \\ & & E \end{tikzcd}$$

$g = \bar{g} \circ \pi = \kappa'' \circ i \circ \pi = \kappa'' \circ \alpha$. und daher $f = \beta \circ \kappa + g = \beta \circ \kappa + \kappa'' \circ \alpha$. □

1.4.4. Hilfssatz ([8] §3,No1,Lemma 2 bis). *Sei R ein Ring, E ein injektiver R-Modul. Betrachte das nebenstehende Diagramm von R-Modul-Homomorphismen:*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "u'"'] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"] & M'' \arrow[d, dashed, "u''"] & \text{ex.} \\ N' \arrow[r, "\beta'"'] & N \arrow[r, "\beta"'] & E & \beta\circ\beta'=0 \end{tikzcd}$$

Dabei sei in der unteren Zeile $\beta \circ \beta' = 0$ und in der oberen Zeile die Folge $\xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha}$ exakt. Ferner sei die linke Masche kommutativ: $u \circ \alpha' = \beta' \circ u'$. Dann gibt es eine R-lineare Abbildung $u'' : M'' \to E$, die die rechte Masche kommutativ macht: $u'' \circ \alpha = \beta \circ u$.

Beweis. Setze in Hilfssatz 1.4.3. $\kappa' := u'$, $\kappa := -u$, $f := 0$, $f' := 0$. Dann ist $u'' := \kappa''$ die gesuchte Abbildung. □

1.4.5. Satz. *Sei R ein Ring.*

(1) *Seien $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$ und $(\mathcal{Q}, \delta)$ absteigende Komplexe von R-Moduln sowie $r \in \mathbb{Z}$. Sei $(u_i : P_i \to Q_i \mid i \in \mathbb{Z},\ i \leq r)$ eine Familie von R-Modul-Homomorphismen mit $\delta_i \circ u_i = u_{i-1} \circ \mathrm{d}_i$ für alle $i \leq r$.*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] {} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & P_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{d}_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "u_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "\mathrm{d}_n"] \arrow[d, dashed, "u_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, dashed, "u_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & P_r \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "u_r"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & P_i \arrow[r, "\mathrm{d}_i"] \arrow[d, "u_i"] & P_{i-1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "u_{i-1}"] & {} \\ {} \arrow[r, "\delta"] & Q_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & Q_n \arrow[r, "\delta_n"] & Q_{n-1} \arrow[r, "\delta"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & Q_r \arrow[r, "\delta"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & Q_i \arrow[r, "\delta_i"] & Q_{i-1} \arrow[r, "\delta"] & {} \end{tikzcd}$$

Seien die P_j projektiv für $j > r$ und $\mathrm{H}_j(\mathcal{Q}) = 0$ für $j \geq r$. Dann gilt:

Die Familie $(u_i \mid i \leq r)$ läßt sich zu einem Morphismus $(\mathcal{P}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{Q}, \delta)$ fortsetzen und je zwei solche Fortsetzungen sind homotop.

(2) *Seien $(\mathcal{G},\delta)$ und $(\mathcal{E},\delta)$ aufsteigende Komplexe von R-Moduln sowie $r \in \mathbb{Z}$. Sei $(u^i : G^i \to E^i \mid i \in \mathbb{Z},\ i \leq r)$ eine Familie von R-Modul-Homomorphismen mit $u^i \circ \mathrm{d}^i = \delta^i \circ u^{i-1}$ für alle $i \leq r$.*

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & G^{i-1} \arrow[r, "\mathrm{d}^i"] \arrow[d, "u^{i-1}"] & G^i \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "u^i"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & G^r \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "u^r"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & G^{n-1} \arrow[r, "\mathrm{d}^n"] \arrow[d, dotted, "u^{n-1}"] & G^n \arrow[r, "\mathrm{d}^{n+1}"] \arrow[d, dotted, "u^n"] & G^{n+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, dotted, "u^{n+1}"] & {} \\
{} \arrow[r, "\delta"] & E^{i-1} \arrow[r, "\delta^i"] & E^i \arrow[r, "\delta"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & E^r \arrow[r, "\delta"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & E^{n-1} \arrow[r, "\delta^n"] & E^n \arrow[r, "\delta^{n+1}"] & E^{n+1} \arrow[r, "\delta"] & {}
\end{tikzcd}$$

Seien die E^j injektiv für $j > r$ und $\mathrm{H}^j(\mathcal{E}) = 0$ für $j \geq r$. Dann gilt:

Die Familie $(u^i \mid i \leq r)$ läßt sich zu einem Morphismus $(\mathcal{G},\mathrm{d}) \to (\mathcal{E},\delta)$ fortsetzen und je zwei solche Fortsetzungen sind homotop.

Beweis. (1): Die Existenz der Fortsetzung $u_j : P_j \to Q_j$ für $j > r$ folgt aus Hilfssatz 1.4.2. durch Induktion: Beginn bei $n = r$. Sei u_n für ein $n \geq r$ schon konstruiert mit $\delta_n \circ u_n = u_{n-1} \circ \mathrm{d}_n$. Setze im Hilfssatz 1.4.2. $u'' := u_{n-1}$, $u := u_n$, $\alpha := \mathrm{d}_n$, $\alpha' := \mathrm{d}_{n+1}$, $\beta := \delta_n$, $\beta' := \delta_{n+1}$. Weil $(\mathcal{P},\mathrm{d})$ ein Komplex ist, ist dann $\alpha \circ \alpha' = 0$, und weil nach Voraussetzung $\mathrm{H}_n(\mathcal{Q}) = 0$ ist für $n \geq r$ ist die Folge $\xrightarrow{\beta'} Q_n \xrightarrow{\beta}$ exakt. Da schließlich P_{n+1} projektiv ist, folgt aus dem Hilfssatz die Existenz eines $u_{n+1} : P_{n+1} \to Q_{n+1}$ mit $\delta_{n+1} \circ u_{n+1} = u_n \circ \mathrm{d}_{n+1}$. q.e.d.

Eindeutig bis auf Homotopie: Sei $(v_i \mid i \in \mathbb{Z})$ eine zweite Fortsetzung von $(u_i \mid i \leq r)$. Setze $f := v - u$, d.h. $f_i := v_i - u_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Für $i \leq r$ ist nach Voraussetzung $v_i = u_i$, also $f_i = 0$. Konstruiere induktiv eine Familie von R-Modul-Homomorphismen
$s_n : P_n \to Q_{n+1}$ mit $f_n = \delta_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ \mathrm{d}_n$:
Für $n \leq r$ setze $s_n := 0$; denn dort ist auch $f_n = 0$. Sei nun $n > r$ und alle s_i für $i < n$ seien schon konstruiert. Betrachte das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{d}_{n+1}"] \arrow[d, dotted, "s_{n+1}"'] \arrow[dr, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "\mathrm{d}_n"] \arrow[d, "s_n"] \arrow[dr, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "s_{n-1}"] & \mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1} = 0 \\
Q_{n+2} \arrow[r, "\delta_{n+2}"'] & Q_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] & Q_n & \text{ex.}
\end{tikzcd}$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1.4.1. sind erfüllt. Also existiert ein
$s_{n+1} : P_{n+1} \to Q_{n-2}$ mit $f_{n+1} = \delta_{n+2} \circ s_{n+1} + s_n \circ \mathrm{d}_{n+1}$. q.e.d.

(2): Der Beweis geht dual zum Beweis von (1) mit Hilfssatz 1.4.3. und Hilfssatz 1.4.4. □

1.4.6. Satz. *Sei R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Seien ferner*
$(\mathcal{P},\mathrm{d};p)$ eine projektive Auflösung von M,
$(\mathcal{Q},\delta;q)$ eine linke Auflösung von N,
$f : M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus.
Dann gibt es einen Morphismus von Komplexen $\tilde{f} : (\mathcal{P},\mathrm{d}) \to (\mathcal{Q},\delta)$ mit $f \circ p = q \circ \tilde{f}_0$.
$\tilde{f}$ ist bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_3"] & P_2 \arrow[r, "\mathrm{d}_2"] \arrow[d, dotted, "\tilde{f}_2"] & P_1 \arrow[r, "\mathrm{d}_1"] \arrow[d, dotted, "\tilde{f}_1"] & P_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, dotted, "\tilde{f}_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\delta_3"] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r, "q"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweis. Betrachte die Komplexe

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_3"] & P_2 \arrow[r, "\mathrm{d}_2"] \arrow[d, dashed, "\tilde f_2"] & P_1 \arrow[r, "\mathrm{d}_1"] \arrow[d, dashed, "\tilde f_1"] & P_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "\tilde f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_3"] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r, "q"] & N \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

und die Familie $(u_i \mid i \leq -1)$ von R-linearen Abbildungen mit $u_{-1} := f$ und $u_i = 0$ für alle $i \leq -2$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 1.4.5. (1) mit $r := -1$, $P_{-1} := M$, $Q_{-1} := N$, $u_{-1} := f$. □

1.4.7. Korollar. *Je zwei projektive Auflösungen eines R-Moduls M sind homotop. Genauer:*
Sind $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ und $(\mathcal{P}', \mathrm{d}'; p')$ zwei projektive Auflösungen von M, so existiert bis auf Homotopie genau ein Homotopismus $\tilde f : (\mathcal{P}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{P}', \mathrm{d}')$ mit $p = p' \circ \tilde f_0$.

Beweis. Nach Satz 1.4.6. gibt es zu $\mathrm{id}_M : M \to M$ einen Morphismus
$\tilde f : (\mathcal{P}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{P}', \mathrm{d}')$ mit $p = p' \circ \tilde f_0$
und ebenso einen Morphismus
$\tilde g : (\mathcal{P}', \mathrm{d}') \to (\mathcal{P}, \mathrm{d})$ mit $p' = p \circ \tilde g_0$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_3"] & P_2 \arrow[r, "\mathrm{d}_2"] \arrow[d, shift left, "\tilde f_2"] & P_1 \arrow[r, "\mathrm{d}_1"] \arrow[d, shift left, "\tilde f_1"] & P_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift left, "\tilde f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}_M"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}'_3"] & P'_2 \arrow[r, "\mathrm{d}'_2"] \arrow[u, shift left, "\tilde g_2"] & P'_1 \arrow[r, "\mathrm{d}'_1"] \arrow[u, shift left, "\tilde g_1"] & P'_0 \arrow[r, "p'"] \arrow[u, shift left, "\tilde g_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dann ist
$p = p \circ \tilde g_0 \circ \tilde f_0 = p \circ (\tilde g \circ \tilde f)_0$ und
$p' = p' \circ \tilde f_0 \circ \tilde g_0 = p' \circ (\tilde f \circ \tilde g)_0$
Da $\tilde f$ und $\tilde g$ Morphismen sind,
ist auch $\tilde g \circ \tilde f : (\mathcal{P}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{P}, \mathrm{d})$ ein Morphismus von Komplexen und es gilt offensichtlich $p = p \circ (\tilde g \circ \tilde f)_0$.
Trivialerweise ist auch $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ ein solcher Morphismus. Nach Satz 1.4.6. ist daher $\tilde g \circ \tilde f$ homotop zur Identität von $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$.
Ebenso ist $\tilde f \circ \tilde g : (\mathcal{P}', \mathrm{d}') \to (\mathcal{P}', \mathrm{d}')$ ein Morphismus von Komplexen mit
$p' = p' \circ (\tilde f \circ \tilde g)_0$.
Trivialerweise ist auch $\mathrm{id}_{\mathcal{P}'}$ ein solcher Morphismus. Nach Satz 1.4.6. ist daher $\tilde f \circ \tilde g$ homotop zur Identität von $(\mathcal{P}', \mathrm{d}')$.
Insgesamt bedeutet das, daß $\tilde f$ (und natürlich auch $\tilde g$) ein Homotopismus ist.
Ferner ist $\tilde f$ als „Fortsetzung“ von p wiederum nach Satz 1.4.6. bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. □

Dual dazu zeigt man mit Satz 1.4.5. (2) den folgenden Satz 1.4.8. und daraus das Korollar 1.4.9.

1.4.8. Satz. *Sei R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Seien ferner*
$(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$ eine injektive Auflösung von M,
$(\mathcal{G}, \delta; j)$ eine rechte Auflösung von N,
$g : N \to M$ ein R-Modul-Homomorphismus.
Dann gibt es einen Morphismus von Komplexen
$\tilde g : (\mathcal{G}, \delta) \to (\mathcal{E}, \mathrm{d})$ mit $i \circ g = \tilde g_0 \circ j$.
$\tilde g$ ist bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] & E^1 \arrow[r, "\mathrm{d}^2"] & E^2 \arrow[r, "\mathrm{d}^3"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] \arrow[u, "g"] & G^0 \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[u, dashed, "\tilde g_0"] & G^1 \arrow[r, "\delta^2"] \arrow[u, dashed, "\tilde g_1"] & G^2 \arrow[r, "\mathrm{d}^3"] \arrow[u, dashed, "\tilde g_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

1.4.9. Korollar. *Je zwei injektive Auflösungen eines R-Moduls M sind homotop. Genauer:*
Sind $(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$ und $(\mathcal{E}', \mathrm{d}'; i')$ zwei injektive Auflösungen von M,so existiert bis auf Homotopie genau ein Homotopismus $\tilde g : (\mathcal{E}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{E}', \mathrm{d}')$ mit $i = \tilde g_0 \circ i'$.

Bezeichnung. Sei R ein Ring und N ein R-Modul. Wir benutzen im weiteren die folgenden Bezeichnungen:
$Z_N := \{x_i \mid i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von N als R-Modul,
$F_{Z_N} := \bigoplus_{i\in I} R \cdot X_i$ der freie R-Modul mit der Basis $\{X_i \mid i \in I\}$,
$\pi_{Z_N} : F_{Z_N} \to N$ die R-lineare Abbildung mit $\pi_{Z_N}(X_i) := x_i$ für alle $i \in I$,
$K_{Z_N} := \operatorname{Ker} \pi_{Z_N}$,
$i_{Z_N} : K_{Z_N} \hookrightarrow F_{Z_N}$ die Inklusionsabbildung.
Man hat also eine exakte Folge:
$0 \to K_{Z_N} \xrightarrow{i_{Z_N}} F_{Z_N} \xrightarrow{\pi_{Z_N}} N \to 0$

1.4.10. Satz. *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann existiert eine freie (also auch projektive) Auflösung von M. Man erhält sie folgendermaßen:*
Wähle ein Erzeugendensystem Z_M von M und setze
$F_0 := F_{Z_M}$, $M_0 := M$, $p := \pi_0 := \pi_{Z_M}$, $M_1 := K_{Z_M}$, $i_0 := i_{Z_M}$.
Wähle ein Erzeugendensystem Z_{M_1} von M_1 und setze
$F_1 := F_{Z_{M_1}}$, $\pi_1 := \pi_{Z_{M_1}}$, $\mathrm{d}_1 := i_0 \circ \pi_1$, $M_2 := K_{Z_{M_1}}$, $i_1 := i_{Z_{M_1}}$.
Wähle ein Erzeugendensystem Z_{M_2} von M_2 und setze
$F_2 := F_{Z_{M_2}}$, $\pi_2 := \pi_{Z_{M_2}}$, $\mathrm{d}_2 := i_1 \circ \pi_2$, $M_3 := K_{Z_{M_2}}$, $i_2 := i_{Z_{M_2}}$.
usw., allgemein:
Wähle ein Erzeugendensystem Z_{M_n} von M_n und setze
$F_n := F_{Z_{M_n}}$, $\pi_n := \pi_{Z_{M_n}}$, $\mathrm{d}_n := i_{n-1} \circ \pi_n$, $M_{n+1} := K_{Z_{M_n}}$, $i_n := i_{Z_{M_n}}$.
Dann ist $\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} F_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} F_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} F_0 \xrightarrow{p} M \to 0$ *eine freie Auflösung von M.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & 0 & \\
 & & M_4 \arrow[ur] \arrow[dr, "i_3"] & & & & M_2 \arrow[ur] \arrow[dr, "i_1"] & & & & M_0 \arrow[ur] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M"] & & \\
 {} \arrow[r, dotted, "\mathbf{d_5}"] & \boldsymbol{F_4} \arrow[ur, "\pi_4"] \arrow[rr, dotted, "\mathbf{d_4}"] & & \boldsymbol{F_3} \arrow[dr, "\pi_3"'] \arrow[rr, dotted, "\mathbf{d_3}"] & & \boldsymbol{F_2} \arrow[ur, "\pi_2"] \arrow[rr, dotted, "\mathbf{d_2}"] & & \boldsymbol{F_1} \arrow[dr, "\pi_1"'] \arrow[rr, dotted, "\mathbf{d_1}"] & & \boldsymbol{F_0} \arrow[ur, "\pi_0"] \arrow[rr, dotted, "\boldsymbol{p}"] & & \boldsymbol{M} \arrow[r] & 0 \\
 {} \arrow[ur, "i_4"'] & & & & M_3 \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[dr] & & & & M_1 \arrow[ur, "i_0"'] \arrow[dr] & & & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Nach Konstruktion sind alle Folgen $0 \to M_{n+1} \overset{i_n}{\hookrightarrow} F_n \xrightarrow{\pi_n} M_n \to 0$ exakt für $n \geq 0$. Es ist also
$\operatorname{Im} \mathrm{d}_{n+1} = i_n(\operatorname{Im} \pi_{n+1}) = i_n(M_{n+1}) = \operatorname{Ker} \pi_n = \operatorname{Ker}(i_{n-1} \circ \pi_n) = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n$ für $n \geq 1$.
Ferner ist auch $\operatorname{Im} \mathrm{d}_1 = M_1 = \operatorname{Ker} p$, und p ist surjektiv. Also ist
$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} F_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} F_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} F_0 \xrightarrow{p} M \to 0$ eine freie Auflösung von M. □

1.4.11. *Anmerkung.* Ist R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, so kann man offenbar in der Konstruktion von Satz 1.4.10 alle F_i als endlich erzeugte R-Moduln wählen. Zur Konstruktion einer „minimalen freien Auflösung“ siehe den Beweis von Lemma 3.1.14.

1.4.12. Definition. Wählt man in der Konstruktion von Satz 1.4.10 stets
$Z_{M_n} := M_n$ für alle $n = 0, 1, \ldots$ (mit $M_0 := M$), so hängt die enstehende freie Auflösung nur von M ab. Sie heißt dann die „kanonische projektive Auflösung“ von M.

1.4.13. Definition. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. M heißt „stabil-frei“ wenn es endlich erzeugte freie R-Moduln F und F' gibt, so daß gilt $M \oplus F = F'$.

1.4.14. Lemma. *M ist genau dann stabil frei, wenn M ein endlich erzeugter projektiver R-Modul ist, der eine endliche Auflösung durch endlich erzeugte freie R-Moduln besitzt.*

Beweis. Sei M stabil frei. Dann ist $M \oplus F = F'$ mit endlich erzeugten freien R-Moduln F und F'. Also ist M endlich erzeugt als homorphes Bild des endlich erzeugten R-Moduls F' unter der kanonischen Projektion und projektiv als direkter Summand des freien R-Moduls F' (Satz 1.3.6). Ferner besitzt M die endliche freie Auflösung $0 \to F \to F' \to M \to 0$ mit den kanonischen Abbildungen der direkten Summe.

Umgekehrt: Sei M ein endlich erzeugter projektiver R-Modul, der eine endliche freie Auflösung: $\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} F_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} F_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} F_0 \xrightarrow{p} M \to 0$
mit endlich erzeugten F_i besitzt.
Zerlege diese in „kurze exakte Folgen“ mit $M_{n+1} := \operatorname{Im} \mathrm{d}_{n+1} = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n$
(mit $M_0 := M$ und $d_0 := p$):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & 0 & \\
 & & M_4 \arrow[ur] \arrow[dr, "i_3"] & & & & M_2 \arrow[ur] \arrow[dr, "i_1"] & & & & M_0 \arrow[ur] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M"] & & \\
 {} \arrow[r, "\mathbf{d_5}"] & \boldsymbol{F_4} \arrow[ur, "\pi_4"] \arrow[rr, "\mathbf{d_4}"] & & \boldsymbol{F_3} \arrow[rr, "\mathbf{d_3}"] \arrow[dr, "\pi_3"'] & & \boldsymbol{F_2} \arrow[ur, "\pi_2"] \arrow[rr, "\mathbf{d_2}"] & & \boldsymbol{F_1} \arrow[rr, "\mathbf{d_1}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \boldsymbol{F_0} \arrow[ur, "\pi_0"] \arrow[rr, "\boldsymbol{p}"] & & \boldsymbol{M} \arrow[r] & 0 \\
 {} \arrow[ur, "i_4"'] & & & & M_3 \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[dr] & & & & M_1 \arrow[ur, "i_0"'] \arrow[dr] & & & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Nach Konstruktion sind alle Folgen $0 \to M_{n+1} \overset{i_n}{\hookrightarrow} F_n \xrightarrow{\pi_n} M_n \to 0$ exakt. Da $M_0 = M$ nach Voraussetzung projektiv ist, zerfällt die Folge
$0 \to M_1 \overset{i_0}{\hookrightarrow} F_0 \xrightarrow{\pi_0} M_0 \to 0$.
Also ist auch M_1 projektiv als direkter Summand des freien Moduls F_0. Wenn wir schon wissen, daß M_n projektiv ist, zerfällt die Folge $0 \to M_{n+1} \overset{i_n}{\hookrightarrow} F_n \xrightarrow{\pi_n} M_n \to 0$ und daher ist dann auch M_{n+1} projektiv als direkter Summand des freien Moduls F_n. Daraus folgt induktiv, daß alle M_n projektiv sind.
Wir zeigen nun durch Induktion nach n:
$\bigoplus_{i=0}^{n} F_{2i} \oplus M_{2(n+1)} \simeq \bigoplus_{j=0}^{n} F_{2j+1} \oplus M$.
Induktionsbeginn bei $n = 0$:
Da die Folgen $0 \to M_1 \to F_0 \to M \to 0$ und $0 \to M_2 \to F_1 \to M_1 \to 0$ zerfallen, ist $F_0 \simeq M_1 \oplus M$ und $F_1 \simeq M_1 \oplus M_2$. Es folgt
$F_0 \oplus M_2 \simeq \underbrace{M_1 \oplus M_2}_{\simeq F_1} \oplus M$ also
$F_0 \oplus M_2 \simeq F_1 \oplus M$.
Induktionsannahme: Die Behauptung sein richtig für ein $n \geq 0$.
Da die Folgen
$0 \to M_{2(n+1)+1} \to F_{2(n+1)} \to M_{2(n+1)} \to 0$ und

$0 \to M_{2(n+1)+2} \to F_{2(n+1)+1} \to M_{2(n+1)+1} \to 0$
zerfallen, ist
$F_{2(n+1)} \simeq M_{2(n+1)} \oplus M_{2(n+1)+1}$ und
$F_{2(n+1)+1} \simeq M_{2(n+1)+1} \oplus M_{2(n+1)+2}$.
Durch direkte Summenbildung mit $M_{2(n+1)+1}$ auf beiden Seiten der Induktionsannahme folgt:

$$\bigoplus_{i=0}^{n} F_{2i} \oplus \underbrace{M_{2(n+1)} \oplus M_{2(n+1)+1}}_{\simeq F_{2(n+1)}} \simeq \bigoplus_{j=0}^{n} F_{2j+1} \oplus M_{2(n+1)+1} \oplus M.$$

Indem man nun auf beiden Seiten die direkte Summe mit $M_{2(n+1)+2}$ bildet erhält man:

$$\bigoplus_{i=0}^{n+1} F_{2i} \oplus M_{2(n+1)+2} \simeq \bigoplus_{j=0}^{n} F_{2j+1} \underbrace{\oplus M_{2(n+1)+1} \oplus M_{2(n+1)+2}}_{\simeq F_{2(n+1)+1}} \oplus M, \text{ also}$$

$$\bigoplus_{i=0}^{n+1} F_{2i} \oplus M_{2(n+1)+2} \simeq \bigoplus_{j=0}^{n+1} F_{2j+1} \oplus M. \qquad \text{q.e.d.}$$

Da die vorgegebene freie Auflösung endlich ist, ist für große n der Modul $M_{2(n+1)} = 0$ und daher $\underbrace{\bigoplus_{i=0}^{n+1} F_{2i}}_{\text{frei, endl.erz.}} \simeq \underbrace{\bigoplus_{j=0}^{n+1} F_{2j+1}}_{\text{frei, endl.erz.}} \oplus M.$

Während man bei dem obigen Induktionsbeweis eine explizite Darstellung der gesuchten freien Moduln F und F' durch die Auflösung erhält, kann man die Existenz schneller so einsehen: Sei
$0 \to F_m \to F_{m-1} \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$
eine endliche freie Auflösung von M.
Falls $m = 1$ ist, zerfällt die Folge $0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$, weil M projektiv ist, also ist $F_0 \simeq F_1 \oplus M$.
Sei nun $m \geq 2$. Wir zeigen, daß es dann auch eine freie Auflösung der Länge $m-1$ gibt, so daß man sukzessiv zu einer Auflösung mit $n = 1$ kommt:
Betrachte das „linke Ende“ der Auflösung:
$0 \to F_m \xrightarrow{\mathrm{d}_m} F_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-1}} M_{m-1} \to 0$ exakt.
Da M_{m-1}, wie oben gezeigt, projektiv ist, zerfällt diese Folge:
$M_{m-1} \oplus F_m \simeq F_{m-1}$.
Man hat dann noch die exakte Folge:
$0 \to M_{m-1} \xrightarrow{i_{m-2}} F_{m-2} \xrightarrow{\mathrm{d}_{m-2}} F_{m-3} \xrightarrow{\mathrm{d}_{m-3}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_1} F_0 \xrightarrow{p} M \to 0.$
Indem man zu M_{m-1} und F_{m-2} jeweils den direkten Summanden F_m hinzufügt und $\mathrm{d}'_{m-1} := i_{m-2} \oplus \mathrm{id}_{F_m}$ sowie $\mathrm{d}'_{m-2} := \mathrm{d}_{m-2} \oplus 0$ setzt, erhält man die exakte Folge:

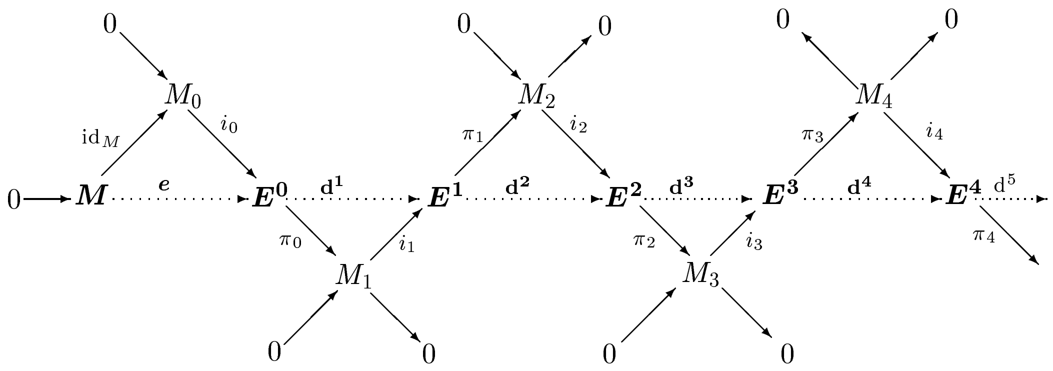
$$0 \to \underbrace{\left(M_{m-1} \oplus F_m\right)}_{\simeq F_{n-1}} \xrightarrow{\mathrm{d}'_{m-1}} \underbrace{\left(F_{m-2} \oplus F_m\right)}_{\text{frei, endl. erz.}} \xrightarrow{\mathrm{d}'_{m-2}} F_{m-3} \xrightarrow{\mathrm{d}_{m-3}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_1} F_0 \xrightarrow{p} M \to 0.$$

Das ist die gesuchte endliche freie Auflösung der Länge $m-1$. □

Der duale Satz zu Satz 1.4.10. in vereinfachter Form lautet:

1.4.15. Satz. *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann existiert eine injektive Auflösung von M. Man erhält sie folgendermaßen:*
Wähle nach Satz 1.3.12. einen injektiven R-Modul E^0 und eine injektive R-lineare Abbildung $e : M \to E^0$. Setze $i_0 := e$ und $M_0 := M$.

Wähle zu $M_1 := E^0/e(M)$ einen injektiven R-Modul E^1 und eine injektive R-lineare Abbildung $i_1 : M_1 \to E^1$ Sei $\pi_0 : E^0 \to E^0/i_0(M)$ kanonisch und $\mathrm{d}^1 := i_1 \circ \pi_0$.
Wähle zu $M_2 := E^1/i_1(M_1)$ einen injektiven R-Modul E^2 und eine injektive R-lineare Abbildung $i_2 : M_2 \to E^2$. Sei $\pi_1 : E^1 \to E^1/i_1(M_1)$ und $\mathrm{d}^2 := i_2 \circ \pi_1$
usw., allgemein:
Wähle zu $M_n := E^{n-1}/i_{n-1}(M_{n-1})$ einen injektiven R-Modul E^n und eine injektive R-lineare Abbildung $i_n : M_n \to E^n$. Sei $\pi_{n-1} : E^{n-1} \to E^{n-1}/i(M_{n-1})$ kanonisch und $\mathrm{d}^n := i^n \circ \pi_{n-1}$.
Dann ist
$0 \to M \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} E^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^2} E^2 \xrightarrow{\mathrm{d}^3} E^3 \xrightarrow{\mathrm{d}^4} \cdots$ *eine injektive Auflösung von M.*



Beweis. Nach Konstruktion sind alle Folgen $0 \to M_n \xrightarrow{i_n} E^n \xrightarrow{\pi_n} M_{n+1} \to 0$ exakt für $n \geq 0$. Es ist also
$\mathrm{Im}\,\mathrm{d}^n = i_n(\mathrm{Im}\,\pi_{n-1}) = i_n(M_n) = \mathrm{Ker}\,\pi_n = \mathrm{Ker}(i_{n+1} \circ \pi_n) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^{n+1}$ für $n \geq 1$.
Ferner ist auch $\mathrm{Im}\, e = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^1$ und e ist injektiv. Also ist
$0 \to M \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} E^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^2} E^2 \xrightarrow{\mathrm{d}^3} E^3 \xrightarrow{\mathrm{d}^4} \cdots$ eine injektive Auflösung von M. □

1.4.16. *Anmerkung.* Dual zur Definition der kanonischen projektiven Auflösung gibt es auch eine „kanonische injektive Auflösung“. Dazu benötigt man den zum Begriff des Erzeugers dualen Begriff eines „Kogenerators“. Näheres siehe z.B. in [8, §1,8 und §3,4].

1.5. **Exakte Funktoren.**

1.5.1. Definition. Sei $\mathcal{F}$ ein additiver Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich.

(1) $\mathcal{F}$ heißt „exakt“, wenn für jede exakte Folge
$N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L$ auch die Folge
$\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(L)$ exakt ist, falls $\mathcal{F}$ kovariant ist,
bzw. die Folge
$\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N)$ exakt ist, falls $\mathcal{F}$ kontravariant ist.

(2) $\mathcal{F}$ heißt „halbexakt“, wenn für jede exakte Folge
$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ auch die Folge
$\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(L)$ exakt ist, falls $\mathcal{F}$ kovariant ist,
bzw. die Folge
$\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N)$ exakt ist, falls $\mathcal{F}$ kontravariant ist.

(3) $\mathcal{F}$ heißt „rechtsexakt“, wenn für jede exakte Folge
$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ auch die Folge
$\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(L) \to 0$ exakt ist, falls $\mathcal{F}$ kovariant ist,
bzw. die Folge
$\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \to 0$ exakt ist, falls $\mathcal{F}$ kontravariant ist.
(Wenn man alle Folgen mit Pfeilen nach rechts schreibt, steht *nach* Anwenden des Funktors *rechts* eine Null!)

(4) $\mathcal{F}$ heißt „linksexakt“, wenn für jede exakte Folge
$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ auch die Folge
$0 \to \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(L)$ exakt ist, falls $\mathcal{F}$ kovariant ist,
bzw. die Folge
$0 \to \mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N)$ exakt ist, falls $\mathcal{F}$ kontravariant ist.
(Wenn man alle Folgen mit Pfeilen nach rechts schreibt, steht *nach* Anwenden des Funktors *links* eine Null!)

1.5.2. *Anmerkung.* $\mathcal{F}$ ist genau dann exakt, wenn $\mathcal{F}$ rechtsexakt und linksexakt ist.

Beweis. Falls $\mathcal{F}$ exakt ist, ist $\mathcal{F}$ trivialerweise rechtsexakt und linksexakt.
Umgekehrt: Sei
$N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L$ exakt. Sei $\mathcal{F}$ kovariant und sowohl rechts- als auch linksexakt (kontravariant analog).
Betrachte die induzierten Abbildungen
$\bar{f} := f|(N \to \operatorname{Im} f)$ und
$\bar{g} := g|(M \to \operatorname{Im} g)$.
(„Zerlegung in kurze exakte Folgen“)
Dann ist
$\operatorname{Im} \bar{f} = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} \bar{g}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & 0 \\
 & & & \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g \arrow[ur] \arrow[dr, "i"] & & & & L/\operatorname{Im} g = \operatorname{Coker} f \arrow[ur] & \\
 & & \boldsymbol{N} \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[rr, "\boldsymbol{f}"] & & \boldsymbol{M} \arrow[rr, "\boldsymbol{g}"] \arrow[dr, "\bar{g}"'] & & \boldsymbol{L} \arrow[ur] & & \\
 & \operatorname{Ker} f \arrow[ur] & & & & \operatorname{Im} g \arrow[ur, "j"'] \arrow[dr] & & & \\
 0 \arrow[ur] & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \\
 \text{ex.} & & & & \text{ex.} & & \text{ex.} & &
\end{tikzcd}$$

Da $\mathcal{F}$ ein Funktor ist, bleiben kommutative Maschen kommutativ, und da $\mathcal{F}$ nach Voraussetzung sowohl rechts- als auch linksexakt ist, bleiben die schrägen kurzen exakten Folgen nach Anwendung von $\mathcal{F}$ exakt.

Auf Grund der Kommutativität der linken Masche und der Rechtsexaktheit von $\mathcal{F}$ ist dann $\operatorname{Im}\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(i)\big(\operatorname{Im}\mathcal{F}(\bar{f})\big) = \operatorname{Im}\mathcal{F}(i)$.
Ebenfalls auf Grund der Rechtsexaktheit von $\mathcal{F}$ ist weiter $\operatorname{Im}\mathcal{F}(i) = \operatorname{Ker}\mathcal{F}(\bar{g})$.
Auf Grund der Linksexaktheit von $\mathcal{F}$ ist aber $\mathcal{F}(j)$ injektiv, also, wegen der Kommutativität der rechten Masche,
$\operatorname{Ker}\mathcal{F}(\bar{g}) = \operatorname{Ker}\mathcal{F}(g)$.
Insgesamt ergibt sich
$\operatorname{Im}\mathcal{F}(f) = \operatorname{Im}\mathcal{F}(i) = \operatorname{Ker}\mathcal{F}(\bar{g}) = \operatorname{Ker}\mathcal{F}(g)$.
d.h. die Folge
$\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(L)$
ist exakt.

$$\begin{tikzcd}
 & & \overset{\text{ex.}}{0} & & \\
 & \mathcal{F}(\operatorname{Im} f) \arrow[ur] \arrow[dr, "\mathcal{F}(i)"] & & & \\
\mathcal{F}(N) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\bar{f})"] \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"] & & \mathcal{F}(M) \arrow[rr, "\mathcal{F}(g)"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(\bar{g})"'] & & \mathcal{F}(L) \\
 & & & \mathcal{F}(\operatorname{Im} g) \arrow[ur, "\mathcal{F}(j)"'] \arrow[dr] & \\
 & & \underset{\text{ex.}}{0} \arrow[ur] & & \underset{\text{ex.}}{0}
\end{tikzcd}$$

□

1.5.3. Satz.

(1) *Sei $\mathcal{F}$ kovariant. Es sind äquivalent:*
 (a) *$\mathcal{F}$ ist rechtsexakt.*
 (b) *Für jede exakte Folge*
 $N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ *ist*
 $\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(L) \to 0$ *exakt.*

(2) *Sei $\mathcal{F}$ kontravariant. Es sind äquivalent:*
 (a) *$\mathcal{F}$ ist rechtsexakt.*
 (b) *Für jede exakte Folge*
 $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L$ *ist*
 $\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \to 0$ *exakt.*

(3) *Analoge Aussagen gelten für „linksexakt“ sinngemäß.*

Beweis. (1b)⇒(1a) gilt trivialerweise.
(1a)⇒(1b): (vgl. Beweis von Anmerkung 1.5.2.) Zerlege in kurze exakte Folgen:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & \\
 & & & \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g \arrow[ur] \arrow[dr, "i"] & & & & \\
 & & N \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[rr, "f"] & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g"'] & & L \arrow[r] & 0 \text{ ex.} \\
 & \operatorname{Ker} f \arrow[ur] & & & & \operatorname{Im} g = L \arrow[ur, "\mathrm{id}_L"'] \arrow[dr] & & \\
\underset{\text{ex.}}{0} \arrow[ur] & & & & & & \underset{\text{ex.}}{0} &
\end{tikzcd}$$

Weil $\mathcal{F}$ rechtsexakt ist,
erhält man daraus:

$$\begin{tikzcd}
 & & \overset{\text{ex.}}{0} & & & \\
 & \mathcal{F}(\operatorname{Im} f) \arrow[ur] \arrow[dr, "\mathcal{F}(i)"] & & & & \\
\boldsymbol{\mathcal{F}(N)} \arrow[ur, "\mathcal{F}(\bar f)"] \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"] & & \boldsymbol{\mathcal{F}(M)} \arrow[rr, "\mathcal{F}(g)"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(g)"'] & & \boldsymbol{\mathcal{F}(L)} \arrow[r] & \mathbf{0} \\
 & & & \mathcal{F}(L) \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathcal{F}(L)}"'] \arrow[dr] & & \\
 & & & & \underset{\text{ex.}}{0} &
\end{tikzcd}$$

Aus den beiden schrägen exakten Folgen ergibt sich:
$\operatorname{Im}\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(i)\big(\mathcal{F}(\operatorname{Im} f)\big) = \operatorname{Ker}\mathcal{F}(g)$ und $\operatorname{Im}\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(L)$.
Also ist auch die Folge $\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(L) \to 0$ exakt.
Beweis von (2) und (3) analog. □

1.5.4. *Beispiele.* Sei A ein R-Modul

(1) $A \otimes_R \bullet$ ist kovariant und rechtsexakt.
Wenn A projektiv ist, ist $A \otimes_R \bullet$ auch linksexakt und somit insgesamt exakt. („A ist R-flach").
(2) $\operatorname{Hom}_R(\bullet, A)$ ist kontravariant und linksexakt.
$\operatorname{Hom}_R(\bullet, A)$ ist genau dann auch rechtsexakt (und somit insgesamt exakt), wenn A injektiv ist.
(3) $\operatorname{Hom}_R(A, \bullet)$ ist kovariant und linksexakt.
$\operatorname{Hom}_R(A, \bullet)$ ist genau dann auch rechtsexakt (und somit insgesamt exakt), wenn A projektiv ist.

Beweis. Sei $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} L \to 0$ eine exakte Folge von R-Moduln.
(1): Es ist also $L \simeq M/N$. Nach einem Satz über das Tensorprodukt hat man dann
$A \otimes_R (M/N) \overset{p}{\simeq} A \otimes_R M/\langle x \otimes y \mid x \in A, y \in N\rangle = A \otimes_R M/\operatorname{Im}(A \otimes i)$ also ist
$A \otimes_R N \xrightarrow{A\otimes i} A \otimes_R M \xrightarrow{A\otimes p} A \otimes_R L \to 0$ exakt.
Sei Nun A projektiv. Da $A \otimes_R \bullet$ schon als rechtsexakt erkannt ist, brauchen wir für die Linkesexaktheit nur noch zu zeigen, daß $A \otimes i$ injektiv ist.
Nach Satz 1.3.6. ist A direkter Summand eines freien R-Moduls F. Es ist also $F = A \oplus B$. Da das Tensorprodukt mit direkten Summen vertauscht ist dann auch
$F \otimes_R N = A \otimes_R N \oplus B \otimes_R N$ und ebenso
$F \otimes_R M = A \otimes_R M \oplus B \otimes_R M$.
Da ferner F eine direkte Summe von R-Moduls isomorph zu R ist, ist
$F \otimes i : F \otimes_R N \to F \otimes_R M$ injektiv.
Bezeichnet man mit
$j_N : A \otimes_R N \to F \otimes_R N$ bzw.
$j_M : A \otimes_R M \to F \otimes_R M$
die kanonischen Injektionen in die direkten Summen, so hat man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \otimes_R N \arrow[r, "F\otimes i"] & F \otimes_R M & \text{ex.} \\
 & A \otimes_R N \arrow[u, "j_N"] \arrow[r, "A\otimes i"] & A \otimes_R M \arrow[u, "j_M"] & \\
 & 0 \arrow[u] & & \\
 & \text{ex.} & &
\end{tikzcd}$$

Aus der Injektivität von j_N und $F \otimes i$ folgt dann sofort, daß auch $A \otimes i$ injektiv ist. q.e.d.

(2): Man hat hier die Folge:

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small]
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(L,A) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_R(p,A)"] & \operatorname{Hom}_R(M,A) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_R(i,A)"] & \operatorname{Hom}_R(N,A) \\
 & f \arrow[r, mapsto] & f \circ p & \\
 & & g \arrow[r, mapsto] & g \circ i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "h"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & L \arrow[r] \arrow[dl, "f"] & 0 \\
 & & A & &
\end{tikzcd}$$

Weil p surjektiv ist, gilt $f \circ p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist, also ist $\operatorname{Hom}_R(p, A)$ injektiv und somit ist die Folge $(*)$ exakt bei $\operatorname{Hom}_R(L, A)$.

Ferner ist $f \circ p \circ i = 0$, also $\operatorname{Im}\operatorname{Hom}_R(p, A) \subseteq \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_R(i, A)$.

Umgekehrt: Sei $g \in \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_R(i, A)$, also $g \circ i = 0$. Nach dem Homomorphiesatz gibt es dann (genau eine) R-lineare Abbildung $f : L \to A$ mit $g = f \circ p$, d.h. $g = \operatorname{Hom}_R(p, A)(f)$. Also ist auch $\operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_R(i, A) \subseteq \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_R(p, A)$, d.h. $(*)$ ist auch exakt bei $\operatorname{Hom}_R(M, A)$. Damit ist gezeigt, daß $\operatorname{Hom}_R(\bullet, A)$ stets linksexakt ist.

Daß $\operatorname{Hom}_R(\bullet, A)$ auch rechtsexakt ist, bedeutet dann, daß $\operatorname{Hom}_R(i, A)$ surjektiv ist, d.h., daß es zu jeder R-linearen Abbildung $h : N \to A$ eine R-lineare Abbildung $g : M \to A$ gibt mit $h = g \circ i$. Da das für alle injektiven R-linearen Abbildungen $i : N \to M$ gelten muß, bedeutet daß nach Definition, daß A injektiv ist. q.e.d.

(3): Man hat hier die Folge:

$$(**) \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small]
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(A,N) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_R(A,i)"] & \operatorname{Hom}_R(A,M) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_R(A,p)"] & \operatorname{Hom}_R(A,L) \\
 & g \arrow[r, mapsto] & i \circ g & \\
 & & f \arrow[r, mapsto] & p \circ f
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] & L \arrow[r] & 0 \\
 & & A \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Es ist $i \circ g = 0$ genau dann, wenn $g = 0$ ist, weil i injektiv ist. Also $\operatorname{Hom}_R(A, i)$ injektiv und daher $(**)$ exakt bei $\operatorname{Hom}_R(A, N)$.

Ferner ist $p \circ i \circ g = 0$, also $\operatorname{Im}\operatorname{Hom}_R(i, N) \subseteq \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_R(A, p)$.

Umgekehrt: Sei $f \in \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_R(A, p)$, also $p \circ f = 0$. Dann ist also $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$. Daher ist $g := i^{-1} \circ f : A \to N$ sinnvoll definiert. Es ist aber $\operatorname{Hom}_R(A, i)(g) = i \circ i^{-1} \circ f = f$ und folglich $f \in \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_R(A, i)$. Also gilt auch $\operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_R(A, p) \subseteq \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_R(A, i)$ und die Folge $(**)$ ist auch bei $\operatorname{Hom}_R(A, M)$ exakt. Damit ist gezeigt, daß $\operatorname{Hom}_R(A, \bullet)$ linksexakt ist.

Daß $\operatorname{Hom}_R(A, \bullet)$ auch rechtsexakt ist, bedeutet dann, daß $\operatorname{Hom}_R(A, p)$ surjektiv ist, d.h., daß es zu jeder R-linearen Abbildung $h : A \to L$ eine R-lineare Abbildung $f : A \to M$ gibt mit $h = p \circ f$. Da das für alle surjektiven R-linearen Abbildungen $p : M \to L$ gelten muß, bedeutet das nach Definition gerade, daß A projektiv ist. $\square$

1.6. **Abgeleitete Funktoren. Ext und Tor.**

Linksabgeleitete Funktoren eines kovarianten Funktors

1.6.1. *Anmerkung.* Sei R ein Ring, M ein R-Modul, $\mathcal{F}$ ein kovarianter, additiver Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich und $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$:
$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} P_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$
eine projektive Auflösung von M.
Indem man den Funktor $\mathcal{F}$ auf den auflösenden Komplex $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$:
$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} P_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{\mathrm{d}_0} 0 \to 0 \to \cdots$
anwendet, erhält man einen *absteigenden* Komplex $\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \mathcal{F}(\mathrm{d})\big)$:
$\cdots \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}_3)} \mathcal{F}(P_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}_2)} \mathcal{F}(P_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}_1)} \mathcal{F}(P_0) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}_0)} 0 \to 0 \cdots .$
Die Homologie dieses Komplexes hängt nicht von der gewählten projektiven Auflösung ab; denn nach Korollar 1.4.7. sind je zwei projektive Auflösungen von M zueinander homotop. Die Homotopie überträgt sich durch $\mathcal{F}$ auf den Komplex $\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \mathrm{d}\big)$, und nach Satz 1.2.5. erhält man dann aus beiden Komplexen dieselbe Homologie. Die folgende Definition 1.6.2 ist daher sinnvoll.

1.6.2. Definition. Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ eine *projektive* Auflösung von M und $\mathcal{F}$ ein *kovarianter*, additiver Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich.

$$\mathcal{L}_n\mathcal{F}(M) := \mathrm{H}_n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P})\big)\,.$$

1.6.3. *Anmerkung* (Funktoreigenschaft von $\mathcal{L}_n\mathcal{F}$). Seien
$f : M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus,
$(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ eine projektive Auflösung von M,
$(\mathcal{Q}, \delta; q)$ eine projektive Auflösung von N.
Dann existiert nach Satz 1.4.6. bis auf Homotopie genau ein Morphismus von Komplexen $\tilde{f} : (\mathcal{P}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{Q}, \delta)$ mit $f \circ p = q \circ \tilde{f}_0$. Dieser überträgt sich durch $\mathcal{F}$ zu einem Morphismus $\mathcal{F}(\tilde{f}) : \big(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \mathcal{F}(\mathrm{d})\big) \to \big(\mathcal{F}(\mathcal{Q}), \mathcal{F}(\delta)\big)$.
Homotope $\tilde{f}$ ergeben homotope $\mathcal{F}(\tilde{f})$, weil sich die Homotopie mit $\mathcal{F}$ überträgt. Also wird eindeutig ein Morphismus
$\mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\tilde{f})\big) : \mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P})\big) \to \mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{Q})\big)$ induziert. Daher ist die folgende Definition 1.6.4. sinnvoll.

1.6.4. Definition. Sei mit den oben erklärten Bezeichnungen:

$$\mathcal{L}\mathcal{F}(f) = \big(\mathcal{L}_n\mathcal{F}(f)\big) := \mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\tilde{f})\big) : \mathcal{L}\mathcal{F}(M) \to \mathcal{L}\mathcal{F}(N)$$

Man sieht leicht, daß $\mathcal{L}_n\mathcal{F}$ auf diese Weise zu einem kovarianten, additiven Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich wird.
Für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ heißt $\mathcal{L}_n\mathcal{F}$ der „n-te linksabgeleitete Funktor von $\mathcal{F}$“.

Für das Folgende brauchen wir noch

1.6.5. Definition.

(1) Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{H}$ zwei kovariante Funktoren der Kategorie der R-Moduln in sich. Eine natürliche Transformation φ von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{H}$ ist eine „Familie“ von R-linearen Abbildungen $\varphi_M : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{H}(M)$ für jeden R-Modul M, so daß für jeden R-Modul-Homomorphismus $f : M \to N$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(M) \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{H}(M) \arrow[d, "\mathcal{H}(f)"] \\ \mathcal{F}(N) \arrow[r, "\varphi_N"] & \mathcal{H}(N) \end{tikzcd}$$

(2) Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{H}$ zwei kontravariante Funktoren der Kategorie der R-Moduln in sich. Eine natürliche Transformation φ von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{H}$ ist eine „Familie" von R-linearen Abbildungen $\varphi_M : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{H}(M)$ für jeden R-Modul M, so daß für jeden R-Modul-Homomorphismus $f : M \to N$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(M) \arrow[r, "\varphi_M"] & \mathcal{H}(M) \\ \mathcal{F}(N) \arrow[r, "\varphi_N"] \arrow[u, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{H}(N) \arrow[u, "\mathcal{H}(f)"'] \end{tikzcd}$$

(3) Zwei Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{H}$ heißen „äquivalent", wenn es eine natürliche Transformation φ von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{H}$ gibt, so daß alle φ_M Isomorphismen sind.

1.6.6. *Anmerkung.* Sei $\mathcal{F}$ *rechtsexakt.* Dann ist $\mathcal{L}_0\mathcal{F}$ äquivalent zu $\mathcal{F}$ als Funktor.

Beweis. Sei M ein R-Modul und $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ eine projektive Auflösung von M. Betrachte den Abschnitt $P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$. Da $\mathcal{F}$ rechtsexakt ist, folgt aus Satz 1.5.3. (1), daß auch die Folge $\mathcal{F}(P_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(d_1)} \mathcal{F}(P_0) \xrightarrow{\mathcal{F}(p)} \mathcal{F}(M) \to 0$ exakt ist. Dann ist also $\mathcal{L}_0\mathcal{F}(M) = \mathrm{H}_0\big(\mathcal{F}(\mathcal{P})\big) = \mathcal{F}(P_0)/\operatorname{Im}\mathcal{F}(\mathrm{d}_1) \underset{\text{ex.}}{=} \mathcal{F}(P_0)/\operatorname{Ker}\mathcal{F}(p) \underset{\varphi_M}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{F}(M)$, wobei φ_M die von $\mathcal{F}(p)$ induzierte Abbildung bezeichnet.
Seien nun M, N zwei R-Moduln und $f : M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus. Betrachte projektive Auflösungen $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ von M und $(\mathcal{Q}, \delta; q)$ von N und den zu f als „Fortsetzung" gehörigen Morphismus $\tilde{f} : (\mathcal{P}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{Q}, \delta)$ der auflösenden Komplexe mit $f \circ p = q \circ \tilde{f}_0$ nach Satz 1.4.6. Die Anwendung von $\mathcal{F}$ liefert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(P_1) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_1)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\tilde{f}_1)"'] & \mathcal{F}(P_0) \arrow[r, "\mathcal{F}(p)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\tilde{f}_0)"'] & \mathcal{F}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & 0 \\ \mathcal{F}(Q_1) \arrow[r, "\mathcal{F}(\delta_1)"] & \mathcal{F}(Q_0) \arrow[r, "\mathcal{F}(q)"] & \mathcal{F}(N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rll} \text{Nun wird}\quad \mathcal{L}_0\mathcal{F}(f) = \mathrm{H}_0\big(\mathcal{F}(\tilde{f})\big) & \text{induziert von} & \mathcal{F}(\tilde{f}_0) \\ \varphi_M & \text{induziert von} & \mathcal{F}(p) \\ \varphi_N & \text{induziert von} & \mathcal{F}(q)\,. \end{array}$$

Aus der Kommutativität des obigen Diagramms folgt daher die Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_0\mathcal{F}(M) \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "\mathcal{L}_0\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{F}(M) \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] \\ \mathcal{L}_0\mathcal{F}(N) \arrow[r, "\varphi_N"] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

Da außerdem φ_M und φ_N, wie oben gezeigt, Isomorphismen sind, folgt die Behauptung. □

1.6.7. Satz. *Sei*
$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ *eine exakte Folge von R-Moduln und*
$\mathcal{F}$ *ein kovarianter, additiver, rechtsexakter Funktor.*
Dann hat man eine absteigende „lange exakte Folge", die sich funktoriell verhält:
$\dots \xrightarrow{\mathcal{L}_2\mathcal{F}(g)} \mathcal{L}_2\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{L}_1\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{L}_1\mathcal{F}(f)} \mathcal{L}_1\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{L}_1\mathcal{F}(g)} \mathcal{L}_1\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(L) \to 0,$
wobei ∂ *der Verbindungshomomorphismus von Satz 1.1.10. ist.*
(Daraus rechtfertigt sich die Bezeichnung „linksabgeleiteter" Funktor, denn die fehlende linke Null in der exakten Folge $\mathcal{F}(N) \to \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(L) \to 0$ *wird durch die lange exakte Folge aus den linksabgeleiteten Funktoren von* $\mathcal{F}$ *ersetzt.)*

Um den Satz 1.1.10. anwenden zu können, müssen wir zunächst aus den R-linearen Abbildungen f und g Morphismen geeigneter, durch den Funktor $\mathcal{F}$ veränderter, auflösender Komplexe von N, M, L konstruieren, die in passender Weise zusammenhängen. Dazu brauchen wir zwei Hilfssätze.

1.6.8. Hilfssatz (Neuner-Lemma)**.** *Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen, so daß die mittlere Spalte exakt ist:*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\beta'"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"'] & 0 & ex. \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 & ex. \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r, "\iota''"] \arrow[d] & B'' \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 & ex. \\
 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & ex. & & &
\end{tikzcd}$$

Dann gilt

(1) *Wenn die rechte Spalte exakt ist, dann ist auch die linke Spalte exakt.*
(2) *Wenn die linke Spalte exakt ist, dann ist auch die rechte Spalte exakt.*

Beweis. (1): Sei $0 \to C' \xrightarrow{\gamma'} C \xrightarrow{\gamma} C'' \to 0$ exakt.
α' *ist injektiv*, weil ι' und β' injektiv sind.
α *ist surjektiv*: Sei $x'' \in A''$ beliebig. Da β surjektiv ist, gibt es ein $y \in B$ mit $i''(x'') = \beta(y)$.
Außerdem ist $\gamma \circ \pi(y) = \pi'' \circ \beta(y) = \underbrace{\pi'' \circ \iota''}_{=0}(y) = 0$, also ist $\pi(y) \in \operatorname{Ker}\gamma = \operatorname{Im}\gamma'$ nach Voraussetzung. Weil π' surjektiv ist, gibt es also ein $y' \in B'$ mit $\gamma' \circ \pi'(y') = \pi(y)$.
Daher ist $y - \beta'(y') \in \operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im}\iota$, d.h. es gibt ein $x \in A$ mit $\iota(x) = y - \beta'(y')$.
Dann ist, weil $\beta \circ \beta' = 0$ ist,
$\iota''(x'') = \beta(y) = \beta\big(y - \beta'(y)\big) = \beta \circ \iota(x) = \iota''\big(\alpha(x)\big)$.
Da ι'' injektiv ist, folgt $x'' = \alpha(x) \in \operatorname{Im}\alpha$.
Damit ist gezeigt, daß die linke Spalte bei A' und bei A'' exakt ist.

Exaktheit bei A: Sei $x' \in A'$ beliebig. Dann ist $\iota'' \circ \alpha \circ \alpha'(x') = \underbrace{\beta \circ \beta'}_{=0} \circ \iota(x') = 0$ und daher, weil ι'' injektiv ist, $\alpha \circ \alpha'(x') = 0$, also $\operatorname{Im} \alpha' \subseteq \operatorname{Ker} \alpha$.
Umgekehrt: Sei $x \in \operatorname{Ker} \alpha$ beliebig. Dann ist $\beta \circ \iota(x) = \iota'' \circ \alpha(x) = 0$ und daher $\iota(x) \in \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \beta'$. Es gibt also ein $y' \in B'$ mit $\iota(x) = \beta'(y')$. Dann ist $\gamma' \circ \pi'(y') = \pi \circ \beta'(y') = \pi \circ \iota(x) = 0$
Da γ' nach Voraussetzung injektiv ist, folgt $\pi'(y) = 0$, also $y' \in \operatorname{Ker} \pi' = \operatorname{Im} \iota'$. Sei also $x' \in A'$ mit $y' = \iota'(x')$. Dann ist $\iota\big(\alpha'(x')\big) = \beta' \circ \iota'(x') = \beta'(y') = \iota(x)$.
Da ι injektiv ist, folgt $x = \alpha'(x') \in \operatorname{Im} \alpha'$.

(2): Sei $0 \to A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha} A'' \to 0$ exakt.
γ ist surjektiv, weil β und π'' surjektiv sind.
γ' ist injektiv: Sei $z' \in C'$ mit $\gamma'(z') = 0$. Sei $y' \in B'$ mit $z' = \pi'(y')$. Dann ist $\pi \circ \beta'(y') = \gamma' \circ \pi'(y') = \gamma'(z') = 0$, also $\beta'(y') \in \operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Im} \iota$. Also gibt es ein $x \in A$ mit $\beta'(y') = \iota(x)$. Dann ist $\iota'' \circ \alpha(x) = \beta \circ \iota(x) = \underbrace{\beta \circ \beta'}_{=0}(y') = 0$.
Da ι'' injektiv ist, folgt $\alpha(x) = 0$, d.h. $x \in \operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{Im} \alpha'$ nach Voraussetzung. Also gibt es ein $x' \in A'$ mit $x = \alpha'(x')$. Es ist $\beta' \circ \iota'(x') = \iota \circ \alpha'(x') = \iota(x) = \beta'(y')$.
Da aber β' injektiv ist, folgt $y' = \iota'(x')$ und daher $z' = \pi'(y') = \underbrace{\pi' \circ \iota'}_{=0}(x') = 0$,
also $\operatorname{Ker} \gamma' = 0$. q.e.d.
Damit ist gezeigt, daß die rechte Spalte bei C'' und bei C' exakt ist.
Exaktheit bei C: Sei $z' \in C'$ beliebig. Da π' surjektiv ist, gibt es ein $y' \in B'$ mit $z' = \pi'(y')$. Dann ist $\gamma'(z') = \gamma' \circ \pi'(y') = \pi \circ \beta'(y')$ und $\gamma \circ \gamma'(z') = \pi'' \circ \underbrace{\beta \circ \beta'}_{=0}(y') = 0$.
Also ist $\operatorname{Im} \gamma' \subseteq \operatorname{Ker} \gamma$.
Umgekehrt: Sei $z \in \operatorname{Ker} \gamma$ beliebig. Wegen der Surjektivität von π gibt es dann ein $y \in B$ mit $z = \pi(y)$. Dann ist $\pi'' \circ \beta(y) = \gamma \circ \pi(y) = \gamma(z) = 0$, also
$\beta(y) \in \operatorname{Ker} \pi'' = \operatorname{Im} \iota''$. Sei also $x'' \in A''$ mit $\iota''(x'') = \beta(y)$. Da α nach Voraussetzung surjektiv ist hat man ein $x \in A$ mit $x'' = \alpha(x)$. Dann ist $\beta \circ \iota(x) = \iota'' \circ \alpha(x) = \iota''(x'') = \beta(y)$. Also ist $\beta\,(y - \iota(x)) = 0$, also $y - \iota(x) \in \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \beta'$. Also gibt es ein $y' \in B'$ mit $\beta'(y') = y - \iota(x)$. Dann ist $\gamma'\big(\pi'(y')\big) = \pi \circ \beta'(y') = \pi\big(y - \iota(x)\big) = \pi(y) - \underbrace{\pi \circ \iota}_{=0}(x) = \pi(y) = z$ Also ist $z \in \operatorname{Im} \gamma'$. □

1.6.9. Hilfssatz (Simultane projektive Auflösungen). *Sei*
$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ *eine exakte Folge von R-Moduln, und seien* $(\mathcal{P}', \mathrm{d}'; p')$ *bzw.* $(\mathcal{P}'', \mathrm{d}''; p'')$ *projektive Auflösungen von N bzw. L.*
Sei $P_n := P_n' \oplus P_n''$, *also* P_n *projektiv, weil* P_n' *und* P_n'' *projektiv sind (Anm. 1.3.5.),*
$f_n : P_n' \to P_n$ *die kanonische Injektion* ($f_n(x') = (x', 0)$)
$g_n : P_n \to P_n''$ *die kanonische Projektion* ($g_n\big((x', x'')\big) = x''$).
Dann existieren R-lineare Abbildungen $\mathrm{d}_n : P_n \to P_{n-1}$ *für alle* $n = 1, 2, \ldots$ *und* $p : P_0 \to M$, *so daß gilt:*

(1) $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ *ist eine projektive Auflösung von M.*
(2) $\tilde{f} := (f_n) : (\mathcal{P}', \mathrm{d}') \to (\mathcal{P}, \mathrm{d})$ *und*
$\tilde{g} := (g_n) : (\mathcal{P}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{P}'', \mathrm{d}'')$
sind Morphismen von Komplexen, so daß
$0 \to \mathcal{P}' \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{P} \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{P}'' \to 0$ *exakt ist und daß gilt*

$$p \circ f_0 = f \circ p',$$
$$g \circ p = p'' \circ g_0\,.$$

Beweis. Betrachte das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}'_3"] & P'_2 \arrow[r, "\mathrm{d}'_2"] \arrow[d, shift right, "f_2"'] & P'_1 \arrow[r, "\mathrm{d}'_1"] \arrow[d, shift right, "f_1"'] & P'_0 \arrow[r, "p'"] \arrow[d, shift right, "f_0"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 & \text{ex.} \\
\cdots \arrow[r, dotted, "\mathbf{d_3}"] & P_2 \arrow[r, dotted, "\mathbf{d_2}"] \arrow[u, shift right, "\pi_2"'] \arrow[d, "g_2"'] & P_1 \arrow[r, dotted, "\mathbf{d_1}"] \arrow[u, shift right, "\pi_1"'] \arrow[d, "g_1"'] & P_0 \arrow[r, dotted, "\boldsymbol{p}"] \arrow[u, shift right, "\pi_0"'] \arrow[d, "g_0"'] & M \arrow[r, dotted] \arrow[d, "g"] & 0 & \\
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}''_3"] \arrow[ur, dotted, "\lambda_3"] & P''_2 \arrow[r, "\mathrm{d}''_2"] \arrow[d] \arrow[ur, dotted, "\lambda_2"] & P''_1 \arrow[r, "\mathrm{d}''_1"] \arrow[d] \arrow[ur, dotted, "\lambda_1"] & P''_0 \arrow[r, "p''"] \arrow[d] \arrow[ur, dotted, "\lambda_0"] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{ex.} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & &
\end{tikzcd}$$

Nach Definition der f, f_n, g, g_n sind die vertikalen Spalten exakt. Ebenso sind die obere und die untere Zeile exakt, weil die $(\mathcal{P}', \mathrm{d}'; p')$ bzw. $(\mathcal{P}'', \mathrm{d}''; p'')$ Auflösungen von N bzw. L sind.

Sei $\pi_n : P_n \to P'_n$ die kanonische Projektion der direkten Summe $(\pi_n\big((x', x'')\big) = x')$.

Ferner bezeichnen wir mit

$i'_n : \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_n \to P'_n$

$i''_n : \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_n \to P''_n$

die Inklusionsabbildungen

und mit

$\tilde{\mathrm{d}}'_n := \mathrm{d}'_n | (P'_n \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_{n-1} = \operatorname{Im} \mathrm{d}'_n)$,

$\tilde{\mathrm{d}}''_n := \mathrm{d}''_n | (P''_n \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_{n-1} = \operatorname{Im} \mathrm{d}''_n)$.

Man hat also

$\mathrm{d}'_n = i'_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n$,

$\mathrm{d}''_n = i''_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}''_n$.

Wir definieren nun induktiv die

$\mathrm{d}_n : P_n \to P_{n-1}$ und damit auch die Inklusionsabbildung

$i_n : \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n \to P_n$

für $n \geq 0$.

Um den Start der Induktion zu erleichtern, setzen wir für die Dauer dieses Beweises:

$P'_{-1} := N$, $P_{-1} := M$, $P''_{-1} := L$,

$P'_n := 0$, $P_n := 0$, $P''_n := 0$ für $n \leq -2$.

$f_{-1} := f$, $g_{-1} := g$,

$f_n := 0$, $g_n := 0$ für $n \leq -2$.

$\mathrm{d}'_0 := p'$, $\mathrm{d}''_0 := p''$,

$\mathrm{d}'_n := 0$, $\mathrm{d}_n := 0$, $\mathrm{d}''_n := 0$ für $n \leq -1$.

Behauptung: Für alle $n \geq -1$ gibt es R-lineare Abbildungen $\mathrm{d}_n : P_n \to P_{n-1}$ mit

1) $\operatorname{Im} \mathrm{d}_n = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{n-1}$.
2) $\mathrm{d}_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \mathrm{d}'_n$,
   $g_{n-1} \circ \mathrm{d}_n = \mathrm{d}''_n \circ g_n$,

3) f_n bzw. g_n induzieren R-lineare Abbildungen
$f'_n : \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_n \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n$ bzw.
$g''_n : \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_n$
(d.h. $i_n \circ f'_n = f_n \circ i'_n$ und $i'' \circ g''_n = g_n \circ i_n$),
so daß die Folge
$0 \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_n \xrightarrow{f'_n} \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n \xrightarrow{g''_n} \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_n \to 0$ exakt ist.

Wenn wir dann noch definieren $p := \mathrm{d}_0$, ist nach 1) $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{-1} = P_{-1} = M$, d.h. p ist surjektiv und daher ist weiter $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ eine projektive Auflösung von M.
Nach 2) sind $\tilde{f} := (f_n)$ und $\tilde{g} := (g_n)$ Morphismen von Komplexen, so daß
$0 \to \mathcal{P}' \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{P} \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{P}'' \to 0$ exakt ist und daß insbesondere gilt
$p \circ f_0 = \mathrm{d}_0 \circ f_0 = f_{-1} \circ \mathrm{d}'_0 = f \circ p'$,
$g \circ p = g_{-1} \circ \mathrm{d}_0 = \mathrm{d}''_0 \circ g_0 = p'' \circ g_0$.
Damit sind dann die Aussagen (1) und (2) des Hilfssatzes bewiesen. Die Aussage von 3) wird als technisches Hilfsmittel für den Induktionsbeweis benötigt.
Bleibt der Beweis der obigen Behauptungen 1) bis 3): Induktion nach n:

Induktionsbeginn bei $n = -1$:
1): $\operatorname{Im} \mathrm{d}_{-1} = 0 = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{-2}$.
2): $\mathrm{d}_{-1} \circ f_{-1} = 0 = f_{-2} \circ \mathrm{d}'_1$,
$g_{-2} \circ \mathrm{d}_{-1} = 0 = d''_{-1} \circ g_{-1}$.
3): $f'_{-1} = f$:
$\operatorname{Ker} \mathrm{d}'_{-1} = N \to M = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{-1}$,
$g''_{-1} = g$:
$\operatorname{Ker} \mathrm{d}_{-1} = M \to L = \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_{-1}$
und
$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$
ist exakt nach Voraussetzung.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & & \\
{} \arrow[r, "\mathrm{d}'_0=p'"] & P'_{-1} = N = \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_{-1} \arrow[r, "\mathrm{d}'_{-1}"] \arrow[d, "f_{-1}=f=f'_{-1}"] & 0 \arrow[r, "\mathrm{d}'_{-2}"] \arrow[d, "f_{-2}=f'_{-2}"] & 0 & \text{ex.} \\
& P_{-1} = M = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_{-1}"] \arrow[d, "g_{-1}=g=g''_{-1}"] & 0 \arrow[r, "\mathrm{d}_{-2}"] \arrow[d, "g_{-2}=g''_{-2}"] & 0 & \text{ex.} \\
{} \arrow[r, "\mathrm{d}''_0=p''"] & P''_{-1} = L = \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_{-1} \arrow[r, "\mathrm{d}''_{-1}"] \arrow[d] & 0 \arrow[r, "\mathrm{d}''_{-2}"] & 0 & \text{ex.} \\
& 0 & & & \\
& \text{ex.} & & &
\end{tikzcd}$$

Induktionsschluß:
Da P''_n projektiv und die Folge
$\operatorname{Ker} \mathrm{d}_{n-1} \xrightarrow{g''_{n-1}} \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_{n-1} \to 0$ nach Induktionsvoraussetzung
exakt ist, gibt es ein
$\tilde{\lambda}_n : P''_n \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{n-1}$ mit
$\tilde{\mathrm{d}}''_n = g''_{n-1} \circ \tilde{\lambda}_n$.
Setze
$\lambda_n := i_{n-1} \circ \tilde{\lambda}_n$.
Dann ist
$\mathrm{d}''_n = i''_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}''_n = i''_{n-1} \circ g''_{n-1} \circ \tilde{\lambda}_n$
$= g_{n-1} \circ i_{n-1} \circ \tilde{\lambda}_n = g_{n-1} \circ \lambda_n$.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_n \arrow[r, "i'_n"] \arrow[d, dotted, "f'_n"'] & P'_n \arrow[r, "\tilde{\mathrm{d}}'_n"] \arrow[d, shift right, "f_n"'] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_{n-1} \arrow[r, "i'_{n-1}"] \arrow[d, "f'_{n-1}"] & P'_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
0 \arrow[r, dotted] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n \arrow[r, dotted, "i_n"] \arrow[d, dotted, "g''_n"'] & P_n \arrow[r, dotted, "\tilde{\mathrm{d}}_n"] \arrow[d, "g_n"'] \arrow[u, shift right, "\pi_n"'] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "g''_{n-1}"] & P_{n-1} \arrow[d, "g_{n-1}"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_n \arrow[r, "i''_n"] \arrow[d, dotted] & P''_n \arrow[r, "\tilde{\mathrm{d}}''_n"] \arrow[d] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\lambda}_n"'] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_{n-1} \arrow[r, "i''_{n-1}"] \arrow[d] & P''_{n-1} \arrow[d] \\
& 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.}
\end{tikzcd}$$

Konstruktion von d_n:
Definiere
$\mathrm{d}_n := i_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}_n$ mit
$\tilde{\mathrm{d}}_n := f'_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n \circ \pi_n + \tilde{\lambda}_n \circ g_n$.
$\Big(\tilde{\mathrm{d}}_n\big((x', x'')\big) = f'_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n(x') + \tilde{\lambda}_n(x'') = \big(\tilde{\mathrm{d}}'_n(x'), 0\big) + \tilde{\lambda}_n(x'')\Big)$

Dann ist $\tilde{\mathrm{d}}_n : P_n \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{n-1}$ und:
$\tilde{\mathrm{d}}_n \circ f_n = f'_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n \circ \underbrace{\pi_n \circ f_n}_{=\mathrm{id}_{P'_n}} + \tilde{\lambda}_n \circ \underbrace{g_n \circ f_n}_{=0} = f'_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n.$
und
$g''_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}_n = \underbrace{g''_{n-1} \circ f'_{n-1}}_{=0} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n \circ \pi_n + \underbrace{g''_{n-1} \circ \tilde{\lambda}_n}_{=\tilde{\mathrm{d}}''_n} \circ g_n = \tilde{\mathrm{d}}''_n \circ g_n.$
(Wird im Verlauf des Beweises benutzt.)
Es folgt:
$\mathrm{d}_n \circ f_n = i_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}_n \circ f_n = i_{n-1} \circ f'_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n = f_{n-1} \circ i'_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n = f_{n-1} \circ \mathrm{d}'_n$
und
$g_{n-1} \circ \mathrm{d}_n = g_{n-1} \circ i_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}_n = i''_{n-1} \circ g''_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}_n = i''_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}''_n \circ g_n = \mathrm{d}''_n \circ g_n$.
Damit ist 2) gezeigt.

Beweis von 1) $\operatorname{Im} \mathrm{d}_n \overset{!}{=} \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{n-1}$:
Wegen $\operatorname{Im} \mathrm{d}_n = i_{n-1}(\operatorname{Im} \tilde{\mathrm{d}}_n)$ braucht man nur zu zeigen, daß $\tilde{\mathrm{d}}_n$ surjektiv ist:
Sei $y \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{n-1}$ beliebig. Wegen $\operatorname{Ker} \mathrm{d}''_{n-1} = \operatorname{Im} \tilde{\mathrm{d}}''_n$ gibt es dann ein $x'' \in P''_n$ mit $g''_{n-1}(y) = \tilde{\mathrm{d}}''_n(x'') = g''_{n-1} \circ \tilde{\lambda}_n(x'')$. Also ist $y - \tilde{\lambda}_n(x'') \in \operatorname{Ker} g''_{n-1} = \operatorname{Im} f'_{n-1}$. Wegen $\operatorname{Ker} \mathrm{d}'_{n-1} = \operatorname{Im} \tilde{\mathrm{d}}'_n$ existiert also ein $x' \in P'_n$ mit $y - \tilde{\lambda}_n(x'') = f'_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n(x')$. Also ist $y = f'_{n-1} \circ \tilde{\mathrm{d}}'_n(x') + \tilde{\lambda}_n(x'') = \tilde{\mathrm{d}}_n\big((x', x'')\big)$. q.e.d.
Beweis von 3):
Betrachte die Kerne von $\mathrm{d}'_n, \mathrm{d}_n, \mathrm{d}''_n$ mit ihren Inklusionsabbildungen:
Existenz von f'_n: Ist $x' \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_n = \operatorname{Ker} \tilde{\mathrm{d}}'_n$, so ist
$\tilde{\mathrm{d}}_n(f_n \circ i'_n(x')) = f'_{n-1} \circ \underbrace{\tilde{\mathrm{d}}'_n \circ i'_n}_{=0}(x') = 0.$
Also ist $f_n \circ i'_n(\operatorname{Ker} \mathrm{d}'_n) \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n$. Daher induziert f_n eine Abbildung
$f'_n : \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_n \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n$ mit $f_n \circ i'_n = i_n \circ f'_n$.
Existenz von g''_n: Ebenso ist $g_n \circ i_n(\operatorname{Ker} \mathrm{d}_n) \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_n$. Daher induziert g_n eine Abbildung
$g''_n : \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_n$ mit $g_n \circ i_n = i''_n \circ g''_n$.
Die Exaktheit der Folge $0 \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_n \xrightarrow{f'_n} \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n \xrightarrow{g''_n} \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_n \to 0$ ergibt sich nach dem Neuner-Lemma (Hilfssatz 1.6.8 (1)) aus dem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_n \arrow[r, "i'_n"] \arrow[d, dotted, "f'_n"'] & P'_n \arrow[r, "\tilde{\mathrm{d}}'_n"] \arrow[d, "f_n"'] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f'_{n-1}"] & 0 & \text{ex.} \\
0 \arrow[r, dotted] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}_n \arrow[r, dotted, "i_n"] \arrow[d, dotted, "g''_n"'] & P_n \arrow[r, dotted, "\tilde{\mathrm{d}}_n"] \arrow[d, "g_n"'] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g''_{n-1}"] & 0 & \text{ex.} \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_n \arrow[r, "i''_n"] \arrow[d, dotted] & P''_n \arrow[r, "\tilde{\mathrm{d}}''_n"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \mathrm{d}''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{ex.} \\
 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & \text{ex.} & \text{ex.} & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Beweis von Satz 1.6.7.: Bilde eine simultane Auflösung von $0 \to N \to M \to L \to 0$ nach Hilfssatz 1.6.9. und wende auf die Komplexe $(\mathcal{P}', \mathrm{d}'), (\mathcal{P}, \mathrm{d}), (\mathcal{P}'', \mathrm{d}'')$ und ihre Morphismen $\tilde{f}, \tilde{g}$ den Funktor $\mathcal{F}$ an. Dabei erhält man das nachstehende Diagramm. Die Zeilen sind Komplexe, da aus $\mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1} = 0$ folgt $\mathcal{F}(\mathrm{d}_n) \circ \mathcal{F}(\mathrm{d}_{n+1}) = 0$. Ebenso für d' und d''.
Da kommutative Diagramme bei $\mathcal{F}$ in kommutative Diagramme übergehen, sind $\mathcal{F}(\tilde{f}) := \big(\mathcal{F}(f_n)\big)$ und $\mathcal{F}(\tilde{g}) := \big(\mathcal{F}(g_n)\big)$ wieder Morphismen von Komplexen.
Die senkrechten Spalten sind exakt, weil nach Hilfssatz 1.1.7. die $\mathcal{F}(f_n)$ bzw. $\mathcal{F}(g_n)$ wieder kanonische Injektion bzw. Projektion von $\mathcal{F}(P_n) = \mathcal{F}(P_n') \oplus \mathcal{F}(P_n'')$ sind.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_3')"] & \mathcal{F}(P_2') \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_2')"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f_2)"'] & \mathcal{F}(P_1') \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_1')"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f_1)"'] & \mathcal{F}(P_0') \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}(f_0)"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_3)"] & \mathcal{F}(P_2) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_2)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(g_2)"'] & \mathcal{F}(P_1) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_1)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(g_1)"'] & \mathcal{F}(P_0) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}(g_0)"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_3'')"] & \mathcal{F}(P_2'') \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_2'')"] \arrow[d] & \mathcal{F}(P_1'') \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_1'')"] \arrow[d] & \mathcal{F}(P_0'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} &
\end{tikzcd}$$

Also ist $0 \to \mathcal{F}(\mathcal{P}') \xrightarrow{\mathcal{F}(\tilde{f})} \mathcal{F}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\tilde{g})} \mathcal{F}(\mathcal{P}'') \to 0$ eine exakte Folge von Morphismen, so daß Satz 1.1.10. anwendbar ist.
Nach Definition ist $\mathcal{L}_i\mathcal{F}(\mathcal{N}) = \mathrm{H}_i\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}')\big)$, $\mathcal{L}_i\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \mathrm{H}_i\big(\mathcal{F}(\mathcal{P})\big)$ und $\mathcal{L}_i\mathcal{F}(\mathcal{L}) = \mathrm{H}_i\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}'')\big)$, so daß die Behauptung von Satz 1.6.7. folgt, wenn man noch beachtet, daß nach Anmerkung 1.6.6. der rechte Teil der langen exakten Homologiefolge
$\xrightarrow{\partial_1} \mathcal{L}_0\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{L}_0\mathcal{F}(f)} \mathcal{L}_0\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{L}_0\mathcal{F}(g)} \mathcal{L}_0\mathcal{F}(L) \to 0$
isomorph ist zu
$\xrightarrow{\partial_1} \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(L) \to 0.$ $\square$

1.6.10. *Beispiel.* Sei A ein R-Modul.
$\mathcal{F} := A \otimes_R \bullet$ ist nach Beispiel 1.5.4. (1) ein kovarianter, rechtsexakter Funktor. Die linksabgeleiteten Funktoren von $A \otimes_R \bullet$ werden mit

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, \bullet) := \mathcal{L}_n(A \otimes_R \bullet)$$

bezeichnet.

1.6.11. *Anmerkung.* Ist R ein noetherscher Ring, und sind M und A endlich erzeugte R-Moduln, so kann man nach Anmerkung 1.4.11 alle P_n in Anmerkung 1.6.1 als endlich erzeugte freie R-Moduln wählen. Da dann auch alle $A \otimes_R P_n$ endlich erzeugte R-Moduln sind, sind auch alle $\mathrm{Tor}_n^R(A, M)$ endlich erzeugte R-Moduln als Faktormoduln von Untermoduln der $A \otimes_R P_n$.

Nach Satz 1.6.7. hat man:

1.6.12. Satz. *Sei* $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ *eine kurze exakte Folge von R-Moduln. Dann hat man eine „lange exakte* Tor*-Folge“:*

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} \operatorname{Tor}_2^R(A,N) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_2(A,f)} \operatorname{Tor}_2^R(A,M) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_2(A,g)} \operatorname{Tor}_2^R(A,L)$$
$$\xrightarrow{\partial_2} \operatorname{Tor}_1^R(A,N) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_1(A,f)} \operatorname{Tor}_1^R(A,M) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_1(A,g)} \operatorname{Tor}_1^R(A,L)$$
$$\xrightarrow{\partial_1} A \otimes_R N \xrightarrow{A\otimes f} A \otimes_R M \xrightarrow{A\otimes g} A \otimes_R L \to 0$$

Rechtsabgeleitete Funktoren eines kontravarianten Funktors

1.6.13. *Anmerkung.* Sei R ein Ring, M ein R-Modul, $\mathcal{F}$ ein kontravarianter, additiver Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich und $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$:
$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} P_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$
eine projektive Auflösung von M.
Indem man den Funktor $\mathcal{F}$ auf den auflösenden Komplex $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$:
$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} P_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{\mathrm{d}_0} 0 \to 0 \to \cdots$
anwendet, erhält man einen *aufsteigenden* Komplex $\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \mathcal{F}(\mathrm{d})\big)$:
$0 \to \mathcal{F}(P_0) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}_1)} \mathcal{F}(P_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}_2)} \mathcal{F}(P_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}_3)} \mathcal{F}(P_3) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}_4)} \cdots$.
Die Homologie dieses Komplexes hängt nicht von der gewählten projektiven Auflösung ab; denn nach Korollar 1.4.7. sind je zwei projektive Auflösungen von M zueinander homotop. Die Homotopie überträgt sich durch $\mathcal{F}$ auf den Komplex $\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \mathrm{d}\big)$, und nach Satz 1.2.5. erhält man dann aus beiden Komplexen dieselbe Homologie. Die folgende Definition 1.6.14 ist daher sinnvoll.

1.6.14. Definition. Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ eine *projektive* Auflösung von M und $\mathcal{F}$ ein *kontravarianter*, additiver Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich.

$$\mathcal{R}^n\mathcal{F}(M) := \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P})\big) .$$

1.6.15. *Anmerkung* (Funktoreigenschaft von $\mathcal{R}^n\mathcal{F}$). Seien
$f : M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus,
$(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ eine projektive Auflösung von M,
$(\mathcal{Q}, \delta; q)$ eine projektive Auflösung von N.
Dann existiert nach Satz 1.4.6. bis auf Homotopie genau ein Morphismus von Komplexen $\tilde{f} : (\mathcal{P}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{Q}, \delta)$ mit $f \circ p = q \circ \tilde{f}_0$. Dieser überträgt sich durch $\mathcal{F}$ zu einem Morphismus $\mathcal{F}(\tilde{f}) : \big(\mathcal{F}(\mathcal{Q}), \mathcal{F}(\delta)\big) \to \big(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \mathcal{F}(\mathrm{d})\big)$.
Homotope $\tilde{f}$ ergeben homotope $\mathcal{F}(\tilde{f})$, weil sich die Homotopie mit $\mathcal{F}$ überträgt. Also wird eindeutig ein Morphismus
$\mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\tilde{f})\big) : \mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{Q})\big) \to \mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P})\big)$ induziert. Daher ist die folgende Definition 1.6.16 sinnvoll.

1.6.16. Definition. Sei mit den oben erklärten Bezeichnungen:

$$\mathcal{R}\mathcal{F}(f) = \big(\mathcal{R}^n\mathcal{F}(f)\big) := \mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\tilde{f})\big) : \mathcal{R}\mathcal{F}(N) \to \mathcal{R}\mathcal{F}(M)$$

Man sieht leicht, daß $\mathcal{R}^n\mathcal{F}$ auf diese Weise zu einem kontravarianten, additiven Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich wird.
Für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ heißt $\mathcal{R}^n\mathcal{F}$ der „n-te rechtsabgeleitete Funktor von $\mathcal{F}$“.

Die Bezeichnung erklärt sich aus Satz 1.6.18

1.6.17. *Anmerkung.* Sei $\mathcal{F}$ *linksexakt.* Dann ist $\mathcal{R}^0\mathcal{F}$ äquivalent zu $\mathcal{F}$ als Funktor.

Beweis analog zu dem von Anmerkung 1.6.6.

1.6.18. Satz. *Sei* $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ *eine exakte Folge von* R*-Moduln und* $\mathcal{F}$ *ein kontravarianter, additiver, linksexakter Funktor.*
Dann hat man eine aufsteigende „lange exakte Folge“, die sich funktoriell verhält:
$0 \to \mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\partial^1} \mathcal{R}^1\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{R}^1\mathcal{F}(g)} \mathcal{R}^1\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{R}^1\mathcal{F}(f)} \mathcal{R}^1\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\partial^2} \mathcal{R}^2\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{R}^2\mathcal{F}(g)} \dots,$
wobei ∂ *der Verbindungshomomorphismus von Satz 1.1.10. ist.*
(Daraus rechtfertigt sich die Bezeichnung „rechtsabgeleiteter“ Funktor, denn die fehlende rechte Null in der exakten Folge $0 \to \mathcal{F}(L) \to \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ *wird durch die lange exakte Folge aus den rechtsabgeleiteten Funktoren von* $\mathcal{F}$ *ersetzt.)*

Beweis analog zu dem Beweis von Satz 1.6.7. mittels der Hilfssätze 1.6.9.
und 1.1.7.

1.6.19. *Beispiel.* Sei A ein R-Modul.
$\mathcal{F} := \mathrm{Hom}_R(\bullet, A)$ ist nach Beispiel 1.5.4 (2) kontravariant und linksexakt. Die rechtsabgeleiteten Funktoren von $\mathrm{Hom}_R(\bullet, A)$ werden mit
$$\mathrm{Ext}^n_R(\bullet, A) := \mathcal{R}^n\big(\mathrm{Hom}_R(\bullet, A)\big)$$
bezeichnet.

1.6.20. *Anmerkung.* Ist R ein noetherscher Ring, und sind M und A endlich erzeugte R-Moduln, so kann man nach Anmerkung 1.4.11 alle P_n in Anmerkung 1.6.13 als endlich erzeugte freie R-Moduln wählen. Da dann auch alle $\mathrm{Hom}_R(P_n, A)$ endlich erzeugte R-Moduln sind, sind auch alle $\mathrm{Ext}^n_R(M, A)$ endlich erzeugte R-Moduln als Faktormoduln von Untermoduln der $\mathrm{Hom}_R(P_n, A)$.

Nach Satz 1.6.18. hat man:

1.6.21. Satz. *Sei* $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ *eine kurze exakte Folge von* R*-Moduln. Man hat dann die „lange exakte kontravariante* Ext*-Folge“:*

$$\begin{aligned} &0 \to \mathrm{Hom}_R(L, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(g,A)} \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(f,A)} \mathrm{Hom}_R(N, A) \\ &\xrightarrow{\partial^1} \mathrm{Ext}^1_R(L, A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1(g,A)} \mathrm{Ext}^1_R(M, A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1(f,A)} \mathrm{Ext}^1_R(N, A) \\ &\xrightarrow{\partial^2} \mathrm{Ext}^2_R(L, A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2(g,A)} \mathrm{Ext}^2_R(M, A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2(f,A)} \mathrm{Ext}^2_R(N, A) \xrightarrow{\partial^3} \cdots \end{aligned}$$

Rechtsabgeleitete Funktoren eines kovarianten Funktors

1.6.22. *Anmerkung.* Sei R ein Ring, M ein R-Modul, $\mathcal{F}$ ein kovarianter, additiver Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich und $(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$:
$0 \to M \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} E^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^2} E^2 \xrightarrow{\mathrm{d}^3} \cdots$
eine injektive Auflösung von M.
Indem man den Funktor $\mathcal{F}$ auf den auflösenden Komplex $(\mathcal{E}, \mathrm{d})$:
$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\mathrm{d}^0} E^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} E^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^2} E^2 \xrightarrow{\mathrm{d}^3} \cdots$ anwendet, erhält man einen *aufsteigenden* Komplex $\big(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathcal{F}(\mathrm{d})\big)$:
$0 \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}^0)} \mathcal{F}(E^0) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}^1)} \mathcal{F}(E^1) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}^2)} \mathcal{F}(E^2) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}^3)} \cdots .$
Die Homologie dieses Komplexes hängt nicht von der gewählten injektiven Auflösung ab; denn nach Korollar 1.4.9. sind je zwei injektive Auflösungen von M zueinander

homotop. Die Homotopie überträgt sich durch $\mathcal{F}$ auf den Komplex $\big(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathrm{d}\big)$, und nach Satz 1.2.5. erhält man dann aus beiden Komplexen dieselbe Homologie. Die folgende Definition 1.6.23 ist daher sinnvoll.

1.6.23. Definition. Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$ eine *injektive* Auflösung von M und $\mathcal{F}$ ein *kovarianter*, additiver Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich.

$$\mathcal{R}^n\mathcal{F}(M) := \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{E})\big)\,.$$

1.6.24. *Anmerkung* (Funktoreigenschaft von $\mathcal{R}^n\mathcal{F}$). Seien
$g : N \to M$ ein R-Modul-Homomorphismus,
$(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$ eine injektive Auflösung von M,
$(\mathcal{G}, \delta; j)$ eine injektive Auflösung von N.
Dann existiert nach Satz 1.4.8. bis auf Homotopie genau ein Morphismus von Komplexen $\tilde{g} : (\mathcal{G}, \delta) \to (\mathcal{E}, \mathrm{d})$ mit $i \circ g = \tilde{g}_0 \circ j$. Dieser überträgt sich durch $\mathcal{F}$ zu einem Morphismus $\mathcal{F}(\tilde{g}) : \big(\mathcal{F}(\mathcal{G}), \mathcal{F}(\delta)\big) \to \big(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathcal{F}(\mathrm{d})\big)$.
Homotope $\tilde{g}$ ergeben homotope $\mathcal{F}(\tilde{g})$, weil sich die Homotopie mit $\mathcal{F}$ überträgt. Also wird eindeutig ein Morphismus
$\mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\tilde{g})\big) : \mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{G})\big) \to \mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{E})\big)$ induziert. Daher ist die folgende Definition 1.6.25 sinnvoll.

1.6.25. Definition. Sei mit den oben erklärten Bezeichnungen:

$$\mathcal{R}\mathcal{F}(g) = \big(\mathcal{R}^n\mathcal{F}(g)\big) := \mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\tilde{g})\big) : \mathcal{R}\mathcal{F}(n) \to \mathcal{R}\mathcal{F}(M)$$

Man sieht leicht, daß $\mathcal{R}^n\mathcal{F}$ auf diese Weise zu einem kovarianten, additiven Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich wird.
Für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ heißt $\mathcal{R}^n\mathcal{F}$ der „n-te rechtsabgeleitete Funktor von $\mathcal{F}$“.

Die Bezeichnung erklärt sich aus Satz 1.6.27

1.6.26. *Anmerkung.* Sei $\mathcal{F}$ *linksexakt*. Dann ist $\mathcal{R}^0\mathcal{F}$ äquivalent zu $\mathcal{F}$ als Funktor.

Beweis. (Dual zum Beweis von Anmerkung 1.6.6) Sei M ein R-Modul und $(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$ eine injektive Auflösung von M. Betrachte den Abschnitt $0 \to M \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} E^1$.
Da $\mathcal{F}$ linkssexakt ist folgt aus Satz 1.5.3. (3), daß auch die Folge
$0 \to \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(i)} \mathcal{F}(E^0) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{d}^1)} \mathcal{F}(E^1)$ exakt ist. Dann ist also $\mathcal{F}(i)$ injektiv und daher $\mathcal{F}(M) \xrightarrow[\varphi_M]{\sim} \operatorname{Im}\mathcal{F}(i) \underset{\text{ex.}}{=} \operatorname{Ker}\mathcal{F}(\mathrm{d}^1) = \mathrm{H}^0\big(\mathcal{F}(\mathcal{E})\big) = \mathcal{R}^0\mathcal{F}(M)$, wobei φ_M die von $\mathcal{F}(i)$ induzierte Abbildung bezeichnet.
Seien nun M, N zwei R-Moduln und $g : N \to M$ ein R-Modul-Homomorphismus.
Betrachte injektive Auflösungen $(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$ von M und $(\mathcal{G}, \delta; j)$ von N und den zu g als „Fortsetzung“ gehörigen Morphismus $\tilde{g} : (\mathcal{G}, \delta) \to (\mathcal{E}, \mathrm{d})$ der auflösenden Komplexe mit $i \circ g = \tilde{g}_0 \circ j$ nach Satz 1.4.8. Die Anwendung von $\mathcal{F}$ liefert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(M) \arrow[r, "\mathcal{F}(i)"] & \mathcal{F}(E^0) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^1)"] & \mathcal{F}(E^1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(N) \arrow[r, "\mathcal{F}(j)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(g)"] & \mathcal{F}(G^0) \arrow[r, "\mathcal{F}(\delta^1)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(\tilde{g}_0)"] & \mathcal{F}(G^1) \arrow[u, "\mathcal{F}(\tilde{g}_1)"]
\end{tikzcd}$$

Nun wird $\mathcal{R}^0\mathcal{F}(g) = \mathrm{H}^0(\tilde{g})$ induziert von $\mathcal{F}(\tilde{g}_0)$
φ_M induziert von $\mathcal{F}(i)$
φ_N induziert von $\mathcal{F}(j)$.
Aus der Kommutativität des obigen Diagramms folgt daher die Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(M) \arrow[r, "\varphi_M"] & \mathcal{R}^0\mathcal{F}(M) \\
\mathcal{F}(N) \arrow[r, "\varphi_N"] \arrow[u, "\mathcal{F}(g)"] & \mathcal{R}^0\mathcal{F}(N) \arrow[u, "\mathcal{R}^0\mathcal{F}(g)"']
\end{tikzcd}$$

Da außerdem φ_M und φ_N, wie oben gezeigt, Isomorphismen sind, folgt die Behauptung. $\square$

1.6.27. Satz. *Sei* $0 \to L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \to 0$ *eine exakte Folge von* R*-Moduln und* $\mathcal{F}$ *ein kovarianter, additiver, linksexakter Funktor.*
Dann hat man eine aufsteigende „lange exakte Folge“, die sich funktoriell verhält:
$0 \to \mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\partial^1} \mathcal{R}^1\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{R}^1\mathcal{F}(g)} \mathcal{R}^1\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{R}^1\mathcal{F}(f)} \mathcal{R}^1\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\partial^2} \mathcal{R}^2\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{R}^2\mathcal{F}(g)} \dots,$
wobei ∂ *der Verbindungshomomorphismus von Satz 1.1.10. ist.*
(Daraus rechtfertigt sich die Bezeichnung „rechtsabgeleiteter“ Funktor, denn die fehlende rechte Null in der exakten Folge $0 \to \mathcal{F}(L) \to \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ *wird durch die lange exakte Folge aus den rechtsabgeleiteten Funktoren von* $\mathcal{F}$ *ersetzt.)*

Zum Beweis brauchen wir den dualen Hilfssatz zu Hilfssatz 1.6.9.

1.6.28. Hilfssatz (Simultane injektive Auflösungen)**.** *Sei*
$0 \to L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \to 0$ *eine exakte Folge von* R*-Moduln, und seien* $(\mathcal{E}', \mathrm{d}'; i')$ *bzw.* $(\mathcal{E}'', \mathrm{d}''; i'')$ *injektive Auflösungen von* N *bzw.* L.
Sei $E^n := E''^n \oplus E'^n$, *also* E^n *injektiv, weil* E''^n *und* E'^n *injektiv sind (Anm. 1.3.5.),*
$g_n : E''^n \to E^n$ *die kanonische Injektion* $(g_n(x'') = (x'', 0))$
$f_n : E^n \to E'^n$ *die kanonische Projektion* $(f_n\big((x'', x')\big) = x')$.
Dann existieren R*-lineare Abbildungen* $\mathrm{d}^n : E^{n-1} \to E^n$ *für alle* $n = 1, 2, \dots$ *und* $i : M \to E^0$, *so daß gilt:*

(1) $(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$ *ist eine injektive Auflösung von* M.
(2) $\tilde{g} := (g_n) : (\mathcal{E}'', \mathrm{d}'') \to (\mathcal{E}, \mathrm{d})$ *und*
$\tilde{f} := (f_n) : (\mathcal{E}, \mathrm{d}) \to (\mathcal{E}', \mathrm{d}')$
sind Morphismen von Komplexen, sodaß
$0 \to \mathcal{E}'' \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{E} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{E}' \to 0$ *exakt ist und daß gilt*
$i \circ g = g_0 \circ i''$,
$f_0 \circ i = i' \circ f$.

Beweis. Betrachte das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[u] \arrow[r, "i'"] & E'^0 \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{d}'^1"] \arrow[d, shift left, "j_0"] & E'^1 \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{d}'^2"] \arrow[d, shift left, "j_1"] & E'^2 \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{d}'^3"] \arrow[d, shift left, "j_2"] & \cdots & \text{ex.} \\
0 \arrow[r, dotted] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, dotted, "\boldsymbol{i}"] \arrow[dr, dotted, "\lambda_0"] & E^0 \arrow[u, shift left, "f_0"] \arrow[r, dotted, "\mathbf{d^1}"] \arrow[dr, dotted, "\lambda_1"] & E^1 \arrow[u, shift left, "f_1"] \arrow[r, dotted, "\mathrm{d}^{\mathbf{2}}"] \arrow[dr, dotted, "\lambda_2"] & E^2 \arrow[u, shift left, "f_2"] \arrow[r, dotted, "\mathrm{d}^{\mathbf{3}}"] \arrow[dr, dotted, "\lambda_3"] & \cdots & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i''"] & E''^0 \arrow[u, "g_0"] \arrow[r, "\mathrm{d}''^1"] & E''^1 \arrow[u, "g_1"] \arrow[r, "\mathrm{d}''^2"] & E''^2 \arrow[u, "g_2"] \arrow[r, "\mathrm{d}''^3"] & \cdots & \text{ex.} \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & \\
 & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & &
\end{tikzcd}$$

Nach Definition der f, f_n, g, g_n sind die vertikalen Spalten exakt. Ebenso sind die obere und die untere Zeile exakt, weil die $(\mathcal{E}', \mathrm{d}'; i')$ bzw. $(\mathcal{E}'', \mathrm{d}''; i'')$ Auflösungen von N bzw. L sind.

Sei $j_n : E'^n \to E^n$ die kanonische Injektion der direkten Summe $\left(j_n\big((x'', x')\big) = x'\right)$.

Ferner bezeichnen wir mit

$\pi'_n : E'^n \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^n = E'^n / \operatorname{Im} \mathrm{d}'^n \quad (= E'^n / \operatorname{Ker} \mathrm{d}'^{n+1}$ wegen der Exaktheit der oberen Zeile),

$\pi''_n : E''^n \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^n = E''^n / \operatorname{Im} \mathrm{d}''^n \quad (= E''^n / \operatorname{Ker} \mathrm{d}''^{n+1}$ wegen der Exaktheit der unteren Zeile)

die kanonischen Projektionsabbildungen,

und mit

$\tilde{\mathrm{d}}'^n$ die von d'^n induzierte Abbildung $\operatorname{Coker} \mathrm{d}'^{n-1} \overset{\text{ex.}}{=} E'^{n-1} / \operatorname{Ker} \mathrm{d}'^n \to E'^n$,

$\tilde{\mathrm{d}}''^n$ die von d''^n induzierte Abbildung $\operatorname{Coker} \mathrm{d}''^{n-1} \overset{\text{ex.}}{=} E''^{n-1} / \operatorname{Ker} \mathrm{d}''^n \to E''^n$

Man hat also

$\mathrm{d}'^n = \tilde{\mathrm{d}}'^n \circ \pi'_{n-1}$,

$\mathrm{d}''^n = \tilde{\mathrm{d}}''^n \circ \pi''_{n-1}$.

Wir definieren nun für $n \geq 0$ induktiv die

$\mathrm{d}^n : E^{n-1} \to E^n$ und damit auch die Projektionsabbildungen

$\pi_n : E^n \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}^n$.

Um den Start der Induktion zu erleichtern, setzen wir für die Dauer dieses Beweises:

$E'^{-1} := N$, $E^{-1} := M$, $E''^{-1} := L$,

$E'^n := 0$, $E^n := 0$, $E''^n := 0$ für $n \leq -2$.

$f_{-1} := f$, $g_{-1} := g$,

$f_n := 0$, $g_n := 0$ für $n \leq -2$.

$\mathrm{d}'^0 := i'$, $\mathrm{d}''^0 := i''$,

$\mathrm{d}'^n := 0$, $\mathrm{d}^n := 0$, $\mathrm{d}''^n := 0$ für $n \leq -1$.

Behauptung: Für alle $n \geq -1$ gibt es R-lineare Abbildungen $\mathrm{d}^n : E^{n-1} \to E^n$ mit

1) $\operatorname{Ker} \mathrm{d}^n = \operatorname{Im} \mathrm{d}^{n-1}$.
2) $f_n \circ \mathrm{d}^n = \mathrm{d}'^n \circ f_{n-1}$,
   $\mathrm{d}^n \circ g_{n-1} = g_n \circ \mathrm{d}''^n$,
3) f_n bzw. g_n induzieren R-lineare Abbildungen
   $g''_n : \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^n \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}^n$ bzw.
   $f'_n : \operatorname{Coker} \mathrm{d}^n \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^n$

(d.h. $g''_n \circ \pi''_n = \pi_n \circ g_n$ und $f'_n \circ \pi_n = \pi'_n \circ f_n$),
so daß die Folge
$0 \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^n \xrightarrow{g''_n} \operatorname{Coker} \mathrm{d}^n \xrightarrow{f'_n} \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^n \to 0$ exakt ist.

Wenn wir dann noch definieren $i := \mathrm{d}^0$, ist nach 1) $\operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} \mathrm{d}^{-1} = 0$, d.h. i ist injektiv und daher ist weiter $(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$ eine injektive Auflösung von M.
Nach 2) sind $\tilde{f} := (f_n)$ und $\tilde{g} := (g_n)$ Morphismen von Komplexen, so daß
$0 \to \mathcal{E}'' \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{E} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{E}' \to 0$ exakt ist und daß insbesondere gilt
$i \circ g = \mathrm{d}^0 \circ g_{-1} = g_0 \circ \mathrm{d}''^0 = g_0 \circ i''$,
$f_0 \circ i = f_0 \circ \mathrm{d}^0 = \mathrm{d}'^0 \circ f_{-1} = i' \circ f$.
Damit sind dann die Aussagen (1) und (2) des Hilfssatzes bewiesen. Die Aussage von 3) wird als technisches Hilfsmittel für den Induktionsbeweis benötigt. Bleibt der Beweis der obigen Behauptungen 1) bis 3):

Induktion nach n:
Induktionsbeginn bei $n = -1$:
1): $\operatorname{Ker} \mathrm{d}^{-1} = 0 = \operatorname{Im} \mathrm{d}^{-2}$.
2): $f_{-1} \circ \mathrm{d}^{-1} = 0 = \mathrm{d}'^{-1} \circ f_{-2}$,
$\mathrm{d}^{-1} \circ g_{-2} = 0 = g_{-1} \circ \mathrm{d}''^{-1}$.
3): $g''_{-1} = g$:
$\operatorname{Coker} \mathrm{d}''^{-1} = L \to M = \operatorname{Coker} \mathrm{d}^{-1}$,
$f'_{-1} = f$:
$\operatorname{Coker} \mathrm{d}^{-1} = M \to N = \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^{-1}$
und
$0 \to L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \to 0$
ist exakt nach Voraussetzung.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
0 \arrow[r, "\mathrm{d}'^{-2}"] & 0 \arrow[r, "\mathrm{d}'^{-1}"] & E'^{-1} = N = \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^{-1} \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{d}'^0 = i'"] & {} & \text{ex.} \\
0 \arrow[r, "\mathrm{d}^{-2}"] & 0 \arrow[u, "f_{-2} = f'_{-2}"'] \arrow[r, "\mathrm{d}^{-1}"] & E^{-1} = M = \operatorname{Coker} \mathrm{d}^{-1} \arrow[u, "f_{-1} = f = f'_{-1}"'] & & \text{ex.} \\
0 \arrow[r, "\mathrm{d}''^{-2}"] & 0 \arrow[u, "g_{-2} = g''_{-2}"'] \arrow[r, "\mathrm{d}''^{-1}"] & E''^{-1} = L = \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^{-1} \arrow[u, "g_{-1} = g = g''_{-1}"'] \arrow[r, "\mathrm{d}''^0 = i''"] & {} & \text{ex.} \\
 & & 0 \arrow[u] & & \\
 & & \text{ex.} & &
\end{tikzcd}$$

Induktionsschluß:

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & 0 & \\
E'^{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "\pi'_{n-1}"] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{\mathrm{d}}'^n"] & E'^n \arrow[u] \arrow[r, "\pi'_n"] \arrow[d, shift right, "j_n"'] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^n \arrow[u, dotted] \arrow[r] & 0 \\
E^{n-1} \arrow[u, "f_{n-1}"] \arrow[r, "\pi_{n-1}"] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}^{n-1} \arrow[u, "f'_{n-1}"'] \arrow[r, dotted, "\tilde{\mathrm{d}}^n"] \arrow[dr, dotted, "\tilde{\lambda}_n"] & E^n \arrow[u, shift right, "f_n"'] \arrow[r, dotted, "\pi_n"] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}^n \arrow[u, dotted, "f'_n"] \arrow[r, dotted] & 0 \\
E''^{n-1} \arrow[u, "g_{n-1}"] \arrow[r, "\pi''_{n-1}"] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^{n-1} \arrow[u, "g''_{n-1}"'] \arrow[r, "\tilde{\mathrm{d}}''^n"] & E''^n \arrow[u, "g_n"] \arrow[r, "\pi''_n"] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^n \arrow[u, dotted, "g''_n"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u, dotted] & \\
\text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & &
\end{tikzcd}$$

Da E''^n injektiv ist und die Folge
$0 \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^{n-1} \xrightarrow{g''_{n-1}} \operatorname{Coker} \mathrm{d}^{n-1}$
nach Induktionsvoraussetzung exakt ist, gibt es ein $\tilde{\lambda}_n : \operatorname{Coker} \mathrm{d}^{n-1} \to E''^n$ mit $\tilde{\mathrm{d}}''^n = \tilde{\lambda}_n \circ g''_{n-1}$. Setze
$\lambda_n := \tilde{\lambda}_n \circ \pi_{n-1}$.
Dann ist $\mathrm{d}''^n = \tilde{\mathrm{d}}''^n \circ \pi''_{n-1} = \tilde{\lambda}_n \circ g''_{n-1} \circ \pi''_{n-1} = \tilde{\lambda}_n \circ \pi_{n-1} \circ g_{n-1} = \lambda_n \circ g_{n-1}$

Konstruktion von d^n:
Definiere
$\mathrm{d}^n := \tilde{\mathrm{d}}^n \circ \pi_{n-1}$ mit
$\tilde{\mathrm{d}}^n := j_n \circ \tilde{\mathrm{d}'}^n \circ f'_{n-1} + g_n \circ \tilde{\lambda}_n$.
$\Big(\tilde{\mathrm{d}}^n\overline{(x'',x')} = j_n \circ \tilde{\mathrm{d}'}^n(x') + g_n \circ \tilde{\lambda}_n\big((x'',x')\big) = \big(0, \tilde{\mathrm{d}'}^n(x')\big) + \big(\tilde{\lambda}_n(x'',x'),0\big)\Big)$
Dann ist $\tilde{\mathrm{d}}^n : \operatorname{Coker} \mathrm{d}^{n-1} \to E^n$ und:
$f_n \circ \tilde{\mathrm{d}}^n = \underbrace{f_n \circ j_n}_{=\mathrm{id}_{E'^n}} \circ \tilde{\mathrm{d}'}^n \circ f'_{n-1} + \underbrace{f_n \circ g_n}_{=0} \circ \tilde{\lambda}_n = \tilde{\mathrm{d}'}^n \circ f'_{n-1}$.
und
$\tilde{\mathrm{d}}^n \circ g''_{n-1} = j_n \circ \tilde{\mathrm{d}'}^n \circ \underbrace{f'_{n-1} \circ g''_{n-1}}_{=0} + g_n \circ \underbrace{\tilde{\lambda}_n \circ g''_{n-1}}_{=\tilde{\mathrm{d}''}^n} = g_n \circ \tilde{\mathrm{d}''}^n$.
(Wird im Verlauf des Beweises benutzt)
Es folgt:
$f_n \circ \mathrm{d}^n = f_n \circ \tilde{\mathrm{d}}^n \circ \pi_{n-1} = \tilde{\mathrm{d}'}^n \circ f'_{n-1} \circ \pi_{n-1} = \tilde{\mathrm{d}'}^n \circ \pi'_{n-1} \circ f_{n-1} = \mathrm{d}'^n \circ f_{n-1}$
und
$\mathrm{d}^n \circ g_{n-1} = \tilde{\mathrm{d}}^n \circ \pi_{n-1} \circ g_{n-1} = \tilde{\mathrm{d}}^n \circ g''_{n-1} \circ \pi''_{n-1} = g_n \circ \tilde{\mathrm{d}''}^n \circ \pi''_{n-1} = g_n \circ \mathrm{d}''^n$
Damit ist 2) gezeigt.

Beweis von 1) $\quad \operatorname{Ker} \mathrm{d}^n \overset{!}{=} \operatorname{Im} \mathrm{d}^{n-1}$:

Vorbemerkung: Sei $\xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker} \alpha = A/\operatorname{Im} \alpha \xrightarrow{\tilde{\beta}} B$ eine Folge R-linearer Abbildungen, wobei π die kanonische Projektion ist, und $\beta := \tilde{\beta} \circ \pi$. Dann gilt trivialerweise $\operatorname{Ker} \beta \supseteq \operatorname{Im} \alpha$, und $\operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \alpha$ gilt genau dann, wenn $\tilde{\beta}$ injektiv ist. Da sowohl die Folge der d'^n als auch die Folge der d''^n nach Voraussetzung exakt ist, gilt also für alle n, daß $\tilde{\mathrm{d}'}^n$ und $\tilde{\mathrm{d}''}^n$ injektiv sind.

Zum Beweis von 1) braucht man also nach der Vorbemerkung nur noch zu zeigen, daß auch $\tilde{\mathrm{d}}^n$ injektiv ist:
Sei $x \in \operatorname{Ker} \tilde{\mathrm{d}}^n$, also $x \in \operatorname{Coker} \mathrm{d}^{n-1}$ und $0 = \tilde{\mathrm{d}}^n(x) = j_n\big(\tilde{\mathrm{d}'}^n \circ f'_{n-1}(x)\big) + g_n\big(\tilde{\lambda}_n(x)\big)$.
Dann ist $j_n\big(\tilde{\mathrm{d}'}^n \circ f'_{n-1}(x)\big) = -g_n\big(\tilde{\lambda}_n(x)\big) \in \operatorname{Im} j_n \cap \operatorname{Im} g_n = (0)$, da $\operatorname{Im} g_n$ im ersten direkten Summanden und $\operatorname{Im} j_n$ im zweiten direkten Summanden von
$E^n = E''^n \oplus E'^n$ liegt. Weil sowohl j_n als auch nach der Vorbemerkung $\tilde{\mathrm{d}'}^n$ injektiv sind, folgt $f'_{n-1}(x) = 0$.
Also ist $x \in \operatorname{Ker} f'_{n-1} = \operatorname{Im} g''_{n-1}$, d.h. es gibt ein $x'' \in \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^{n-1}$ mit $x = g''_{n-1}(x'')$.
Dann ist $0 = g_n \circ \tilde{\lambda}_n(x) = g_n \circ \underbrace{\tilde{\lambda}_n \circ g''_{n-1}}_{=\tilde{\mathrm{d}''}^n}(x'') = g_n \circ \tilde{\mathrm{d}''}^n(x'')$. Da sowohl g_n als auch nach der Vorbemerkung $\tilde{\mathrm{d}''}^n$ injektiv ist, folgt $x'' = 0$ und daher auch
$x = g''_{n-1}(x'') = 0$. Also ist $\operatorname{Ker} \tilde{\mathrm{d}}^n = (0)$ und folglich $\tilde{\mathrm{d}}^n$ injektiv. q.e.d.

Beweis von 3):
Betrachte die Cokerne von d'^n, d^n, d''^n mit ihren Projektionsabbildungen π'_n, π_n, π''_n:
Existenz von g''_n: Es ist $\operatorname{Ker} \pi''_n = \operatorname{Im} \tilde{\mathrm{d}''}^n$ wegen der Exaktheit der Zeile. Außerdem ist $\pi_n \circ g_n \circ \tilde{\mathrm{d}''}^n = \underbrace{\pi_n \circ \tilde{\mathrm{d}}^n}_{=0} \circ g''_{n-1} = 0$.

Also ist $\pi_n \circ g_n(\operatorname{Ker} \pi''_n) = \pi_n \circ g_n(\operatorname{Im} \tilde{\mathrm{d}}^n) = 0$, und daher existiert, weil π''_n surjektiv ist, (genau) eine R-lineare Abbildung $g''_n : \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^n \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}^n$ mit $\pi_n \circ g_n = g''_n \circ \pi''_n$.
Existenz von f'_n: Es ist $\operatorname{Ker} \pi_n = \operatorname{Im} \tilde{\mathrm{d}}^n$ wegen der Exaktheit der Zeile. Außerdem ist

$\pi'_n \circ f_n \circ \tilde{\mathrm{d}}^n = \underbrace{\pi'_n \circ \tilde{\mathrm{d}'}^n}_{=0} \circ f'_{n-1} = 0.$

Also ist $\pi'_n \circ f_n(\operatorname{Ker} \pi_n) = \pi'_n \circ f_n(\operatorname{Im} \tilde{\mathrm{d}'}^n) = 0$, und daher existiert, weil π_n surjektiv ist, (genau) eine R-lineare Abbildung $f'_n : \operatorname{Coker} \mathrm{d}^n \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^n$ mit $\pi'_n \circ f_n = f'_n \circ \pi_n$.
Die Exaktheit der Folge $0 \to \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^n \xrightarrow{g''_n} \operatorname{Coker} \mathrm{d}^n \xrightarrow{f'_n} \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^n \to 0$ ergibt sich nach dem Neuner-Lemma (Hilfssatz 1.6.8 (2)) aus dem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^{n-1} \arrow[r, "\tilde{\mathrm{d}'}^n"] \arrow[u] & E'^n \arrow[r, "\pi'_n"] \arrow[u] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}'^n \arrow[r] \arrow[u, dotted] & 0 & \text{ex.} \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}^{n-1} \arrow[r, dotted, "\tilde{\mathrm{d}}^n"] \arrow[u, "f'_{n-1}"] & E^n \arrow[r, dotted, "\pi_n"] \arrow[u, "f_n"'] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}^n \arrow[r, dotted] \arrow[u, dotted, "f'_n"'] & 0 & \text{ex.} \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^{n-1} \arrow[r, "\tilde{\mathrm{d}''}^n"] \arrow[u, "g''_{n-1}"] & E''^n \arrow[r, "\pi''_n"] \arrow[u, "g_n"'] & \operatorname{Coker} \mathrm{d}''^n \arrow[r] \arrow[u, dotted, "g''_n"'] & 0 & \text{ex.} \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u, dotted] & & \\
 & \text{ex.} & \text{ex.} & & &
\end{tikzcd}$$

□

Beweis von Satz 1.6.27.: (Analog zum Beweis von Satz 1.6.7.) Bilde eine simultane injektive Auflösung von $0 \to L \to M \to N \to 0$ nach Hilfssatz 1.6.28. und wende auf die Komplexe $(\mathcal{E}'', \mathrm{d}''), (\mathcal{E}, \mathrm{d}), (\mathcal{E}', \mathrm{d}')$ und ihre Morphismen $\tilde{g}$, $\tilde{f}$ den Funktor $\mathcal{F}$ an. Dabei erhält man das nachstehende Diagramm.
Die Zeilen sind Komplexe, da aus $\mathrm{d}^{n+1} \circ \mathrm{d}^n = 0$ folgt $\mathcal{F}(\mathrm{d}^{n+1}) \circ \mathcal{F}(\mathrm{d}^n) = 0$. Ebenso für d' und d''.
Da kommutative Diagramme bei $\mathcal{F}$ in kommutative Diagramme übergehen, sind $\mathcal{F}(\tilde{f}) := \big(\mathcal{F}(f_n)\big)$ und $\mathcal{F}(\tilde{g}) := \big(\mathcal{F}(g_n)\big)$ wieder Morphismen von Komplexen.
Die senkrechten Spalten sind exakt, weil nach Hilfssatz 1.1.7. die $\mathcal{F}(f_n)$ bzw. $\mathcal{F}(g_n)$ wieder kanonische Projektion bzw. Injektion von $\mathcal{F}(E^n) = \mathcal{F}(E''^n) \oplus \mathcal{F}(E'^n)$ sind.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(E'^0) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}'^1)"] \arrow[u] & \mathcal{F}(E'^1) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}'^2)"] \arrow[u] & \mathcal{F}(E'^2) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}'^3)"] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(E^0) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^1)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(f_0)"] & \mathcal{F}(E^1) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^2)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(f_1)"] & \mathcal{F}(E^2) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^3)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(f_2)"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(E''^0) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}''^1)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(g_0)"] & \mathcal{F}(E''^1) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}''^2)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(g_1)"] & \mathcal{F}(E''^2) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}''^3)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(g_2)"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
 & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} &
\end{tikzcd}$$

Also ist $0 \to \mathcal{F}(\mathcal{E}'') \xrightarrow{\mathcal{F}(\tilde{g})} \mathcal{F}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\tilde{f})} \mathcal{F}(\mathcal{E}') \to 0$ eine exakte Folge von Morphismen, so daß Satz 1.1.10. anwendbar ist. Nach Definition ist $\mathcal{R}^n\mathcal{F}(\mathcal{N}) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{E}')\big)$, $\mathcal{R}^n\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{E})\big)$ und $\mathcal{R}^n\mathcal{F}(\mathcal{L}) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{E}'')\big)$, so daß die Behauptung von Satz 1.6.27. folgt, wenn man noch beachtet, daß nach Anmerkung 1.6.26. der linke Teil der langen exakten Homologiefolge

$0 \to \mathcal{R}^0\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{R}^0\mathcal{F}(g)} \mathcal{R}^0\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{R}^0\mathcal{F}(f)} \mathcal{R}^0\mathcal{F}(N) \xrightarrow{\partial^1} \cdots$

isomorph ist zu

$0 \to \mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\partial^1} \cdots$ □

1.6.29. *Beispiel.* Sei A ein R-Modul.
$\mathcal{F} := \mathrm{Hom}_R(A, \bullet)$ ist nach Beispiel 1.5.4. (3) kovariant und linksexakt. Die rechtsabgeleiteten Funktoren von $\mathrm{Hom}_R(A,\bullet)$ werden mit $\mathrm{Ext}^n_R(A,\bullet)$ bezeichnet. Daß das keine Konflikte mit der Bezeichnung $\mathrm{Ext}^n_R(\bullet, A) := \mathcal{R}^n\big(\mathrm{Hom}_R(\bullet, A)\big)$ von Beispiel 1.6.19. gibt, folgt aus Abschnitt 1.7. und 1.9.

Nach Satz 1.6.27. hat man also:

1.6.30. Satz. *Sei* $0 \to L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \to 0$ *eine kurze exakte Folge von R-Moduln. Man hat dann die „lange exakte kovariante* Ext*-Folge“:*

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A,L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(A,g)} \mathrm{Hom}_R(A,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(A,f)} \mathrm{Hom}_R(A,N)$$
$$\xrightarrow{\partial^1} \mathrm{Ext}^1_R(A,L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1(A,g)} \mathrm{Ext}^1_R(A,M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1(A,f)} \mathrm{Ext}^1_R(A,N)$$
$$\xrightarrow{\partial^2} \mathrm{Ext}^2_R(A,L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2(A,g)} \mathrm{Ext}^2_R(A,M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2(A,f)} \mathrm{Ext}^2_R(A,N) \xrightarrow{\partial^3} \cdots$$

Linksabgeleitete Funktoren eines kontravarianten Funktors

1.6.31. *Anmerkung.* Analog zu dem Vorhergehenden kann man schließlich noch linksabgeleitete Funktoren für einen additiven, kontravarianten Funktor $\mathcal{F}$ mittels injektiver Auflösungen bilden. Ist $\mathcal{F}$ rechtsexakt, so erhält man aus einer kurzen exakten Folge von R-Moduln wieder eine „lange exakte Folge“. Die Definitionen, Sätze und Beweise ergeben sich sinngemäß aus dem Bisherigen.

1.6.32. Übersicht.

	kovarianter Funktor	*kontravarianter Funktor*
$\mathcal{F}$ *rechtsexakt ergibt* $\mathcal{L}_n\mathcal{F}$	*projektive Auflösung*	*injektive Auflösung*
$\mathcal{F}$ *linksexakt ergibt* $\mathcal{R}^n\mathcal{F}$	*injektive Auflösung*	*projektive Auflösung*

Aus einer kurzen exakten Folge wird eine lange exakte Folge.
Dazu braucht man für

$\mathcal{F}$ *rechtsexakt* $\Rightarrow$ *linksabgeleitete Funktoren* $\mathcal{L}\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ *linksexakt* $\Rightarrow$ *rechtsabgeleitete Funktoren* $\mathcal{R}\mathcal{F}$.

Merke: *Die Folge der abgeleiteten Funktoren ersetzt die nach Anwendung des Funktors fehlende Null.*

Interessant ist noch, daß von den Sätzen über die langen exakten Folgen für die abgeleiteten Funktoren auch die Umkehrungen gelten. Wir illustrieren dies hier in einer schwachen Version am Beispiel der rechtsabgeleiteten Funktoren eines kontravarianten Funktors, da das für Hilfssatz 3.3.13. gebraucht wird:

1.6.33. Satz. *Sei $\mathcal{F}$ ein kontravarianter, additiver, linksexakter Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich. Ferner seien $\mathcal{H}^n$ für $n = 0, 1, \dots$ additive kontravariante Funktoren der Kategorie der R-Moduln in sich, so daß gilt:*

(1) $\mathcal{H}^0 = \mathcal{F}$.
(2) $\mathcal{H}^n(P) = 0$ *für jeden projektiven R-Modul P und alle* $n \geq 1$.
(3) *Zu jeder kurzen exakten Folge von R-Moduln*
$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$
gibt es eine „lange exakte Folge":

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{F}(L) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \\ &\xrightarrow{\delta^1} \mathcal{H}^1(L) \xrightarrow{\mathcal{H}^1(g)} \mathcal{H}^1(M) \xrightarrow{\mathcal{H}^1(f)} \mathcal{H}^1(N) \\ &\xrightarrow{\delta^2} \mathcal{H}^2(L) \xrightarrow{\mathcal{H}^2(g)} \mathcal{H}^2(M) \xrightarrow{\mathcal{H}^2(f)} \mathcal{H}^2(N) \\ &\xrightarrow{\delta^3} \mathcal{H}^3(L) \xrightarrow{\mathcal{H}^3(g)} \cdots . \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{H}^n(M) \simeq \mathcal{R}^n\mathcal{F}(M)$ für alle R-Moduln M und alle $n \geq 0$.

Beweis. Seien $\mathcal{H}^n$ für $n = 0, 1, \dots$ kontravariante additive Funktoren, die die Eigenschaften (1)–(3) erfüllen und sei M ein beliebiger R-Modul.
Behauptung: $\mathcal{H}^n(M) \simeq \mathcal{R}^n\mathcal{F}(M)$ für alle $n \neq 0$.
Beweis: Induktion nach n.
$n = 0$: Nach Voraussetzung ist $\mathcal{H}^0(M) = \mathcal{F}(M)$ und nach Anmerkung 1.6.17. ist $\mathcal{F}(M) \simeq \mathcal{R}^0\mathcal{F}(M)$.
$n = 1$: Stelle M dar als Faktormodul eines projektiven (freien) R-Moduls P. Dann hat man eine kurze exakte Folge
$0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} M \to 0$.
Aus den zugehörigen langen exakten Folgen für $\mathcal{F}$ bzgl. $\mathcal{H}^n$ und $\mathcal{R}^n\mathcal{F}$ erhält man das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \operatorname{Im}\mathcal{F}(i) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(K) & \xrightarrow{\delta^1} & \mathcal{H}^1(M) & \xrightarrow{\mathcal{H}^1(p)} & \mathcal{H}^1(P) = 0 \\ & \| & & \| & & & & \| \\ 0 \to & \operatorname{Im}\mathcal{F}(i) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(K) & \xrightarrow{\partial^1} & \mathcal{R}^1\mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\mathcal{R}^1\mathcal{F}(p)} & \mathcal{R}^1\mathcal{F}(P) = 0 \end{array}$$

Es folgt $\mathcal{H}^1(M) \simeq \mathcal{F}(K)/\operatorname{Im}\mathcal{F}(i) \simeq \mathcal{R}^1\mathcal{F}(M)$.
$n \geq 2$: Sei nun $\mathcal{H}^i(A) \simeq \mathcal{R}^i\mathcal{F}(A)$ schon gezeigt für alle R-Moduln A und alle $i < n$.
Sei wieder M ein beliebiger R-Modul.
Stelle dar
$0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} M \to 0$ wie oben.
Aus den zu der kurzen exakten Folge gehörigen langen exakten Folgen erhält man für alle $n \geq 2$ die exakten Folgen:

$$(*) \qquad 0 = \mathcal{H}^{n-1}(P) \xrightarrow{\mathcal{H}^{n-1}(i)} \mathcal{H}^{n-1}(K) \xrightarrow{\delta^n} \mathcal{H}^n(M) \xrightarrow{\mathcal{H}^n(p)} \mathcal{H}^n(P) = 0$$

und ebenso

$$(**) \quad 0 = \mathcal{R}^{n-1}\mathcal{F}(P) \xrightarrow{\mathcal{R}^{n-1}\mathcal{F}(i)} \mathcal{R}^{n-1}\mathcal{F}(K) \xrightarrow{\partial^n} \mathcal{R}^n\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{R}^n\mathcal{F}(p)} \mathcal{R}^n\mathcal{F}(P) = 0$$

Aus $(*)$ erhält man den Isomorphismus
$\mathcal{H}^{n-1}(K) \xrightarrow[\delta^n]{\sim} \mathcal{H}^n(M)$,

und aus $(**)$ erhält man den Isomorphismus
$\mathcal{R}^{n-1}\mathcal{F}(K) \xrightarrow[\partial^n]{\sim} \mathcal{R}^n\mathcal{F}(M)$.
Nach Induktionsannahme ist $\mathcal{H}^{n-1}(K) \simeq \mathcal{R}^{n-1}\mathcal{F}(K)$. Aus den obigen Isomorphismen folgt daher $\mathcal{H}^n(M) \simeq \mathcal{R}^n\mathcal{F}(M)$. □

Zum Ende dieses Abschnittes über abgeleitete Funktoren noch eine technische Bemerkung:

1.6.34. *Anmerkung.* Sei R ein Ring. M, A seien R-Moduln. Ferner sei $r \in R$, und $\mu_r : M \to M$ bezeichne die Multiplikation mit r. Man überlegt leicht, daß dann auch die folgenden Abbildungen durch die Multiplikation mit r gegeben sind:
$A \otimes_R \mu_r : A \otimes_R M \to A \otimes_R M$,
$\mu_r \otimes_R A : M \otimes_R A \to M \otimes_R A$,
$\mathrm{Hom}_R(A, \mu_r) : \mathrm{Hom}_R(A, M) \to \mathrm{Hom}_R(A, M)$,
$\mathrm{Hom}_R(\mu_r, A) : \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, A)$.
Dies überträgt sich auf die abgeleiteten Funktoren Tor und Ext, d.h. die folgenden Abbildungen sind ebenfalls durch die Multiplikation mit r gegeben:
$\mathrm{Tor}_n^R(A, \mu_r) : \mathrm{Tor}_n^R(A, M) \to \mathrm{Tor}_n^R(A, M)$,
$\mathrm{Tor}_n^R(\mu_r, A) : \mathrm{Tor}_n^R(M, A) \to \mathrm{Tor}_n^R(M, A)$,
$\mathrm{Ext}_R^n(A, \mu_r) : \mathrm{Ext}_R^n(A, M) \to \mathrm{Ext}_R^n(A, M)$,
$\mathrm{Ext}_R^n(\mu_r, A) : \mathrm{Ext}_R^n(M, A) \to \mathrm{Ext}_R^n(M, A)$.

Beweis: Die Behauptungen folgen aus dem nachstehenden Satz 1.6.35.

1.6.35. Satz. *Sei R ein Ring. Für einen R-Modul M bezeichne $\mu_r : M \to M$ die Multiplikation mit r. Ferner sei $\mathcal{F}$ ein additiver, linksexakter bzw. rechtsexakter Funktor der Kategorie der R-Moduln in sich mit der Eigenschaft, daß für alle R-Moduln M die Abbildung $\mathcal{F}(\mu_r) : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ wieder die Multiplikation mit r ist.*
Dann sind die Abbildungen:
$\mathcal{L}_n\mathcal{F}(\mu_r) : \mathcal{L}_n\mathcal{F}(M) \to \mathcal{L}_n\mathcal{F}(M)$ *und*
$\mathcal{R}^n\mathcal{F}(\mu_r) : \mathcal{R}^n\mathcal{F}(M) \to \mathcal{R}^n\mathcal{F}(M)$
ebenfalls durch die Multiplikation mit r gegeben.

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall, daß $\mathcal{F}$ ein kovarianter, linksexakter Funktor ist (z.B. $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_R(A, \bullet)$). Die übrigen Fälle werden analog bewiesen.
Betrachte eine injektive Auflösung $(\mathcal{E}, \mathrm{d}; i)$ von M. Sei $\mu_r^n : E^n \to E^n$ die Multiplikation mit r. Da die d^n alles R-lineare Abbildungen sind, sind alle Maschen des nebenstehenden Diagramms kommutativ, d.h. $\tilde{\mu} := \left(\mu_r^n\right)$ ist ein Morphismus der Komplexe $(\mathcal{E}, d) \to (\mathcal{E}, \mathrm{d})$ mit $i \circ \mu_r = \mu_r^0 \circ i$. Wende darauf den Funktor $\mathcal{F}$ an:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] & E^1 \arrow[r, "\mathrm{d}^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[u, "\mu_r"] & E^0 \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] \arrow[u, "\mu_r{}^0"] & E^1 \arrow[r, "\mathrm{d}^2"] \arrow[u, "\mu_r{}^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nach Definition ist $\mathcal{R}^n\mathcal{F}(M)$ der n-te Kohomologiemodul des Komplexes $\big(\mathcal{F}(\mathcal{E}),\mathcal{F}(\mathrm{d})\big)$ und $\mathcal{R}^n\mathcal{F}(\mu_r)$ die von $\mathcal{F}(\mu_r^n)$ (repräsentantenweise) induzierte Abbildung. Da nach Voraussetzung $\mathcal{F}(\mu_r^n)$ wieder die Multiplikation mit r ist, gilt das auch für die repräsentantenweise definierte induzierte Abbildung.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^0)"] & \mathcal{F}(E^0) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^1)"] & \mathcal{F}(E^1) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^2)"] & \cdots \\
0 \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^0)"] & \mathcal{F}(E^0) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^1)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(\mu_r^0)"] & \mathcal{F}(E^1) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{d}^2)"] \arrow[u, "\mathcal{F}(\mu_r^1)"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

□

1.6.36. Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.6.35. gilt:* $r \in \operatorname{Ann}_R(M) \Longrightarrow r \in \operatorname{Ann}_R\big(\mathcal{R}^n\mathcal{F}(M)\big)$ *bzw.* $r \in \operatorname{Ann}_R\big(\mathcal{L}_n\mathcal{F}(M)\big)$.

Beweis. Betrachte den selben Fall wie im Beweis von Satz 1.6.35. und benutze die dortigen Bezeichnungen. Nun ist $\mu_r = 0$ die Null-Abbildung. Setze daher μ_r auf den Komplex $(\mathcal{E},\mathrm{d})$ durch die Null-Abbildung fort: $\mu_r^n := 0$ für alle n. Dann ist $\tilde{\mu} := \big(\mu_r^n\big)$ ein Morphismus von Komplexen mit $i \circ \mu_r = \mu_r^0 \circ i$. Da $\mathcal{F}$ additiv ist, ist dann auch $\mathcal{F}(\mu_r^n) = 0$, also $\mathcal{R}^n\mathcal{F}(\mu_r) = 0$ für alle n. Nach Satz 1.6.35. ist aber $\mathcal{R}^n\mathcal{F}(\mu_r)$ die Multiplikation mit r, also gilt $r \in \operatorname{Ann}_R\big(\mathcal{R}^n\mathcal{F}(M)\big)$.

Oder: Da $\mathcal{F}$ additiv ist, sind auch alle $\mathcal{R}^n\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{L}_n\mathcal{F}$ additiv. Da in unserem Fall $\mu_r = 0$ ist, sind also auch alle $\mathcal{R}^n\mathcal{F}(\mu_r) = 0$ bzw. $\mathcal{L}_n\mathcal{F}(\mu_r) = 0$. Andererseits sind diese Abbildungen nach Satz 1.6.35. die Multiplikation mit r. Also ist auch $r \in \operatorname{Ann}_R\big(\mathcal{R}^n\mathcal{F}(M)\big)$ bzw. $r \in \operatorname{Ann}_R\big(\mathcal{L}_n\mathcal{F}(M)\big)$. □

1.6.37. *Folgerung.* Seien M, N zwei R-Moduln und $r \in \operatorname{Ann}_R(M)$ oder $r \in \operatorname{Ann}_R(N)$. Dann gilt für alle n:

$$r \cdot \operatorname{Tor}_n^R(M,N) = 0 \quad \text{und} \quad r \cdot \operatorname{Ext}_R^n(M,N) = 0\,.$$

1.7. **Funktoren in zwei Variablen.** *Problem*: $\bullet \otimes_R \bullet$ und $\operatorname{Hom}_R(\bullet,\bullet)$ kann man als Funktoren in der ersten oder in der zweiten Variablen auffassen und entsprechend die abgeleiteten Funktoren bilden. Wie hängen diese zusammen? Beispielsweise sind ja die Bezeichnungen $\operatorname{Ext}_R^n(A,\bullet)$ und $\operatorname{Ext}_R^n(\bullet,B)$ bzw. $\operatorname{Tor}_n^R(A,\bullet)$ und $\operatorname{Tor}_n^R(\bullet,B)$ nur dann sinnvoll, wenn man dasselbe Ergebnis $\operatorname{Ext}_R^n(A,B)$ erhält, egal ob man $\operatorname{Ext}_R^n(A,\bullet)$ auf B oder $\operatorname{Ext}_R^n(\bullet,B)$ auf A anwendet. (Analog für Tor).
In diesem kurzen Abschnitt bringen wir nur die grundlegenden Definitionen, während das angesprochene Problem dann in Abschnitt 1.9. gelöst wird.
$\operatorname{Hom}_R(\bullet,\bullet)$ und $\bullet \otimes_R \bullet$ sind Beispiele von Funktoren in zwei Variablen. Allgemein definiert man:

1.7.1. Definition. Ein Funktor $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\bullet,\bullet)$ in zwei Variablen, kontravariant in der ersten und kovariant in der zweiten Variablen, ist eine Zuordnungsvorschrift $\mathcal{F}$, die jedem Paar (A,B) von R-Moduln einen R-Modul $\mathcal{F}(A,B)$ und jedem Paar von R-linearen Abbildungen (f,g) mit $f \in \operatorname{Hom}_R(A',A)$ und $g \in \operatorname{Hom}_R(B,B')$ ein Paar von R-linearen Abbildungen
$\mathcal{F}(f,B) \in \operatorname{Hom}_R\big(\mathcal{F}(A,B),\mathcal{F}(A',B)\big)$,
$\mathcal{F}(A,g) \in \operatorname{Hom}_R\big(\mathcal{F}(A,B),\mathcal{F}(A,B')\big)$
zuordnet mit:

(1) $\mathcal{F}(A,\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(A,B)}$ und $\mathcal{F}(\mathrm{id}_A,B) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(A,B)}$.

(2) $\mathcal{F}(f \circ f', B) = \mathcal{F}(f', B) \circ \mathcal{F}(f, B)$ und
$\mathcal{F}(A, g \circ g') = \mathcal{F}(A, g) \circ \mathcal{F}(A, g')$.
(3) Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A,B) \arrow[r, "\mathcal{F}(f,B)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(A,g)"'] \arrow[dr, dotted, "\mathcal{F}(f,g)"] & \mathcal{F}(A',B) \arrow[d, "\mathcal{F}(A',g)"] \\
\mathcal{F}(A,B') \arrow[r, "\mathcal{F}(f,B')"] & \mathcal{F}(A',B')
\end{tikzcd}$$

Die zusammengesetzte Abbildung
$\mathcal{F}(A', g) \circ \mathcal{F}(f, B) = \mathcal{F}(f, B') \circ \mathcal{F}(A, g)$ wird mit $\mathcal{F}(f, g)$ bezeichnet.
(Insbesondere ist dann $\mathcal{F}(A, g) = \mathcal{F}(\mathrm{id}_A, g)$ und $\mathcal{F}(f, B) = \mathcal{F}(f, \mathrm{id}_B)$.)
Analog definiert man Funktoren in zwei oder mehr Variablen mit anderen Varianzen.
$\mathcal{F}$ heißt „additiv", wenn $\mathcal{F}(\bullet, B)$ und $\mathcal{F}(A, \bullet)$ additiv sind.

1.7.2. *Anmerkung.* $\mathrm{Hom}_R(\bullet, \bullet)$ ist ein additiver Funktor in zwei Variablen, kontravariant in der ersten und kovariant in der zweiten Variablen.
$\bullet \otimes_R \bullet$ ist ein additiver Funktor in zwei Variablen, kovariant in beiden Variablen.

Analog zu Definition 1.6.5. definiert man:

1.7.3. Definition. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{H}$ zwei Funktoren in zwei Variablen, kontravariant in der ersten und kovariant in der zweiten Variablen.
$\mathcal{F}$ und $\mathcal{H}$ heißen „äquivalent", wenn gilt:
Zu jedem Paar (A, B) von R-Moduln gibt es einen Isomorphismus
$\varphi_{A,B} : \mathcal{F}(A, B) \to \mathcal{H}(A, B)$, so daß für alle $f \in \mathrm{Hom}_R(A', A)$ und $g \in \mathrm{Hom}_R(B, B')$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A,B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f,g)"'] & \mathcal{H}(A,B) \arrow[d, "\mathcal{H}(f,g)"] \\
\mathcal{F}(A',B') \arrow[r, "\varphi_{A',B'}"] & \mathcal{H}(A',B')
\end{tikzcd}$$

(Insbesondere ist dann
$\mathcal{F}(\bullet, B)$ äquivalent zu $\mathcal{H}(\bullet, B)$ vermöge $\varphi_{\bullet,B}$ und
$\mathcal{F}(A, \bullet)$ äquivalent zu $\mathcal{H}(A, \bullet)$ vermöge $\varphi_{A,\bullet}$).
Analog definiert man Äquivalenz von Funktoren anderer Varianzen.

Bevor wir das eingangs angesprochene Problem durch die Berechnung der abgeleiteten Funktoren eines Funktors in zwei Variablen über Doppelkomplexe in Abschnitt 1.9. behandeln, betrachten wir im Abschnitt 1.8. zunächst als Beispiel für die Verwendung von Doppelkomplexen das Tensorprodukt von Komplexen.

1.8. **Tensorprodukt von Komplexen.** Wir behandeln wieder exemplarisch den Fall absteigender Komplexe, wobei wir vorausetzen, daß *für negative Indizes nur endlich viele homogene Komponenten* $\neq (0)$ *sind.* Für aufsteigende Komplexe hat man die analogen Begriffe und Sätze.

1.8.1. *Anmerkung.* Seien

$(\mathcal{M}, \mathrm{d}): \qquad \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} M_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} M_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} M_0 \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \cdots \qquad$ und

$(\mathcal{N}, \delta): \qquad \cdots \xrightarrow{\delta_3} N_2 \xrightarrow{\delta_2} N_1 \xrightarrow{\delta_1} N_0 \xrightarrow{\delta_0} \cdots$

zwei absteigende Komplexe.

Da das Tensorprodukt mit der direkten Summe vertauscht, ist dann $\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{N} = \bigoplus\limits_{n,m \in \mathbb{Z}} L_{n,m}$ mit $L_{n,m} := M_n \otimes_R N_m$.

Wir definieren:

$\mathrm{D}_{n,m} := \mathrm{d}_n \otimes \mathrm{id}_{N_m} : L_{n,m} \to L_{n-1,m}, \qquad$ und

$\Delta_{n,m} := (-1)^n \cdot \mathrm{id}_{M_n} \otimes \delta_m : L_{n,m} \to L_{n,m-1}$.

Man erhält dann auf $\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{N}$ die Struktur eines „Doppelkomplexes“ (Hier der Einfachheit halber das Diagramm für den Fall $M_i = 0$ und $N_i = 0$ für $i < 0$):

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\mathrm{D}_{4,3}"] & {} \arrow[d, "\mathrm{D}_{4,2}"] & {} \arrow[d, "\mathrm{D}_{4,1}"] & {} \arrow[d, "\mathrm{D}_{4,0}"] & {} \arrow[d, "\mathrm{D}_{4,-1}"] & \\
{} \arrow[r, "\Delta_{3,4}"] & L_{3,3} \arrow[r, "\Delta_{3,3}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{3,3}"] & L_{3,2} \arrow[r, "\Delta_{3,2}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{3,2}"] & L_{3,1} \arrow[r, "\Delta_{3,1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{3,1}"] & L_{3,0} \arrow[r, "\Delta_{3,0}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{3,0}"] & 0 \arrow[r, "\Delta_{3,-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{3,-1}"] & {} \\
{} \arrow[r, "\Delta_{2,4}"] & L_{2,3} \arrow[r, "\Delta_{2,3}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{2,3}"] & L_{2,2} \arrow[r, "\Delta_{2,2}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{2,2}"] & L_{2,1} \arrow[r, "\Delta_{2,1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{2,1}"] & L_{2,0} \arrow[r, "\Delta_{2,0}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{2,0}"] & 0 \arrow[r, "\Delta_{2,-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{2,-1}"] & {} \\
{} \arrow[r, "\Delta_{1,4}"] & L_{1,3} \arrow[r, "\Delta_{1,3}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{1,3}"] & L_{1,2} \arrow[r, "\Delta_{1,2}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{1,2}"] & L_{1,1} \arrow[r, "\Delta_{1,1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{1,1}"] & L_{1,0} \arrow[r, "\Delta_{1,0}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{1,0}"] & 0 \arrow[r, "\Delta_{1,-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{1,-1}"] & {} \\
{} \arrow[r, "\Delta_{0,4}"] & L_{0,3} \arrow[r, "\Delta_{0,3}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{0,3}"] & L_{0,2} \arrow[r, "\Delta_{0,2}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{0,2}"] & L_{0,1} \arrow[r, "\Delta_{0,1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{0,1}"] & L_{0,0} \arrow[r, "\Delta_{0,0}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{0,0}"] & 0 \arrow[r, "\Delta_{0,-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{0,-1}"] & {} \\
{} \arrow[r, "\Delta_{-1,4}"] & 0 \arrow[r, "\Delta_{-1,3}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{-1,3}"] & 0 \arrow[r, "\Delta_{-1,2}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{-1,2}"] & 0 \arrow[r, "\Delta_{-1,1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{-1,1}"] & 0 \arrow[r, "\Delta_{-1,0}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{-1,0}"] & 0 \arrow[r, "\Delta_{-1,-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{-1,-1}"] & {} \\
 & {} & {} & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}
$$

Es gilt:

$\mathrm{D}_{n-1,m} \circ \mathrm{D}_{n,m} = 0 \qquad$ wegen $\mathrm{d}_{n-1} \circ \mathrm{d}_n = 0$,

$\Delta_{n,m-1} \circ \Delta_{n,m} = 0 \qquad$ wegen $\delta_{m-1} \circ \delta_m = 0 \qquad$ und

$\Delta_{n-1,m} \circ D_{n,m} + D_{n,m-1} \circ \Delta_{n,m} = 0$,

d.h. die Maschen des vorstehenden Diagramms sind „antikommutativ“.

Zum Beweis der letzten Behauptung genügt es, Elemente der Form $x \otimes y \in L_{n,m}$ mit $x \in M_n$ und $y \in N_m$ zu betrachten:

Es ist nach Definition

$\Delta_{n-1,m} \circ \mathrm{D}_{n,m}(x \otimes y) = \Delta_{n-1,m}\big(\mathrm{d}_n x \otimes y\big) = (-1)^{n-1} \cdot \mathrm{d}_n x \otimes \delta_m y$

und

$\mathrm{D}_{n,m-1} \circ \Delta_{n,m}(x \otimes y) = \mathrm{D}_{n,m-1}\big((-1)^n \cdot x \otimes \delta_m y\big) = (-1)^n \cdot \mathrm{d}_n x \otimes \delta_m y$

$= -\Delta_{n-1,m} \circ \mathrm{D}_{n,m}(x \otimes y)$. q.e.d.

1.8.2. *Anmerkung.* Man bildet aus dem in Anmerkung 1.8.1 konstruierten Doppelkomplex den zugehörigen einfachen Komplex $(\mathcal{L}, \mathrm{D})$, indem man definiert:

$$L_n := \bigoplus_{i+k=n} L_{i,k} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{D}_n := \bigoplus_{i+k=n} \big(\mathrm{D}_{i,k} + \Delta_{i,k}\big) : L_n \to L_{n-1}\,.$$

Tatsächlich ist $(\mathcal{L}, \mathrm{D})$ ein Komplex; denn es gilt für $z \in L_{i,k}$ mit $i + k = n$:
$(\mathrm{D}_{n-1} \circ \mathrm{D}_n)z = \mathrm{D}_{n-1}\big(\underbrace{\mathrm{D}_{i,k}z}_{\in L_{i-1,k}} + \underbrace{\Delta_{i,k}z}_{\in L_{i,k-1}}\big) =$
$\underbrace{(\mathrm{D}_{i-1,k} \circ \mathrm{D}_{i,k})}_{=0}z + \underbrace{(\Delta_{i-1,k} \circ \mathrm{D}_{i,k} + \mathrm{D}_{i,k-1} \circ \Delta_{i,k})}_{=0 \text{ (antikommutativ)}}z + \underbrace{(\Delta_{i,k-1} \circ \Delta_{i,k})}_{=0}z = 0.$ q.e.d.

1.8.3. Definition. $(\mathcal{L}, \mathrm{D})$ heißt das
„Tensorprodukt der Komplexe $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ und $(\mathcal{N}, \delta)$“. Bezeichnung:
$(\mathcal{L}, \mathrm{D}) = (\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{N}, \mathrm{D})$.

1.8.4. *Anmerkung.* $\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{N}$ ist also als R-Modul einfach das Tensorprodukt der beiden R-Moduln $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ über R. Dieses wird auf die oben beschriebene Art mit einer Graduierung und einem Randoperator versehen und damit zu einem Komplex.

1.8.5. Eigenschaften. Mit den oben erklärten Bezeichnungen gilt:

(1) Man hat eine natürliche Isomorphie von Komplexen $\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{N} \simeq \mathcal{N} \otimes_R \mathcal{M}$.
(2) Ist $(\mathcal{N}', \delta')$ ein weiterer Komplex, so hat man eine natürliche Isomorphie $(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{N}) \otimes_R \mathcal{N}' \simeq \mathcal{M} \otimes_R (\mathcal{N} \otimes_R \mathcal{N}')$.
(3) Sind $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ und $\beta : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ Morphismen von Komplexen, so ist die auf dem Tensorprodukt induzierte R-lineare Abbildung $\alpha \otimes \beta := \gamma : \mathcal{M} \otimes_R \mathcal{N} \to \mathcal{M}' \otimes_R \mathcal{N}'$ ebenfalls ein Morphismus von Komplexen. Dabei ist $\gamma_n := \bigoplus\limits_{i+k=n} \alpha_i \otimes \beta_k$.
(4) Ist $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ exakt und $(\mathcal{P}, \delta)$ ein Komplex, so daß alle P_n R-flach sind, so ist auch $(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}, \mathrm{D})$ exakt.

Beweis. (1): Sei $f_{ik} : M_i \otimes_R N_k \to N_k \otimes_R M_i$ die kanonische R-lineare Abbildung mit $f_{ik}(x \otimes y) = y \otimes x$.
Seien ferner $L_n := \bigoplus_{i+k=n} L_{ik}$ mit $L_{ik} := M_i \otimes_R N_k$ und $L'_n := \bigoplus_{i+k=n} L'_{ik}$ mit $L'_{ik} := N_k \otimes_R M_i$ sowie D bzw. D′ die Randoperatoren der Komplexe $\mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{L}'$.
Definiere dann $f_n : L_n \to L'_n$ durch $f_n := \bigoplus_{i+k=n} (-1)^{i \cdot k} \cdot f_{ik}$.
Es ist klar, daß die f_n natürliche R-Modul-Isomorphismen sind.
Bleibt zu zeigen, daß $f := (f_n)$ ein Morphismus von Komplexen ist, d.h. daß gilt:
$f_{n-1} \circ D_n \overset{!}{=} D'_n \circ f_n$ für alle n.
Beweis: Es genügt offenbar, diese Formel für Elemente der Form $x \otimes y$ mit $x \in M_i$ und $y \in N_k$ mit $i + k = n$ nachzurechnen:
Einerseits ist

$$\begin{aligned} f_{n-1} \circ \mathrm{D}_n(x \otimes y) &= f_{n-1}\big(\mathrm{d}_i x \otimes y + (-1)^i \cdot x \otimes \delta_k y\big) \\ &= (-1)^{(i-1)\cdot k} \cdot y \otimes \mathrm{d}_i x + (-1)^{i\cdot(k-1)} \cdot (-1)^i \cdot \delta_k y \otimes x \\ &= (-1)^{(i-1)\cdot k} \cdot y \otimes \mathrm{d}_i x + (-1)^{i\cdot k} \cdot \delta_k y \otimes x\,. \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{D}'_n \circ f_n(x \otimes y) & = & \mathrm{D}'_n\big((-1)^{i \cdot k} \cdot y \otimes x\big) \\
& = & (-1)^{i \cdot k} \cdot \big(\delta_k y \otimes x + (-1)^k y \cdot \mathrm{d}_i x\big) \\
& = & (-1)^{i \cdot k} \delta_k y \otimes x + (-1)^{(i+1) \cdot k} \cdot y \otimes \mathrm{d}_i x \\
& = & (-1)^{i \cdot k} \delta_k y \otimes x + (-1)^{(i-1) \cdot k} \cdot y \otimes \mathrm{d}_i x \\
& = & f_{n-1} \circ \mathrm{D}_n(x \otimes y) \quad \text{nach dem oben gezeigten.}
\end{array}$$

(2) und (3): zeigt man durch ähnliche Rechnungen. (Vgl. den Beweis von 1.9.3. (1)).

(4): Wir zeigen:
$\mathrm{H}_n(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}) \overset{!}{=} 0$ für alle n.
Beweis: Sei $(\mathcal{P}^{[r]}, \delta^{[r]})$ der Komplex, der aus $(\mathcal{P}, \delta)$ entsteht, indem man
$P_i^{[r]} := 0$ und $\delta_{i+1}^{[r]} := 0$ setzt für alle $i \leq r$ und
$P_i^{[r]} := P_i$ sowie $\delta_{i+1}^{[r]} := \delta_{i+1}$ für alle $i > r$.
Man hat dann
$(\mathcal{P}^{[r]}, \delta[r])$: $\quad \cdots \xrightarrow{\delta_{i+1}} P_i \xrightarrow{\delta_i} P_{i-1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} P_{i-2} \cdots \xrightarrow{\delta_{r+2}} P_{r+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$
Mit (P_r) bezeichnen wir den trivialen Komplex mit P_r an der Position r:
(P_r): $\quad \cdots \to 0 \to 0 \to P_r \to 0 \to 0 \to \cdots$

Man hat dann eine exakte Folge von Komplexen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
(P_r) \arrow[d, "h"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r+4}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r+3}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r+2}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r+1}"] & P_r \arrow[r] \arrow[d, "h_r = \mathrm{id}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r-1}"] & \cdots \\
\mathcal{P}^{[r-1]} \arrow[d, "\ell"] & \cdots \arrow[r] & P_{r+4} \arrow[r, "\delta_{r+4}"] \arrow[d, "\ell_{r+4} = \mathrm{id}"] & P_{r+3} \arrow[r, "\delta_{r+3}"] \arrow[d, "\ell_{r+3} = \mathrm{id}"] & P_{r+2} \arrow[r, "\delta_{r+2}"] \arrow[d, "\ell_{r+2} = \mathrm{id}"] & P_{r+1} \arrow[r, "\delta_{r+1}"] \arrow[d, "\ell_{r+1} = \mathrm{id}"] & P_r \arrow[r] \arrow[d, "\ell_r"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\ell_{r-1}"] & \cdots \\
\mathcal{P}^{[r]} \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_{r+4} \arrow[r, "\delta_{r+4}"] \arrow[d] & P_{r+3} \arrow[r, "\delta_{r+3}"] \arrow[d] & P_{r+2} \arrow[r, "\delta_{r+2}"] \arrow[d] & P_{r+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\text{ex.} & & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} &
\end{tikzcd}$$

Offenbar gilt in den homogenen Komponenten:
$P_i^{[r-1]} = (P_r)_i \oplus P_i^{[r]}$ mit h_i als kanonischer Injektion von $(P_r)_i$ und ℓ_i als kanonischer Projektion auf $P_i^{[r]}$. Daher ist nach Anmerkung 1.1.6. (4) $\mathcal{P}^{[r-1]} = (P_r) \oplus \mathcal{P}^{[r]}$ mit h als kanonischer Injektion von (P_r) und ℓ als kanonischer Projektion auf $\mathcal{P}^{[r]}$.
Wie beim Beweis von Hilfssatz 1.1.7. sieht man dann, daß die die direkte Summe charakterisierenden Beziehungen zwischen den kanonischen Injektionen und Projektionen erhalten bleiben, wenn man mit $\mathcal{M}$ tensoriert, wobei nach (3) aus Morphismen von Komplexen wieder Morphismen von Komplexen entstehen. Man hat dann wiederum nach Anmerkung 1.1.6. (4) eine direkte Summe:
$\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[r-1]} = \mathcal{M} \otimes_R (P_r) \oplus \mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[r]}$ mit $\mathrm{id} \otimes h$ als kanonischer Injektion von $\mathcal{M} \otimes_R (P_r)$ und $\mathrm{id} \otimes \ell$ als kanonischer Projektion auf $\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[r]}$.
Daher ist die Folge
$(*)$ $\quad 0 \to \mathcal{M} \otimes_R (P_r) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes h} \mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[r-1]} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \ell} \mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[r]} \to 0$

eine exakte Folge von Morphismen von Komplexen.

Ferner ist der Komplex
$\mathcal{M} \otimes_R (P_r)$: $\quad \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_{i+1}\otimes \mathrm{id}} M_i \otimes P_r \xrightarrow{\mathrm{d}_i \otimes \mathrm{id}} M_{i-1} \otimes P_r \xrightarrow{\mathrm{d}_{i-1}\otimes\mathrm{id}} \cdots$
exakt, weil P_r flach und $\mathcal{M}$ exakt ist. Daher ist
$\mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R (P_r)\big) = 0 \quad$ für alle n.
Als Ausschnitt aus der zu der exakten Folge $(*)$ von Komplexen gehörigen langen exakten Homologiefolge erhält man daher für ein vorgegebenes n eine exakte Folge:
$0 = \mathrm{H}_n(\mathcal{M}\otimes_R(P_r)) \xrightarrow{\mathrm{H}_n(\mathrm{id}\otimes h)} \mathrm{H}_n(\mathcal{M}\otimes_R \mathcal{P}^{[r-1]}) \xrightarrow{\mathrm{H}_n(\mathrm{id}\otimes \ell)} \mathrm{H}_n(\mathcal{M}\otimes_R\mathcal{P}^{[r]}) \xrightarrow{\partial_n} \mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{M}\otimes_R(P_r)) = 0$
Es folgt
$\mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[r-1]}\big) \simeq \mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[r]}\big)$ für alle r.
Da nach Voraussetzung für negative Indizes nur endlich viele Komponenten $P_i \neq 0$ sind, gibt es ein n_0, so daß $P_i = 0$ ist für alle $i \leq n_0$. Dann ist $\mathcal{P}^{[n_0]} = \mathcal{P}$.
Aus dem eben gezeigten folgt induktiv:
$\mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}\big) = \mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[n_0]}\big) \simeq \mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[n_0+1]}\big) \simeq \cdots \simeq \mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[i-1]}\big) \simeq \mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[i]}\big)$ für alle $i = n_0+1, n_0+2, \ldots$.
Da nach Voraussetzung für negative Indizes nur endlich viele $M_j \neq 0$ sind, gibt es ein m_0, so daß $M_j = 0$ ist für alle $j \leq m_0$.
Nach Definition ist $\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[i]}\big)_n = \bigoplus\limits_{j+k=n} M_j \otimes_R P_k^{[i]}$.

Da $M_j = 0$ ist für $j \leq m_0$ und $P_k^{[i]} = 0$ ist für $k \leq i$, ist diese Komponente höchstens dann $\neq 0$, wenn $j > m_0$ und $k > i$ ist, d.h. wenn $n = j + k > i + m_0$, also $i < n - m_0$ ist.
Wähle also ein $i > \max\{n_0, n - m_0\}$. Dann ist einerseits $\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[i]}\big)_n = 0$ und daher auch $\mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[i]}\big) = 0$. Da andererseits nach dem oben gezeigten gilt
$\mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}\big) = \mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}^{[i]}\big)$, folgt $\mathrm{H}_n\big(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{P}\big) = 0$. □

Tensorprodukte endlich vieler Komplexe

1.8.6. Definition. Seien $\big(\mathcal{M}^{(i)}, \mathrm{d}^{(i)}\big)$ für $i = 1, \ldots, r$ endlich viele (absteigende) Komplexe. Man definiert dann auf dem Tensorprodukt
$\mathcal{L} := \mathcal{M}^{(1)} \otimes_R \cdots \otimes_R \mathcal{M}^{(r)}$ eine Graduierung durch
$L_n := \bigoplus\limits_{i_1+\cdots+i_r=n} M_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes M_{i_r}^{(r)}$
und einen Randoperator $\mathrm{D}_n : L_n \to L_{n-1}$ durch
$D_n := \bigoplus\limits_{i_1+\cdots+i_r=n} \mathrm{D}_{i_1\ldots i_r}$, wobei die $\mathrm{D}_{i_1\ldots i_r} : M_{i_1}^{(1)} \otimes_R \cdots \otimes_R M_{i_r}^{(r)} \to L_{n-1}$ definiert sind durch
$\mathrm{D}_{i_1\ldots i_r}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) := \sum\limits_{j=1}^{r} (-1)^{i_1+\cdots+i_{j-1}} \cdot x_1 \otimes \cdots \otimes x_{j-1} \otimes \big(\mathrm{d}_{i_j}^{(j)} x_j\big) \otimes x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_r.$

Als Beispiel behandeln wir die Definition des Koszul-Komplexes.

1.8.7. Definition (Koszul-Komplex $\mathcal{K}(x)$)**.** Sei R ein Ring und $x \in R$ beliebig. Wir definieren einen absteigenden Komplex, den „Koszul-Komplex" von R bzgl x durch:
$\mathcal{K}(x) := \mathcal{K}(x; R) := K_0(x) \oplus K_1(x) \qquad$ mit
$K_0(x) := R, \quad K_1(x) := R \cdot e_x$ der freie R-Modul mit der Basis e_x.
Ferner setzen wir
$K_i(x) = 0$ für $i \neq 0, 1$.
Der Randoperator $\mathrm{d}_1 : K_1 \to K_0$ wird definiert durch

$\mathrm{d}_1(r \cdot e_x) := x \cdot r$.
(Die d_i für $i \neq 1$ sind automatisch Nullabbildungen.)

1.8.8. *Anmerkung.* Es ist offenbar
$\mathrm{H}_0\big(\mathcal{K}(x)\big) = R/R \cdot x$,
$\mathrm{H}_1\big(\mathcal{K}(x)\big) = \{r \cdot e_x \mid r \in R, x \cdot r = 0\} = \mathrm{Ann}_R(x) \cdot e_x \simeq \mathrm{Ann}_R(x)$.

1.8.9. Definition (Koszul-Komplex $\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_r)$)**.** Seien $x_1, \ldots, x_r \in R$ beliebig. Wir definieren einen absteigenden Komplex, den „Koszul-Komplex" von R bzgl. $\{x_1, \ldots, x_r\}$ durch:
$\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_r) := \mathcal{K}(x_1, \ldots, x_r; R) := \mathcal{K}(x_1) \otimes_R \mathcal{K}(x_2) \otimes_R \cdots \otimes_R \mathcal{K}(x_r)$.

Sei $e_i := e_{x_i}$ das Basiselement von $K_1(x_i)$. Nach Definition 1.8.6. ist dann:

1.8.10. *Anmerkung.*

$$\begin{array}{rcl}
K_0(x_1, \ldots, x_r) &=& R \otimes_R R \otimes_R \cdots \otimes_R R \\
&=& R, \\
K_1(x_1, \ldots, x_r) &=& \bigoplus\limits_{i=1}^{r} R \otimes_R R \otimes_R \cdots \otimes_R R \cdot e_i \otimes_R R \otimes_R \cdots \otimes_R R \\
&=& \bigoplus\limits_{i=1}^{r} R \cdot e_i, \\
K_2(x_1, \ldots, x_r) &=& \bigoplus\limits_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} R \otimes_R \cdots \otimes_R R \cdot e_{i_1} \otimes_R R \otimes_R \cdots \otimes_R R \cdot e_{i_2} \otimes_R R \cdots \otimes_R R \\
&=& \bigoplus\limits_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} R \cdot (e_{i_1} \otimes e_{i_2}), \\
&& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
K_p(x_1, \ldots, x_r) &=& \bigoplus\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r} R \cdot (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}) \\
&& \text{freier } R\text{-Modul mit der Basis } \{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r\}
\end{array}$$

Daher ist

$$K_p(x_1, \ldots, x_r; R) \simeq \bigwedge^p (R \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot e_r) = \bigwedge^p K_1(x_1, \ldots, x_r; R)\,,$$

d.h.
$\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_r; R)$ ist als R-Modul isomorph zur äußeren Algebra des freien R-Moduls $R \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot e_r$. Man nennt den Koszul-Komplex daher auch den „Komplex der äußeren Algebra".

Weil in den $\mathcal{K}(x_i)$ der Randoperator $\mathrm{d}_k = 0$ ist für $k \neq 1$ und d_1 die Multiplikation mit x_i ist, erhält man nach Definition 1.8.6.:

1.8.11. *Anmerkung.* Für den Randoperator d im Koszul-Komplex gilt:
$\mathrm{d}_p(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}) = \sum\limits_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \cdot x_{i_j} \cdot (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{e_{i_j}} \otimes \ldots \otimes e_{i_p})$, wobei $\widehat{e_{i_j}}$ im Produkt wegzulassen ist.

Beweis. Da man bei Anwendung der Formel für $\mathrm{D}_{i_1,\ldots,i_r}$ von Definition 1.8.6 alle k, für die $\mathrm{d}_k = 0$ ist, weglassen kann und für die übrigen $i_k = 1$ ist, hat man in den verbleibenden Summanden $i_1 + \cdots + i_{j-1} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{(j-1)-mal} = j - 1$.

Ferner ist $\mathrm{d}_1 e_{i_j} = x_{i_j}$ und diesen Faktor kann man aus dem Tensorpodukt herausziehen. □

Da d_p eine R-lineare Abbildung ist, ist sie durch ihre Werte auf den Basiselementen $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}$ schon bestimmt.

1.8.12. *Anmerkung.* Durch die R-Modul Isomorphie von $\mathcal{K}(x_1,\ldots,x_r;R)$ mit der äußeren Algebra trägt $\mathcal{K}(x_1,\ldots,x_r)$ selbst auch die Struktur der antikommutativen R-Algebra $\bigwedge K_1(x_1,\ldots,x_r;R)$.
Der Randoperator d ist dann die eindeutig bestimmte Antiderivation der äußeren Algebra, die auf $K_1(x_1,\ldots,x_r;R)$ mit der Linearform $\mathrm{d}_1 : K_i \to R = K_0$ übereinstimmt. Dabei ist eine „Antiderivation"eine R-lineare Abbildung $\mathrm{d} : K_p \to K_{p-1}$ mit $\mathrm{d}(x\cdot y) = \mathrm{d}x \wedge y + (-1)^p \cdot x \cdot \mathrm{d}y$ für alle homogenen Elemente $x \in K_p$ und $y \in K_q$.
Auf Grund dieser Produkregel rechnet man sofort nach, daß für beliebige homogene Elemente y_i vom Grad 1 gilt:
$\mathrm{d}_p(y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) = \sum\limits_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \big(y_1 \otimes \cdots \otimes (\mathrm{d}_1 y_j) \otimes \cdots \otimes y_p\big)$

Weiteres zur Theorie des Koszul-Komplexes siehe Abschnitt 2.1.

1.9. **Berechnung abgeleiteter Funktoren durch Doppelkomplexe.** Wir behandeln hier wieder beispielhaft den Fall eines additiven Funktors in zwei Variablen, kontravariant in der ersten und kovariant in der zweiten (Prototyp $\mathrm{Hom}_R(\bullet,\bullet)$).

Bezeichnung. Sei im Folgenden:
$\mathcal{F}$ ein additiver Funktor in zwei Variablen, kontravariant in der ersten und kovariant in der zweiten Variablen.
Es gelte:

(1) Für beliebige R-Moduln A und B ist
$\mathcal{F}^B := \mathcal{F}(\bullet, B)$ linksexakt und auch
$\mathcal{F}_A := \mathcal{F}(A, \bullet)$ linksexakt.
(2) Ist P ein projektiver R-Modul, so ist $\mathcal{F}(P,\bullet)$ exakt.
(3) Ist E ein injektiver R-Modul, so ist $\mathcal{F}(\bullet, E)$ exakt.

Ferner setzen wir bei Komplexen stets voraus, daß *für negative Indizes nur endlich viele homogene Komponenten* $\neq (0)$ *sind.*

Der Doppelkomplex $\big(\mathcal{F}(\mathcal{M},\mathcal{N}), \mathbf{D}, \Delta\big)$**.** (vgl. auch Abschnitt 1.8. für den Fall $\mathcal{F} = \bullet \otimes_R \bullet$)

1.9.1. *Anmerkung.* Seien
$(\mathcal{M}, \mathrm{d}) : \quad \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} M_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} M_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} M_0 \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \cdots$
ein absteigender Komplex und
$(\mathcal{N}, \delta) : \quad \cdots \xrightarrow{\delta^0} N^0 \xrightarrow{\delta^1} N^1 \xrightarrow{\delta^2} N^2 \xrightarrow{\delta^3} \cdots$
ein aufsteigender Komplex.
Setze $\mathcal{F}(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \bigoplus\limits_{n,m} L^{n,m}$ mit
$L^{n,m} := \mathcal{F}(M_n, N^m)$.
Wir definieren:
$\mathrm{D}^{n,m} := \mathcal{F}(\mathrm{d}_n, \mathrm{id}_{N^m}) : L^{n-1,m} \longrightarrow L^{n,m}$ und
$\Delta^{n,m} := (-1)^n \cdot \mathcal{F}(\mathrm{id}_{M_n}, \delta^m) : L^{n,m-1} \longrightarrow L^{n,m}$.
Man erhält dann auf $\mathcal{F}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ die Struktur eines „Doppelkomplexes" (Der Einfachheit halber hier das Diagramm für den Fall $M_i = 0 = N_i$ für $i < 0$):

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & \\
 & L^{3,3} \arrow[l,"\Delta^{3,4}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{4,3}"'] & L^{3,2} \arrow[l,"\Delta^{3,3}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{4,2}"'] & L^{3,1} \arrow[l,"\Delta^{3,2}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{4,1}"'] & L^{3,0} \arrow[l,"\Delta^{3,1}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{4,0}"'] & 0 \arrow[l,"\Delta^{3,0}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{4,-1}"'] & \arrow[l,"\Delta^{3,-1}"'] \\
 & L^{2,3} \arrow[l,"\Delta^{2,4}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{3,3}"'] & L^{2,2} \arrow[l,"\Delta^{2,3}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{3,2}"'] & L^{2,1} \arrow[l,"\Delta^{2,2}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{3,1}"'] & L^{2,0} \arrow[l,"\Delta^{2,1}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{3,0}"'] & 0 \arrow[l,"\Delta^{2,0}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{3,-1}"'] & \arrow[l,"\Delta^{2,-1}"'] \\
 & L^{1,3} \arrow[l,"\Delta^{1,4}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{2,3}"'] & L^{1,2} \arrow[l,"\Delta^{1,3}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{2,2}"'] & L^{1,1} \arrow[l,"\Delta^{1,2}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{2,1}"'] & L^{1,0} \arrow[l,"\Delta^{1,1}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{2,0}"'] & 0 \arrow[l,"\Delta^{1,0}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{2,-1}"'] & \arrow[l,"\Delta^{1,-1}"'] \\
 & L^{0,3} \arrow[l,"\Delta^{0,4}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{1,3}"'] & L^{0,2} \arrow[l,"\Delta^{0,3}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{1,2}"'] & L^{0,1} \arrow[l,"\Delta^{0,2}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{1,1}"'] & L^{0,0} \arrow[l,"\Delta^{0,1}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{1,0}"'] & 0 \arrow[l,"\Delta^{0,0}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{1,-1}"'] & \arrow[l,"\Delta^{0,-1}"'] \\
 & 0 \arrow[l,"\Delta^{-1,4}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{0,3}"'] & 0 \arrow[l,"\Delta^{-1,3}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{0,2}"'] & 0 \arrow[l,"\Delta^{-1,2}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{0,1}"'] & 0 \arrow[l,"\Delta^{-1,1}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{0,0}"'] & 0 \arrow[l,"\Delta^{-1,0}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{0,-1}"'] & \arrow[l,"\Delta^{-1,-1}"'] \\
 & \arrow[u,"\mathrm{D}^{-1,3}"'] & \arrow[u,"\mathrm{D}^{-1,2}"'] & \arrow[u,"\mathrm{D}^{-1,1}"'] & \arrow[u,"\mathrm{D}^{-1,0}"'] & \arrow[u,"\mathrm{D}^{-1,-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Es gilt:

$\mathrm{D}^{n+1,m} \circ \mathrm{D}^{n,m} = 0$ wegen $\mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1} = 0$,
$\Delta^{n,m+1} \circ \Delta^{n,m} = 0$ wegen $\delta^{m+1} \circ \delta^m = 0$,
sowie
$\Delta^{n+1,m+1} \circ \mathrm{D}^{n+1,m} + \mathrm{D}^{n+1,m+1} \circ \Delta^{n,m+1} = 0$,
d.h. die Maschen des vorstehenden Diagramms sind „antikommutativ“.

$$\begin{tikzcd}
L^{n+1,m+1} & L^{n+1,m} \arrow[l,"\Delta^{n+1,m+1}"'] \\
L^{n,m+1} \arrow[u,"\mathrm{D}^{n+1,m+1}"'] & L^{n,m} \arrow[l,"\Delta^{n,m+1}"'] \arrow[u,"\mathrm{D}^{n+1,m}"']
\end{tikzcd}$$

Zum Beweis der letzten Behauptung betrachte die beiden Abbildungen:
$\mathrm{d}_{n+1} : M_{n+1} \longrightarrow M_n$ und
$\delta^m : N^m \longrightarrow N^{m+1}$.
Auf Grund der Eigenschaft (3) der Definition 1.7.1. eines Funktors in zwei Variablen erhält man das nebenstehende *kommutative* Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
L^{n+1,m+1} & L^{n+1,m} \arrow[l,"\mathcal{F}(\mathrm{id}_{M_{n+1}},\delta^{m+1})"'] \\
L^{n,m+1} \arrow[u,"\mathcal{F}(\mathrm{d}_{n+1},\mathrm{id}_{N_{m+1}})"'] & L^{n,m} \arrow[l,"\mathcal{F}(\mathrm{id}_{M_n},\delta^{m+1})"'] \arrow[u,"\mathcal{F}(\mathrm{d}_{n+1},\mathrm{id}_{N_m})"']
\end{tikzcd}$$

Auf Grund der Definition der $D^{n,m}$ und $\Delta^{n,m}$ bedeutet das:
$(-1)^{n+1} \cdot \Delta^{n+1,m+1} \circ \mathrm{D}^{n+1,m} = \mathrm{D}^{n+1,m+1} \circ \big((-1)^n \cdot \Delta^{n,m+1}\big)$, also:
$-\Delta^{n+1,m+1} \circ \mathrm{D}^{n+1,m} = \mathrm{D}^{n+1,m+1} \circ \Delta^{n,m+1}$. q.e.d.

1.9.2. *Anmerkung.* Man bildet aus dem in Anmerkung 1.9.1 konstruierten Doppelkomplex den zugehörigen einfachen Komplex $(\mathcal{L}, \mathrm{D}) := \big(\mathcal{F}(\mathcal{M},\mathcal{N}), \mathrm{D}\big)$, indem man definiert:

$$L^n := \mathcal{F}(\mathcal{M},\mathcal{N})^n := \bigoplus_{i+k=n} L^{i,k} \quad \text{und} \quad \mathrm{D}^n := \bigoplus_{i+k=n} \big(\mathrm{D}^{i,k} + \Delta^{i,k}\big) : L^{n-1} \longrightarrow L^n \,.$$

Tatsächlich ist $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ ein Komplex; denn es gilt für $z \in L^{i,k}$ mit $i + k = n$:
$\mathrm{D}^{n+1} \circ \mathrm{D}^n(z) = \mathrm{D}^{n+1}\big(\mathrm{D}^{i+1,k}z + \Delta^{i,k+1}z\big) =$
$\underbrace{\mathrm{D}^{i+2,k} \circ \mathrm{D}^{i+1,k}z}_{=0} + \underbrace{\Delta^{i+1,k+1} \circ \mathrm{D}^{i+1,k}z + \mathrm{D}^{i+1,k+1} \circ \Delta^{i,k+1}z}_{=0 \text{ (antikommutativ)}} + \underbrace{\Delta^{i,k+2} \circ \Delta^{i,k+1}z}_{=0} = 0\,.$

1.9.3. Eigenschaften. Mit den oben erklärten Bezeichnungen gilt:

(1) Seien
$\alpha : (\mathcal{M}', \mathrm{d}') \longrightarrow (\mathcal{M}, \mathrm{d})$ und
$\beta : (\mathcal{N}, \delta) \longrightarrow (\mathcal{N}', \delta')$ Morphismen von Komplexen
und sei
$\gamma_n := \bigoplus_{i+k=n} \underbrace{\mathcal{F}(\alpha_i, \beta_k)}_{=:\gamma_{i,k}}.$ Dann ist
$\mathcal{F}(\alpha, \beta) := \gamma = (\gamma_n) : \mathcal{L} := \big(\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{N}), \mathrm{D}\big) \longrightarrow \big(\mathcal{F}(\mathcal{M}', \mathcal{N}'), \mathrm{D}'\big) =: \mathcal{L}'$
ein Morphismus von Komplexen.
Die Zuordnung ist funktoriell und additiv.

(2) Mit den Bezeichnungen von (1) gilt:
Das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\alpha, \mathrm{id}_{\mathcal{N}})"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{M}}, \beta)"'] \arrow[dr, dotted, "\mathcal{F}(\alpha,\beta)"] & \mathcal{F}(\mathcal{M}', \mathcal{N}) \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{M}'}, \beta)"] \\
\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{N}') \arrow[r, "\mathcal{F}(\alpha, \mathrm{id}_{\mathcal{N}'})"] & \mathcal{F}(\mathcal{M}', \mathcal{N}')
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

(3) Sei A ein R-Modul und $\mathcal{M}$ der Komplex mit $M_j = A$ und $M_n = 0$ für $n \neq j$:
$\mathcal{M} \qquad \cdots \to 0 \to \cdots \to 0 \xrightarrow{\mathrm{d}_{j-1}} A \xrightarrow{\mathrm{d}_j} 0 \cdots \to 0 \to \cdots,$
so ist für alle n
$\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{N})^n = \mathcal{F}(A, N^{n-j})$ und $\mathrm{D}^n = (-1)^j \cdot \mathcal{F}(\mathrm{id}_A, \delta^{n-j})$

(4) Sei B ein R-Modul und $\mathcal{N}$ der Komplex mit $N^j = B$ und $N^m = 0$ für $m \neq j$:
$\mathcal{N} \qquad \cdots \to 0 \to \cdots \to 0 \xrightarrow{\delta^j} B \xrightarrow{\delta^{j+1}} 0 \to \cdots \to 0 \to \cdots,$
so ist für alle m
$\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{N})^m = \mathcal{F}(M_{m-j}, B)$ und $\mathrm{D}^m = \mathcal{F}(\mathrm{d}_{m-j}, \mathrm{id}_B)$.

(5) Ist $(\mathcal{N}, \delta)$ exakt und $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$ ein Komplex, so daß alle P_n projektiv sind, so ist auch $\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{N}), \mathrm{D}\big)$ exakt.

(6) Ist $(\mathcal{M}, \mathrm{d})$ exakt und $(\mathcal{E}, \delta)$ ein Komplex, so daß alle E^n injektiv sind, so ist auch $\big(\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{E}), \mathrm{D}\big)$ exakt.

Beweis. (1): Es ist zu zeigen, daß gilt: $\mathrm{D}' \circ \gamma = \gamma \circ \mathrm{D}$. (Die Funktorialität und Additivität ist klar.) Genauer
$\mathrm{D}'^{n+1} \circ \gamma_n \overset{!}{=} \gamma_{n+1} \circ \mathrm{D}^{n+1}$ für alle n.
Wegen $L^n = \bigoplus_{i+k=n} L^{i,k}$ und der entsprechenden Definition der γ_n, D^n, D'^n genügt es zu zeigen, daß für alle i, k das Diagramm

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} L^{i+1,k} \oplus L^{i,k+1} \arrow[r, "\gamma_{i+1,k}\oplus\gamma_{i,k+1}"] & {L'}^{i+1,k} \oplus {L'}^{i,k+1} \\ L^{i,k} \arrow[u, "\mathrm{D}^{i+1,k}\oplus\Delta^{i,k+1}"'] \arrow[r, "\gamma_{i,k}"] & {L'}^{i,k} \arrow[u, "{\mathrm{D}'}^{i+1,k}\oplus{\Delta'}^{i,k+1}"'] \end{tikzcd} \qquad \text{kommutativ ist:}$$

Da $\alpha = (\alpha_i) : (\mathcal{M}', \mathrm{d}') \to (\mathcal{M}, \mathrm{d})$ nach Voraussetzung ein Morphismus von Komplexen sind, hat man die kommutativen Diagramme:

$$\begin{tikzcd} M'_{i+1} \arrow[r, "\alpha_{i+1}"] \arrow[d, "\mathrm{d}'_{i+1}"] & M_{i+1} \arrow[d, "\mathrm{d}_{i+1}"] \\ M'_i \arrow[r, "\alpha_i"] & M_i \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} N^k \arrow[r, "\beta_k"] & {N'}^k \\ N^k \arrow[u, "\mathrm{id}_{N^k}"] \arrow[r, "\beta_k"] & {N'}^k \arrow[u, "\mathrm{id}_{{N'}^k}"] \end{tikzcd} .$$

Die Anwendung des Funktors $\mathcal{F}(\bullet, \bullet)$ liefert das kommutative Diagramm:

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} L^{i+1,k} = \mathcal{F}(M_{i+1}, N^k) \arrow[r, "\gamma_{i+1,k}=\mathcal{F}(\alpha_{i+1},\beta_k)"] & \mathcal{F}(M'_{i+1}, {N'}^k) = {L'}^{i+1,k} \\ L^{i,k} = \mathcal{F}(M_i, N^k) \arrow[u, "\mathcal{F}(\mathrm{d}_{i+1},\mathrm{id}_{N^k})=\mathrm{D}^{i+1,k}"'] \arrow[r, "\gamma_{i,k}=\mathcal{F}(\alpha_i,\beta_k)"] & \mathcal{F}(M'_i, {N'}^k) = {L'}^{i,k} \arrow[u, "\mathcal{F}(\mathrm{d}'_{i+1},\mathrm{id}_{{N'}^k})={\mathrm{D}'}^{i+1,k}"'] \end{tikzcd}$$

Da andererseits auch $\beta = (\beta_i) : (\mathcal{N}, \delta) \to (\mathcal{N}', \delta')$ nach Voraussetzung ein Morphismus von Komplexen ist, hat man ebenso kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} M'_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M'_i}"] & M_i \arrow[d, "\mathrm{id}_{M_i}"] \\ M'_i \arrow[r, "\alpha_i"] & M_i \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} N^{k+1} \arrow[r, "\beta_{k+1}"] & {N'}^{k+1} \\ N^k \arrow[u, "\delta^{k+1}"] \arrow[r, "\beta_k"] & {N'}^k \arrow[u, "{\delta'}^{k+1}"] \end{tikzcd} .$$

Die Anwendung des Funktors $\mathcal{F}(\bullet, \bullet)$ liefert das kommutative Diagramm:

$$(***)\qquad \begin{tikzcd} L^{i,k+1} = \mathcal{F}(M_i, N^{k+1}) \arrow[r, "\gamma_{i,k+1}=\mathcal{F}(\alpha_i,\beta_{k+1})"] & \mathcal{F}(M'_i, {N'}^{k+1}) = {L'}^{i,k+1} \\ L^{i,k} = \mathcal{F}(M_i, N^k) \arrow[u, "\mathcal{F}(\mathrm{id}_{M_i},\delta^{k+1})=(-1)^i\cdot\Delta^{i,k+1}"'] \arrow[r, "\gamma_{i,k}=\mathcal{F}(\alpha_i,\beta_k)"] & \mathcal{F}(M'_i, {N'}^k) = {L'}^{i,k} \arrow[u, "\mathcal{F}(\mathrm{id}_{M'_i},{\delta'}^{k+1})=(-1)^i\cdot{\Delta'}^{i,k+1}"'] \end{tikzcd}$$

Aus der Kommutativität der Diagramme $(**)$ und $(***)$ folgt dann die Kommutativität des Diagramms $(*)$. q.e.d.

(2): Das folgt sofort aus der Eigenschaft (3) von Definition 1.7.1. für die Komponenten $\gamma_{i,k}$.

(3): Da $\mathcal{F}$ ein additiver Funktor ist, ist $\mathcal{F}(0, C) = 0$ für einen beliebigen R-Modul C und ebenso auch $\mathcal{F}(0, g) = 0$ für beliebige R-lineare Abbildungen g. Man hat also nach Definition:

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{N})^n = \bigoplus_{i+k=n} \mathcal{F}(\underbrace{M_i}_{=\begin{cases} A \text{ für } i=j \\ 0 \text{ für } i\neq j \end{cases}}, N^k) = \mathcal{F}(A, N^{n-j}) .$$

Ferner ist $\mathrm{D}^{i,k} = \mathcal{F}(\mathrm{d}_i, \mathrm{id}_{N^k}) = 0$ für alle i, k, weil alle $\mathrm{d}_i = 0$ sind, also:

$$D^n := \bigoplus_{i+k=n} (\mathrm{D}^{i,k} + \Delta^{i,k}) = \bigoplus_{i+k=n} \Delta^{i,k} = \bigoplus_{i+k=n} (-1)^i \cdot \mathcal{F}(\underbrace{\mathrm{id}_{M_i}}_{=\begin{cases}\mathrm{id}_A & \text{für } i=j\\ 0 & \text{für } i\neq j\end{cases}}, \delta^k) =$$

$$= (-1)^j \cdot \mathcal{F}(\mathrm{id}_A, \delta^{n-j})\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

(4) analog zum Beweis von (3).

(5): (Vgl. Beweis von Eigenschaften 1.8.5. (4).) Wir zeigen:
$\mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{N})\big) \overset{!}{=} 0$ für alle n
Beweis: Sei $(\mathcal{P}^{[r]}, \mathrm{d}^{[r]})$ der Komplex, der aus $(\mathcal{P}, \delta)$ entsteht, indem man
$P_i^{[r]} := 0$ und $\mathrm{d}_{i+1}^{[r]} := 0$ setzt für alle $i \leq r$ und
$P_i^{[r]} := P_i$ sowie $\mathrm{d}_{i+1}^{[r]} := \mathrm{d}_{i+1}$ für alle $i > r$.
Man hat dann
$(\mathcal{P}^{[r]}, \mathrm{d}[r])$: $\quad \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_{i+1}} P_i \xrightarrow{\mathrm{d}_i} P_{i-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{i-1}} P_{i-2} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_{r+2}} P_{r+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$
Mit (P_r) bezeichnen wir den trivialen Komplex mit P_r an der Position r:
(P_r): $\quad \cdots \to 0 \to 0 \to P_r \to 0 \to 0 \to \cdots$

Man hat dann eine exakte Folge von Komplexen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
(P_r) \arrow[d, "h"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r+4}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r+3}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r+2}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r+1}"] & P_r \arrow[r] \arrow[d, "h_r=\mathrm{id}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{r-1}"] & \cdots \\
\mathcal{P}^{[r-1]} \arrow[d, "\ell"] & \cdots \arrow[r] & P_{r+4} \arrow[r, "\mathrm{d}_{r+4}"] \arrow[d, "\ell_{r+4}=\mathrm{id}"] & P_{r+3} \arrow[r, "\mathrm{d}_{r+3}"] \arrow[d, "\ell_{r+3}=\mathrm{id}"] & P_{r+2} \arrow[r, "\mathrm{d}_{r+2}"] \arrow[d, "\ell_{r+2}=\mathrm{id}"] & P_{r+1} \arrow[r, "\mathrm{d}_{r+1}"] \arrow[d, "\ell_{r+1}=\mathrm{id}"] & P_r \arrow[r] \arrow[d, "\ell_r"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\ell_{r-1}"] & \cdots \\
\mathcal{P}^{[r]} \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_{r+4} \arrow[r, "\mathrm{d}_{r+4}"] \arrow[d] & P_{r+3} \arrow[r, "\mathrm{d}_{r+3}"] \arrow[d] & P_{r+2} \arrow[r, "\mathrm{d}_{r+2}"] \arrow[d] & P_{r+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\text{ex.} & & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} &
\end{tikzcd}$$

Offenbar gilt in den homogenen Komponenten:
$P_i^{[r-1]} = (P_r)_i \oplus P_i^{[r]}$ mit h_i als kanonischer Injektion von $(P_r)_i$ und ℓ_i als kanonischer Projektion auf $P_i^{[r]}$. Daher ist nach Anmerkung 1.1.6. (4) $\mathcal{P}^{[r-1]} = (P_r) \oplus \mathcal{P}^{[r]}$ mit h als kanonischer Injektion von (P_r) und ℓ als kanonischer Projektion auf $\mathcal{P}^{[r]}$.
Wie beim Beweis von Hilfssatz 1.1.7. sieht man dann, daß die die direkte Summe charakterisierenden Beziehungen zwischen den kanonischen Injektionen und Projektionen erhalten bleiben, wenn man den additiven Funktor $\mathcal{F}(\bullet, \mathrm{id}_{\mathcal{N}})$ anwendet, wobei nach (1) aus Morphismen von Komplexen wieder Morphismen von Komplexen entstehen. Man hat dann wiederum nach Anmerkung 1.1.6. (4) eine direkte Summe:
$\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[r-1]}, \mathcal{N}) = \mathcal{F}\big((P_r), \mathcal{N}\big) \oplus \mathcal{F}(\mathcal{P}^{[r]}, \mathcal{N})$ mit $\mathcal{F}(h, \mathrm{id})$ als kanonischer Injektion von $\mathcal{F}\big((P_r), \mathcal{N}\big)$ und $\mathcal{F}(\ell, \mathrm{id})$ als kanonischer Projektion auf $\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[r]}, \mathcal{N})$.
Daher ist die Folge
$(*)\qquad 0 \to \mathcal{F}(\mathcal{P}^{[r]}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\ell,\mathrm{id})} \mathcal{F}(\mathcal{P}^{[r-1]}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\mathcal{F}(h,\mathrm{id})} \mathcal{F}((P_r), \mathcal{N}) \to 0$ eine exakte Folge von Morphismen von Komplexen.

Ferner ist der Komplex
$\mathcal{F}\big((P_r),\mathcal{N}\big)$ nach (3) von der Form:
$\cdots \xleftarrow{\mathcal{F}(\mathrm{id},\delta^{n+1-r})} \mathcal{F}(P_r,N^{n-r}) \xleftarrow{\mathcal{F}(\mathrm{id},\delta^{n-r})} \mathcal{F}(P_r,N^{n-1-r}) \xleftarrow{\mathcal{F}(\mathrm{id},\delta^{n-1-r})} \cdots$
und daher exakt, weil P_r projektiv (und nach Voraussetzung dann $\mathcal{F}(P_r,\bullet)$ ein exakter Funktor ist) und $\mathcal{N}$ exakt ist. Daher ist
$\mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}((P_r),\mathcal{N})\big) = 0 \quad$ für alle n.
Als Ausschnitt aus der zu der exakten Folge $(*)$ von Komplexen gehörigen langen exakten (Ko-)Homologiefolge erhält man daher für ein vorgegebenes n eine exakte Folge:
$0 = \mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}((P_r),\mathcal{N})\big) \xrightarrow{\partial^n} \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[r]},\mathcal{N})\big) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\ell,\mathrm{id}))} \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[r-1]},\mathcal{N}\big) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(h,\mathrm{id}))} \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}((P_r),\mathcal{N})\big) = 0$
Es folgt
$\mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[r-1]},\mathcal{N})\big) \simeq \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[r]},\mathcal{N}\big)$ für alle r.
Da nach Voraussetzung für negative Indizes nur endlich viele $P_i \neq 0$ sind, gibt es ein n_0, so daß $P_i = 0$ ist für alle $i \leq n_0$. Dann ist $\mathcal{P}^{[n_0]} = \mathcal{P}$.
Aus dem eben gezeigten folgt induktiv:
$\mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{N})\big) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[n_0]},\mathcal{N})\big) \simeq \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[n_0+1]},\mathcal{N})\big) \simeq \cdots \simeq \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[i-1]},\mathcal{N})\big)$
$\simeq \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[i]},\mathcal{N})\big)$ für alle $i = n_0+1, n_0+2, \ldots$.
Nach Definition ist $\big(\mathcal{F}\big(\mathcal{P}^{[i]},\mathcal{N}\big)\big)^n = \bigoplus\limits_{k+j=n} \mathcal{F}\big(P_k^{[i]},N^j\big)$.
Da $N^j = 0$ ist für $j < m_0$ und $P_k^{[i]} = 0$ ist für $k \leq i$, ist diese Komponente höchstens dann $\neq 0$, wenn $j \geq m_0$ und $k > i$ ist, d.h. wenn $n = j+k > i+m_0$, also $i < n-m_0$ ist.
Wähle also ein $i > \max\{n_0, n-m_0\}$. Dann ist einerseits $\big(\mathcal{F}\big(\mathcal{P}^{[i]},\mathcal{N}\big)\big)^n = 0$ und daher auch $\mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[i]},\mathcal{N})\big) = 0$ und andererseits nach dem oben gezeigten
$\mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{N})\big) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}^{[i]},\mathcal{N})\big) = 0.$ q.e.d

(6): Der Beweis geht analog zu dem Beweis von (5). □

1.9.4. Hauptsatz. *Sei $\mathcal{F}(\bullet,\bullet)$ ein additiver Funktor in zwei Variablen, kontravariant in der ersten und kovariant in der zweiten. (Prototyp $\mathrm{Hom}_R(\bullet,\bullet)$)*
Es gelte:

(1) *Für beliebige R-Moduln A und B ist*
 $\mathcal{F}^B := \mathcal{F}(\bullet,B)$ *und auch*
 $\mathcal{F}_A := \mathcal{F}(A,\bullet)$ *linksexakt.*
(2) *Ist P projektiv, so ist $\mathcal{F}(P,\bullet)$ exakt.*
(3) *Ist E injektiv, so ist $\mathcal{F}(\bullet,E)$ exakt.*

Seien ferner
$f : A' \to A$,
$g : B \to B'$
R-Modulhomomorphismen,
$(\mathcal{P},\mathrm{d};p)$ *eine projektive Auflösung von A,*
$(\mathcal{P}',\mathrm{d}';p')$ *eine projektive Auflösung von A',*
$(\mathcal{E},\delta;i)$ *eine injektive Auflösung von B,*
$(\mathcal{E}',\delta';i')$ *eine injektive Auflösung von B'.*
$\tilde{f} : (\mathcal{P}',\mathrm{d}') \to (\mathcal{P},\mathrm{d})$ *der zu f gehörige Morphismus der Komplexe nach Satz 1.4.6*
$\tilde{g} : (\mathcal{E},\delta) \to (\mathcal{E}',\delta')$ *der zu g gehörige Morphismus der Komplexe nach Satz 1.4.8.*

Für alle $n = 0, 1, 2\ldots$ hat man kommutative Diagramme:

$$\left.\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^n\mathcal{F}_A(B) = \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(A,\mathcal{E})) \arrow[d, "\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(f,id_{\mathcal{E}}))"'] & \simeq & \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{E})) \arrow[d, "\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\tilde{f},id_{\mathcal{E}}))"] & \simeq & \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\mathcal{P},B)) = \mathcal{R}^n\mathcal{F}^B(A) \arrow[d, "\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\tilde{f},id_B))"] \\
\mathcal{R}^n\mathcal{F}_{A'}(B) = \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(A',\mathcal{E})) & \simeq & \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\mathcal{P}',\mathcal{E})) & \simeq & \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\mathcal{P}',B)) = \mathcal{R}^n\mathcal{F}^B(A')
\end{tikzcd}\right\} \quad (I)$$

$$\left.\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^n\mathcal{F}_A(B) = \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(A,\mathcal{E})) \arrow[d, "\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(id_A,\tilde{g}))"'] & \simeq & \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{E})) \arrow[d, "\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(id_{\mathcal{P}},\tilde{g}))"] & \simeq & \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\mathcal{P},B)) = \mathcal{R}^n\mathcal{F}^B(A) \arrow[d, "\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(id_{\mathcal{P}},g))"] \\
\mathcal{R}^n\mathcal{F}_A(B') = \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(A,\mathcal{E}')) & \simeq & \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{E}')) & \simeq & \mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\mathcal{P},B')) = \mathcal{R}^n\mathcal{F}^{B'}(A)
\end{tikzcd}\right\} \quad (II)$$

1.9.5. *Anmerkung.* Das Diagramm (I) besagt, daß $\mathcal{R}^n\mathcal{F}_A(B)$ und $\mathcal{R}^n\mathcal{F}^B(A)$ als Funktoren in A äquivalent sind, indem sie äquivalent zu dem symmetrisch gebildeten $\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{E}))$ sind.
Das Diagramm (II) besagt das Analoge für die Variable B.

Beweis des Hauptsatzes 1.9.4. Sei (A) der absteigende Komplex mit dem Modul A an der Position -1 und (0) an allen anderen Stellen. Man hat dann das folgende kommutative Diagramm, das eine exakte Folge von Morphismen von Komplexen definiert:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
(A) \arrow[d, "h"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "h_{-1}=\mathrm{id}"] & 0 & \\
\mathcal{M} \arrow[d, "\ell"] & \cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\mathrm{d}_3"] \arrow[d, "\ell_3=\mathrm{id}"] & P_2 \arrow[r, "\mathrm{d}_2"] \arrow[d, "\ell_2=\mathrm{id}"] & P_1 \arrow[r, "\mathrm{d}_1"] \arrow[d, "\ell_1=\mathrm{id}"] & P_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\ell_0=\mathrm{id}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\ell_{-1}"] & 0 & \text{ex.} \\
\mathcal{P} \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\mathrm{d}_3"] \arrow[d] & P_2 \arrow[r, "\mathrm{d}_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "\mathrm{d}_1"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "\mathrm{d}_0"] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\text{ex.} & & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & &
\end{tikzcd}$$

Nach denselben Überlegungen wie beim Beweis von Eigenschaft 1.9.3. (5) sieht man, daß man eine direkte Summe von Komplexen $\mathcal{M} = (A) \oplus \mathcal{P}$ mit h als kanonischer Injektion von (A) und ℓ als kanonischer Projektion auf $\mathcal{P}$ hat und daß daher die Anwendung des kontravarianten Funktors $\mathcal{F}(\bullet, \mathcal{E})$ wiederum eine exakte Folge von Morphismen von Komplexen
$0 \to \mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\ell,\mathrm{id}_{\mathcal{E}})} \mathcal{F}(\mathcal{M},\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathcal{F}(h,\mathrm{id}_{\mathcal{E}})} \mathcal{F}\big((A),\mathcal{E}\big) \to 0$ liefert.
Da $\mathcal{M}$ exakt und $\mathcal{E}$ injektiv ist, folgt aus Eigenschaft 1.9.3. (6), daß $\mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{M},\mathcal{E})\big) = 0$ ist.
Die analoge Überlegung mit A', $\mathcal{P}'$ und $\mathcal{M}'$ an Stelle von A, $\mathcal{P}$ und $\mathcal{M}$ liefert eine exakte Folge von Komplexen

$0 \to \mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\ell', \mathrm{id}_{\mathcal{E}})} \mathcal{F}(\mathcal{M}', \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathcal{F}(h', \mathrm{id}_{\mathcal{E}})} \mathcal{F}\big((A'), \mathcal{E}\big) \to 0$ mit $\mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{M}', \mathcal{E})\big) = 0$.
Der R-Modul-Homomorphismus $f : A' \to A$ induziert trivialerweise einen Morphismus
$(f) : (A') \to (A)$ mit $(f)_{-1} = f$.
Außerdem ergänzt man den Morphismus $\tilde{f} : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ durch $\tilde{f}_{-1} := f$ zu einem Morphismus
$\hat{f} : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$.
Dadurch erhält man ein kommutatives Diagramm von Morphismen von Komplexen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A) \arrow[r, "h"] & \mathcal{M} \arrow[r, "\ell"] & \mathcal{P} \arrow[r] & 0 \quad \text{ex.} \\
0 \arrow[r] & (A') \arrow[r, "h'"] \arrow[u, "(f)"] & \mathcal{M}' \arrow[r, "\ell'"] \arrow[u, "\hat{f}"] & \mathcal{P}' \arrow[r] \arrow[u, "\tilde{f}"] & 0 \quad \text{ex.}
\end{tikzcd}$$

Durch Anwenden von $\mathcal{F}(\bullet, \mathcal{E})$ geht dieses über in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathcal{F}(h, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})"'] & \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\ell, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\hat{f}, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})"'] & \mathcal{F}((A), \mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}((f), \mathrm{id}_{\mathcal{E}})"'] & 0 \quad \text{ex.} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathcal{F}(h', \mathrm{id}_{\mathcal{E}})"] & \mathcal{F}(\mathcal{M}', \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\ell', \mathrm{id}_{\mathcal{E}})"] & \mathcal{F}((A'), \mathcal{E}) \arrow[r] & 0 \quad \text{ex.}
\end{tikzcd}$$

bei dem die Zeilen, wie oben gezeigt, exakt sind.
Die langen exakten Kohomologiefolgen der beiden Komplexe sind dann nach Satz 1.1.10. durch die $\mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})\big)$ usw. miteinander verbunden, so daß man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen erhält:

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{E})\big) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}((A), \mathcal{E})\big) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{n-1}\left(\mathcal{F}((f), \mathrm{id}_{\mathcal{E}})\right)"] & \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{E})\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}^n\left(\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})\right)"] & \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{E})\big) = 0 \quad \text{ex.} \\
0 = \mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}(\mathcal{M}', \mathcal{E})\big) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}((A'), \mathcal{E})\big) \arrow[r, "\partial'^n"] & \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{E})\big) \arrow[r] & \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{M}', \mathcal{E})\big) = 0 \quad \text{ex.}
\end{tikzcd}$$

Also sind ∂^n und ∂'^n Isomorphismen.
Ferner ist im Komplex (A) bzw. (A') der einzige Modul $\neq 0$ der Modul A bzw. A', und diese Moduln stehen jeweils an der Position -1. Nach Eigenschaft 1.9.3. (3) ist daher
$\mathcal{F}\big((A), \mathcal{E}\big)^{n-1} = \mathcal{F}(A, E^n), \qquad \mathrm{D}^{n-1} = -\mathcal{F}(\mathrm{id}_A, \delta^n)$
und
$\mathcal{F}\big((A'), \mathcal{E}\big)^{n-1} = \mathcal{F}(A', E^n), \qquad \mathrm{D}'^{n-1} = -\mathcal{F}(\mathrm{id}_{A'}, \delta'^n)$.
Es folgt (da das Vorzeichen bei der Ermittlung von Bild und Kern keine Rolle spielt):
$\mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}((A), \mathcal{E})\big) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(A, \mathcal{E})\big)$,
$\mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}((f), \mathrm{id}_{\mathcal{E}})\big) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(f, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})\big)$,
$\mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}((A'), \mathcal{E})\big) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(A', \mathcal{E})\big)$.
Damit ist der linke Teil des Diagramms (I) gezeigt.

Analog bildet man ein kommutatives Diagramm von Morphismen von

$$
\begin{tikzcd}
0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
(B) \arrow[u] & 0 \arrow[r] & B \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & \\
\mathcal{N} \arrow[u, "h"] & 0 \arrow[r] & B \arrow[u, "h_{-1}=\mathrm{id}"] \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[u, "h_0"] \arrow[r, "\delta^1"] & E^1 \arrow[u, "h_1"] \arrow[r, "\delta^2"] & E^2 \arrow[u, "h_2"] \arrow[r, "\delta^3"] & E^3 \arrow[u, "h_3"] \arrow[r] & \cdots & \text{ex.} \\
\mathcal{E} \arrow[u, "\ell"] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[u, "\ell_{-1}"] \arrow[r, "\delta^0"] & E^0 \arrow[u, "\ell_0=\mathrm{id}"] \arrow[r, "\delta^1"] & E^1 \arrow[u, "\ell_1=\mathrm{id}"] \arrow[r, "\delta^2"] & E^2 \arrow[u, "\ell_2=\mathrm{id}"] \arrow[r, "\delta^3"] & E^3 \arrow[u, "\ell_3=\mathrm{id}"] \arrow[r] & \cdots & \\
0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & \\
\text{ex.} & & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & \text{ex.} & &
\end{tikzcd}
$$

Nach denselben Überlegungen wie beim Beweis von Eigenschaft 1.9.3. (5) sieht man, daß man eine direkte Summe von Komplexen $\mathcal{N} = \mathcal{E} \oplus (B)$ mit ℓ als kanonischer Injektion von $\mathcal{E}$ und h als kanonischer Projektion auf (B) hat und daß daher die Anwendung des kovarianten Funktors $\mathcal{F}(\mathcal{P}, \bullet)$ wiederum eine exakte Folge von Morphismen von Komplexen

$0 \to \mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}}, \ell)} \mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}}, h)} \mathcal{F}\big(\mathcal{P}, (B)\big) \to 0$ liefert.

Da $\mathcal{N}$ exakt und $\mathcal{P}$ projektiv ist, folgt aus Eigenschaft 1.9.3. (5), daß $\mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{N})\big) = 0$ ist.

Ebenso liefert die Anwendung von $\mathcal{F}(\mathcal{P}', \bullet)$ auf das obige Diagramm eine exakte Folge von Komplexen

$0 \to \mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}'}, \ell)} \mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{N}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}'}, h)} \mathcal{F}\big(\mathcal{P}', (B)\big) \to 0$ mit $\mathrm{H}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{N})\big) = 0$.

Daraus ergibt sich das folgende nach Eigenschaften 1.9.3. (2) kommutative Diagramm von Morphismen von Komplexen:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}}, \ell)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})"'] & \mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{N}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}}, h)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{\mathcal{N}})"'] & \mathcal{F}\big(\mathcal{P}, (B)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{(B)})"'] & 0 & \text{ex.} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}'}, \ell)"] & \mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{N}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}'}, h)"] & \mathcal{F}\big(\mathcal{P}', (B)\big) \arrow[r] & 0 & \text{ex.}
\end{tikzcd}
$$

bei dem die Zeilen, wie oben gezeigt, exakt sind.

Die langen exakten Kohomologiefolgen der beiden Komplexe sind dann nach Satz 1.1.10. durch die $\mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})\big)$ usw. miteinander verbunden, so daß man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen erhält:

$$
\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{N})\big) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}, (B))\big) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{n-1}\left(\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{(B)})\right)"] & \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{E})\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}^n\left(\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{\mathcal{E}})\right)"] & \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{N})\big) = 0 \quad \text{ex.} \\
0 = \mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{N})\big) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}', (B))\big) \arrow[r, "\partial'^n"] & \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{E})\big) \arrow[r] & \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{N})\big) = 0 \quad \text{ex.}
\end{tikzcd}
$$

Also sind ∂^n und ∂'^n Isomorphismen.

Ferner ist im Komplex (B) der einzige Modul $\neq 0$ der Modul B, und dieser Modul steht an der Position -1. Nach Eigenschaft 1.9.3. (4) ist daher

$\mathcal{F}\big(\mathcal{P},(B)\big)^{n-1} = \mathcal{F}(P_n, B), \qquad \mathrm{D}^{n-1} = \mathcal{F}(\mathrm{d}_n, \mathrm{id}_B)$
und
$\mathcal{F}\big(\mathcal{P}',(B)\big)^{n-1} = \mathcal{F}(P'_n, B), \qquad \mathrm{D}'^{n-1} = \mathcal{F}(\mathrm{d}'_n, \mathrm{id}_B)$
Es folgt:
$\mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P},(B)\big) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}, B)\big),$
$\mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_{(B)})\big) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\tilde{f}, \mathrm{id}_B)\big),$
$\mathrm{H}^{n-1}\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}',(B)\big) = \mathrm{H}^n\big(\mathcal{F}(\mathcal{P}', B)\big).$
Damit ist dann auch der rechte Teil des Diagramms (I) gezeigt.

Der Beweis für das Diagramm (II) geht analog. $\square$

2. Homologische Dimension und Kodimension

Wir folgen in diesem Abschnitt im wesentlichen der Darstellung in [15].

2.1. **Der Koszul-Komplex.**

2.1.1. *Anmerkung.* Im folgenden fassen wir einen R-Modul M gegebenenfalls als trivialen (absteigenden) Komplex auf mit $M_0 := M$ und $M_n := 0$ für $n \neq 0$.
R-Modul-Homomorphismen ergänzt man dann durch Nullabbildungen zu Morphismen von Komplexen.

2.1.2. Definition. Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $x \in R$.
$\mathcal{K}(x; M) := \mathcal{K}(x) \otimes_R M$ heißt der „Koszul-Komplex" von M bzgl x.

Unmittelbar aus der Definition sieht man:

2.1.3. *Anmerkung.* Es ist

(1) $\mathcal{K}(x; M) = \bigoplus K_n(x; M)$ mit
$K_0(x; M) = R \otimes_R M \simeq M, \quad K_1(x; M) = R \cdot e_x \otimes_R M \simeq M, \quad K_n(x; M) = (0)$
für $n \neq 0, 1$, also
$\mathcal{K}(x; M): \qquad \cdots \to 0 \to K_1(x) \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{d}_1 \otimes \mathrm{id}_M} K_0(x) \otimes_R M \to 0 \to \cdots$

(2) Der Randoperator ist gegeben durch
$\mathrm{d}_1 : K_1(x; M) \longrightarrow K_0(x; M)$ mit $\mathrm{d}(e_x \otimes y) = x \cdot y$ für alle $y \in M$.

(3) $\mathrm{H}_0\left(\mathcal{K}(x; M)\right) = M / x \cdot M, \quad \mathrm{H}_1\left(\mathcal{K}(x; M)\right) = \left((0) : (x)\right)_M$ und
$\mathrm{H}_n\left(\mathcal{K}(x; M)\right) = (0)$ für $n \neq 0, 1$.

(4) Insbesondere ist $\mathcal{K}(x; R) = \mathcal{K}(x)$ im Sinne der früheren Definition 1.8.7.

2.1.4. Satz. *Sei $(\mathcal{L}, \delta)$ ein Komplex von R-Moduln und $\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L}$ das Tensorprodukt der Komplexe.*
Für alle $n \in \mathbb{Z}$ hat man eine exakte Folge von R-Moduln:

$$0 \to \mathrm{H}_0\left(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})\right) \longrightarrow \mathrm{H}_n\left(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L}\right) \longrightarrow \mathrm{H}_1\left(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{L})\right) \to 0$$

Beweis. Man bildet aus den R-Moduln $K_0(x)$ und $K_1(x)$ die trivialen Komplexe
$\mathcal{K}_0(x): \quad \cdots \to 0 \to 0 \to K_0(x) \to 0 \to \cdots$ mit $K_0(x)$ an der Position 0 und
$\mathcal{K}_1(x): \quad \cdots \to 0 \to K_1(x) \to 0 \to 0 \to \cdots$ mit $K_1(x)$ an der Position 1,
Nach Definition des Tensorprodukts von Komplexen hat man:
$\mathrm{D}_n = \left(\mathrm{id}_0 \otimes \delta_n + \mathrm{d}_1 \otimes \mathrm{id}_{n-1}, -\mathrm{id}_1 \otimes \delta_{n-1}\right)$:

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L}\right)_n \arrow[d, "\mathrm{D}_n"] & = & K_0(x) \otimes_R L_n \arrow[d, "\mathrm{id}_0 \otimes \delta_n"'] & \oplus & K_1(x) \otimes_R L_{n-1} \arrow[dll, "\mathrm{d}_1 \otimes \mathrm{id}_{n-1}"] \arrow[d, "-\mathrm{id}_1 \otimes \delta_{n-1}"] \\
\left(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L}\right)_{n-1} & = & K_0(x) \otimes_R L_{n-1} & \oplus & K_1(x) \otimes_R L_{n-2}
\end{tikzcd}$$

Daraus erhält man für die kanonischen Injektionen i_n und kanonischen Projektionen p_n der direkten Summe wegen $p_{n-1} \circ (\mathrm{d}_1 \otimes \mathrm{id}_{n-1}) = 0$ ein kommutatives Diagramm mit exakten Spalten:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathcal{K}_0(x)\otimes_R\mathcal{L} \arrow[d, "i"'] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\delta_{n+1}"] & K_0(x)\otimes_R L_n \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\delta_n"] \arrow[d, "i_n"'] & K_0(x)\otimes_R L_{n-1} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\delta_{n-1}"] \arrow[d, "i_{n-1}"] & \cdots \\
\mathcal{K}(x)\otimes_R\mathcal{L} \arrow[d, "p"'] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{D}_{n+1}"] & \big(\mathcal{K}(x)\otimes_R\mathcal{L}\big)_n \arrow[r, "\mathrm{D}_n"] \arrow[d, "p_n"'] & \big(\mathcal{K}(x)\otimes_R\mathcal{L}\big)_{n-1} \arrow[r, "\mathrm{D}_{n-1}"] \arrow[d, "p_{n-1}"] & \cdots \\
\mathcal{K}_1(x)\otimes_R\mathcal{L} \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "-\mathrm{id}\otimes\delta_n"] & K_1(x)\otimes_R L_{n-1} \arrow[r, "-\mathrm{id}\otimes\delta_{n-1}"] \arrow[d] & K_1(x)\otimes_R \mathcal{L}_{n-2} \arrow[r, "-\mathrm{id}\otimes\delta_{n-2}"] \arrow[d] & \cdots \\
0 & & 0 & 0 & \\
\text{ex.} & & \text{ex.} & \text{ex.} &
\end{tikzcd}$$

Das bedeutet, daß $i = (i_n)$ und $p = (p_n)$ Morphismen sind, so daß man nach Anmerkung 1.1.6. eine exakte Folge von Komplexen hat:

$$0 \to \mathcal{K}_0(x)\otimes_R\mathcal{L} \xrightarrow{i} \mathcal{K}(x)\otimes_R\mathcal{L} \xrightarrow{p} \mathcal{K}_1(x)\otimes_R\mathcal{L} \to 0.$$

Die zugehörige lange Homologiefolge liefert die exakte Folge:

$$\mathrm{H}_{n+1}\big(\mathcal{K}_1(x)\otimes\mathcal{L}\big) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}_0(x)\otimes\mathcal{L}\big) \longrightarrow \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}(x)\otimes\mathcal{L}\big) \longrightarrow \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}_1(x)\otimes\mathcal{L}\big) \xrightarrow{\partial_n} \mathrm{H}_{n-1}\big(\mathcal{K}_0(x)\otimes\mathcal{L}\big).$$

Daraus ergibt sich die exakte Folge:
$0 \to \operatorname{Coker}\partial_{n+1} \to \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}(x)\otimes\mathcal{L}\big) \to \operatorname{Ker}\partial_n \to 0.$
Wir zeigen:

(1) $\mathrm{H}_0\big(\mathcal{K}(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})\big) = \operatorname{Coker}\partial_{n+1}$
(2) $\mathrm{H}_1\big(\mathcal{K}(x)\otimes_R \mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{L})\big) = \operatorname{Ker}\partial_n$

Damit ist dann die Behauptung des Satzes bewiesen.
Beweis:
Vorbemerkung: Der Komplex $\mathcal{K}_1(x)\otimes_R\mathcal{L}$ hat die Gestalt:

$$\mathcal{K}_1(x)\otimes_R\mathcal{L}\ \cdots \longrightarrow K_1(x)\otimes_R L_n \xrightarrow[\Delta_{n+1}]{-\mathrm{id}\otimes\delta_n} K_1(x)\otimes_R L_{n-1} \xrightarrow[\Delta_n]{-\mathrm{id}\otimes\delta_{n-1}} K_1(x)\otimes_R L_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}_1(x)\otimes_R\mathcal{L}\big) &= \operatorname{Ker}\Delta_n/\operatorname{Im}\Delta_{n+1} = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}\otimes\delta_{n-1})/\operatorname{Im}(\mathrm{id}\otimes\delta_n)\\
&\simeq K_1(x)\otimes_R\big(\operatorname{Ker}\delta_{n-1}/\operatorname{Im}\delta_n\big), \quad \text{weil } K_1(x) \text{ ein freier } R\text{-Modul ist}\\
&= K_1(x)\otimes_R \mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{L}).
\end{aligned}$$

Wenn wir mit Überstreichung die jeweiligen Homologieklassen bezeichnen, wird bei dieser Isomorphie
$\overline{z\otimes y} \mapsto z\otimes\bar{y}$ abgebildet.
Ebenso folgt, weil auch $K_0(x) = R$ ein freier R-Modul ist, aus der Gestalt des Komplexes

$$\mathcal{K}_0(x)\otimes_R\mathcal{L}\ \cdots \longrightarrow K_0(x)\otimes_R L_{n+1} \xrightarrow[\Delta_{n+1}]{\mathrm{id}\otimes\delta_{n+1}} K_0(x)\otimes_R L_n \xrightarrow[\Delta_n]{\mathrm{id}\otimes\delta_n} K_0(x)\otimes_R L_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

daß
$\mathrm{H}_n(\mathcal{K}_0(x)\otimes_R\mathcal{L}) \simeq K_0(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})$ ist vermöge $\overline{z\otimes y}\mapsto z\otimes\bar{y}$.
Wir identifizieren im Folgenden oft, ohne besonders darauf hinzuweisen,
$\mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}_1(x)\otimes_R\mathcal{L}\big)$ mit $K_1(x)\otimes_R \mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{L})$ und
$\mathrm{H}_n(\mathcal{K}_0(x)\otimes_R\mathcal{L})$ mit $K_0(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})$ vermöge der angegebenen Isomorphismen.

Berechne nun ∂_{n+1} nach der Konstruktion von Satz 1.1.10.:

$$\begin{tikzcd}
 & K_0(x)\otimes_R L_{n+1}\oplus K_1(x)\otimes_R L_n \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{n+1}"'] & K_1(x)\otimes_R L_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(x)\otimes_R L_n \arrow[r, "i_n"] & K_0(x)\otimes_R L_n\oplus K_1(x)\otimes_R L_{n-1} \arrow[r, "p_n"] & K_1(x)\otimes_R L_{n-1}
\end{tikzcd}$$

$$(0,\textstyle\sum z_\nu\otimes y_\nu)\longmapsto \textstyle\sum z_\nu\otimes y_\nu$$

$$\textstyle\sum \mathrm{d}_1 z_\nu\otimes y_\nu \longmapsto \Big(\sum \mathrm{d}_1 z_\nu\otimes y_\nu, -\underbrace{\sum z_\nu\otimes\delta_n y_\nu}_{=0 \text{ als Zykel}}\Big)$$

Sei $\sum z_\nu\otimes y_\nu \in K_1(x)\otimes_R L_n$ ein Zykel, Vertreter einer Klasse von $\mathrm{H}_{n+1}\big(\mathcal{K}_1(x)\otimes_R\mathcal{L}\big)$.
Dann ist also
$\sum z_\nu\otimes\delta_n y_\nu = (\mathrm{id}\otimes\delta_n)(\sum z_\nu\otimes y_\nu) = 0$.
Es ist offenbar $(0,\sum z_\nu\otimes y_\nu)$ ein Urbild von $\sum z_\nu\otimes y_\nu$ bei p_{n+1}.
Nach Definition des Randoperators im Tensorprodukt hat man:
$\mathrm{D}_{n+1}\big(0,\sum z_\nu\otimes y_\nu\big) = \big(\mathrm{id}\otimes\delta_{n+1}0+\sum \mathrm{d}_1 z_\nu\otimes y_\nu, -\sum z_\nu\otimes\delta_n y_\nu\big) = \big(\sum \mathrm{d}_1 z_\nu\otimes y_\nu, 0\big)$.
Das Urbild von $\mathrm{D}_{n+1}(0,\sum z_\nu\otimes y_\nu)$ unter i_n ist dann $\sum \mathrm{d}_1 z_\nu\otimes y_\nu$.
Nach Satz 1.1.10. ist dann:
$\partial_{n+1}\Big(\overline{\sum z_\nu\otimes y_\nu}\Big) = \overline{\sum \mathrm{d}_1 z_\nu\otimes y_\nu}\in \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}_0(x)\otimes_R\mathcal{L}\big)$.
Identifiziert man nach der Vorbemerkung
$\mathrm{H}_{n+1}\big(\mathcal{K}_1(x)\otimes_R\mathcal{L}\big) = K_1(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})$ und
$\mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}_0(x)\otimes_R\mathcal{L}\big) = K_0(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})$,
so ist
$\overline{\sum z_\nu\otimes y_\nu} = \sum z_\nu\otimes\bar{y}_\nu$ und $\overline{\sum \mathrm{d}_1 z_\nu\otimes y_\nu} = \sum \mathrm{d}_1 z_\nu\otimes\bar{y}_\nu$ und damit
$\partial_{n+1}\big(\sum z_\nu\otimes\bar{y}_\nu\big) = \sum \mathrm{d}_1 z_\nu\otimes\bar{y}_\nu$ und folglich
$\partial_{n+1} = \mathrm{d}_1\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{H}_n(\mathcal{L})}:\quad K_1(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})\to K_0(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})$.
Es folgt:
$\mathrm{Coker}\,\partial_{n+1} = \big(K_0(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})\big)/\big(\mathrm{d}_1K_1(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})\big) = \mathrm{H}_0\big(\mathcal{K}(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})\big)$;
denn nach Anmerkung 2.1.3. mit $M=\mathrm{H}_n(\mathcal{L})$ ist
$\mathrm{H}_0\big(\mathcal{K}(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})\big) = \big(K_0(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})\big)/\big(\mathrm{d}_1K_1(x)\otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{L})\big)$.

Ebenso ergibt sich
$\mathrm{Ker}\,\partial_n = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}_1\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{L})}\big) = \mathrm{H}_1\big(\mathcal{K}(x)\otimes_R \mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{L})\big)$. ☐

2.1.5. Korollar. *Seien*
M ein R-Modul,
$(\mathcal{P},\delta;p)$ eine linke Auflösung von M, $x\in R$ ein Nichtnullteiler für M.
Dann ist
$\big(\mathcal{K}(x)\otimes_R\mathcal{P},\mathrm{D};\bar{p}\big)$ eine linke Auflösung von $M/x\cdot M$.
Dabei ist D der Randoperator im Tensorprodukt der beiden Komplexe und
$\bar{p}:\big(\mathcal{K}(x)\otimes_R\mathcal{P}\big)_0\to M/x\cdot M$ ist definiert durch die Zusammensetzung von p mit dem kanonischen Restklassenhomomorphismus $M\to M/x\cdot M$:
$\bar{p}:\big(\mathcal{K}(x)\otimes_R\mathcal{P}\big)_0 = K_0(x)\otimes_R P_0 = P_0\xrightarrow{p} M\to M/x\cdot M$.

Beweis. Weil $(\mathcal{P},\delta;p)$ eine Auflösung von M ist, ist
$$\mathrm{H}_n(\mathcal{P}) = \begin{cases} 0 & \text{für } n\geq 1\\ M & \text{für } n=0\,.\end{cases}$$
Aus der exakten Folge von Satz 2.1.4. folgt dann mit $\mathcal{L}:=\mathcal{P}$
$\mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}(x)\otimes_R\mathcal{P}\big)= 0$ für $n\geq 2$.

Ferner ist nach derselben exakten Folge für $n = 1$
$\mathrm{H}_1\big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{P}\big) = \mathrm{H}_1\big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathrm{H}_0(\mathcal{P})\big) = \mathrm{H}_1\big(\mathcal{K}(x) \otimes_R M\big) \overset{2.1.3.\ (3)}{=} \big((0) : (x)\big)_M = 0,$
weil x ein Nichtnullteiler für M ist. Also ist
$\cdots \xrightarrow{\mathrm{D}_3} \big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{P}\big)_2 \xrightarrow{\mathrm{D}_2} \big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{P}\big)_1 \xrightarrow{\mathrm{D}_1} \big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{P}\big)_0$ exakt.
Bleibt zu zeigen, daß auch
$\big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{P}\big)_1 \xrightarrow{\mathrm{D}_1} \big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{P}\big)_0 = P_0 \xrightarrow{\bar{p}} M/x \cdot M \to 0$ exakt ist:
Daß $\bar{p}$ surjektiv ist, ist klar nach Definition, weil p surjektiv ist.
Ferner ist $\operatorname{Ker} \bar{p} = \overset{-1}{p}(x \cdot M) = x \cdot P_0 + \operatorname{Ker} p = x \cdot P_0 + \delta_1 P_1$, wobei die letzte Gleichung gilt, weil $P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{p} M$ exakt ist.
Nun ist aber
$\mathrm{D}_1 : \big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{P}\big)_1 = K_1(x) \otimes_R P_0 \oplus K_0(x) \otimes_R P_1 \longrightarrow \big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{P}\big)_0 = K_0(x) \otimes_R P_0$
definiert durch
$\mathrm{D}_1 = \mathrm{d}_1 \otimes \mathrm{id}_{P_0} - \mathrm{id}_{K_1(x)} \otimes \underbrace{\delta_0}_{=0} + \underbrace{\mathrm{d}_0}_{=0} \otimes \mathrm{id}_{P_1} + \mathrm{id}_{K_0(x)} \otimes \delta_1 = \mathrm{d}_1 \otimes \mathrm{id}_{P_0} + \mathrm{id}_{K_0(x)} \otimes \delta_1.$
Nun ist aber $K_1(x) = R$, $K_0(x) = R$ und d_1 die Multiplikation mit x, so daß man erhält
$\mathrm{D}_1\big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{P}\big)_1 = x \cdot P_0 + \delta_1 P_1 = \operatorname{Ker} \bar{p}.$ □

2.1.6. Definition. Seien $x_1, \dots, x_r \in R$ und M ein R-Modul. Setze
$\underline{x} := (x_1, \dots x_r)$,
$\mathcal{K}(\underline{x}; M) := \mathcal{K}(x_1, \dots, x_r) \otimes_R M$ als Komplex, „Koszul-Komplex" von M bzgl. $\underline{x}$.
(Dabei ist wieder M der triviale Komplex im Sinne von Anmerkung 2.1.1.) Ferner setzt man
$\mathrm{H}_n(\underline{x}; M) := \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}(\underline{x}; M)\big).$

2.1.7. *Anmerkung.*

(1) $\mathrm{H}_0(\underline{x}; M) \simeq M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M$
(2) $\mathrm{H}_r(\underline{x}; M) \simeq \big((0) : (x_1, \dots, x_r)\big)_M = \{z \mid z \in M,\ (x_1, \dots, x_r) \cdot z = 0\}$
(3) $\mathrm{H}_n(\underline{x}; M) = 0$ für alle $n > r$.
(4) Insbesondere ist $\mathcal{K}(\underline{x}; R) = \mathcal{K}(\underline{x})$ im Sinne der früheren Definition 1.8.9.

Beweis. (1): Es ist mit den Bezeichnungen aus Anmerkung 1.8.10.
$K_0(\underline{x}; M) = R \otimes_R R \otimes_R \ldots \otimes_R R \otimes_R M \simeq M,$
$K_1(\underline{x}; M) = \bigoplus_{i=1}^{r} R \otimes_R R \otimes \ldots \otimes_R R \cdot e_i \otimes_R R \otimes \ldots \otimes_R R \otimes_R M \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} R \cdot e_i \otimes_R M$
und der Randoperator $\mathrm{d}_1 : K_1(\underline{x}; M) \to K_0(\underline{x}; M)$ ist gegeben durch $\mathrm{d}_1 = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{d}_1^{(i)}$
mit $\mathrm{d}_1^{(i)}(e_i \otimes z) = x_i \cdot z \in M$. Also ist $\operatorname{Im} \mathrm{d}_1 = (x_1, \dots, x_r) \cdot M$ und
$\operatorname{Ker} \mathrm{d}_0 = K_0(\underline{x}; M) = M$ und daher $\mathrm{H}_0(\underline{x}; M) \simeq M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M$. q.e.d.

(2): Es ist $K_r(\underline{x}; M) = R \cdot e_1 \otimes_R \cdots \otimes_R R \cdot e_r \otimes_R M = R \cdot (e_1 \otimes \cdots \otimes e_r) \otimes_R M$ und nach Anmerkung 1.8.11 gilt
$\mathrm{d}_r(e_1 \otimes \cdots \otimes e_r \otimes z) = \sum (-1)^{j-1} e_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{e_j} \otimes \cdots \otimes e_r \otimes x_j \cdot z.$
Da die $e_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{e_j} \otimes \cdots \otimes e_r$ eine Basis von $K_{r-1}(\underline{x})$ als R-Modul bilden, gilt:
$\mathrm{d}_r(e_1 \otimes \cdots \otimes e_r \otimes z) = 0 \iff x_j \cdot z = 0$ für alle $j = 1, \dots, r$ und daher
$\operatorname{Ker} \mathrm{d}_r = \{e_1 \otimes \cdots \otimes e_r \otimes z \mid (x_1, \dots, x_r) \cdot z = 0\} \underset{R}{\simeq} \{z \mid (x_1, \dots, x_r) \cdot z = 0\} =$
$\big((0) : (x_1, \dots, x_r)\big)_M.$
Da außerdem $\mathrm{d}_{r+1} = 0$ ist, folgt (2).

(3) ist trivial, weil für $n > r$ alle $\mathrm{d}_n = 0$ sind. $\square$

2.1.8. *Anmerkung.* Sei π eine Permutation von $(1, \dots, n)$ und
$\pi(\underline{x}) := (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(r)})$. Dann ist in natürlicher Weise
$\mathcal{K}\big(\pi(\underline{x}); M\big) \simeq \mathcal{K}(\underline{x}; M)$.

Beweis. Da sich jede Permutation als Produkt von Transpositionen benachbarter Elemente schreiben läßt, folgt die Behauptung aus der Kommutativität des Tensorprodukts zweier Komplexe (Eigenschaften 1.8.5. (1)) zusammen mit der Assoziativität (Eigenschaften 1.8.5. (2)). $\square$

2.1.9. Satz. *Seien $x_1, \dots, x_r \in R$ und M ein R-Modul.*
Es ist $(x_1, \dots, x_r) \cdot H_p(\underline{x}; M) = 0$ für alle p.

Zum Beweis brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

2.1.10. Hilfssatz. *Sei $(\mathcal{L}, \delta)$ ein Komplex von R-Moduln, $x \in R$ und $\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L}$ das Tensorprodukt der Komplexe. Dann ist*
$x \cdot \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L}\big) = 0 \quad$ *für alle n.*

Beweis. Nach Definition des Tensorprodukts von Komplexen hat man:
$\mathrm{D}_n = \big(\mathrm{id}_0 \otimes \delta_n + \mathrm{d}_1 \otimes \mathrm{id}_{n-1}, -\mathrm{id}_1 \otimes \delta_{n-1}\big)$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L})_n \arrow[d, "\mathrm{D}_n"] & = & K_0(x) \otimes_R L_n \arrow[d, "\mathrm{id}_0 \otimes \delta_n"'] & \oplus & K_1(x) \otimes_R L_{n-1} \arrow[dll, "\mathrm{d}_1 \otimes \mathrm{id}_{n-1}"] \arrow[d, "-\mathrm{id}_1 \otimes \delta_{n-1}"] \\
(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L})_{n-1} & = & K_0(x) \otimes_R L_{n-1} & \oplus & K_1(x) \otimes_R L_{n-2}
\end{tikzcd}$$

Die Elemente von $\big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L}\big)_n$ sind von der Form $(\xi, e_x \otimes \eta)$ mit $\xi \in L_n$ und $\eta \in L_{n-1}$. Dann ist $\mathrm{D}_n(\xi, e_x \otimes \eta) = (\delta_n \xi + x \cdot \eta, -e_x \otimes \delta_{n-1}\eta)$. Also ist
$\mathrm{D}_n(\xi, e_x \otimes \eta) = 0 \Leftrightarrow \delta_n \xi = x \cdot (-\eta)$ und $\delta_{n-1}\eta = 0$.
Wenn man einen solchen Zykel mit x multipliziert, erhält man aber einen Rand; denn $\mathrm{D}_{n+1}(0, e_x \otimes \xi) = (0 + x \cdot \xi, \underline{-e_x \otimes \delta_n \xi}) = \big(x \cdot \xi, -e_x \otimes x \cdot (-\eta)\big) = x \cdot (\xi, e_x \otimes \eta)$. Also gilt für die Homologieklasse $x \cdot \overline{(\xi, e_x \otimes \eta)} = 0$ und somit auch $x \otimes \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}(x) \otimes_R \mathcal{L}\big) = 0$ $\square$

Beweis von Satz 2.1.9. Sei $i \in \{1, \dots, r\}$ beliebig.
Nach Anmerkung 2.1.8. und der Assoziativität des Tensorproduktes von Komplexen (Eigenschaft 1.8.5. (2)) ist $\mathcal{K}(\underline{x}, M) \simeq \mathcal{K}(x_i) \otimes_R \mathcal{K}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_r; M)$, wobei $\widehat{x_i}$ bedeutet, daß dieses Element weggelassen wird. Setzt man nun
$\mathcal{L} := \mathcal{K}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_r; M)$, so folgt mit Hilfssatz 2.1.10.:
$x_i \cdot \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}(\underline{x}; M)\big) \simeq x_i \cdot \mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}(x_i) \otimes_R \mathcal{L}\big) = 0$. Da dies für alle $i = 1, \dots, r$ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

2.1.11. *Anmerkung.* $\mathcal{K}(\underline{x}; \bullet)$ ist ein kovarianter exakter Funktor der Kategorie der R-Moduln in die Kategorie der Komplexe von R-Moduln: Sei
$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ eine exakte Folge von R-Moduln. Dann gilt:

(1) $0 \to \mathcal{K}(\underline{x}; N) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} \mathcal{K}(\underline{x}; M) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes g} \mathcal{K}(\underline{x}; L) \to 0$
ist eine exakte Folge von Morphismen von Komplexen.

(2) Man hat eine zugehörige lange exakte Homologiefolge:
$$0 \to \mathrm{H}_r(\underline{x}; N) \xrightarrow{\mathrm{H}_r(\mathrm{id} \otimes f)} H_r(\underline{x}; M) \xrightarrow{\mathrm{H}_r(\mathrm{id} \otimes g)} H_r(\underline{x}; L) \xrightarrow{\partial_r} H_{r-1}(\underline{x}; N) \xrightarrow{\mathrm{H}_{r-1}(\mathrm{id} \otimes f)} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{H}_1(\mathrm{id} \otimes g)} H_1(\underline{x}; L) \xrightarrow{\partial_1} H_0(\underline{x}; N) \xrightarrow{\mathrm{H}_0(\mathrm{id} \otimes f)} H_0(\underline{x}; M) \xrightarrow{\mathrm{H}_0(\mathrm{id} \otimes g)} H_0(\underline{x}; L) \to 0\,.$$

Beweis. (1): Man faßt wieder N, M, L auf als triviale Komplexe. Dann induzieren die durch Nullabbildungen ergänzten R-linearen Abbildungen f und g Morphismen der Komplexe, die wir wieder mit f und g bezeichnen. $\mathrm{id} \otimes f$ bzw. $\mathrm{id} \otimes g$ sind dann Morphismen der Tensorprodukte der Komplexe
$\mathcal{K}(\underline{x}, N) = \mathcal{K}(\underline{x}) \otimes_R N \to \mathcal{K}(\underline{x}) \otimes_R M = \mathcal{K}(\underline{x}; M)$ bzw.
$\mathcal{K}(\underline{x}; M) = \mathcal{K}(\underline{x}) \otimes_R M \to \mathcal{K}(\underline{x}) \otimes_R L = \mathcal{K}(\underline{x}, L)$.
Die n-te Komponente dieser Morphismen ist

$$0 \to \underbrace{K_n(\underline{x}) \otimes_R N}_{=K_n(\underline{x},N)} \xrightarrow{\mathrm{id}_{K_n(\underline{x})} \otimes f} \underbrace{K_n(\underline{x}) \otimes_R M}_{=K_n(\underline{x};M)} \xrightarrow{\mathrm{id}_{K_n(\underline{x})} \otimes g} \underbrace{K_n(\underline{x}) \otimes_R L}_{=K_n(\underline{x},L)} \to 0$$

und diese Folge ist exakt, weil $K_n(\underline{x})$ ein freier R-Modul ist. Daher ist auch die Folge der Morphismen exakt.

(2) folgt aus (1) nach Satz 1.1.10. □

2.1.12. *Anmerkung.* Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, $\varphi(\underline{x}) := \big(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_r)\big)$. Dann gilt:

(1) $\mathcal{K}\big(\varphi(\underline{x}); S \otimes_R M\big) \simeq S \otimes_R \mathcal{K}(\underline{x}; M)$ ist ein Isomorphismus von Komplexen von S-Moduln. (Dabei ist S wieder der triviale Komplex im Sinne von Anmerkung 2.1.1.)
(2) Falls S als R-Modul flach ist, gilt $\mathrm{H}_n\big(\varphi(\underline{x}); S \otimes_R M\big) \simeq S \otimes_R \mathrm{H}_n(\underline{x}; M)$ für alle n als S-Moduln.

Beweis. (1): Nach Definition ist $\mathcal{K}\big(\varphi(\underline{x}); S \otimes_R M\big) = \mathcal{K}\big(\varphi(\underline{x}); S\big) \otimes_S \big(S \otimes_R M\big) = \mathcal{K}\big(\varphi(\underline{x}); S\big) \otimes_R M$.
Ferner ist $S \otimes_R \mathcal{K}(\underline{x}; M) = S \otimes_R \mathcal{K}(\underline{x}; R) \otimes_R M$.
Es genügt also zu zeigen:
Behauptung: $S \otimes_R \mathcal{K}(\underline{x}; R) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{K}\big(\varphi(\underline{x}); S\big)$ als Isomorphie von Komplexen.
Beweis: Für alle n ist
$\big(S \otimes_R \mathcal{K}(\underline{x}; R)\big)_n = S \otimes_R K_n(\underline{x}; R) =$

$$S \otimes_R \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_n} R \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \underset{S}{\overset{f_n}{\xrightarrow{\sim}}} \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_n} S \cdot \tilde{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{e}_{i_n} = K_n\big(\varphi(\underline{x}); S\big)$$

mit $\tilde{e}_i := 1 \otimes e_i$ in $S \otimes_R R$.
Bleibt zu zeigen, daß $f := (f_n)$ ein Morphismus von Komplexen ist, d.h. sich mit den Randoperatoren verträgt:
In $S \otimes_R \mathcal{K}(\underline{x}; R)$ ist der Randoperator $\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{d}^R$, wenn d^R der Randoperator von $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ ist. Analog bezeichnen wir den Randoperator von $\mathcal{K}\big(\varphi(\underline{x}); S\big)$ mit d^S. Da alles S-linear ist, genügt es, die Verträglichkeit auf den Basiselementen nachzurechnen: $(\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{d}^R_n)(1 \otimes e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = 1 \otimes \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_{i_j} \cdot (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{i_j}} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) =$
$\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \varphi(x_{i_j}) \cdot (\tilde{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\tilde{e}_{i_j}} \otimes \cdots \otimes \tilde{e}_{i_n}) = \mathrm{d}^S_n(\tilde{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{e}_{i_n})$

(2): Daß S als R-Modul flach ist, bedeutet, daß der Funktor $S \otimes_R \bullet$ exakt ist. Da d^S in $\mathcal{K}\big(\varphi(\underline{x}); S\big)$ in der Isomorphie (1) durch Anwenden dieses Funktors aus d^R in $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ entsteht, folgt
$\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}^S_n = S \otimes \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}^R_n$ und auch $\mathrm{Im}\, \mathrm{d}^S_{n+1} = S \otimes \mathrm{Im}\, \mathrm{d}^R_{n+1}$, also
$\mathrm{H}_n\big(\varphi(\underline{x}); S\big) = S \otimes_R \mathrm{H}_n\big(\underline{x}; R\big)$ □

2.1.13. *Anmerkung.* Die Isomorphie von Satz 2.1.12. (2) gilt insbesondere in den beiden Fällen:

(1) S entsteht aus R durch Nenneraufnahme nach einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge T von R:
Dann ist $S \otimes_R \bullet = \big(\bullet\big)_T$.
(2) R ist ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul, $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R und $S := \widehat{R}$ die $\mathfrak{q}$-adische Komplettierung von R.
([3, Korollar 14.0.9.,(3)])

2.1.14. Satz. *Für alle $i = 1, \dots, r$ sei x_i kein Nullteiler für $M/(x_1, \dots, x_{i-1}) \cdot M$. Dann ist $\mathrm{H}_n(\underline{x}; M) = 0$ für alle $n > 0$.*

Beweis. Induktion nach r. Induktionsbeginn bei $r = 1$:
Nach Anmerkung 2.1.3. (3) ist dann $\mathrm{H}_n(x_1; M) = 0$ für alle $n \geq 2$ und auch $\mathrm{H}_1(x_1; M) = \big((0) : (x_1)\big)_M = 0$, weil x_1 ein Nichtnullteiler für M ist.
Sei nun $r > 1$, und sei die Behauptung schon gezeigt für $\mathcal{K}\big((x_1, \dots, x_{r-1}; M\big)$.
Betrachte die Folge

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_2} K_1\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big) \xrightarrow{\mathrm{d}_1} K_0\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big) \xrightarrow{p} K_0\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big) / \operatorname{Im} \mathrm{d}_1 = \mathrm{H}_0\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big) = M/(x_1, \dots, x_{r-1}) \cdot M \to 0$$

Da nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{H}_n\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big) = 0$ ist für $n \geq 1$ und p nach Definition surjektiv ist, ist das eine linke Auflösung für
$M' := M/(x_1, \dots, x_{r-1}) \cdot M$. Nach Voraussetzung ist ferner x_r ein Nichtnullteiler für M'. Daher ist nach Korollar 2.1.5. der Komplex
$\big(\mathcal{K}(x_r) \otimes_R \mathcal{K}\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big), \mathrm{D}; \bar{p}\big)$ eine linke Auflösung für $M'/x_r \cdot M'$. Also sind insbesondere alle $\mathrm{H}_n\big(\mathcal{K}(x_r) \otimes_R \mathcal{K}\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)\big) = 0$ für $n \geq 1$. Wegen der Assoziativität und Kommutativität des Tensorprodukts ist aber
$\mathcal{K}(x_r) \otimes_R \mathcal{K}\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big) = \mathcal{K}(x_r) \otimes_R \big(\mathcal{K}(x_1) \otimes_R \cdots \otimes_R \mathcal{K}(x_{r-1}) \otimes_R M\big) \simeq$
$\mathcal{K}(x_1) \otimes_R \cdots \otimes_R \mathcal{K}(x_r) \otimes_R M = \mathcal{K}\big((x_1, \dots, x_r); M\big)$. Also ist $\mathrm{H}_n(\underline{x}; M) = 0$. □

2.1.15. Satz. *Sei R ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{J}(R)$ (= Jacobson-Radikal von R).*
Es sind äquivalent:

(1) $\mathrm{H}_n(\underline{x}; M) = 0$ *für alle* $n \geq 1$.
(2) $\mathrm{H}_1(\underline{x}; M) = 0$.
(3) *Für alle $i = 1, \dots, r$ ist x_i kein Nullteiler für $M/(x_1, \dots, x_{i-1}) \cdot M$.*

Beweis. (1)⇒(2) ist trivial.

(3)⇒(1) folgt aus Satz 2.1.14.

Bleibt zu zeigen:
(2)⇒(3): Induktion nach r. Induktionsbeginn bei $r = 1$:
Nach Anmerkung 2.1.3. (3) ist $\mathrm{H}_1(x_1; M) = \big((0) : (x_1)\big)_M$.
Also folgt aus $\mathrm{H}_1(x_1; M) = 0$, daß x_1 kein Nullteiler für M ist.
Sei nun $r > 1$ und sei die Behauptung für $r - 1$ schon gezeigt. Wende Satz 2.1.4 an mit $\mathcal{L} := \mathcal{K}\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)$, $x = x_r$ und $n = 1$.
Man hat dann eine exakte Folge:

$$0 \to \mathrm{H}_0\big(\mathcal{K}(x_r) \otimes_R \mathrm{H}_1\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)\big) \to \mathrm{H}_1\big(\underbrace{\mathcal{K}(x_r) \otimes_R \mathcal{K}\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)}_{\simeq \mathcal{K}(\underline{x}; M)}\big) \simeq \underbrace{\mathrm{H}_1(\underline{x}; M)}_{=0 \text{ nach } (2)} \to \mathrm{H}_1\big(K(x_r) \otimes_R \mathrm{H}_0\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)\big) \to 0$$

Daraus folgt:
$\mathrm{H}_0\big(\mathcal{K}(x_r) \otimes_R \mathrm{H}_1\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)\big) = 0$ und auch
$\mathrm{H}_1\big(\mathcal{K}(x_r) \otimes_R \mathrm{H}_0\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)\big) = 0$.
In Verbindung mit Anmerkung 2.1.3. (3) ergibt das:

a) $0 = \mathrm{H}_0\big(\mathcal{K}(x_r) \otimes_R \mathrm{H}_1\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)\big) = \mathrm{H}_1\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)/x_r \cdot \mathrm{H}_1\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)$ und

b) $0 = \mathrm{H}_1\big(\mathcal{K}(x_r) \otimes_R \mathrm{H}_0\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big)\big) = \big((0) : (x_r)\big)_{\mathrm{H}_0\left((x_1,\dots,x_{r-1});M\right)}$.

Aus a) folgt, weil $x_r \in \mathfrak{J}$ ist, nach Nakayama $\mathrm{H}_1\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big) = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt daraus, daß x_i ein Nichtnullteiler für $M/(x_1, \dots, x_{i-1})$ ist für $i = 1, \dots, r-1$.
Aus b) folgt, daß x_r ein Nichtnullteiler für
$\mathrm{H}_0\big((x_1, \dots, x_{r-1}); M\big) \overset{2.1.7.}{=} M/(x_1, \dots, x_{r-1}) \cdot M$ ist.
Beides zusammen ergibt die Behauptung. □

2.1.16. Korollar. *Die Bedingung (3) in Satz 2.1.15. hängt nicht von der Reihenfolge der x_i ab.*

Beweis. Die Bedingungen (1) oder auch (2) hängen wegen Anmerkung 2.1.8. nicht von der Reihenfolge der x_i ab.
(Einen elementaren Beweis findet man in [13, VI, Satz 3.1] □

Elemente, die der Bedingung (3) in Satz 2.1.15. genügen, spielen eine wichtige Rolle und erhalten daher einen eigenen Namen:

2.1.17. Definition. Sei R ein Ring, $\mathfrak{J}$ sein Jacobson-Radikal, M ein endlich erzeugter R-Modul und $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{J}$.
$\{x_1, \dots, x_r\}$ heißt eine „M-Folge“, oder auch eine „M-reguläre Folge“ ,wenn gilt:
Für alle $i = 1, \dots, r$ ist x_i kein Nullteiler für $M/(x_1, \dots, x_{i-1}) \cdot M$.

2.1.18. *Anmerkung.*
(1) Nach Korollar 2.1.16. bleibt eine M-reguläre Folge M-regulär, wenn man die Elemente permutiert.
(2) Aus der Definition einer M-regulären Folge zusammen mit (1) ergibt sich unmittelbar: Jede Teilfolge einer M-regulären Folge ist wieder eine M-reguläre Folge.

2.1.19. *Anmerkung.* Sei $\{x_1, \dots, x_r\}$ eine R-Folge,
$p : K_0(\underline{x}; R) \to \mathrm{H}_0(\underline{x}; R) = R/(x_1, \dots, x_r) \cdot R$ kanonisch.
Dann ist:
$0 \to K_r(\underline{x}; R) \xrightarrow{\mathrm{d}_r} K_{r-1}(\underline{x}; R) \xrightarrow{\mathrm{d}_{r-1}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_1} K_0(\underline{x}, R) \xrightarrow{p} R/(x_1, \dots, x_r) \cdot R \to 0$
eine freie Auflösung von $R/(x_1, \dots, x_r) \cdot R$.

Beweis. Nach Definition sind alle $K_i(\underline{x}; R)$ freie R-Moduln. Nach Satz 2.1.14. ist ferner der Komplex $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ exakt für $n \geq 1$ und nach Definition ist
$\operatorname{Im} \mathrm{d}_1 = (x_1, \dots, x_r) \cdot K_0(\underline{x}; R) = \operatorname{Ker} p$. □

Mittels des Koszul-Komplexes definiert man noch einen Satz von Invarianten $\varepsilon_p(R)$ für einen noetherschen lokalen Ring R, die insbesondere bei der Charakterisierung von vollständigen Durchschnitten eine wichtige Rolle spielen. Dazu braucht man zunächst einen vorbereitenden Satz ([14, § 21]):

2.1.20. Satz. *Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein noetherscher lokaler Ring und $\underline{x} := \{x_1, \ldots, x_r\}$ ein* minimales *Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$. Dann ist der Koszul-Komplex $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ bis auf Komplex-Isomorphie unabhängig von der Wahl der x_i.*

Beweis. Sei $k := R/\mathfrak{m}$. Dann ist $r = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, da die Restklassen der x_i modulo $\mathfrak{m}^2$ eine k-Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ bilden. Sei nun $\underline{x}' := \{x'_1, \ldots, x'_r\}$ ein weiteres minimales Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$. Dann lassen sich die x_i durch die x'_j ausdrücken: $x_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot x'_j$. Durch Übergang zu den Restklassen modulo $\mathfrak{m}^2$ erhält man die entsprechende Beziehung $\bar{x}_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \tilde{a}_{ij} \cdot \bar{x}'_j$ zwischen den k-Basen $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r\}$ und $\{\bar{x}'_1, \ldots, \bar{x}'_r\}$ mit Koeffizienten $\tilde{a}_{ij} \in k$. Da beides k-Vektorraumbasen sind, ist die Determinante der Matrix $\left(\bar{a}_{ij}\right)$ von Null verschieden. Also ist die Determinante der Matrix $\left(a_{ij}\right)$ eine Einheit in R. Definiere eine R-lineare Abbildung

$f_1 : K_1(\underline{x}; R) = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} R \cdot e_i \to \bigoplus\limits_{i=1}^{r} R \cdot e'_i = K_1(\underline{x}'; R)$

durch:

$f_1(e_i) := \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij} e'_j.$

Da die Determinante der Matrix $\left(a_{ij}\right)$ eine Einheit in R ist, ist f_1 invertierbar, also ein Isomorphismus. Definiere noch $f_0 := \mathrm{id}_R : K_0(\underline{x}; R) = R \to R = K_0(\bar{x}'; R)$.

Dann gilt:

$\mathrm{d}'_1 \circ f_1(e_i) = \mathrm{d}'_1\big(\sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot e'_j\big) = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot \mathrm{d}'_i e_j = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot x'_j = x_i = f_0(x_i) = f_0 \circ \mathrm{d}_i(e_i).$

Auf Grund der universellen Eigenschaft der äußeren Algebra setzt sich (f_0, f_1) eindeutig fort zu einem homogenen R-Algebra-Isomorphismus

$f = (f_i) : \mathcal{K}(\underline{x}; R) = \bigwedge K_1(\underline{x}; R) \to \bigwedge K_1(\underline{x}'; R) = \mathcal{K}(\underline{x}'; R).$

Behauptung: f ist ein Morphismus von Komplexen: $\mathrm{d}'_p \circ f_p \overset{!}{=} f_{p-1} \circ \mathrm{d}_p$.

Beweis: Auf Grund der R-Linearität von d und d′ genügt es, dies für die Basiselemente zu verifizieren:

Weil f ein R-Algebra-Homomorphismus ist, erhält man mit der Produktregel für homogene Elemente vom Grad 1 aus Anmerkung 1.8.12.:

$\mathrm{d}'_p \circ f_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) =$

$\mathrm{d}'_p\big(f_1(e_{i_1}) \otimes \cdots \otimes f_1(e_{i_p})\big) =$

$\sum\limits_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \cdot \big(f_1(e_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}'_1 \circ f_1(e_{i_j}) \otimes \cdots \otimes f_1(e_{i_p})\big) =$

$\sum\limits_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \cdot \big(f_1(e_{i_1}) \otimes \cdots \otimes f_0 \circ \mathrm{d}_1(e_{i_j}) \otimes \cdots \otimes f_1(e_{i_p})\big) =$

$\sum\limits_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \cdot x_{i_j} \cdot \big(f_1(e_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \widehat{f_1(e_{i_j})} \otimes \cdots \otimes f_1(e_{i_p})\big) =$

$\sum\limits_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \cdot x_{i_j} \cdot f_{p-1}\big(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{i_j}} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}\big) =$

$f_{p-1}\big(\sum\limits_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \cdot x_{i_j} \cdot (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{i_j}} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})\big) =$

$f_{p-1} \circ \mathrm{d}_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})\,.$ q.e.d. □

Sei nun $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ein (beliebiges) Erzeugendensystem für das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ des noetherschen lokalen Ringes R. Nach Satz 2.1.9. ist $\mathfrak{m} \cdot H_p(\underline{x}; R) = 0$ für alle p, so daß man die Homologiegruppen $\mathrm{H}(\underline{x}; R)$ als (endlich dimensionale) k-Vektorräume auffassen kann. Da isomorphe Komplexe isomorphe Homologiemoduln haben, ist die folgende Definition auf Grund von Satz 2.1.20. unabhängig von der speziellen Auswahl des minimalen Erzeugendensystems von R, ergibt also Invarianten von R:

2.1.21. Definition. Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $k := R/\mathfrak{m}$. Sei ferner $\underline{x} := \{x_1, \ldots, x_r\}$ ein minimales Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$.

$$\varepsilon_p(R) := \dim_k\big(\mathrm{H}_p(\underline{x}; R)\big)\,.$$

2.1.22. *Anmerkung.* Wegen $\mathrm{H}_0(\underline{x}; R) \simeq R/(x_1, \ldots, x_r) = R/\mathfrak{m} = k$ nach Anmerkung 2.1.7. (1) ist $\varepsilon_0(R) = 1$.
Nach Satz 2.1.15. ist ferner $\{x_1, \ldots, x_r\}$ genau dann eine R-Folge, wenn $\varepsilon_1(R) = 0$ ist, und dies ist wiederum äquivalent zu $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_r = 0$.

2.1.23. *Anmerkung.* Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $\widehat{R}$ die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung. Dann gilt:

$$\varepsilon_p(\widehat{R}) = \varepsilon_p(R) \qquad \text{für alle } p \geq 0\,.$$

Beweis. Sei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ein minimales Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$ als R-Modul, und sei $k := R/\mathfrak{m} = \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}$. Dann ist wegen $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \underset{k}{\simeq} \widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}}^2$ das System $\{x_1, \ldots, x_r\}$ auch ein minimales Erzeugendensystem für $\widehat{\mathfrak{m}}$ als $\widehat{R}$-Modul.
Nach Definition von $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ und $\mathcal{K}(\underline{x}; \widehat{R})$ ergibt sich sofort $\mathcal{K}(\underline{x}; \widehat{R}) = \widehat{R} \otimes_R \mathcal{K}(\underline{x}; R)$. Wenn d den Randoperator von $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ bezeichnet, ist dann $\widehat{R} \otimes \mathrm{d}$ der Randoperator von $\widehat{R} \otimes_R \mathcal{K}(\underline{x}; R) = \mathcal{K}(\underline{x}; \widehat{R})$. Da $\widehat{R}$ ein flacher R-Modul ist, also bei $\widehat{R} \otimes_R \bullet$ Kern in Kern und Bild in Bild übergeht, ist
$\mathrm{H}_p\big(\mathcal{K}(\underline{x}; \widehat{R})\big) = \mathrm{H}_p\big(\widehat{R} \otimes_R \mathcal{K}(\underline{x}; R)\big) = \widehat{R} \otimes_R \mathrm{H}_p(\underline{x}; R)$ und wegen $\mathfrak{m} \cdot \mathrm{H}_p(\underline{x}; R) = 0$ ist schließlich $\widehat{R} \otimes_R \mathrm{H}_p(\underline{x}; R) = \mathrm{H}_p(\underline{x}; R)$. Also ist
$\varepsilon_p(\widehat{R}) = \dim_k\big(\mathrm{H}_p\big(\mathcal{K}(\underline{x}; \widehat{R})\big)\big) = \dim_k\big(\mathrm{H}_p\big(\mathcal{K}(\underline{x}; R)\big)\big) = \varepsilon_p(R)$. □

2.2. **Tiefe eines Moduls über einem semilokalen Ring.**

Voraussetzungen: *In diesem Abschnitt bezeichnet R, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, einen noetherschen semilokalen Ring mit dem Jacobson-Radikal $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(R)$ und M einen endlich erzeugten R-Modul. Ferner verwenden wir die Bezeichnung $k := k(R) := R/\mathfrak{J}$.*

2.2.1. *Anmerkung.* Sei $\{a_1, \ldots, a_p\}$ eine M-Folge und $\{b_1, \ldots, b_q\}$ eine $M/(a_1, \ldots, a_p)$-Folge. Dann ist $\{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q\}$ eine M-Folge.
Eine solche Folge $\underline{b}$, die aus mindestens einem Element besteht, existiert offenbar genau dann, wenn $\mathfrak{J}$ einen Nichtnullteiler für $M/(a_1, \ldots, a_p)$ enthält.

2.2.2. Satz. *Sei L ein endlich erzeugter R-Modul und $\underline{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ eine M-Folge, so daß $x_i \in \mathrm{Ann}_R(L)$ für alle i. Dann ist*
$\mathrm{Hom}_R\big(L, M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big) \simeq \mathrm{Ext}^r_R(L, M)\,.$

Beweis. Induktion nach r. Induktionsbeginn bei $r = 0$:
Für $r = 0$ ist die M-Folge leer, daher $M/(\underline{x}) \cdot M = M$ und
$\mathrm{Hom}_R(L, M) \simeq \mathrm{Ext}^0_R(L, M)$ nach Anmerkung 1.6.17..

Setze im Folgenden $M_i := M/(x_1, \ldots, x_i) \cdot M$ für alle i.
Sei nun die Behauptung bewiesen für alle endlich erzeugten R-Moduln N und alle N-Folgen mit höchstens $r-1$ Elementen. $\{x_2, \ldots, x_r\}$ ist eine M_1-Folge von $r-1$ Elementen und $M_1/(x_2, \ldots, x_r) \cdot M_1 = M_r$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\mathrm{Hom}_R(L, M_r) \simeq \mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M_1)$. Bleibt zu zeigen:
Behauptung: $\mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M_1) \simeq \mathrm{Ext}_R^r(L, M)$
Beweis: Betrachte die Folge
$0 \to M \xrightarrow{\mu_{x_1}} M \xrightarrow{\pi} M/x_1 \cdot M = M_1 \to 0$, wobei μ_{x_1} die Multiplikation mit x_1 bedeutet und π die kanonische Restklassenabbildung ist. Da x_1 kein Nullteiler für M ist, ist diese Folge exakt. Die zugehörige lange exakte Folge der rechtsabgeleiteten Funktoren von $\mathrm{Hom}_R(L, \bullet)$ nach Satz 1.6.30.:
$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^{r-1}(L,\pi)} \mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M_1) \xrightarrow{\partial^r} \mathrm{Ext}_R^r(L, M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^r(L,\mu_{x_1})} \mathrm{Ext}_R^r(L, M) \to \cdots$
liefert die exakte Folge:

$$(*) \quad \mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^{r-1}(L,\pi)} \mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M_1) \xrightarrow{\partial^r} \mathrm{Ext}_R^r(L, M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^r(L,\mu_{x_1})} \mathrm{Im}\,\mathrm{Ext}^r(L, \mu_{x_1}) \to 0$$

$\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ ist eine M-Folge von $r-1$ Elementen.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt also
$\mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(L, M_{r-1})$. Nun ist x_r kein Nullteiler für M_{r-1}, weil $\{x_1, \ldots, x_r\}$ eine M-Folge ist, aber $x_r \in \mathrm{Ann}_R(L)$. Also ist $\mathrm{Hom}_R(L, M_{r-1}) = 0$; denn:
Für jede R-lineare Abbildung $\varphi : L \to M_{r-1}$ ist dann $x_r \cdot \varphi(\bullet) = \varphi(x_r \cdot \bullet) = 0$ und, weil x_r ein Nichtnullteiler für M_{r-1} ist, auch $\varphi(\bullet) = 0$. Man erhält so
$\mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M) = \mathrm{Hom}_R(L, M_{r-1}) = 0$
Ferner ist nach Satz 1.6.35. die Abbildung $\mathrm{Ext}^r(L, \mu_{x_1})$ die Multiplikation mit x_1. Da x_1 in $\mathrm{Ann}_R(L)$ liegt, ist nach Folgerung 1.6.36. $\mathrm{Im}\,\mathrm{Ext}^r(L, \mu_{x_1}) = 0$, so daß man aus der exakten Folge $(*)$ schließlich die exakte Folge erhält:
$0 \to \mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M_1) \xrightarrow{\partial^r} \mathrm{Ext}_R^r(L, M) \to 0$.
Es folgt $\mathrm{Ext}_R^{r-1}(L, M_1) \simeq \mathrm{Ext}_R^r(L, M)$ q.e.d. $\square$

2.2.3. Satz. *Sei $M \neq 0$.*

(1) *Jede M-Folge läßt sich zu einer maximalen M-Folge verlängern. (Dabei verstehen wir unter einer maximalen M-Folge eine solche, die in keiner anderen echt enthalten ist.)*
(2) *Alle maximalen M-Folgen haben dieselbe Länge p. Es gilt:*
$0 \leq p = \min\{i \mid \mathrm{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\} < \infty$.

Beweis. Vorbemerkung: Da nach Voraussetzung $M \neq 0$ ist, ist nach Krull-Nakayama $\mathfrak{J} \cdot M \neq M$ und daher auch $M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M \neq 0$ für jede M-Folge $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Da nach Definition einer M-Folge x_i ein Nichtnullteiler für $M/(x_1, \ldots, x_{i-1}) \cdot M$ ist, ist insbesondere $x_i \notin (x_1, \ldots, x_{i-1})$. Daher ist $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ eine streng monoton wachsende Idealkette.

(1): Sei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ eine vorgegebene M-Folge. Falls diese noch nicht maximal ist, läßt sie sich zu einer M-Folge $\{x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}\}$ verlängern usw. Nach der Vorbemerkung erhält man dann eine streng monoton wachsende Idealkette
$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, x_2, \ldots, x_r) \subset (x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) \subset \cdots$. Da R noethersch ist, bricht diese bei einer dann notwendigerweise maximalen M-Folge ab. q.e.d.

(2): Im Folgenden setzen wir $M_i := M/(x_1, \ldots, x_i) \cdot M$ für alle i.
Sei $\{x_1, \ldots, x_p\}$ eine maximale M-Folge. Dann ist jedes $x \in \mathfrak{J}$ ein Nullteiler für M_p,

weil man die Folge sonst verlängern könnte.
Wir zeigen zunächst
Behauptung: Sei N ein beliebiger noetherscher R-Modul. Dann gilt
$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{J}, N) \neq 0 \iff$ Jedes $x \in \mathfrak{J}$ ist Nullteiler für N.
Beweis: $\underline{\Leftarrow}$: Wenn jedes Element von $\mathfrak{J}$ Nullteiler für N ist, liegt $\mathfrak{J}$ in der Vereinigung der assoziierten Primideale von N. Dies sind nur endlich viele, weil N noethersch ist. Also liegt $\mathfrak{J}$ in einem dieser assoziierten Primideale $\mathfrak{p}$. Da N noethersch ist, gibt es ein $y \in N$ mit $0 \neq R/\mathfrak{p} \simeq R \cdot y \subseteq N$. Sei f die Zusammensetzung der Abbildungen $R/\mathfrak{J} \xrightarrow{g} R/\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} R \cdot y \hookrightarrow N$, wobei g die kanonische Abbildung bezeichnet. Dann ist $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{J}, N)$.

$\underline{\Rightarrow}$: Falls es ein $x \in \mathfrak{J}$ gibt, das ein Nichtnullteiler für N ist, ist $\mathrm{Hom}_R(k, N) = 0$ wie beim Beweis von Satz 2.2.2. q.e.d.
Da, wegen der Maximalität der M-Folge, jedes $x \in \mathfrak{J}$ ein Nullteiler für M_p ist, folgt mit Satz 2.2.2. $\mathrm{Ext}^p_R(k, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(k, M_p) \neq 0$.
Ist dagegen $i < p$, so ist $\{x_1, \dots, x_i\}$ eine M-Folge und x_{i+1} ein Nichtnullteiler für M_i. Nach obigem ist dann $\mathrm{Hom}_R(k, M_i) = 0$, also wegen Satz 2.2.2. auch $\mathrm{Ext}^i_R(k, M) = 0$. Insgesamt hat man also $p = \min\{i \mid \mathrm{Ext}^i_R(k, M) \neq 0\}$. □

2.2.4. Definition. $\mathrm{t}_R(M) :=$ Länge einer maximalen M-Folge heißt die „Tiefe" oder „homologische Kodimension"[¶] von M. Falls $M = 0$ ist, setzt man $\mathrm{t}_R(M) = \infty$.

2.2.5. *Anmerkung.* Sei $\{x_1, \dots, x_r\}$ eine M-Folge. Dann ist
$\mathrm{t}_R\big(M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M\big) = \mathrm{t}_R(M) - r$

Beweis. Sei $\{y_1, \dots, y_s\}$ eine maximale M_r-Folge für $M_r := M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M$, also $s = \mathrm{t}_R(M_r)$. Dann ist offenbar $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\}$ eine M-Folge. Wäre diese nicht maximal, so könnte man sie nach Satz 2.2.3. zu einer maximalen M-Folge $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t\}$ verlängern. Dann wäre aber $\{y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t\}$ eine M_r-Folge. Da $\{y_1, \dots, y_s\}$ aber eine maximale M_r-Folge war, können keine z_i auftreten. Also ist $r + s = \mathrm{t}_R(M)$. □

2.2.6. *Anmerkung.* Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Folge von endlich erzeugten R-Moduln. Dann gilt:
$\mathrm{t}_R(M) \geq \min\{\mathrm{t}_R(M'), \mathrm{t}_R(M'')\}$.

Beweis. Sei $r := \min\{\mathrm{t}_R(M'), \mathrm{t}_R(M'')\}$. Nach Satz 2.2.3. (2) ist dann $\mathrm{Ext}^i_R(k, M') = 0$ und auch $\mathrm{Ext}^i_R(k, M'') = 0$ für alle $i < r$. Aus der langen exakten Ext-Folge erhält man dann $\mathrm{Ext}^i_R(k, M) = 0$ für alle $i < r$. Wiederum nach Satz 2.2.3. (2) ist dann $\mathrm{t}(M) \geq r$. □

2.2.7. *Anmerkung* (vgl. Satz 2.3.5). Seien R und S noethersche semilokale Ringe, $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus mit $\varphi\big(\mathfrak{J}(R)\big) \subseteq \mathfrak{J}(S)$ und M ein S-Modul. Fasse M vermöge φ auch als R-Modul auf. Es gilt:
(1) $\mathrm{t}_R(M) \leq \mathrm{t}_S(M)$
(2) Falls $\varphi\big(\mathfrak{J}(R)\big) = \mathfrak{J}(S)$ ist, gilt $\mathrm{t}_R(M) = \mathrm{t}_S(M)$

Beweis. (1): Sei $\{x_1, \dots, x_r\}$ eine M-Folge aus R und $y_i := \varphi(x_i)$ für $i = 1, \dots, r$. Dann liegen alle y_i in $\mathfrak{J}(S)$ und nach Definition der R-Modulstruktur von M ist die Multiplikation mit y_i auf M dasselbe wie die Multiplikation mit x_i. Daher ist $M/(y_1, \dots, y_i) \cdot M = M/(x_1, \dots, x_i) \cdot M$ für alle i und folglich ist $\{y_1, \dots, y_r\}$ auch

[¶] Die Bezeichnung „homologische Kodimension" rechtfertigt sich aus Satz 2.8.1.

eine M-Folge aus S. Also ist $\mathrm{t}_S(M) \geq \mathrm{t}_R(M)$.

(2): Sei $\{y_1, \ldots, y_s\}$ eine M-Folge aus S. Wegen $\mathfrak{J}(S) = \varphi\big(\mathfrak{J}(R)\big)$ gibt es Urbilder $x_i \in \mathfrak{J}(R)$ mit $\varphi(x_i) = y_i$ für alle $i = 1, \ldots, s$. Wie unter (1) sieht man, daß $\{x_1, \ldots, x_s\}$ eine M-Folge aus R ist und daher gilt $\mathrm{t}_R(M) \geq \mathrm{t}_S(M)$. Zusammen mit (1) folgt die Gleichheit. □

Für das Folgende brauchen wir:

2.2.8. Satz (vgl. Satz 2.7.9.). *Seien S und R beliebige noethersche Ringe, N und M endlich erzeugte R-Moduln, $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Ferner sei S vermöge φ flach über R. Dann gilt für alle n:*

$$\mathrm{Ext}^n_S(S \otimes_R N, S \otimes_R M) \underset{S}{\simeq} S \otimes_R \mathrm{Ext}^n_R(N, M).$$

Beweis. Sei

$$(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p) : \qquad \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} P_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} N \to 0$$

eine freie Auflösung von N als R-Modul. Dann ist, weil S über R flach ist, die tensorierte Folge

$$(S \otimes_R \mathcal{P}, \mathrm{id} \otimes \mathrm{d}; \mathrm{id} \otimes p) : \cdots \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_3} S \otimes_R P_2 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_2} S \otimes_R P_1 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_1} S \otimes_R P_0 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes p} S \otimes_R N \to 0$$

ebenfalls exakt, also eine freie Auflösung von $S \otimes_R N$ als S-Modul.
Nach Definition ist dann
$\mathrm{Ext}^n_R(N, M) = \mathrm{H}^n\big(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}, M)\big)$ und
$\mathrm{Ext}^n_S(S \otimes_R N, S \otimes_R M) = \mathrm{H}^n\big(\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R \mathcal{P}, S \otimes_R M)\big)$,
wobei der Komplex $\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R \mathcal{P}, S \otimes_R M)$ von der Form ist:

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R P_n, S \otimes_R M\big) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_n, S \otimes M)} \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R P_{n-1}, S \otimes_R M\big) \longleftarrow \cdots$$

Weil R noethersch, N, M endlich erzeugt und S flach über R ist, hat man nach [4, §2, no.10, Prop.11] für alle n eine natürliche S-Isomorphie
$\lambda_n : S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_n, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R P_n, S \otimes_R M\big)$ vermöge
$\big(\lambda_n(y \otimes u)\big)(z \otimes x) = y \cdot z \otimes u(x)$ für alle $y, z \in S$, $x \in P_n$ und $u \in \mathrm{Hom}_R(P_n, M)$.
Betrachte also noch den Komplex
$S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}, M)$:

$$\cdots \xleftarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{d}_2, M)} S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_1, M) \xleftarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{d}_1, M)} S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_0, M) \xleftarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{d}_0, M)} 0$$

Dann ist
$\lambda := (\lambda_n) : S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}, M) \to \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R \mathcal{P}, S \otimes_R M)$
ein Isomorphismus von Komplexen; denn für alle n ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_n, M) & \xleftarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{d}_n, M)} & S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, M) \\
\Big\downarrow \lambda_n & & \Big\downarrow \lambda_{n-1} \\
\mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R P_n, S \otimes_R M\big) & \xleftarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_n, S \otimes M)} & \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R P_{n-1}, S \otimes_R M\big)
\end{array}$$

kommutativ:
Es genügt, die Kommutativität für Elemente der Form $y \otimes u$ mit $y \in S$ und $u \in \mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, M)$ zu zeigen. Dazu muß man nachrechnen, daß die beiden Abbildungen $\big(\lambda_n \circ \big(\mathrm{id} \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{d}_n, M)\big)\big)(y \otimes u)$ und $\big(\big(\mathrm{Hom}(\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_n, S \otimes M)\big) \circ \lambda_{n-1}\big)(y \otimes u)$ jeweils angewandt auf ein Element der Form $z \otimes x \in S \otimes_R P_n$ mit $z \in S$ und $x \in P_n$ dasselbe Element von $S \otimes_R M$ liefern.
Betrachte dazu die beiden definitionsgemäß kommutativen Diagramme:

$$\begin{tikzcd} P_n \arrow[d, "\mathrm{d}_n"'] \arrow[dr, "\big(\mathrm{Hom}(\mathrm{d}_n, M)\big)(u)"] & \\ P_{n-1} \arrow[r, "u"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \otimes_R P_n \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_n"'] \arrow[dr, "\big(\mathrm{Hom}(\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_n, S \otimes M)\big)\big(\lambda_{n-1}(y \otimes u)\big)"] & \\ S \otimes_R P_{n-1} \arrow[r, "\lambda_{n-1}(y \otimes u)"'] & S \otimes_R M \end{tikzcd}$$

Es ist:
$\Big(\big(\lambda_n \circ \big(\mathrm{id} \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{d}_n, M)\big)\big)(y \otimes u)\Big)(z \otimes x) = \big(\lambda_n\big(y \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{d}_n, M)(u)\big)(z \otimes x) =$
$\big(\lambda_n\big(y \otimes (u \circ \mathrm{d}_n)\big)\big)(z \otimes x) = y \cdot z \otimes (u \circ \mathrm{d}_n)(x) = y \cdot z \otimes u(\mathrm{d}_n x)$.
Auf der anderen Seite ist auch
$\Big(\Big(\big(\mathrm{Hom}(\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_n, S \otimes M)\big) \circ \lambda_{n-1}\Big)(y \otimes u)\Big)(z \otimes x) = \Big(\big(\lambda_{n-1}(y \otimes u)\big) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_n)\Big)(z \otimes x) =$
$\big(\lambda_{n-1}(y \otimes u)\big)(z \otimes \mathrm{d}_n x) = y \cdot z \otimes u(\mathrm{d}_n x)$ q.e.d.

Da λ ein Isomorphismus von Komplexen ist, sind die entsprechenden Kohomologiegruppen isomorph:
$\mathrm{H}^n\big(S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}, M)\big) \simeq \mathrm{H}^n\big(\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R \mathcal{P}, S \otimes_R M)\big) = \mathrm{Ext}^n_S(S \otimes_R N, S \otimes_R M)$.
Da $S \otimes_R \bullet$ ein exakter Funktor ist, also Bild in Bild und Kern in Kern überführt, ist
$\mathrm{H}^n\big(S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}, M)\big) = S \otimes_R \mathrm{H}^n(\mathcal{P}, M) \simeq S \otimes_R \mathrm{Ext}^n_R(N, M)$.
Insgesamt hat man also:
$\mathrm{Ext}^n_S(S \otimes_R N, S \otimes_R M) \simeq S \otimes_R \mathrm{Ext}^n_R(N, M)$. □

2.2.9. Korollar. *Seien $\widehat{R}$ bzw. $\widehat{M}$ die $\mathfrak{J}$-adischen Komplettierungen von R bzw. M. Dann gilt:*
$\mathrm{t}_R(M) = \mathrm{t}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$.

Beweis. Setze in Satz 2.2.8. $N := k$, $S := \widehat{R}$ die $\mathfrak{J}(R)$-adische Komplettierung von R und $\varphi : R \to \widehat{R}$ kanonisch. Dann ist S vermöge φ flach über R und $\mathfrak{J}(S) = \widehat{\mathfrak{J}(R)} = S \otimes_R \mathfrak{J}(R)$, also $\hat{k} := S/\mathfrak{J}(S) = S \otimes_R k$ ([3, Kap.14]. Nach Satz 2.2.8. ist $\mathrm{Ext}^n_{\widehat{R}}(\hat{k}, \widehat{M}) = \mathrm{Ext}^n_{\widehat{R}}(\widehat{R} \otimes_R k, \widehat{R} \otimes_R M) = 0 \Leftrightarrow \widehat{R} \otimes_R \mathrm{Ext}^n_R(k, M) = 0$.
Da R noethersch ist und k und M endlich erzeugt sind, sind alle $\mathrm{Ext}^n_R(k, M)$ endlich erzeugt (Anmerkung 1.6.20). Also ist $\widehat{R} \otimes_R \mathrm{Ext}^n_R(k, M)$ die $\mathfrak{J}$-adische Komplettierung von $\mathrm{Ext}^n_R(k, M)$ und diese ist ein Obermodul von $\mathrm{Ext}^n_R(k, M)$. Also ist $\widehat{R} \otimes_R \mathrm{Ext}^n_R(k, M) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(k, M) = 0$. Benutzt man die Charakterisierung der Tiefe von Satz 2.2.3. (2), so folgt $\mathrm{t}_{\widehat{R}}(\widehat{M}) = \mathrm{t}_R(M)$. □

2.2.10. *Anmerkung.* Sei $\widehat{M}$ die $\mathfrak{J}$-adische Komplettierung von M. Es gilt:
Jede (maximale) M-Folge aus R ist auch eine (maximale) $\widehat{M}$-Folge.

Beweis. Sei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ eine M-Folge aus R, und bezeichne μ_{x_i} die Multiplikation mit x_i. Setzt man wieder $M_i := M/(x_1, \ldots, x_i) \cdot M$, so hat man eine exakte Folge $0 \to M_{i-1} \xrightarrow{\mu_{x_i}} M_{i-1} \longrightarrow M_i \to 0$ für $i = 1, \ldots, r$, wobei die linke Null bedeutet, daß x_i kein Nullteiler für M_{i-1} ist. Da $\widehat{R}$ flach über R ist, erhält man daraus die exakte Folge:
$0 \to \widehat{R} \otimes_R M_{i-1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mu_{x_i}} \widehat{R} \otimes_R M_{i-1} \longrightarrow \widehat{R} \otimes_R M_i \to 0$ für $i = 1, \ldots, r$. Dabei ist $\mathrm{id} \otimes \mu_{x_i}$ die Multiplikation mit x_i in $\widehat{R} \otimes_R M_{i-1} = \big(\widehat{R} \otimes_R M/(x_1, \ldots, x_{i-1}) \cdot M\big) = \widehat{M}/(x_1, \ldots, x_{i-1}) \cdot \widehat{M}$. Also ist x_i auch ein Nichtnullteiler für $\widehat{M}/(x_1, \ldots, x_{i-1}) \cdot \widehat{M}$ für alle i, und folglich ist $\underline{x} := \{x_1, \ldots, x_r\}$ auch eine $\widehat{M}$-Folge.

Ist $\underline{x}$ eine maximale M-Folge, so ist $r = \mathrm{t}_R(M) \overset{2.2.9.}{=} \mathrm{t}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$, und folglich ist $\underline{x}$ auch eine maximale $\widehat{M}$-Folge. □

2.2.11. *Anmerkung.* $\mathrm{t}_R(M) = \min\{t_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m}$ max. Ideal von $R\}$ (d.h. $\mathrm{t}_R(M)$ ist ein lokaler Begriff).

Beweis. R ist semilokal, also ist $\mathfrak{J} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{m}_i$ der Schnitt endlich vieler maximaler Ideale. Sei $\mathfrak{m}$ eines dieser $\mathfrak{m}_i$. Dann ist $R_\mathfrak{m}$ lokal und $\mathfrak{J}(R_\mathfrak{m}) = R_\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{J}(R) = \bigcap_{i=1}^{s} R_\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_i = R_\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}$. Es folgt $k(R_\mathfrak{m}) := R_\mathfrak{m}/(R_\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}) = k(R)_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m} \otimes_R k$.
Ferner ist $R_\mathfrak{m}$ flach über R und $M_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m} \otimes_R M$.
Mit Satz 2.2.8 hat man dann
$\mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{m}}(k(R_\mathfrak{m}), M_\mathfrak{m}) = \mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m} \otimes_R k, R_\mathfrak{m} \otimes_R M) = R_\mathfrak{m} \otimes_R \mathrm{Ext}^n_R(k, M) = \big(\mathrm{Ext}^n_R(k, M)\big)_\mathfrak{m}$.
Sei nun $p := \mathrm{t}_R(M)$. Nach Satz 2.2.3. (2) ist dann $\mathrm{Ext}^n_R(k, M) = 0$ und daher nach der obigen Gleichung auch $\mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{m}}(k(R_\mathfrak{m}), M_\mathfrak{m}) = 0$ für alle $n < p$, aber $\mathrm{Ext}^p_R(k, M) \neq 0$.
Ebenfalls nach Satz 2.2.3. (2) hat man dann $\mathrm{t}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) \geq \mathrm{t}_R(M)$.
Wäre aber für *alle* maximalen Ideale $\mathrm{t}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) > \mathrm{t}_R(M)$, so wäre nach demselben Satz $\big(\mathrm{Ext}^p_R(k, M)\big)_\mathfrak{m} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R und daher auch $\mathrm{Ext}^p_R(k, M) = 0$. Widerspruch! □

2.2.12. Satz. *Jede M-Folge läßt sich zu einem Parametersystem von M verlängern. Insbesondere ist also*

$$0 \leq \mathrm{t}_R(M) \leq \dim_R M\,.$$

Beweis. Sei $\underline{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ eine M-Folge und $M_i := M/(x_1, \ldots, x_i) \cdot M$ für $i = 0, 1, \ldots, r$.
Behauptung: $\dim_R M_i = \dim_R M - i$ für $i = 0, 1, \ldots, r$.
Beweis: Induktion nach i. Für $i = 0$ ist nichts zu zeigen.
Sei nun $i \geq 1$ und $\dim_R M_{i-1} = \dim_R M - (i-1)$ schon gezeigt.
Nach Definition einer M-Folge ist x_i ein Nichtnullteiler für M_{i-1}. Daher ist $x_i \notin \bigcup\limits_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M_{i-1})} \mathfrak{p}$ und daher auch $x_i \notin \bigcup\limits_{\substack{\dim \mathfrak{p}' = \dim_R M_{i-1} \\ \mathfrak{p}' \in \mathrm{Supp}(M_{i-1})}} \mathfrak{p}'$; denn die $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Supp}(M_{i-1})$ mit $\dim \mathfrak{p}' = \dim_R M_{i-1}$ gehören als minimale Primideale von $\mathrm{Supp}(M_{i-1})$ zu $\mathrm{Ass}(M_{i-1})$ (siehe [3, Anm. 16.2.3.] und [2, Cor. 3.6.]). Mit [3, Kor. 16.3.15.] hat man dann:
$\dim_R M_i = \dim_R(M_{i-1}/x_i \cdot M_{i-1}) = \dim_R M_{i-1} - 1 \overset{\text{Ind.-Vor.}}{=} \dim_R M - (i-1) - 1 = \dim_R M - i$. q.e.d.

Nach [3, Anmerkung 16.4.2.] gibt es also ein Parametersystem $\{y_1, \ldots, y_d\}$ für M_r bestehend aus $d := \dim_R M - r$ Elementen. Dann ist $\{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_d\}$ ein Parametersystem für M; denn es ist
$\ell_R\big(M/(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_d) \cdot M\big) = \ell_R\big(M_r/(y_1, \ldots, y_d) \cdot M_r\big) < \infty$, weil $\{y_1, \ldots, y_d\}$ ein Parametersystem für M_r ist, und $r + d = \dim_R M$. □

Die zweite Aussage von Satz 2.2.12. läßt sich verschärfen zu:

2.2.13. Satz. *Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ beliebig. Dann ist*

$$\mathrm{t}_R(M) \leq \dim \mathfrak{p} \quad [= \dim R/\mathfrak{p} \leq \dim_R M]\,.$$

Beweis. Induktion nach $p := \mathrm{t}_R(M)$. Für $p = 0$ ist nichts zu zeigen.
Sei nun $p \geq 1$ und sei die Behauptung schon gezeigt für alle R-Moduln der Tiefe $p-1$. Sei $x \in \mathfrak{J}$ ein Nichtnullteiler für M. (Ein solcher existiert wegen $\mathrm{t}_R(M) \geq 1$.) Dann ist $\mathrm{t}_R(M/x{\cdot}M) = \mathrm{t}_R(M)-1$ nach Anmerkung 2.2.5., und nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathrm{t}_R(M/x \cdot M) \leq \dim \mathfrak{p}'$ für alle Primideale $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(M/x \cdot M)$.
Behauptung: Es gibt ein $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(M/x \cdot M)$ mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}'$
(Dann folgt $\dim \mathfrak{p} \geq \dim \mathfrak{p}' + 1 \geq \mathrm{t}_R(M/x \cdot M) + 1 = \mathrm{t}_R(M)$. q.e.d.)
Beweis: Wir zeigen, daß es in $M/x{\cdot}M$ einen Untermodul $U \neq (0)$ gibt mit $\mathfrak{p}{\cdot}U = (0)$. Ist dann $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(U)$, so gilt, weil nach [2, Rem. 2.5.] die assoziierten Primideale den Annullator umfassen, $\mathfrak{p}' \supseteq \mathrm{Ann}_R(U) \supseteq \mathfrak{p}+R{\cdot}x$. Aber $x \notin \mathfrak{p}$, weil x ein Nichtnullteiler für M und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ ist. Also ist $\mathfrak{p}' \supsetneq \mathfrak{p}$. Außerdem ist $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(M/x \cdot M)$ nach [2, Cor. 2.27.] weil $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(U)$ und $U \subseteq M/x \cdot M$.
Bleibt, ein solches U zu finden:
Da M noethersch und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ ist, gibt es ein $y \in M$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(y)$. ([2, Def. 2.24. und Rem. 2.25.]) Insbesondere ist dann $y \neq 0$.
Sei $\widetilde{U} := \{z \mid z \in M,\ \mathfrak{p} \cdot z \subseteq x \cdot M\} \supseteq \widetilde{U}' := \{z \mid z \in M,\ \mathfrak{p} \cdot z = 0\} \ni y \neq 0$.
Es ist $\widetilde{U} \supsetneq x \cdot M$; denn: Trivialerweise ist zunächst $\widetilde{U} \supseteq x \cdot M$. Wäre $\widetilde{U} = x \cdot M$, so hätte insbesondere jedes $z \in \widetilde{U}'$ eine Darstellung $z = x \cdot z'$ mit $z' \in M$. Wegen $\mathfrak{p} \cdot z = 0$ wäre dann $x \cdot \mathfrak{p} \cdot z' = 0$, also auch $\mathfrak{p} \cdot z' = 0$, weil x ein Nichtnullteiler für M ist. Dann wäre aber $z' \in \widetilde{U}'$, also, da dies für jedes $z \in \widetilde{U}'$ gälte und $x \in \mathfrak{J}$ liegt, sogar $\widetilde{U}' = \mathfrak{J} \cdot \widetilde{U}'$ und somit nach Krull-Nakayama $\widetilde{U}' = (0)$. Widerspruch!
Also ist $(0) \neq U := \widetilde{U}/x \cdot M$ ein Untermodul von $M/x \cdot M$ mit $\mathfrak{p} \cdot U = (0)$. □

2.3. **Cohen-Macaulay-Moduln. (C-M-Moduln).**

Voraussetzungen: *In diesem Abschnitt bezeichnet, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, R einen noetherschen lokalen Ring, $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal und M einen endlich erzeugten R-Modul.*

2.3.1. Definition. M heißt ein „Cohen-Macaulay-Modul“, kurz ein „C-M-Modul“, wenn gilt
$$\dim_R M = \mathrm{t}_R(M)\,.$$
($\dim_R M \geq \mathrm{t}_R(M)$ gilt stets nach Satz 2.2.12.)
R heißt ein C-M-Ring, wenn R als R-Modul ein C-M-Modul ist.

2.3.2. *Beispiele.*

(1) Jeder nulldimensionale Modul über einem lokalen Ring ist offenbar wegen Satz 2.2.12. ein C-M-Modul.
(2) Jeder eindimensionale lokale Integritätsbereich ist ein C-M-Ring; denn $\mathfrak{m}$ enthält einen Nichtnullteiler $\neq 0$, so daß mit Satz 2.2.12. gilt $1 \leq \mathrm{t}_R(M) \leq \dim R = 1$, also Gleichheit.
(3) Jeder ganz abgeschlossene zweidimensionale noethersche lokale Integritätsbereich ist ein C-M-Ring.

Beweis von (3). Sei $0 \neq x_1 \in \mathfrak{m}$. Dann ist $R \cdot x_1 = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$, wobei die $\mathfrak{q}_i$ primär zu Primidealen $\mathfrak{p}_i$ der Höhe 1 sind (siehe etwa [3, Zusammenfassung 1.9.9.]. Also ist $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für alle i und daher auch $\mathfrak{m} \not\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$ =Menge der Nullteiler von $R/R{\cdot}x_1$. Also gibt es ein $x_2 \in \mathfrak{m}$, welches ein Nichtnullteiler für $R/R \cdot x_1$ ist. Damit hat man mit Satz 2.2.12. die Ungleichung $2 \leq \mathrm{t}_R(R) \leq \dim R = 2$ und somit die Gleichheit. □

2.3.3. Satz. *Seien $\widehat{R}$ bzw. $\widehat{M}$ die $\mathfrak{m}$-adischen Komplettierungen von R bzw. M. Dann gilt:*
M ist als R-Modul ein C-M-Modul genau dann, wenn $\widehat{M}$ als $\widehat{R}$-Modul ein C-M-Modul ist.

Beweis. Nach [3, Kor. 16.3.10.] ist $\dim_R M = \dim_{\widehat{R}} \widehat{M}$, und nach Korollar 2.2.9 ist auch $\mathrm{t}_R(M) = \mathrm{t}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$. □

2.3.4. Satz. *Seien $(R, \mathfrak{m}_R)$ und $(S, \mathfrak{m}_S)$ noethersche lokale Ringe, $\varphi : R \longrightarrow S$ ein lokaler Ringhomomorphismus, so daß S ein endlich erzeugter R-Modul ist. Sei ferner M ein endlich erzeugter S-Modul. Fasse M vermöge φ auch als R-Modul auf. Dann gilt:*
M ist als R-Modul ein C-M-Modul genau dann, wenn M als S-Modul ein C-M-Modul ist.

Beweis. Die Aussage des Satzes folgt sofort aus dem allgemeineren Satz 2.3.5. □

2.3.5. Satz (vgl. Anmerkung 2.2.7). *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 2.3.4. gilt:*

(1) $\mathrm{t}_S(M) = \mathrm{t}_R(M)$.
(2) $\dim_S M = \dim_R M$.

Beweis. (1): Daß φ lokal ist, bedeutet $\varphi(\mathfrak{m}_R) \subseteq \mathfrak{m}_S$. Sei $\underline{x} := \{x_1, \ldots, x_p\}$ eine maximale M-Folge für M als R-Modul. Dann ist, nach Definition der R-Modulstruktur von M auch $\varphi(\underline{x})$ eine M-Folge für M als S-Modul.
Behauptung: $\varphi(\underline{x})$ ist eine maximale M-Folge aus S.
Beweis: Weil $\underline{x}$ eine maximale M-Folge aus R ist, ist jedes Element von $\mathfrak{m}_R$ Nullteiler für $M_p := M/(x_1, \ldots, x_p) \cdot M$. Daher ist $\mathfrak{m}_R$ enthalten in der Vereinigung aller assoziierten Primideale von M_p als R-Modul. Da dies nur endlich viele sind, ist also $\mathfrak{m}_R$ gleich einem dieser, also selbst assoziiert zu M_p. Daher gibt es ein $\bar{z} \in M_p$ mit $R \cdot \bar{z} \simeq R/\mathfrak{m}_R$. Betrachte nun den S-Untermodul $S \cdot \bar{z}$ von M_p als S-Modul. Da S ein endlich erzeugter R-Modul ist, ist $S \cdot \bar{z}$ ein endlich erzeugter $R/\mathfrak{m}_R$-Vektorraum, und daher gilt für die Länge $\ell_R(S \cdot \bar{z}) < \infty$, also erst recht $\ell_S(S \cdot \bar{z}) < \infty$. Folglich gibt es ein $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}_S^\nu \cdot \bar{z} = 0$, und daher ist jedes Element von $\mathfrak{m}_S$ Nullteiler für $S \cdot \bar{z}$ und damit auch für M_p. Also ist $\varphi(\bar{x})$ eine maximale M-Folge für M als S-Modul und somit $\mathrm{t}_S(M) = \mathrm{t}_R(M)$.   q.e.d.

(2): Sei $\mathfrak{A} := \mathrm{Ann}_S(M)$ und $\mathfrak{a} := \mathrm{Ann}_R(M)$. Da die R-Modulstruktur von M durch φ definiert ist, ist dann $\mathfrak{a} = \overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{A})$.
Ferner ist nach Definition $\dim_S M = \dim_S S/\mathfrak{A}$ und $\dim_R M = \dim_R R/\mathfrak{a}$.
Betrachte die Zusammensetzung φ' von φ mit dem kanonischen Homomorphismus von S auf $S/\mathfrak{A}$:
$\varphi' : R \to S/\mathfrak{A} =: S'$.
Es ist $\mathrm{Ker}\, \varphi' = \overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{a}$. Also hat man eine Injektion $R' := R/\mathfrak{a} \hookrightarrow S'$. Da nach Voraussetzung S ein endlich erzeugter R-Modul ist, ist auch S' ein endlich erzeugter R'-Modul, also S'/R' eine ganze Ringerweiterung. Aus „Lying-over“ und „Going-up“ folgt dann $\dim S' = \dim R'$. □

2.3.6. Satz (Macaulays Ungemischtheitssatz). *Sei M ein C-M-Modul. Dann gilt:*
Jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ *ist minimal in* $\mathrm{Ass}(M)$ *(also auch in* $\mathrm{Supp}(M)$. [2, Cor. 3.6.]*) und es ist* $\dim \mathfrak{p} = \dim_R M$.

Beweis. Nach Satz 2.2.13. ist $\mathrm{t}_R(M) \leq \dim \mathfrak{p} \leq \dim_R M$ für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Nach Voraussetzung ist aber $\mathrm{t}_R(M) = \dim_R M$, also ist $\dim \mathfrak{p} = \dim_R(M)$. Nach [3, Anm. 16.2.3.] ist aber dann $\mathfrak{p}$ minimal in $\mathrm{Supp}(M)$ also auch in $\mathrm{Ass}(M)$ ([2, Cor. 3.6.]). □

2.3.7. Satz. *Sei M ein C-M-Modul, $x \in \mathfrak{m}$ und $\dim_R\big(M/x \cdot M\big) = \dim_R M - 1$. Dann ist x ein Nichtnullteiler für M und $M/x \cdot M$ ist auch ein C-M-Modul.*

Beweis. Sei $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ und $n := \dim_R M$. Nach Satz 2.3.6. sind die $\mathfrak{p}_i$ die minimalen Primideale von $\mathrm{Ass}(M)$ und daher auch von $\mathrm{Supp}(M)$ und $\dim \mathfrak{p}_i = n$ für alle i. Wäre $x \in \mathfrak{p}_i$ für ein i, so wäre $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M/x \cdot M)$ und daher $\dim\big(M/x \cdot M\big) \geq \dim \mathfrak{p}_i = n$ gegen Voraussetzung. Also ist $x \notin \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$ und folglich ein Nichtnullteiler für M. Die Menge $\{x\}$ ist also eine M-Folge, und daher gilt nach Anmerkung 2.2.5. $\mathrm{t}_R\big(M/x \cdot M\big) = \mathrm{t}_R(M) - 1 \overset{\text{C-M}}{=} \dim_R M - 1 \overset{\text{Vor.}}{=} \dim_R\big(M/x \cdot M\big)$. Also ist auch $M/x \cdot M$ ein C-M-Modul. □

2.3.8. Satz. *M ist ein C-M-Modul $\Longleftrightarrow$ Jedes Parametersystem für M ist eine M-Folge.*

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: Nach [3, Anm. 16.4.2.] existiert jedenfalls ein Parametersystem $\{x_1, \ldots, x_n\}$ für M. Dann ist $n = \dim_R M$. Nach Voraussetzung ist dieses auch eine M-Folge, so daß gilt $\mathrm{t}_R(M) \geq n$. Es gilt aber stets $\mathrm{t}_R(M) \leq \dim_R M$ nach Satz 2.2.12., also gilt die Gleichheit und M ist ein C-M-Modul. q.e.d.

$\underline{\Rightarrow}$: Sei M ein C-M-Modul der Dimension n und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Parametersystem für M.
Behauptung: Für alle $i = 0, 1, \ldots, n$ ist $\{x_1, \ldots, x_i\}$ eine M-Folge und $M_i := M/(x_1, \ldots, x_i) \cdot M$ ein C-M-Modul (der Dimension $n - i$).
Beweis: Induktion nach i: Für $i = 0$ ist nichts zu zeigen.
Sei nun die Behauptung für ein $i \geq 0$ schon gezeigt. Da $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Parametersystem für M ist, gilt mit [3, Satz 16.4.3.]
$\dim_R\big(M_i/x_{i+1} \cdot M_i\big) = \dim_R\big(M/(x_1, \ldots, x_{i+1}) \cdot M\big) = n - (i+1) = (n-i) - 1 = \dim_R M_i - 1$.
Nach Satz 2.3.7. ist dann x_{i+1} ein Nichtnullteiler für M_i und M_{i+1} ist ein C-M-Modul. Insbesondere ist auch $\{x_1, \ldots, x_{i+1}\}$ eine M-Folge. □

Beim Beweis von Satz 2.3.8. ergab sich:

2.3.9. Korollar. *Sei M ein C-M-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R, das von einem aus k Elementen bestehenden Teilsystem eines Parametersystems für M erzeugt wird. Dann ist $M/\mathfrak{a} \cdot M$ ein C-M-Modul der Dimension $\dim_R M - k$.*

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich zusammenfassen in dem folgenden Hauptsatz:

2.3.10. Hauptsatz. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit Restklassenkörper k und M ein endlich erzeugter R-Modul mit $\dim_R M = n$.*
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) *M ist ein Cohen-Macaulay-Modul.*
(2) $\mathrm{Ext}^i_R(k, M) = 0$ *für alle* $i < n$ *und* $\mathrm{Ext}^n_R(k, M) \neq 0$.
(3) *Jede maximale M-Folge ist ein Parametersystem für M.*
(4) *Jedes Parametersystem für M ist eine (maximale) M-Folge.*
(5) *Für jedes Parametersystem $\underline{x}$ von M ist* $\mathrm{H}_1(\underline{x}; M) = 0$.
(6) *Für jedes Parametersystem $\underline{x}$ von M ist* $\mathrm{H}_q(\underline{x}; M) = 0$ *für alle* $q \geq 1$.

Beweis. (1)⇔(2): Nach Satz 2.2.3. und der Definition 2.3.1. ist M genau dann ein C-M-Modul, wenn $n = \min\{i \mid \mathrm{Ext}^i_R(k, M) \neq 0\}$ ist.

(1)⇔(4) gilt nach Satz 2.3.8.

(1)⇒(3): Nach Satz 2.2.12. läßt sich insbesondere jede maximale M-Folge zu einem Parametersystem von M verlängern. Nach Voraussetzung (1) ist aber die Länge einer maximalen M-Folge ($= \mathrm{t}_R(M)$) gleich der Dimension von M, also gleich der Länge eines Parametersystems von M. Also kann man nichts mehr echt verlängern, d.h. die maximale M-Folge ist bereits ein Parametersystem.

(3)⇒(1): Nach (3) ist die Länge einer maximalen M-Folge gleich der Länge eines Parametersystem, also $\mathrm{t}_R(M) = \dim_R(M)$. Das bedeutet aber nach Definition, daß M ein C-M-Modul ist.

(4)⇔(5)⇔(6) gilt nach Satz 2.1.15. □

2.4. **Der Support eines Cohen-Macaulay-Moduls.**

Voraussetzungen: *In diesem Abschnitt bezeichnet, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, R einen noetherschen lokalen Ring, $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal und M einen endlich erzeugten R-Modul.*

2.4.1. Satz. *Sei M ein C-M-Modul, $n := \dim_R M$ und $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{m}$, so daß $\dim_R\big(M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M\big) = n - r$ ist (d.h. $\{x_1, \dots, x_r\}$ ist Teil eines Parametersystems für M nach* [3, Satz 16.4.3. (2)]*). Ferner sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\big(M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M\big)$. Dann gilt:*
$\dim R/\mathfrak{p} = n - r$

Beweis. Nach Korollar 2.3.9. ist $M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M$ ein C-M-Modul der Dimension $n - r$. Schließlich ist dann nach Satz 2.3.6.
$\dim R/\mathfrak{p} = \dim \mathfrak{p} = \dim_R\big(M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M\big) = n - r\,.$ □

Die Aussage von Satz 2.4.1. ist charakteristisch für C-M-Moduln; denn es gilt auch die Umkehrung:

2.4.2. Satz. *Sei $n := \dim_R M$. Für jede Familie $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{m}$ mit $\dim_R\big(M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M\big) = n - r$ (d.h. $\{x_1, \dots, x_r\}$ ist Teil eines Parametersystems für M nach* [3, Satz 16.4.3. (2)]*) und für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\big(M/(x_1, \dots, x_r) \cdot M\big)$ sei $\dim \mathfrak{p} = n - r$.*
Dann ist M ein Cohen-Macaulay-Modul.

Beweis. Induktion nach n. $n = 0$: Gilt nach Beispiel 2.3.2. (1).

Sei nun $n \geq 1$ und sei die Behauptung für alle R-Moduln kleinerer Dimension schon gezeigt. Angewandt auf den Fall $r = 0$ bedeutet die Voraussetzung: Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ ist $\dim \mathfrak{p} = n \geq 1$. Also ist $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{p}$ und daher auch $\mathfrak{m} \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$, weil $\mathrm{Ass}(M)$ nur endlich viele $\mathfrak{p}$ enthält. Daher gibt es ein $x_1 \in \mathfrak{m}$, das Nichtnullteiler für M ist. Dann ist insbesondere $\{x_1\}$ eine M-Folge, also nach Satz 2.2.12. Teil eines Parametersystems für M, so daß man nach [3, 16.4.3. (2)] hat:
$\dim_R M = \dim_R\big(M/x_1 \cdot M\big) + 1.$
Da $\{x_1\}$ eine M-Folge ist, hat man nach Anmerkung 2.2.5. auch
$\mathrm{t}_R(M) = \mathrm{t}_R\big(M/x_1 \cdot M\big) + 1.$
Ferner erfüllt $M_1 := M/x_1 \cdot M$ offenbar die Voraussetzungen des Satzes mit $n - 1$ an Stelle von n. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann M_1 ein C-M-Modul, d.h.

$\mathrm{t}_R(M_1) = \dim_R M_1$. Es folgt nach obigem
$\mathrm{t}_R(M) = \mathrm{t}_R(M_1)+1 = \dim_R M_1+1 = \dim_R M$, d.h. auch M ist ein C-M-Modul. □

2.4.3. Satz. *Sei M ein C-M-Modul, $n := \dim_R M$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.*
Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und ein Teilsystem $\{x_1, \ldots, x_r\}$ eines Parametersystems für M mit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big)$.
Man hat dann
$\dim \mathfrak{p} = n - r$,
$\dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = r$, also $\dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \dim_R M - \dim \mathfrak{p}$, und
$M_\mathfrak{p}$ ist als $R_\mathfrak{p}$-Modul ein C-M-Modul.

Beweis. Sei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ein in $\mathfrak{p}$ enthaltenes Teilsystem eines Parametersystems für M, das maximal bzgl. dieser Eigenschaft ist. Für jedes $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big)$ gilt dann nach Satz 2.4.1., daß $\dim \mathfrak{p}_i = n - r$ ist, weil $\dim_R\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big) = n - r$ ist nach [3, Satz 16.4.3]. Aus $\dim_R\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big) = \dim \mathfrak{p}_i$ folgt aber, daß die $\mathfrak{p}_i$ die minimalen Primideale von $\operatorname{Supp}\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big)$ sind ([3, Anm. 16.2.3]).
Ferner ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$ nach Voraussetzung und $(x_1, \ldots, x_r) \subseteq \mathfrak{p}$, also ist auch $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big)$. Daher enthält $\mathfrak{p}$ eines der $\mathfrak{p}_i$, da dies die minimalen Primideale von $\operatorname{Supp}\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big)$ sind, etwa $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_1$.
Behauptung: $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$.
Beweis: Andernfalls wäre $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}$ und auch $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für alle i, weil andernfalls $\mathfrak{p}_i \supsetneq \mathfrak{p}_1$ und somit nicht minimal in $\operatorname{Supp}\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big)$ wäre. Also wäre auch $\mathfrak{p} \not\subseteq \bigcup_i \mathfrak{p}_i$, weil $\operatorname{Ass}\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big)$ nur aus endlich vielen $\mathfrak{p}_i$ besteht. Daher gäbe es ein $x_{r+1} \in \mathfrak{p}$ mit $x_{r+1} \notin \bigcup_i \mathfrak{p}_i$. Nach [3, Kor. 16.3.15. (2)] wäre dann
$\dim_R\big(M/(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) \cdot M\big) =$
$\dim_R\big((M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M)\big/ x_{r+1} \cdot (M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M)\big) =$
$\dim\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big) - 1 = n - (r + 1)$. Nach [3, Satz 16.4.3.(2)] wäre dann $\{x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}\}$ ein in $\mathfrak{p}$ enthaltenes Teilsystem eines Parametersystems für M im Widerspruch zur Maximalität des Systems $\{x_1, \ldots, x_r\}$.
Also ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. q.e.d.

Damit ist auch $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}\big(M/(x_1, \ldots, x_r) \cdot M\big)$ und $\dim R/\mathfrak{p} = \dim R/\mathfrak{p}_1 = n - r$.

Weil M ein C-M-Modul ist, ist $\{x_1, \ldots, x_r\}$ nach Satz 2.3.8 als Teil eines Parametersystems von M auch eine M-Folge. Wir setzen $M_i := M/(x_1, \ldots, x_i) \cdot M$ für alle $i = 1, \ldots r$ und bezeichnen mit μ_{x_i} die Multiplikation mit x_i. Dann hat man also exakte Folgen
$0 \to M_{i-1} \xrightarrow{\mu_{x_i}} M_{i-1} \longrightarrow M_i \to 0$ für alle i.
Weil das Lokalisieren ein exakter Funktor ist und die Multiplikation mit x_i dabei in die Multiplikation mit $\frac{x_i}{1}$, bezeichnet mit $\mu_{\frac{x_i}{1}}$, übergeht, erhält man daraus exakte Folgen
$0 \to \big(M_{i-1}\big)_\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu_{\frac{x_i}{1}}} \big(M_{i-1}\big)_\mathfrak{p} \longrightarrow \big(M_i\big)_\mathfrak{p} \to 0$ für alle i.
Daraus sieht man, daß $\{\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1}\}$ eine $M_\mathfrak{p}$-Folge (für $M_\mathfrak{p}$ als $R_\mathfrak{p}$-Modul) ist. Also ist $\mathrm{t}_{R_\mathfrak{p}}\big(M_\mathfrak{p}\big) \geq r$.
Andererseits ist
$\dim_{R_\mathfrak{p}}\big(M_\mathfrak{p}/(\frac{x_1}{1}, \ldots \frac{x_r}{1}) \cdot M_\mathfrak{p}\big) = \dim_{R_\mathfrak{p}}\big(M_r\big)_\mathfrak{p} = \dim R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p} = 0$, weil $\mathfrak{p}$ minimal in $\operatorname{Supp}(M_r)$ ist, also $\operatorname{Supp}\big((M_r)_\mathfrak{p}\big) = \{\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}\}$ ist. Daher ist $\dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \leq r$

Insgesamt hat man also $r \leq \mathrm{t}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \overset{2.2.12}{\leq} \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \leq r$, und daher
$\mathrm{t}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = r$, d.h.
$M_\mathfrak{p}$ ist als $R_\mathfrak{p}$-Modul ein C-M-Modul der Dimension r. □

2.4.4. Korollar. *Seien M ein C-M-Modul und $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Supp}(M)$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$. Dann gilt:*
Alle maximalen (d.h. unverfeinerbaren) Primidealketten zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ haben dieselbe Länge, nämlich $\dim R/\mathfrak{p} - \dim R/\mathfrak{p}'$.

Beweis. Es genügt offenbar zu zeigen:
Behauptung: Ist $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ nicht mehr verfeinerbar, dann ist $\dim R/\mathfrak{p} - \dim R/\mathfrak{p}' = 1$.
Beweis: $M_{\mathfrak{p}'}$ ist als $R_{\mathfrak{p}'}$-Modul ein C-M-Modul nach Satz 2.4.3. Wende diesen Satz an auf $M_{\mathfrak{p}'}$ und das Primideal $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}'} \in \operatorname{Supp}(M_{\mathfrak{p}'})$:
Es ist $M_\mathfrak{p} = (M_{\mathfrak{p}'})_{\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}'}}$, also $\dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \dim_{R_{\mathfrak{p}'}} M_{\mathfrak{p}'} - \underbrace{\dim_{R_{\mathfrak{p}'}}(R_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}'})}_{\substack{=1 \\ \text{weil } \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \text{max. Kette}}}$.

Also $\dim_{R_{\mathfrak{p}'}} M_{\mathfrak{p}'} - \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = 1$.
Wende nun den Satz 2.4.3. an auf M und $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}'$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dim_R M - \dim R/\mathfrak{p}' & = & \dim_{R_{\mathfrak{p}'}} M_{\mathfrak{p}'} \\ \dim_R M - \dim R/\mathfrak{p} & = & \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\dim R/\mathfrak{p} - \dim R/\mathfrak{p}' = \dim_{R_{\mathfrak{p}'}} M_{\mathfrak{p}'} - \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$. □

2.4.5. Korollar. *Sei $R = R'/\mathfrak{a}$ Faktorring eines C-M-Rings R', und seien $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ zwei Primideale von R. Dann gilt:*
Alle maximalen (d.h. unverfeinerbaren) Primidealketten zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ haben dieselbe Länge, nämlich $\dim R/\mathfrak{p} - \dim R/\mathfrak{p}'$,

Beweis. Sei $\varphi : R' \to R$ kanonisch, $\mathfrak{P} := \overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{P}' := \overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{p}')$.
Die Primidealketten in R zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ entsprechen unter φ eineindeutig den Primidealketten in R' zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$. Ferner ist $R'/\mathfrak{P}' \xrightarrow[\sim]{\varphi} R/\mathfrak{p}'$ und $R/\mathfrak{P} \xrightarrow[\sim]{\varphi} R/\mathfrak{p}$.
Aus Korollar 2.4.4. folgt dann die Behauptung. □

2.4.6. Satz. *Sei R ein lokaler Integritätsbereich, der Faktorring eines Cohen-Macaulay-Rings ist und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Dann gilt:*

$$\dim R = \dim R_\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p}$$

Beweis. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R. Verfeinere die Primidealkette $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ zu einer maximalen (d.h. nicht weiter verfeinerbaren) Kette:
$(0) = \mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_{r+1} \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_{r+s} = \mathfrak{m}$.
(Dann sind trivialerweise auch die Teile der Kette zwischen (0) und $\mathfrak{p}$ und zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ nicht mehr verfeinerbar.)
Nach Korollar 2.4.5. ist dann
$r + s = \dim R/(0) - \underbrace{\dim R/\mathfrak{m}}_{=0} = \dim R$ und $s = \dim R/\mathfrak{p} - \dim R/\mathfrak{m} = \dim R/\mathfrak{p}$.
Ferner ist, weil ebenfalls nach Korollar 2.4.5. alle maximalen Primidealketten zwischen (0) und $\mathfrak{p}$ dieselbe Länge haben und die Kette $(0) = \mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$ nicht mehr verfeinerbar ist, $r = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim R_\mathfrak{p}$. □

Die lokalen Ringe, die in der algebraischen und analytischen Geometrie auftreten, sind stets Faktorringe von Cohen-Macaulay-Ringen (sogar von regulären Ringen

s. Korollar 3.1.9.). Daher sind dort die Aussagen der Korollare 2.4.5. und 2.4.6. gültig.

2.5. **Homologische Dimension eines Moduls.**

2.5.1. Definition. Sei M ein R-Modul.
Dann heißt
$\operatorname{pdim}_R(M) := \inf\{n \mid$ es gibt eine projektive Auflösung von M der Länge $n\} \leq \infty$
„projektive" oder „homologische" Dimension von M.

Analog heißt
$\operatorname{idim}_R(M) := \inf\{n \mid$ es gibt eine injektive Auflösung von M der Länge $n\} \leq \infty$
„injektive" Dimension von M.
Für den Nullmodul setzt man $\operatorname{pdim}_R((0)) := -1$ und auch $\operatorname{idim}_R((0)) := -1$.

2.5.2. *Anmerkung.* $\operatorname{pdim}_R(M) \leq 0 \Longleftrightarrow M$ ist ein projektiver R-Modul.
$\operatorname{idim}_R(M) \leq 0 \Longleftrightarrow M$ ist ein injektiver R-Modul.

Beweis. $\operatorname{pdim}_R(M) \leq 0 \Leftrightarrow$ Es existiert eine exakte Folge $0 \to P_0 \to M \to 0$ mit einem projektiven R-Modul P_0. Es folgt: $M \simeq P_0$ ist projektiv. Analog für $\operatorname{idim}_R(M) = 0$. □

2.5.3. Satz (vgl. Satz 2.7.1.). *Es sind äquivalent:*

(1) $\operatorname{pdim}_R(M) \leq n$.
(2) *Für* alle *R-Moduln N ist* $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$.
(3) $\operatorname{Ext}_R^n(M, \bullet)$ *ist ein rechtsexakter Funktor.*
(4) *Sei*
$0 \to X \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$
eine exakte Folge, bei der alle P_i projektiv sind, dann ist auch X projektiv.

Beweis. (1)⇒(2): Wegen $\operatorname{pdim}_R(M) \leq n$ existiert eine projektive Auflösung
$0 \xrightarrow{\mathrm{d}_{n+1}} P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ von M. Nach Definition ist dann
$\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N) = \mathrm{H}^{n+1}\big(\operatorname{Hom}_R(\mathcal{P}, N)\big) = \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}(\mathrm{d}_{n+1}, N)/\operatorname{Im}\operatorname{Hom}(\mathrm{d}_{n+2}, N) = 0$, weil $P_{n+1} = 0$ ist. q.e.d.

(2)⇒(3): Sei $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ exakt.
Die lange exakte kovariante Ext-Folge (Satz 1.6.30) liefert dann die exakte Folge:
$\operatorname{Ext}_R^n(M, N') \to \operatorname{Ext}_R^n(M, N) \to \operatorname{Ext}_R^n(M, N'') \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N') = 0.$ q.e.d.

(4)⇒(1): Konstruiere nach dem Verfahren von Satz 1.4.10. den Anfang einer projektiven Auflösung von M:
$0 \to \operatorname{Ker}\mathrm{d}_{n-1} \to P_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} P_{n-2} \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$ exakt,
wobei alle P_i projektiv sind. Nach Voraussetzung (4) ist dann auch $\operatorname{Ker}\mathrm{d}_{n-1}$ projektiv, so daß man mit $P_n := \operatorname{Ker}\mathrm{d}_{n-1}$ eine projektive Auflösung der Länge n von M erhält. Daher ist nach Definition $\operatorname{pdim}_R(M) \leq n$. q.e.d.

Bleibt noch (3)⇒(4) zu zeigen. Dazu benötigen wir zunächst einen Hilfssatz:

2.5.4. Hilfssatz. *Sei* $\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_2} P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$ *eine beliebige projektive Auflösung von M und $f : N \to N''$ ein R-Modul-Homomorphismus. Dann hat man für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_R(P_{n-1},N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_R(M,N) & \longrightarrow 0 & \textit{ex.} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{id},f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{id},f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}^n(\mathrm{id},f)} & & \\
\mathrm{Hom}_R(P_{n-1},N'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n,N'') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_R(M,N'') & \longrightarrow 0 & \textit{ex.}
\end{array}$$

Dabei setzen wir in diesem Zusammenhang formal $\mathrm{d}_0 := p$.

Beweis. Wende auf die nach Voraussetzung exakte Folge
$0 \to \mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} \mathrm{Im}\,\mathrm{d}_{n-1} \to 0$
zum einen den Funktor $\mathrm{Hom}_R(\bullet, N)$ und zum andern den Funktor $\mathrm{Hom}_R(\bullet, N'')$ an. Da P_{n-1} projektiv ist, ist $\mathrm{Ext}^i_R(P_{n-1},\bullet) = 0$ für alle $i \geq 1$. Man erhält daher aus der langen exakten kontravarianten Ext-Folge (Satz 1.6.18) kommutative Diagramme mit exakten Zeilen:

$$(*)\quad \begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_R(P_{n-1},N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n,N) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_{n-1},N) & \longrightarrow 0 & \text{ex.} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{id},f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{id},f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}^1(\mathrm{id},f)} & & \\
\mathrm{Hom}_R(P_{n-1},N'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n,N'') & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_{n-1},N'') & \longrightarrow 0 & \text{ex.}
\end{array}$$

und

$$(**)\quad \begin{array}{cccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n,N) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^{i+1}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_{n-1},N) & \longrightarrow 0 & \text{ex.} \\
& \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}^i(\mathrm{id},f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}^{i+1}(\mathrm{id},f)} & & \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n,N'') & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^{i+1}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_{n-1},N'') & \longrightarrow 0 & \text{ex.}
\end{array}$$

für alle $i = 1, 2, \ldots$ und alle $n = 1, 2, \ldots$.
In $(**)$ ist also ∂ ein Isomorphismus. Sukzessiv erhält man dann
$\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_{n-1},N) \simeq \mathrm{Ext}^{1+k}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_{n-1-k},N)$ und ebenso für N'' statt N für alle $k \leq n-1$, wobei diese Isomorphismen, da sie durch die verschiedenen Verbindungshomomorphismen induziert werden, wieder kommutative Diagramme ergeben. Wenn man $k := n-1$ setzt, erhält man das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$(***)\quad \begin{array}{cccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_{n-1},N) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_0,N) & \longrightarrow 0 & \text{ex.} \\
& \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}^1(\mathrm{id},f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}^n(\mathrm{id},f)} & & \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_{n-1},N'') & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_0,N'') & \longrightarrow 0 & \text{ex.}
\end{array}$$

Beachtet man nun noch, daß $\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_0 = p(P_0) = M$ ist und setzt man das Diagramm $(***)$ in $(*)$ ein, so folgt die Behauptung. □

Nun können wir das fehlende Stück (3)⇒(4) im Beweis von Satz 2.5.3. zeigen:
Stelle X dar als Faktormodul eines projektiven R-Moduls P_n und ergänze damit die gegebene exakte Folge:
$P_n \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{i} P_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} P_{n-2} \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0.$
Setze $\mathrm{d}_n := i \circ \pi$. Weil i nach Voraussetzung injektiv und π surjektiv ist, ist $\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n = \mathrm{Im}\,i \simeq X$ und man hat eine exakte Folge:
$P_n \xrightarrow{\mathrm{d}_n} P_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} P_{n-2} \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0,$
die man als Teil einer projektiven Auflösung von M ansehen kann.
Behauptung: Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n, \bullet)$ ist rechtsexakt.
(Daraus folgt dann nach Beispiel 1.5.4. (3), daß $\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n$ und somit auch X projektiv ist. q.e.d.)

Beweis: Sei $0 \to N' \longrightarrow N \xrightarrow{f} N'' \to 0$ eine exakte Folge von R-Moduln. Da $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n, \bullet)$ linksexakt ist, braucht man nur zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n, f)$ surjektiv ist.
Nach Hilfssatz 2.5.4. hat man dann ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, N) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},f)"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n, N) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},f)"] & \mathrm{Ext}^n_R(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^n(\mathrm{id},f)"] & 0 & \text{ex.} \\
\mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, N'') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n, N'') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_R(M,N'') \arrow[r] & 0 & \text{ex.}
\end{tikzcd}$$

Dabei ist in der ersten Spalte $\mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, f)$ surjektiv, weil f surjektiv und P_{n-1} projektiv, also $\mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, \bullet)$ rechtsexakt ist (Beispiel 1.5.4. (3)).
Außerdem ist in der letzten Spalte $\mathrm{Ext}^n_R(M, f)$ surjektiv, weil f surjektiv und $\mathrm{Ext}_R(M, \bullet)$ nach Voraussetzung (2.5.3). (3) rechtsexakt ist.
Dann ist aber nach Hilfssatz 2.5.5. auch die Abbildung in der mittleren Spalte, also $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n, f)$ surjektiv, d.h. $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_n, \bullet)$ ist exakt. □

2.5.5. Hilfssatz. *Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von R-Moduln, bei dem die untere Zeile exakt ist und die Abbildungen α, γ und π surjektiv sind:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
A'' \arrow[r, "\lambda''"] \arrow[d] & B'' \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d] & C'' \arrow[d] & \textit{ex.} \\
0 & 0 & 0 & \\
\textit{ex.} & & \textit{ex.} &
\end{tikzcd}$$

Dann ist auch β surjektiv.

Beweis. Sei $y'' \in B''$ gegeben. Da π und γ surjektiv sind, gibt es ein $y \in B$ mit $\pi''(y'') = \gamma \circ \pi(y)$. Dann ist $\pi''(\beta(y)) = \gamma \circ \pi(y) = \pi''(y'')$, also $y'' - \beta(y) \in \mathrm{Ker}\,\pi'' = \mathrm{Im}\,\lambda''$. Da α surjetiv ist, gibt es dann ein $x \in A$ mit $\lambda'' \circ \alpha(x) = y'' - \beta(y)$. Wegen der Kommutativität der ersten Masche ist dann $\beta(\lambda(x)) = \lambda'' \circ \alpha(x) = y'' - \beta(y)$. Also ist $y'' = \beta\big(\lambda(x) + y\big) \in \mathrm{Im}\,\beta$. □

2.5.6. Satz (vgl. Satz 2.7.2.). *Sei M ein R-Modul. Es sind äquivalent:*

(1) $\mathrm{idim}_R(M) \leq n$.
(2) $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(N, M) = 0$ *für alle R-Moduln N.*
(3) $\mathrm{Ext}^n_R(\bullet, M)$ *ist ein rechtsexakter Funktor.*
(4) *Sei*
$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^{n-1} \to Y \to 0$
eine exakte Folge, bei der alle E^i injektiv sind. Dann ist auch Y injektiv.

Der Beweis von Satz 2.5.6. ist dual zum Beweis von Satz 2.5.3. und sei dem Leser überlassen.

2.5.7. *Anmerkung.* Aus Satz 2.5.3. und Satz 2.5.6. ergibt sich die folgende Charakterisierung:

(1) $\mathrm{pdim}_R(M) = \inf\{n \mid \mathrm{Ext}^p_R(M,N) = 0 \text{ für alle } N \text{ und alle } p > n\}$ $\quad (\geq -1)$
$\qquad = \sup\{n \mid \text{ ex. } N \text{ mit } \mathrm{Ext}^n_R(M,N) \neq 0\}$ $\quad$ falls $M \neq 0$.

(2) $\operatorname{idim}_R(M) = \inf\{n \mid \operatorname{Ext}^p_R(N,M) = 0$ für alle N und alle $p > n\}$ $\quad (\geq -1)$
$\quad = \sup\{n \mid$ ex. N mit $\operatorname{Ext}^n_R(N,M) \neq 0\}$ $\quad$ falls $M \neq 0$.

2.5.8. Eigenschaften. Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt.

(1) $\operatorname{pdim}_R(M) \leq \max\{\operatorname{pdim}_R(M'), \operatorname{pdim}_R(M'')\}$, und, falls „$<$“ gilt, ist $\operatorname{pdim}_R(M'') = \operatorname{pdim}_R(M') + 1$.
(2) $\operatorname{pdim}_R(M') \leq \max\{\operatorname{pdim}_R(M), \operatorname{pdim}_R(M'') - 1\}$, und, falls „$<$“ gilt, ist $\operatorname{pdim}_R(M) = \operatorname{pdim}_R(M'')$.
(3) $\operatorname{pdim}_R(M'') \leq \max\{\operatorname{pdim}_R(M), \operatorname{pdim}_R(M') + 1\}$, und, falls „$<$“ gilt, ist $\operatorname{pdim}_R(M) = \operatorname{pdim}_R(M')$.
(4) Sei $(0) = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ eine Kette von Untermoduln von M, so ist $\operatorname{pdim}_R(M) \leq \max\{\operatorname{pdim}_R(M_i/M_{i-1}) \mid i = 1, \ldots, n\}$.
(5) Analoge Regeln gelten für idim.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Ungleichungen mit „$\leq$“:
Betrachte für alle R-Moduln N die zu der exakten Folge $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ gehörige lange kontravariante exakte Ext-Folge:
$\cdots \to \operatorname{Ext}^n_R(M'',N) \to \operatorname{Ext}^n_R(M,N) \to \operatorname{Ext}^n_R(M',N) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}^{n+1}_R(M'',N) \to \operatorname{Ext}^{n+1}_R(M,N) \to \operatorname{Ext}^{n+1}_R(M',N) \to \cdots$
(1): Sei $n > \max\{\operatorname{pdim}_R(M'), \operatorname{pdim}_R(M'')\}$. Nach Anmerkung 2.5.7. (1) ist dann $\operatorname{Ext}^n_R(M',N) = 0$ und auch $\operatorname{Ext}^n_R(M'',N) = 0$ für alle N. Aus der langen Ext-Folge ergibt sich dann $\operatorname{Ext}^n_R(M,N) = 0$ für alle N, also ist $n > \operatorname{pdim}_R(M)$ und daher $\operatorname{pdim}_R(M) \leq \max\{\operatorname{pdim}_R(M'), \operatorname{pdim}_R(M'')\}$.
(2): Sei $n > \max\{\operatorname{pdim}_R(M), \operatorname{pdim}_R(M'') - 1\}$. Nach Anmerkung 2.5.7. (1) ist dann $\operatorname{Ext}^n_R(M,N) = 0$ und auch $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(M'',N) = 0$ für alle N. Aus der langen Ext-Folge ergibt sich dann $\operatorname{Ext}^n_R(M',N) = 0$ für alle N, also ist $n > \operatorname{pdim}_R(M')$ und daher $\operatorname{pdim}_R(M) \leq \max\{\operatorname{pdim}_R(M'), \operatorname{pdim}_R(M'') - 1\}$.
(3): Die Ungleichung zeigt man analog.
Nun zu den Aussagen für die Fälle „$<$“:
Setze $m := \operatorname{pdim}_R(M)$, $m' := \operatorname{pdim}_R(M')$, $m'' := \operatorname{pdim}_R(M'')$.
Sei $m < \max\{m', m''\}$. Dann ist $\max\{m', m''\} = m''$; denn andernfalls $m'' < m'$ und $m < m'$. Nach (2) ist aber $m' \leq \max\{m, m'' - 1\}$. Weil nach Annahme $m < m'$ ist, folgte daraus $m' \leq m'' - 1 < m''$ im Widerspruch zu der obigen Annahme $m' > m''$. Also ist $m' \leq m''$ und $m < m''$. Daher ist $\max\{m, m'' - 1\} = m'' - 1$ und daher nach (2) dann $m' \leq m'' - 1$, also $m'' \geq m' + 1$.
Mit (3) ist aber auch $m'' \leq \max\{m, m' + 1\} = m' + 1$, da $m < m''$, also $m'' \leq m' + 1$
Insgesamt ist also $m'' = m' + 1$.
Damit ist die Aussage für „$<$“ in (1) gezeigt. q.e.d.
Für (2) und (3) geht es analog.

(4) folgt durch Induktion aus (1).

(5) Formuliert und beweist man analog. □

Zur Bestimmung der injektiven Dimension eines Moduls braucht man nur alle *endlich erzeugten* R-Moduln N zu betrachten:

2.5.9. Satz (Auslander). *Sei $M \neq (0)$ ein R-Modul. Dann gilt:*
$\operatorname{idim}_R(M) = \sup\{n \mid$ *ex. ein endlich erzeugter R-Modul N mit* $\operatorname{Ext}^n_R(N,M) \neq 0\}$
Statt aller endlich erzeugten R-Moduln kann man sich auf zyklische (d.h. monogene) R-Moduln beschränken!

Beweis. Bezeichne für die Dauer dieses Beweises für einen beliebigen R-Modul L mit
$\delta(L) := \sup\{n \mid$ ex. ein endlich erzeugter (bzw. zyklischer) R-Modul N mit $\operatorname{Ext}^n_R(N, L) \neq 0\}$.
Nach Anmerkung 2.5.7. (2) ist trivialerweise $\delta(M) \leq \operatorname{idim}_R(M)$.
Falls $\delta(M) = \infty$ ist, ist offensichtlich auch $\operatorname{idim}_R(M) = \infty$, also gilt die Gleichheit. Sei also im Folgenden $\delta(M) < \infty$. Wir zeigen die Behauptung dann durch Induktion nach $\delta(M)$.
Induktionsbeginn bei $\delta(M) = 0$:
Wir zeigen mit dem Kriterium von Baer (Satz 1.3.10), daß in diesem Fall M injektiv ist. Sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von R, und $0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{i} R \to R/\mathfrak{a} \to 0$ kanonisch. Dann ist $\operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, M) = 0$, weil $R/\mathfrak{a}$ ein zyklischer R-Modul ist. Also ergibt die lange exakte Ext-Folge eine exakte Folge:
$\operatorname{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(i,M)} \operatorname{Hom}_R(\mathfrak{a}, M) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, M) = 0\,.$
Sei nun $f : \mathfrak{a} \to M$ eine beliebige R-lineare Abbildung, so gibt es also ein
$\tilde{f} \in \operatorname{Hom}_R(R, M)$ mit $f = \operatorname{Hom}(i, M)(\tilde{f})$, d.h. $f = \tilde{f} \circ i$. Nach Satz 1.3.10. bedeutet das, daß M injektiv, also $\operatorname{idim}_R(M) = 0$ ist.

Sei nun die Behauptung schon gezeigt für alle R-Moduln L mit $\delta(L) < n$, und sei $\delta(M) = n$. Nach Satz 1.3.12. läßt sich M in einen injektiven R-Modul einbetten, d.h. es gibt einen injektiven R-Modul E und eine exakte Folge $0 \to M \to E \to E/M \to 0$.
Aus der langen exakten kovarianten Ext-Folge erhält man dann die exakte Folge:
$0 = \operatorname{Ext}^p_R(N, E) \to \operatorname{Ext}^p_R(N, E/M) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}^{p+1}_R(N, M) \to \operatorname{Ext}^{p+1}_R(N, E) = 0$
für alle $p \geq 1$, wobei die Null auf beiden Seiten steht, weil E injektiv ist. Es folgt:
$\operatorname{Ext}^p_R(N, E/M) \simeq \operatorname{Ext}^{p+1}_R(N, M)$ für alle N und alle $p \geq 1$.
Indem man N alle R-Moduln durchlaufen läßt, erhält man nach Anmerkung 2.5.7. (2)
$\operatorname{idim}_R(M) = \operatorname{idim}_R(E/M) + 1$.
Indem man N alle endlich erzeugten (bzw. alle zyklischen) R-Moduln durchlaufen läßt, erhält man nach Definition von δ:
$\delta(M) = \delta(E/M) + 1$.
Es ist also $\delta(E/M) < \delta(M)$, also gilt nach Induktionvoraussetzung $\operatorname{idim}_R(E/M) = \delta(E/M)$ und daher auch
$\operatorname{idim}_R(M) = \operatorname{idim}_R(E/M) + 1 = \delta(E/M) + 1 = \delta(M)$. □

2.6. Globale homologische Dimension eines Ringes.

2.6.1. Definition. Sei R ein Ring. Man definiert die „globale homologische Dimension" von R durch:
$\operatorname{gldh}(R) := \sup\{n \mid$ es existieren R-Moduln M, N mit $\operatorname{Ext}^n_R(M, N) \neq 0\} \leq \infty$

2.6.2. Satz. *Folgende Zahlen stimmen überein:*
1. $\operatorname{gldh}(R)$,
2. $\sup\{\operatorname{idim}_R(M) \mid M$ *R-Modul* $\}$,
3. $\sup\{\operatorname{pdim}_R(M) \mid M$ *R-Modul* $\}$,
4. $\sup\{\operatorname{pdim}_R(M) \mid M$ *endlich erzeugter R-Modul* $\}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Übereinstimmung der Zahlen aus (1)–(3):
Falls $\operatorname{gldh}(R) = \infty$ ist, gibt es zu jeder natürlichen Zahl p zwei R-Moduln M und N mit $\operatorname{Ext}^p_R(M, N) \neq 0$. Nach Anmerkung 2.5.7. ist dann
$\sup\{\operatorname{idim}_R(N) \mid N$ R-Modul $\} = \infty$ und auch
$\sup\{\operatorname{pdim}_R(M) \mid M$ R-Modul $\} = \infty$ q.e.d.
Sei nun $\operatorname{gldh}(R) = n < \infty$. Dann ist also nach Definition $\operatorname{Ext}^p_R(A, B) = 0$ für

$p > n$ und alle R-Moduln A und B, aber es existieren R-Moduln M und N mit $\mathrm{Ext}_R^n(M,N) \neq 0$. Nach Anmerkung 2.5.7. ist dann $\mathrm{pdim}_R(M) = n$ und $\mathrm{idim}_R(N) = n$, und, da alle höheren $\mathrm{Ext}_R^p(A,B) = 0$ sind, ist dieses n auch das größtmögliche, d.h. $\sup\{\mathrm{idim}_R(N) \mid N\ R\text{-Modul}\ \} = n = \sup\{\mathrm{pdim}_R(M) \mid \text{ alle } R\text{-Moduln } M\}$.
Die Zahlen aus (1)–(3) sind also gleich. Bleibt zu zeigen, daß auch (4) mit (1) übereinstimmt:
Sei $\delta(M,N) := \sup\{n \mid \mathrm{Ext}_R^n(M,N) \neq 0\}$.
Nach Satz 2.5.9. ist dann $\mathrm{idim}_R(N) = \sup\{\delta(M',N) \mid M' \text{ endl. erz.}\}$.
Mit (1)=(2) folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{gldh}(R) &= \sup\{\mathrm{idim}_R(N) \mid \text{ alle } R\text{-Moduln } N\} \\ &= \sup\{\sup\{\delta(M',N) \mid M' \text{ endl. erz}\} \mid \text{alle } N\} \\ &= \sup\{\sup\{\delta(M',N) \mid \text{alle } N\} \mid M' \text{ endl. erz.}\} \\ &= \sup\{\mathrm{pdim}_R(M') \mid M' \text{ endl. erz.}\}\,. \end{aligned}$$ □

2.6.3. *Beispiel.* Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring. Nach Beispiel 1.3.20. ist für jeden R-Modul M in diesem Falle $\mathrm{pdim}_R(M) \leq 1$, also ist auch $\mathrm{gldh}(R) \leq 1$.
Behauptung: $\mathrm{gldh}(R) = 0 \Longleftrightarrow R$ ist ein Körper.
Beweis: $\underline{\Leftarrow}$: Jeder R-Modul M ist als Vektorraum frei, also ist $\mathrm{pdim}_R(M) = 0$ und daher auch $\mathrm{gldh}(R) = 0$.

$\underline{\Rightarrow}$: Sei $\mathrm{gldh}(R) = 0$ und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R. Dann ist also $\mathrm{pdim}_R(R/\mathfrak{a}) = 0$ und folglich $R/\mathfrak{a}$ projektiv, also frei, weil ein projektiver R-Modul als direkter Summand eines freien R-Moduls frei ist. Da $R/\mathfrak{a}$ außerdem monogen ist, folgt $R/\mathfrak{a} = (0)$ oder $R/\mathfrak{a} = R$, d.h. $\mathfrak{a} = R$ oder $\mathfrak{a} = (0)$ und folglich ist R ein Körper. q.e.d.

2.7. **Homologische Dimension noetherscher Moduln und Ringe.** Wir betrachten hier noch einige Eigenschaften der homologischen Dimensionen, bei denen der Ring R als noethersch vorausgesetzt werden muß.

2.7.1. Satz (vgl. Satz 2.5.3.)**.** *Sei R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Es sind äquivalent:*

(1) $\mathrm{pdim}_R(M) \leq n$.
(2) $\mathrm{Ext}_R^p(M,N) = 0$ *für alle $p > n$ und alle R-Moduln N.*
(3) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N) = 0$ *für jeden endlich erzeugten R-Modul N.*
(4) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,R/\mathfrak{p}) = 0$ *für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R.*

Beweis. (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) gilt trivialerweise.

(4)⇒(3): Nach [7, § 1 no 4 Théorème 1] existiert eine Kette von Untermoduln
$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_r = N$ mit $N_{i+1}/N_i \simeq R/\mathfrak{p}_i$ für $i = 0,\dots,r-1$ mit gewissen Primidealen $\mathfrak{p}_i$ von R. Dann hat man eine exakte Folge
$0 \to N_i \to N_{i+1} \to R/\mathfrak{p}_i \to 0$ und daher auch eine exakte Folge
$(*)\quad \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N_i) \to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N_{i+1}) \to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,R/\mathfrak{p}_i) = 0$ für alle i.
$i = 0$: Es ist $N_0 = 0$, also $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N_0) = 0$ und daher ergibt die exakte Folge $(*)$
$0 \to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N_1) \to 0$, d.h. $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N_1) = 0$.
$i = 1$: Wie eben gezeigt, ist $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N_1) = 0$. Daher ergibt die exakte Folge $(*)$
$0 \to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N_2) \to 0$, d.h. $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N_2) = 0$.
usw. bis $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N) = \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N_r) = 0$. q.e.d.

(3)⇒(1): Stelle M dar als Faktormodul eines endlich erzeugten freien Moduls F:
$0 \to U \to F \xrightarrow{p} M \to 0$ exakt.
Da R noethersch ist, ist auch U endlich erzeugt. Wir zeigen die Behauptung mittels

Induktion nach n.
$n = 0$: Aus der obigen exakten Folge erhält man die exakte Folge
$\mathrm{Hom}_R(M,F) \overset{\mathrm{Hom}(M,p)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M,M) \overset{\partial}{\to} \mathrm{Ext}^1_R(M,U) = 0.$
Insbesondere gibt es dann zu $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_R(M,M)$ ein $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,F)$ mit $\mathrm{id}_M = \big(\mathrm{Hom}(M,p)\big)(\varphi)$, d.h. $p \circ \varphi = \mathrm{id}_M$. Also ist M direkter Summand von F (vgl. Beweis des Zusatzes von Satz 1.3.6. (4)) und somit selbst projektiv (Satz 1.3.6. (2)), also $\mathrm{pdim}_R(M) \leq 0$.
Induktionvoraussetzung: Falls für einen endlich erzeugten R-Modul M' gilt $\mathrm{Ext}^n_R(M',N') = 0$ für alle endlich erzeugten R-Moduln N', so ist $\mathrm{pdim}_R(M') \leq n-1$.
Sei nun $n \geq 1$ und für alle endlich erzeugten R-Moduln N gelte $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,N) = 0$. Dann hat man die exakte Folge:
$0 \overset{(F\text{ frei!})}{=} \mathrm{Ext}^n_R(F,N) \to \mathrm{Ext}^n_R(U,N) \overset{\partial}{\to} \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,N) \overset{(\text{Vor.})}{=} 0$
und daher $\mathrm{Ext}^n_R(U,N) = (0)$ für alle endlich erzeugten N. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\mathrm{pdim}_R(U) \leq n-1$ und daher nach Eigenschaften 2.5.8. (3) dann $\mathrm{pdim}_R(M) \leq (n-1)+1 = n$, weil $\mathrm{pdim}_R(F) = 0$ ist. □

2.7.2. Satz (vgl. Satz 2.5.6.). *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind die Aussagen (1) und (2) zueinander äquivalent. Falls R noethersch ist, ist auch noch die Aussage (3) äquivalent zu den beiden anderen.*

(1) $\mathrm{idim}_R(M) \leq n$
(2) *Für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R ist* $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{a}, M) = 0$
(3) *Für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R ist* $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p}, M) = 0$.

Beweis. (1)⇒(2): Da $\mathrm{idim}\, M \leq n$ ist, besitzt M nach Definition eine injektive Auflösung einer Länge $\leq n$. Berechnet man mit ihrer Hilfe die $\mathrm{Ext}^i_R(N,M)$, so sieht man trivialerweise, das $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(N,M) = 0$ ist für jeden R-Modul M, also auch für $N = R/\mathfrak{a}$.

(2)⇒(1): Wir benutzen das Kriterium für Injektivität aus dem Satz von Baer 1.3.10. Sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von R.
Wir betrachten zunächst den Fall $n = 0$. Aus der zu der exakten Folge $0 \to \mathfrak{a} \to R \to R/\mathfrak{a} \to 0$ gehörigen langen kontravarianten Ext-Folge erhält man wegen $\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, M) = 0$ die exakte Folge $\mathrm{Hom}_R(R,M) \to \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{a},M) \to 0$, d.h. jede R-lineare Abbildung $f : \mathfrak{a} \to M$ läßt sich zu einer R-linearen Abbildung $\tilde{f} : R \to M$ fortsetzen. Da dies für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R gilt, folgt aus dem Satz von Baer, daß M injektiv ist, also $\mathrm{idim}_R(M) = 0$.
Sei nun $n > 0$. Indem man eine injektive Auflösung E^i von M bis zur Stelle $n-1$ aufschreibt und durch den Kokern des letzten Randoperators abschließt, erhält man eine eine exakte Folge
$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^{n-1} \to C \to 0$
mit injektiven Moduln E^i. Wir zeigen, daß dann unter der Voraussetzung (2 auch C injektiv ist, womit dann (1) gezeigt ist.
Dazu beachten wir, daß aus dem nachstehenden Hilfssatz 2.7.3 folgt, daß $\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, C) = \mathrm{Ext}^{n+1}(R/\mathfrak{a}, M)$ ist für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R gilt. Da nach Voraussetzung aber $\mathrm{Ext}^{n+1}(R/\mathfrak{a}, M) = 0$ ist, folgt $\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, C) = 0$ für alle $\mathfrak{a}$ und daraus, wie im Fall $n = 0$, daß C injektiv ist.

Sei nun R noethersch. (2)⇒(3) ist trivial.

(3)⇒(2): Falls für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R gilt, daß $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{p}, M) = 0$ ist, zeigen wir, auch für alle endlich erzeugten R-Moduln N, insbesondere also auch für $N = R/\mathfrak{a}$ gilt $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N, M) = 0$:
Sei N ein beliebiger endlich erzeugter R-Modul. Da R noethersch ist, ist auch N noethersch.
Nach [7, § 1 no 4 Théorèm 1] existiert eine Kette von Untermoduln
$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_r = N$ mit $N_{i+1}/N_i \simeq R/\mathfrak{p}_i$ für $i = 0, \ldots, r-1$ mit gewissen Primidealen $\mathfrak{p}_i$ von R. Dann hat man eine exakte Folge
$0 \to N_i \to N_{i+1} \to R/\mathfrak{p}_i \to 0$ und daher auch eine exakte Folge
$(*) \quad 0 = \operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{p}_i, M) \to \operatorname{Ext}_R^{n+1}(N_{i+1}, M) \to \operatorname{Ext}_R^{n+1}(N_i, M)$ für alle i.
$i = 0$: Es ist $N_0 = 0$, also $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N_0, M) = 0$ und daher ergibt die exakte Folge $(*)$
$0 \to \operatorname{Ext}_R^{n+1}(N_1, M) \to 0$, d.h. $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N_1, M) = 0$.
$i = 1$: Wie eben gezeigt, ist $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N_1, M) = 0$. Daher ergibt die exakte Folge $(*)$
$0 \to \operatorname{Ext}_R^{n+1}(N_2, M) \to 0$, d.h. $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N_2, M) = 0$.
usw. bis $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N, M) = \operatorname{Ext}_R^{n+1}(N_r, M) = 0$. □

Bleibt noch nachzutragen:

2.7.3. Hilfssatz. *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Sei ferner eine exakte Folge*
$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^{n-1} \to C \to 0$
mit injektiven Moduln E^i gegeben.
Ist L ein beliebiger R-Modul, so gilt:
$\operatorname{Ext}_R^1(L, C) = \operatorname{Ext}_R^{n+1}(L, M)$.

Beweis. Ergänze die gegebene exakte Folge mit einer injektiven Auflösung
$(*) \quad 0 \to C \xrightarrow{\iota} Q^0 \xrightarrow{\delta^1} Q^1 \xrightarrow{\delta^2} Q^2 \xrightarrow{\delta^3} \cdots$ von C:
$0 \to M \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} E^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^2} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} E^{n-1} \xrightarrow{p} C \xrightarrow{\iota} Q^0 \xrightarrow{\delta^1} Q^1 \xrightarrow{\delta^2} Q^2 \xrightarrow{\delta^3} \cdots$.
Setzt man
$\mathrm{d}^n := p \cdot \iota$ und
$\mathrm{d}^{n+i} := \delta^i$ für $i = 1, 2, \ldots$, so erhält man eine exakte Folge
$(**) \quad 0 \to M \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} E^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^2} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} E^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^n} Q^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^{n+1}} Q^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^{n+2}} Q^2 \xrightarrow{\mathrm{d}^{n+3}} \cdots$,
also eine injektive Auflösung von M.
Nach Definition erhält man aus den injektiven Auflösungen $(*)$ von C und $(**)$ von M dann:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_R^1(L, C) &= \operatorname{Ker}\big(\operatorname{Hom}_R(L, \delta^2)\big) / \operatorname{Im}\big(\operatorname{Hom}_R(L, \delta^1)\big) \\ &= \operatorname{Ker}\big(\operatorname{Hom}_R(L, \mathrm{d}^{n+2})\big) / \operatorname{Im}\big(\operatorname{Hom}_R(L, \mathrm{d}^{n+1})\big) \\ &= \operatorname{Ext}_R^{n+1}(L, M). \end{aligned}$$ □

2.7.4. Satz. *Sei R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist*
$\operatorname{pdim}_R(M) = \sup\{\operatorname{pdim}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m}$ *maximales Ideal von* $R\}$.

Beweis. Da R noethersch ist, ist auch $R_\mathfrak{m}$ noethersch. Außerdem ist $R_\mathfrak{m}$ flach über R. Wenn M und N endlich erzeugt sind, gilt dann nach Satz 2.2.8.:
$\operatorname{Ext}_{R_\mathfrak{m}}^n(M_\mathfrak{m}, N_\mathfrak{m}) = \big(\operatorname{Ext}_R^n(M, N)\big)_\mathfrak{m}$.
Sei N' ein endlich erzeugter $R_\mathfrak{m}$-Modul. Dann gibt es einen endlich erzeugten R-Modul N mit $N' = N_\mathfrak{m}$. (Wähle ein endliches Erzeugendensystem von N' und nehme für N den davon erzeugten R-Modul.) Sei $n := \operatorname{pdim}_R(M)$. Dann ist
$\operatorname{Ext}_{R_\mathfrak{m}}^{n+1}(M_\mathfrak{m}, N') = \big(\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N)\big)_\mathfrak{m} = 0$. Also ist $\operatorname{pdim}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) \le n$ (Satz 2.7.1).

für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R.
Andererseits gibt es einen endlich erzeugten R-Modul N_0 mit $\operatorname{Ext}^n_R(M, N_0) \neq 0$; denn wäre für *alle* endlich erzeugten R-Moduln N $\operatorname{Ext}^n_R(M, N) = 0$, so wäre nach Satz 2.7.1 $\operatorname{pdim}_R(M) \leq n-1$ im Widerspruch zu Wahl von n. Also gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von R, so daß auch $\left(\operatorname{Ext}^n_R(M, N_0)\right)_{\mathfrak{m}} \neq 0$ ist. Weil M und N_0 endlich erzeugt sind, gilt weiter nach Satz 2.2.8. $\operatorname{Ext}^n_{R_m}(M_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}}) = \left(\operatorname{Ext}^n_R(M, N_0)\right)_{\mathfrak{m}} \neq 0$, und daher ist auch $\operatorname{pdim}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) \geq n$. □

2.7.5. Satz. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$. Ferner sei M ein endlich erzeugter R-Modul.*
Es sind äquivalent:

(1) $\operatorname{pdim}_R(M) \leq n$.
(2) $\operatorname{Tor}^R_p(M, N) = 0$ *für alle $p > n$ und alle R-Moduln N.*
(3) $\operatorname{Tor}^R_{n+1}(M, k) = 0$.

Beweis. (1)⇒(2)⇒(3) ist trivial. Bleibt zu zeigen:
(3)⇒(1):
1. Fall n=0: Sei $x_1, \dots, x_r$ ein minimales Erzeugendensystem für M und $F := R \cdot X_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot X_r$ der freie R-Modul mit der Basis $X_1, \dots, X_r$. Stelle M dar als Faktormodul von F mit $X_i \mapsto x_i$ für $i = 1, \dots, r$. Dann hat man eine exakte Folge
$0 \to U \to F \to M \to 0$,
wobei U endlich erzeugt ist, weil R noethersch und M endlich erzeugt ist. Daraus erhält man durch Tensorieren mit k die exakte Folge:

$$0 \overset{(3)}{=} \operatorname{Tor}^R_1(M, k) \overset{\partial}{\to} \underbrace{U \otimes_R k}_{=U/\mathfrak{m}\cdot U} \to \underbrace{F \otimes_R k}_{=F/\mathfrak{m}\cdot F} \to \underbrace{M \otimes_R k}_{M/\mathfrak{m}\cdot M} \to 0.$$

Die in dieser Folge auftretenden R-Modul sind in natürlicher Weise auch k-Vektorräume. $F \otimes_R k$ ist ein k-Vektorraum mit der Basis $X_i \otimes 1$, hat also die Dimension r. Da $x_1, \dots, x_r$ ein minimales Erzeugendensystem für M ist, hat $M/\mathfrak{m}\cdot M$ ebenfalls die Dimension r über k. Die Abbildung $F \otimes_R k \to M \otimes_R k$ ist zudem surjektiv, also ist sie auch injektiv und daher $U/\mathfrak{m} \cdot U = 0$. Nach Krull-Nakayama folgt daraus $U = 0$, weil U endlich erzeugt ist, also ist $M \simeq F$ ein freier R-Modul, d.h. $\operatorname{pdim}_R(M) \leq 0$. q.e.d.
2. Fall $n > 0$: Betrachte eine Auflösung

$$0 \to X \xrightarrow{\mathrm{d}_n} F_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_1} F_0 \xrightarrow{\mathrm{d}_0} M \xrightarrow{\mathrm{d}_{-1}} 0 \quad \text{exakt}$$

mit endlich erzeugten freien R-Moduln F_i . Sei $Z_i := \operatorname{Ker} \mathrm{d}_i$ für $i = -1, \dots, m$. Dann ist $M = Z_{-1}$. Aus den exakten Folgen $0 \to Z_i \to F_i \to Z_{i-1} \to 0$ ergeben sich, weil $\operatorname{Tor}^R_p(F_i, \bullet) = 0$ ist für alle i, die exakten Folgen
$0 \to \operatorname{Tor}^R_{p+1}(Z_{i-1}, k) \overset{\partial}{\to} \operatorname{Tor}^R_p(Z_i, k) \to 0$, d.h. $\operatorname{Tor}^R_{p+1}(Z_{i-1}, k) \simeq \operatorname{Tor}^R_p(Z_i, k)$ für alle $p \geq 1$ und $i = 0, 1, \dots, n-1$. Nacheinander ergibt sich so

$$0 \overset{\text{Vor.}}{=} \operatorname{Tor}^R_{n+1}(M, k) \simeq \operatorname{Tor}^R_n(Z_0, k) \simeq \operatorname{Tor}^R_{n-1}(Z_1, k) \simeq \cdots \simeq \operatorname{Tor}^R_{n-i}(Z_i, k) \simeq \cdots \simeq \operatorname{Tor}^R_1(Z_{n-1}, k)\,.$$

Nach dem 1. Fall folgt daraus $\operatorname{pdim}_R(Z_{n-1}) \leq 0$, d.h. Z_{n-1} ist frei. Es ist aber $X \underset{\mathrm{d}_n}{\xrightarrow{\sim}} Z_{n-1}$, d.h. X ist frei und somit $\operatorname{pdim}_R(M) \leq n$. □

2.7.6. Korollar. *Sei R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Es sind äquivalent:*

(1) $\operatorname{pdim}_R(M) \leq n$.

(2) $\operatorname{Tor}_p^R(M,N)=0$ *für alle* $p>n$ *und alle* R*-Moduln* N.
(3) $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(M,R/\mathfrak{m})=0$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* R.

Beweis. (1)⇒(2)⇒(3) ist trivial. Bleibt zu zeigen:
(3)⇒(1): Da $R_\mathfrak{m}$ flach über R ist, hat man nach Satz 2.7.9.
$\operatorname{Tor}_{n+1}^{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m},R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot R_\mathfrak{m})=\big(\operatorname{Tor}_{n+1}^R(M,R/\mathfrak{m})\big)_\mathfrak{m}=0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R nach Voraussetzung (3). Nach Satz 2.7.5. ist dann $\operatorname{pdim}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})\le n$ und daher nach Satz 2.7.4. auch $\operatorname{pdim}_R(M)=\sup\{\operatorname{pdim}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})\mid \text{ alle } \mathfrak{m}\}\le n$. □

2.7.7. Korollar. *Sei* R *ein noetherscher Ring und* n *eine natürliche Zahl. Es sind äquivalent:*

(1) $\operatorname{gldh}(R)\le n$.
(2) $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{m})=0$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* R.

Beweis. (1)⇒(2): Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R. Dann ist
$\operatorname{pdim}_R(R/\mathfrak{m})\le\operatorname{gldh}(R)\le n$ und daher $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{m})=0$ nach Korollar 2.7.6.

(2)⇒(1): Sei $\mathfrak{m}$ ein beliebiges maximales Ideal von R und $\mathfrak{P}$ ein weiteres maximales Ideal, $\mathfrak{P}\ne\mathfrak{m}$. Dann gilt $x\cdot R/\mathfrak{P}=0$ für alle $x\in\mathfrak{P}$ und $y\cdot R/\mathfrak{m}=0$ für alle $y\in\mathfrak{m}$. Nach Folgerung 1.6.37. gilt dann $z\cdot\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{P})=0$ für alle $z\in\mathfrak{m}\cup\mathfrak{P}$, also auch für alle $z\in\mathfrak{m}+\mathfrak{P}=R$, d.h. $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{P})=0$ für alle $\mathfrak{P}\ne\mathfrak{m}$. Nach Voraussetzung (2) gilt das aber auch für $\mathfrak{P}=\mathfrak{m}$, also für alle maximalen Ideale $\mathfrak{P}$ von R. Nach Korollar 2.7.6. ist dann $\operatorname{pdim}_R(R/\mathfrak{m})\le n$. Also gibt es eine projektive Auflösung
$(\mathcal{P},\mathrm{d};p):\quad 0\to P_n\to\cdots\to P_0\to R/\mathfrak{m}\to 0$
von $R/\mathfrak{m}$ als R-Modul. Berechnet man aus dem zugehörigen Komplex $(\mathcal{P},\mathrm{d})$ für einen beliebigen R-Modul M die Tor^Rs, so erhält man $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(M,R/\mathfrak{m})=0$. Da $\mathfrak{m}$ ein beliebiges maximales Ideal von R war, folgt daraus nach Korollar 2.7.6. für einen beliebigen endlich erzeugten R-Modul M, daß $\operatorname{pdim}_R(M)\le n$ ist. Mit Satz 2.6.2. folgt dann $\operatorname{gldh}(R)\le n$. □

2.7.8. Korollar. *Sei* R *ein noetherscher Ring. Es gilt:*
$\operatorname{gldh}(R)=\sup\{\operatorname{gldh}\big(R_\mathfrak{m}\big)\mid \mathfrak{m}$ *maximales Ideal von* $R\}$.

Beweis. Mit Satz 2.7.9. hat man
$\operatorname{Tor}_{n+1}^{R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot R_\mathfrak{m},R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot R_\mathfrak{m})=\big(\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{m})\big)_\mathfrak{m}\simeq\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{m})$, wobei die letzte Isomorphie gilt, weil $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist und $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{m})$ nach Folgerung 1.6.37. von $\mathfrak{m}$ annulliert wird.[¶]
Ist $\operatorname{gldh}(R)=\infty$, so folgt aus Korollar 2.7.7., daß es zu jeder natürlichen Zahl n ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von R gibt mit $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{m})\ne 0$. Dann ist aber nach obigem auch $\operatorname{Tor}_{n+1}^{R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot R_\mathfrak{m},R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot R_\mathfrak{m})\ne 0$, also wiederum nach Korollar 2.7.7. $\operatorname{gldh}(R_\mathfrak{m})>n$. Also ist in diesem Fall auch
$\sup\{\operatorname{gldh}\big(R_\mathfrak{m}\big)\mid \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal von } R\}=\infty$.
Sei nun $\operatorname{gldh}(R)=n<\infty$. Nach Korollar 2.7.7. folgt dann
$\operatorname{Tor}_{n+1}^{R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot R_\mathfrak{m},R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot R_\mathfrak{m})\simeq\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{m})=0$, also $\operatorname{gldh}(R_\mathfrak{m})\le n$ für alle $\mathfrak{m}$, aber es gibt ein $\mathfrak{m}$ mit $\operatorname{Tor}_n^{R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot R_\mathfrak{m},R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot R_\mathfrak{m})\simeq\operatorname{Tor}_n^R(R/\mathfrak{m},R/\mathfrak{m})\ne 0$,

[¶]Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R und A ein R-Modul mit $\mathfrak{m}\cdot A=(0)$, so ist $A_\mathfrak{m}=A$: Für jedes $s\in R\setminus\mathfrak{m}$ ist $(s)+\mathfrak{m}=(1)$. Ist also $x\in A$ mit $s\cdot x=0$ so ist $x=0$. Also ist $A\simeq\frac{A}{1}\subseteq A_\mathfrak{m}$. Ausserdem folgt für jedes $z\in A$ noch $z=r\cdot s\cdot z$ mit einem $r\in R$ und daher $\frac{z}{s}=\frac{r\cdot z}{1}\in\frac{A}{1}$, also $\frac{A}{1}=A_\mathfrak{m}$.

weil sonst $\operatorname{gldh}(R) \leq n-1$ wäre. Das letzte bedeutet aber nach Korollar 2.7.7. $\operatorname{gldh}(R_{\mathfrak{m}}) \geq n$, so daß man insgesamt erhält
$\sup\{\operatorname{gldh}(R_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal von } R\} = n$. □

Beim Beweis von Korollar 2.7.6. und Korollar 2.7.8. haben wir für den Spezialfall $S = R_{\mathfrak{m}}$ den folgenden Satz benutzt:

2.7.9. Satz (vgl. Satz 2.2.8.). *Seien S und R Ringe (nicht notwendig noethersch), N und M R-Moduln (nicht notwendig endlich erzeugt),*
$\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Ferner sei S vermöge φ flach über R. Dann gilt für alle n:

$$\operatorname{Tor}_n^S(S \otimes_R N, S \otimes_R M) \underset{S}{\simeq} S \otimes_R \operatorname{Tor}_n^R(N, M).$$

Beweis. Sei
$(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p): \quad \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} P_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} N \to 0$
eine freie Auflösung von N als R-Modul. Dann ist, weil S über R flach ist, die tensorierte Folge
$(S \otimes_R \mathcal{P}, \mathrm{id} \otimes \mathrm{d}; \mathrm{id} \otimes p): \quad \cdots \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_3} S \otimes_R P_2 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_2} S \otimes_R P_1 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_1} S \otimes_R P_0 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes p} S \otimes_R N \to 0$
ebenfalls exakt, also eine freie Auflösung von $S \otimes_R N$ als S-Modul.
Nach Definition ist dann
$\operatorname{Tor}_n^R(N, M) = \mathrm{H}_n(\mathcal{P} \otimes_R M)$ und
$\operatorname{Tor}_n^S(S \otimes_R N, S \otimes_R M) = \mathrm{H}_n((S \otimes_R \mathcal{P}) \otimes_S (S \otimes_R M))$,
wobei der Komplex $(S \otimes_R \mathcal{P}) \otimes_S (S \otimes_R M)$ von der Form ist:
$\cdots \longrightarrow (S \otimes_R P_n) \otimes_S (S \otimes_R M) \xrightarrow{(\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_n) \otimes (S \otimes M)} (S \otimes_R P_{n-1}) \otimes_S (S \otimes_R M) \longrightarrow \cdots$
Man hat für alle n eine natürliche S-Isomorphie¶
$\lambda_n : S \otimes_R (P_n \otimes_R M) \xrightarrow{\simeq} (S \otimes_R P_n) \otimes_S (S \otimes_R M)$ vermöge
$\lambda_n(y \otimes (z \otimes x)) = (y \otimes z) \otimes (1 \otimes x) = (1 \otimes z) \otimes (y \otimes x)$ für alle $y \in S$, $z \in P_n$ und $x \in M$. Betrachte also noch den Komplex
$S \otimes_R (\mathcal{P} \otimes_R M): \quad \cdots \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes (\mathrm{d}_2 \otimes M)} S \otimes_R (P_1 \otimes_R M) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes (\mathrm{d}_1 \otimes M)} S \otimes_R (P_0 \otimes_R M) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes (\mathrm{d}_0 \otimes M)} 0$
Dann ist
$\lambda := (\lambda_n) : S \otimes_R (\mathcal{P} \otimes_R M) \to (S \otimes_R \mathcal{P}) \otimes_S (S \otimes_R M)$
ein Isomorphismus von Komplexen; denn für alle n ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S \otimes_R (P_n \otimes_R M) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes (\mathrm{d}_n \otimes M)"] \arrow[d, "\lambda_n"] & S \otimes_R (P_{n-1} \otimes_R M) \arrow[d, "\lambda_{n-1}"] \\
(S \otimes_R P_n) \otimes_S (S \otimes_R M) \arrow[r, "(\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_n) \otimes (\mathrm{id}_S \otimes M)"] & (S \otimes_R P_{n-1}) \otimes_S (S \otimes_R M)
\end{tikzcd}$$

kommutativ:
Es genügt, die Kommutativität für Elemente der Form $y \otimes (z \otimes x)$ mit $y \in S$, $z \in P_{n-1}$ und $x \in M$ zu zeigen.
Es ist:
$\big(\lambda_{n-1} \circ (\mathrm{id}_S \otimes (\mathrm{d}_n \otimes \mathrm{id}_M))\big)(y \otimes (z \otimes x)) = \lambda_{n-1}(y \otimes (\mathrm{d}_n z \otimes x)) = (y \otimes \mathrm{d}_n z) \otimes (1 \otimes x)$
Auf der anderen Seite ist auch
$\big(((\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{d}_n) \otimes (\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{id}_M)) \circ \lambda_n\big)(y \otimes (z \otimes x)) =$
$((\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{d}_n) \otimes (\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{id}_M))((y \otimes z) \otimes (1 \otimes x)) = (y \otimes \mathrm{d}_n z) \otimes (1 \otimes x)$ q.e.d.

¶ λ_n ist die Zusammensetzung der kanonischen Homomorphismen:
$S \otimes_R (P_n \otimes_R M) \simeq (S \otimes_R P_n) \otimes_R M \simeq (P_n \otimes_R S) \otimes_R M \simeq P_n \otimes_R S \otimes_R M \simeq P_n \otimes_R (S \otimes_S S) \otimes_R M \simeq (P_n \otimes_R S) \otimes_S (S \otimes_R M) \simeq (S \otimes_R P_n) \otimes_S (S \otimes_R M)$

Da λ ein Isomorphismus von Komplexen ist, sind die entsprechenden Homologiegruppen isomorph:
$\mathrm{H}_n\big(S \otimes_R (\mathcal{P} \otimes_R M)\big) \simeq \mathrm{H}_n\big((S \otimes_R \mathcal{P}) \otimes_S (S \otimes_R M)\big) = \mathrm{Tor}_n^S(S \otimes_R N, S \otimes_R M)$.
Da $S \otimes_R \bullet$ ein exakter Funktor ist, also Bild in Bild und Kern in Kern überführt, ist $\mathrm{H}_n\big(S \otimes_R (\mathcal{P} \otimes_R M)\big) = S \otimes_R \mathrm{H}_n(\mathcal{P} \otimes_R M) \simeq S \otimes_R \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$.
Insgesamt hat man also:
$\mathrm{Tor}_n^S(S \otimes_R N, S \otimes_R M) \simeq S \otimes_R \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$. □

2.8. **Zusammenhang zwischen projektiver Dimension und Tiefe.**

2.8.1. Satz (Auslander-Buchsbaum). *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlicher erzeugter R-Modul von endlicher projektiver Dimension. Dann gilt*

$$\mathrm{pdim}_R M + \mathrm{t}_R(M) = \mathrm{t}_R(R)$$

Beweis.
1) $\mathrm{pdim}_R(M) \overset{!}{\leq} \mathrm{t}_R(R)$:
Sei $r := \mathrm{t}_R(R)$ und $\underline{x} := \{x_1, \ldots, x_r\}$ eine R-Folge. Nach Anmerkung 2.1.19. ist dann $0 \to K_r(\underline{x}, R) \to \cdots \to K_0(\underline{x}, R) \to R/(\underline{x}) \cdot R \to 0$
eine freie Auflösung von $R/(\underline{x}) \cdot R$. Also ist $\mathrm{Tor}_p^R(M, R/(\underline{x}) \cdot R) = 0$ für jeden R-Modul M und alle $p > r$. Da $\underline{x}$ eine *maximale* R-Folge ist, ist jedes Element des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ von R Nullteiler für $R/(\underline{x}) \cdot R$, also ist $\mathfrak{m} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/(\underline{x}) \cdot R)} \mathfrak{p}$ und,
da $\mathrm{Ass}(R/(\underline{x}) \cdot R)$ nur endlich viele $\mathfrak{p}$ enthält, ist $\mathfrak{m}$ eines von diesen, also $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(R/(\underline{x}) \cdot R)$. Daher enthält $R/(\underline{x}) \cdot R$ einen Untermodul isomorph zu $k := R/\mathfrak{m}$, so daß man eine exakte Folge hat:
$0 \to k \to R/(\underline{x}) \cdot R \to N \to 0$.
Sei $p := \mathrm{pdim}_R(M)$. Wäre $p > r$, so wäre:
$0 = \mathrm{Tor}_{p+1}^R(M, N) \overset{\partial}{\to} \mathrm{Tor}_p^R(M, k) \to \mathrm{Tor}_p^R(M, R/(\underline{x}) \cdot R) \overset{p \geq r}{=} 0$ exakt,
also $\mathrm{Tor}_p^R(M, k) = 0$ und daher nach Satz 2.7.5. $\mathrm{pdim}_R(M) \leq p - 1$. Widerspruch!

2) *Reduktion auf den Fall* $\mathrm{t}_R(M) = 0$:
Sei y ein Nichtnullteiler für M. Nach Anmerkung 2.2.5. hat man dann $\mathrm{t}_R(M/y \cdot M) = \mathrm{t}_R(M) - 1$.
Im Gegensatz dazu nimmt die projektive Dimension zu:
$\mathrm{pdim}_R(M/y \cdot M) \overset{!}{=} \mathrm{pdim}_R(M) + 1$
Beweis: Da y ein Nichtnullteiler für M ist, hat man eine exakte Folge
$0 \to M \xrightarrow{\mu_y} M \to M/y \cdot M \to 0$, wobei μ_y die Multiplikation mit y bezeichnet. Mit $p := \mathrm{pdim}_R(M)$ ist dann:
$0 = \mathrm{Tor}_{p+1}^R(M, k) \to \mathrm{Tor}_{p+1}^R(M/y \cdot M, k) \overset{\partial}{\to} \mathrm{Tor}_p^R(M, k) \xrightarrow{\mu_y} \mathrm{Tor}_p^R(M, k)$.
Aber $y \cdot \mathrm{Tor}_p^R(M, k) = 0$ nach Folgerung 1.6.37., weil $y \cdot k = 0$ ist. Also hat man auch eine exakte Folge
$0 \to \mathrm{Tor}_{p+1}^R(M/y \cdot M, k) \to \mathrm{Tor}_p^R(M, k) \to 0$ und somit $\mathrm{Tor}_{p+1}^R(M/y \cdot M, k) \simeq \mathrm{Tor}_p^R(M, k)$. Wegen $p = \mathrm{pdim}_R(M)$ ist $\mathrm{Tor}_p^R(M, k) \neq 0$ nach Satz 2.7.5 und daher nach demselben Satz $\mathrm{pdim}_R\big(M/y \cdot M\big) \geq p + 1$.
Andererseits gilt nach Eigenschaften 2.5.8. (3), daß
$\mathrm{pdim}_R\big(M/y \cdot M\big) \leq \mathrm{pdim}_R(M) + 1$ ist, so daß insgesamt die Gleichheit folgt. q.e.d.
Sei $\{y_1, \ldots, y_s\}$ mit $s := \mathrm{t}_R(M)$ eine maximale M-Folge. Bilde die R-Moduln

$M_i := M/(y_1, \ldots, y_i) \cdot M$ für $i = 1, \ldots, s$. Indem man die obige Gleichung nacheinander auf diese Folge von R-Moduln anwendet, erhält man schließlich $\mathrm{t}_R(M_s) = 0$ und $\mathrm{pdim}_R(M_s) = p + s = \mathrm{pdim}_R(M) + \mathrm{t}_R(M)$. Es genügt daher zu zeigen:

3) *Falls* $\mathrm{t}_R(M) = 0$ *ist, folgt* $\mathrm{pdim}_R(M) = \mathrm{t}_R(R)$.
Beweis: Sei $\mathrm{t}_R(M) = 0$. Dann ist jedes Element des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ von R ein Nullteiler für M und daher wie oben $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(M)$. Also gibt es in M einen Untermodul $U \simeq k = R/\mathfrak{m}$. Sei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ eine maximale R-Folge. Da, wie unter 1) dann $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ eine freie Auflösung von $R/\underline{x} \cdot R$ ist, folgt nach Definition $\mathrm{Tor}_r^R(M, R/\underline{x} \cdot R) = \mathrm{H}_r\big(M \otimes \mathcal{K}(\underline{x}; R)\big) = \mathrm{H}_r(\underline{x}; M) \overset{2.1.7.\,(2)}{=} \big((0) : (x_1, \ldots, x_r)\big)_M \neq 0$, da z.B. $(x_1, \ldots, x_r) \cdot U = 0$ und daher $0 \neq U \subseteq \big((0) : (x_1, \ldots, x_r)\big)_M$ ist. Es folgt nach Satz 2.7.5. $\mathrm{pdim}_R(M) \geq r$, also, zusammen mit 1) die gewünschte Gleichung $\mathrm{pdim}_R(M) = r = \mathrm{t}_R(R)$. □

Als unmittelbare Folge erhält man noch:

2.8.2. Korollar. $\mathrm{gldh}(R) < \infty \Longrightarrow \mathrm{gldh}(R) \leq \mathrm{t}_R(R)$.

Die lokalen Ringe mit endlicher globaler homologischer Dimension sind gerade die regulären lokalen Ringe, die wir im folgenden Abschnitt 3.1 näher betrachten. Es stellt sich heraus, daß sogar die schärfere Beziehung $\mathrm{gldh}(R) = \mathrm{t}_R(R)$ gilt.

3. Spezielle Cohen-Macaulay-Ringe

3.1. **Reguläre Ringe.**

3.1.1. Definition. Sei R ein noetherscher lokaler Ring, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal. $\operatorname{edim} R :=$Minimale Erzeugendenzahl für $\mathfrak{m}$ heißt die „Einbettungsdimension von R“.

3.1.2. Definition. Ein „regulärer lokaler Ring“ ist ein noetherscher lokaler Ring R, dessen maximales Ideal von $n := \dim R$ Elementen erzeugt wird.

3.1.3. *Beispiele.*

(1) Die nulldimensionalen regulären lokalen Ringe sind die Körper.
(Das maximale Ideal wird von 0 Elementen erzeugt, ist also das Nullideal.)

(2) Da reguläre lokale Ringe nullteilerfrei sind, wie in Korollar 3.1.7. gezeigt wird, sind die eindimensionalen regulären lokalen Ringe gerade die diskreten Bewertungsringe ([3, Satz 2.3.15]).

3.1.4. *Anmerkung.*

(1) Ist R ein beliebiger noetherscher lokaler Ring und $\{x_1, \dots, x_r\}$ ein Erzeugendensystem für das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R, so gilt stets $r \geq \dim R$.
Also ist R regulär genau dann, wenn $\operatorname{edim} R = \dim R$ ist.

(2) Sei R ein (regulärer) lokaler Ring der Dimension n und $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem für das maximale Ideal.
Dann ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein Parametersystem für R.
Ein solches Parametersystem für R heißt ein „reguläres Parametersystem“.

Beweis. (1): Es ist $\ell_R\big(R/(x_1, \dots, x_r)\big) = \ell_R(R/\mathfrak{m}) = 1 < \infty$. Also ist nach [3, Hauptsatz 16.3.8.] dann $r \geq \mathrm{s}(R) = \dim_R R = \dim R$.

(2):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Alle } x_i \text{ liegen in } \mathfrak{m} = \mathfrak{J}(R)\,. \\ \ell_R\big(R/(x_1, \dots, x_n)\big) = \ell_R(R/\mathfrak{m}) = 1 < \infty\,. \\ \text{Anzahl der } x_i = n = \dim R\,. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \{x_1, \dots, x_n\} \text{ ist ein Parametersy-} \\ \text{stem für } R \text{ nach [3, Def. 16.4.1.]} \end{array}$$

□

3.1.5. Satz. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und dem Restklassenkörper $k := R/\mathfrak{m}$. Es sind äquivalent:*

(1) *R ist ein regulärer lokaler Ring der Dimension n.*

(2) *Der assoziierte graduierte Ring $\operatorname{gr}(R)$ ist isomorph zu einem Polynomring in n Unbestimmten über k (mit der üblichen Graduierung).*

Beweis. Vorbemerkung: Sei $S = k[X_1, \dots, X_n]$ Polynomring in den Unbestimmten $X_1, \dots, X_n$ über einem Körper k und $\mathfrak{q} := (X_1, \dots, X_n)$. Dann ist der assoziierte graduierte Ring von S bzgl. der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierung $\operatorname{gr}(S) = k[\mathrm{L}\,(X_1), \dots, \mathrm{L}\,(X_n)]$ wieder Polynomring in den Leitformen $\mathrm{L}\,(X_1), \dots, \mathrm{L}\,(X_n)$ (analog zu [3, Beispiel 13.2.3.(1)]).
Ferner ist $S_\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}^n / S_\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}^{n+1} = S_\mathfrak{q} \cdot (\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}) = \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$, weil $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal von S ist. Also ist $\operatorname{gr}\big(S_\mathfrak{q}\big) = \operatorname{gr}(S)$.
Sei $\mathfrak{Q} = S_\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}$. Für das Hilbert-Samuel-Polynom $\mathrm{P}_\mathfrak{Q}(S_\mathfrak{q})$ gilt $\operatorname{grad}(\mathrm{P}_\mathfrak{Q}) \leq n$ nach [3, Haupsatz 15.3.6.], weil $\mathfrak{Q}$ von n Elementen erzeugt wird.
Andererseits ist $\operatorname{grad}(\mathrm{P}_\mathfrak{Q}) \geq n$ nach [3, Hauptsatz 16.3.8.], weil offenbar $\dim S_\mathfrak{Q} \geq n$ ist. Also ist $\operatorname{grad} \mathrm{P}_\mathfrak{Q}(S_\mathfrak{q}) = n$ und $\dim S_\mathfrak{q} = n$. (Natürlich kann man $\mathrm{P}_\mathfrak{Q}$ auch direkt

angeben!)

(2)$\Rightarrow$(1): Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{m}$ so daß die Leitformen $\mathrm{L}(x_i) =: \tilde{x}_i = x_i + \mathfrak{m}^2$ den assoziierten graduierten Ring $\mathrm{gr}(R)$ über k erzeugen (vgl. [3, Beispiel 13.2.3. (2)]):
$\widetilde{R} := \mathrm{gr}(R) = k[\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]$; bezeichne $\tilde{\mathfrak{m}}$ das Ideal $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ von $\widetilde{R}$, und sei
$\widetilde{\mathfrak{M}} := \tilde{\mathfrak{m}} \cdot \widetilde{R}_{\tilde{\mathfrak{m}}}$. Dann ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathrm{gr}_1(R) = k\langle\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\rangle$. Nach Krull-Nakayama ist also $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$.
Nach [3, Hauptsatz 15.3.6] ist ferner $\mathrm{P}_{\mathfrak{m}}(R) = \mathrm{P}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\widetilde{R}_{\tilde{\mathfrak{m}}})$, also nach der Vorbemerkung grad $(\mathrm{P}_{\mathfrak{m}}(R)) = n$, weil nach Voraussetzung $\widetilde{R}$ Polynomring in n Unbestimmten ist. Also ist $\dim R = n$ nach [3, Hauptsatz 13.8.6.]. Da $\mathfrak{m}$ von den angegebenen $n = \dim R$ Elementen erzeugt wird, ist R regulär.

(1)$\Rightarrow$(2): Nach Voraussetzung ist $n = \dim R$ und das maximale Ideal wird von einem System von n Elementen $\{x_1, \dots, x_n\}$ erzeugt. Seien wieder $\tilde{x}_i := x_i + \mathfrak{m}^2$ die Leitformen der x_i. Dann ist $\widetilde{R} := \mathrm{gr}(R) = k[\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]$. Stelle $\widetilde{R}$ über k dar als Restklassenring eines Polynomrings
$\varphi : S := k[X_1, \dots, X_n] \to \widetilde{R}$ mit $X_i \mapsto x_i$ für alle i.
Behauptung: $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ $\quad$ ($\Rightarrow$(2) $\quad$ q.e.d.)
Beweis: Sei $\mathfrak{a} := \operatorname{Ker}\varphi$. Es ist nach Voraussetzung $n = \dim R$, also
grad $\big(\mathrm{P}_{\mathfrak{m}}(R)\big) = n$.
Andererseits ist aber $\mathrm{P}_{\mathfrak{m}}(R) = \mathrm{P}_{\tilde{m}}(\widetilde{R}) = \mathrm{P}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\widetilde{R}_{\tilde{\mathfrak{m}}})$, also $\dim \widetilde{R}_{\tilde{\mathfrak{m}}} = n$.
Nun ist aber $\widetilde{R}_{\tilde{\mathfrak{m}}} \simeq S_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$, wenn wir, wie in der Vorbemerkung, $\mathfrak{q} := (X_1, \dots, X_n)$ setzen, und es ist nach der Vorbemerkung $\dim S_{\mathfrak{q}} = n$.
Also ist $\dim S_{\mathfrak{q}} = n = \dim\big(S_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}\big)$. Nun ist aber $S_{\mathfrak{q}}$ nullteilerfrei. Wäre $\mathfrak{a} \neq 0$, so gäbe es also in $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ ein $y \neq 0$, das dann Nichtnullteiler für $S_{\mathfrak{q}}$ wäre. Dann wäre nach [3, Hilfssatz 16.3.9.] $\dim S_{\mathfrak{q}}/y \cdot S_{\mathfrak{q}} \leq n-1$, und daher erst recht $\dim S_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}} \leq n-1$. Widerspruch. Also ist $\mathfrak{a} = 0$. □

Da für die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung eines lokalen Ringes $\widehat{R}$ von R gilt
$\mathrm{gr}(R) \simeq \mathrm{gr}(\widehat{R})$ ([3, Satz 13.2.4.]), folgt aus Satz 3.1.5. sofort:

3.1.6. Korollar. *Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein noetherscher lokaler Ring und $\widehat{R}$ seine $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung. Dann gilt:*
R ist regulär genau dann, wenn $\widehat{R}$ regulär ist.

3.1.7. Korollar. *Ein regulärer lokaler Ring ist ein (vollständig) ganz abgeschlossener Integritätsbereich.*

Beweis. Nach Satz 3.1.5. (2) ist $\mathrm{gr}(R)$ ein Polynomring, also (vollständig) ganz abgeschlossener Integritätsbereich. Jedes Hauptideal von R ist abgeschlossen, da R ein Zariski-Ring ist ([3, Satz 14.0.14.]). Aus [3, Satz 13.2.12.] folgt dann die Behauptung. □

3.1.8. Hauptsatz. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring. Es sind äquivalent:*

(1) $\mathrm{gldh}(R) = n < \infty$
(2) *R ist ein regulärer lokaler Ring der Dimension n.*

Beweis. (Nach [15]) (1)$\Rightarrow$(2): Sei d die Länge eines kürzesten Erzeugendensystems $\{x_1, \dots, x_d\}$ für das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R und sei $k := R/\mathfrak{m}$. Es ist
$n = \mathrm{gldh}(R) \overset{2.8.2.}{\leq} \mathrm{t}_R(R) \overset{2.2.12.}{\leq} \dim R \overset{[3,\ 16.3.8.]}{\leq} d.$

Nach Lemma 3.1.14. hat man eine exakte Folge:
$0 \to K_d(\underline{x};k) \to \mathrm{Tor}_d^R(k,k)$. Es ist wie im Beweis von Anmerkung 2.1.7. (2)
$K_d(\underline{x};k) = R \cdot e_1 \otimes_R \cdots \otimes_R R \cdot e_d \otimes_R k \underset{R}{\simeq} k \neq 0$ und daher auch $\mathrm{Tor}_d^R(k,k) \neq 0$. Aus Korollar 2.7.7. folgt dann $n = \mathrm{gldh}(R) \geq d$, also hat man zusammen mit der oben gezeigten Ungleichung $n \leq \mathrm{t}_R(R) \leq \dim R \leq d \leq n$, daß $d = n = \dim R$ ist. Folglich ist R nach Definition regulär. q.e.d.
Außerdem folgt auch noch $\mathrm{t}_R(R) = \dim R$, d.h. R ist ein C-M-Ring.

(2)⇒(1): Nach Voraussetzung wird das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von einem Parametersystem $\{x_1,\ldots,x_n\}$ von R erzeugt (vgl. Anmerkung 3.1.4. (2)). Nach [3, Satz 16.4.3.] ist dann $\dim(R/x_1 \cdot R) = n-1$. Andererseits ist $R/x_1 \cdot R$ ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal von der Restklassen $\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n$ der x_i modulo $x_1 \cdot R$, also von $n-1 = \dim(R/x_1 \cdot R)$ Elementen erzeugt wird, und daher ein regulärer lokaler Ring der Dimension $n-1$.
Ferner ist x_1 ein Nichtnullteiler von R, weil $x_1 \neq 0$ als Element eines Parametersystems und R nach Korollar 3.1.7. nullteilerfrei ist. Daher ist $\{x_1\}$ eine R-Folge. Ebenso ist $\bar{x}_2$ ein Nichtnullteiler von $R/x_1 \cdot R$, weil dieser Ring ebenfalls regulär und somit nullteilerfrei ist. Also ist auch $\{x_1,x_2\}$ eine R-Folge. So kann man fortfahren und erhält schließlich, daß $\{x_1,\ldots,x_n\}$ eine R-Folge ist. Nach Anmerkung 2.1.19. erhält man dann aus $\mathcal{K}(\underline{x};R)$ eine freie Auflösung einer Länge $\leq n$ von $R/(x_1,\ldots,x_n) \cdot R = R/\mathfrak{m} = k$. Es folgt $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(k,k) = 0$ und daher $m := \mathrm{gldh}(R) \leq n < \infty$ nach Korollar 2.7.7.
Aus (1)⇒(2) folgt dann, daß R ein regulärer lokaler Ring der Dimension m ist. Da aber $\dim R = n$ ist, folgt $m = n$. □

3.1.9. Korollar. *Jeder reguläre lokale Ring ist ein C-M-Ring.*

Beweis. Wurde im Beweis von Hauptsatz 3.1.8. (1)⇒(2) gezeigt. □

3.1.10. Korollar. *Sei R ein regulärer lokaler Ring und $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ein minimales Erzeugendensystem für das maximale Ideal $\mathfrak{m}$. Dann ist $\{x_1,\ldots,x_n\}$ eine R-Folge und $R/(x_1,\ldots,x_i)$ ist ein regulärer lokaler Ring der Dimension $n-i$
für alle $i = 0,1,\ldots,n$.
Insbesondere ist dann $(x_1,\ldots,x_i)$ ein Primideal von R für alle $i = 1,\ldots,n$.*

Beweis. Wurde im Beweis von Hauptsatz 3.1.8. (2)⇒(1) rekursiv gezeigt. □

3.1.11. Korollar. *Sei R ein regulärer lokaler Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Dann ist auch $R_\mathfrak{p}$ ein regulärer lokaler Ring.*

Beweis. Nach Hauptsatz 3.1.8. ist $\mathrm{gldh}(R) = n < \infty$. Sei M ein beliebiger $R_\mathfrak{p}$-Modul. Als R-Modul (vermöge $R \to R_\mathfrak{p}$) besitzt M dann eine projektive Auflösung mit Länge $\leq n$.:
$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$
Da Lokalisieren ein exakter Funktor ist, ist dann auch die lokalisierte Folge
$0 \to (P_n)_\mathfrak{p} \to (P_{n-1})_\mathfrak{p} \to \cdots \to (P_0)_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} = M \to 0.$
exakt. Man überlegt sofort auf Grund der universellen Eigenschaft der Nenneraufnahme, daß die $(P_i)_\mathfrak{p}$ projektive $R_\mathfrak{p}$-Moduln sind, weil die P_i projektive R-Moduln sind. Also ist die obige exakte Folge eine projektive Auflösung einer Länge $\leq n$ von M als $R_\mathfrak{p}$-Modul und somit ist $\mathrm{pdim}_{R_\mathfrak{p}}(M) \leq n$. Da M ein beliebiger $R_\mathfrak{p}$-Modul war, bedeutet das $\mathrm{gldh}(R_\mathfrak{p}) \leq n < \infty$, also ist $R_\mathfrak{p}$ regulär nach Hauptsatz 3.1.8. □

3.1.12. Definition. Sei R ein Ring. R heißt „regulär“, wenn R noethersch ist und für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R der lokale Ring $R_{\mathfrak{m}}$ regulär (im Sinne von Definition 3.1.2) ist.

3.1.13. Korollar. *Sei R ein noetherscher Ring. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $\operatorname{gldh}(R) = n < \infty$

(2) *R ist regulär und* $\dim R = n$.

Beweis. Nach Korollar 2.7.8. ist
$\operatorname{gldh}(R) = \sup\{\operatorname{gldh}(R_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal von } R\}$
und außerdem ist auch
$\dim R = \sup\{\dim R_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal von } R\}$,
wie man unmittelbar aus der Definition von $\dim R$ sieht.
Die Aussage des Korollars ergibt sich damit sofort aus dem Hauptatz 3.1.8. □

3.1.14. Lemma (Serre). *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$. Sei ferner $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ ein minimales Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$. Dann hat man für alle $i = 0, 1, \dots$ eine exakte Folge*
$0 \to K_i(\underline{x}; k) \to \operatorname{Tor}_i^R(k, k)$

Zum Beweis brauchen wir zunächst die Existenz einer „minimalen freien Auflösung“ von k als R-Modul in einer speziellen Form:

3.1.15. Hilfssatz. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$. Sei ferner $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ ein minimales Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$. Dann hat man eine freie Auflösung von k als R-Modul:*

$(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p) \qquad \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_3} P_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} P_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} P_0 \xrightarrow{p} k \to 0 \qquad$ *mit:*

(1) *$P_0 = R$ und alle P_i sind endlich erzeugte freie R-Moduln.*

(2) *Man hat eine exakte Folge von Komplexen*
$0 \to (\mathcal{K}(\underline{x}; R), \delta) \to (\mathcal{P}, \mathrm{d})$,
wobei $(\mathcal{K}(\underline{x}; R), \delta)$ direkter Summand von $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$ ist.

(3) *Die durch d_i induzierte Abbildung $P_i/\mathfrak{m} \cdot P_i \to \operatorname{Im} \mathrm{d}_i/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Im} \mathrm{d}_i)$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis von Lemma 3.1.14. Wähle eine minimale freie Auflösung von k als R-Modul nach Hilfssatz 3.1.15.
Da nach Hilfssatz 3.1.15. (2) $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ direkter Summand von $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$ ist, ist auch die tensorierte Folge
$(*) \qquad 0 \to \mathcal{K}(\underline{x}; R) \otimes_R k \to (\mathcal{P}, \mathrm{d}) \otimes_R k$
exakt.
Aus Hilfssatz 3.1.15. (3) folgt:
$\operatorname{Im} \mathrm{d}_{i+1} = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_i \subseteq \mathfrak{m} \cdot P_i$, also ist der Randoperator von $(\mathcal{P}, \mathrm{d}) \otimes_R k$ die Nullabbildung und somit $\operatorname{Tor}_i^R(k, k) = \mathrm{H}_i((\mathcal{P}, \mathrm{d}) \otimes_R k) = P_i \otimes_R k$.
Nach Definition ist ferner $K_i(\underline{x}; k) = K_i(\underline{x}; R) \otimes_R k$, so daß die i-te Komponente der exakten Folge $(*)$ für alle $i = 0, 1, \dots$ lautet:
$0 \to K_i(\underline{x}; k) \to \operatorname{Tor}_i^R(k, k) \quad$ exakt. □

Es ist noch nachzutragen

Beweis von Hilfssatz 3.1.15. Mache den Ansatz $P_i := K_i(\underline{x}; R) \oplus G_i$ mit noch induktiv zu definierenden endlich erzeugten freien R-Moduln G_i.
Setze

$G_0 := 0$, also $P_0 = K_0(\underline{x}; R) = R$ und $p : R \to R/\mathfrak{m} = k$ kanonisch.
$G_1 := 0$, also $P_1 = K_1(\underline{x}; R) = \bigoplus_{i=1}^{r} R \cdot e_i$ und $\mathrm{d}_1 : P_1 \to P_0$ mit $\mathrm{d}_1 e_i := x_i$ wie in $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ (vgl. Anmerkungen 1.8.10. und 1.8.11.).
Also ist $\operatorname{Im} \mathrm{d}_1 = \mathfrak{m} = \operatorname{Ker} p$. Sei $\sum r_i \cdot e_i \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1$. Dann ist $\sum r_i \cdot x_i = 0$, also liegen alle $r_i \in \mathfrak{m}$, weil nach Voraussetzung $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ein minimales Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$ ist. Daher ist $\operatorname{Ker} \mathrm{d}_1 \subseteq \mathfrak{m} \cdot P_1$ und somit hat man
$P_1/\mathfrak{m} \cdot P_1 \xrightarrow[\sim]{\mathrm{d}_1} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \operatorname{Im} \mathrm{d}_1/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Im} \mathrm{d}_1)$.
Die Randoperatoren in $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ bezeichnen wir im folgenden mit δ_i.
Betrachte nun in $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ den Randoperator $\delta_2 : K_2(\underline{x}; R) \to K_1(\underline{x}; R) = P_1$. Wegen $\mathrm{d}_1 = \delta_1$ ist $\operatorname{Im} \delta_2 \subseteq \operatorname{Ker} \delta_1 = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1$, weil $\mathcal{K}(\underline{x}; R)$ ein Komplex ist, aber i.a. $\operatorname{Im} \delta_2 \neq \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1$, weil $\{x_1, \ldots, x_r\}$ keine R-Folge zu sein braucht (vgl. Satz 2.1.14.), so daß man ab dieser Stelle nichttriviale G_i hinzufügen muß:
Betrachte $(\operatorname{Im} \delta_2 + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1)/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1) \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1)$. Beides sind auch k-Vektorräume. Also gibt es einen endlich erzeugten k-Vektorraum
$\bar{U}_1 \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1)$ mit
$\operatorname{Ker} \mathrm{d}_1/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1) = (\operatorname{Im} \delta_2 + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1)/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1) \oplus \bar{U}_1$. Seien $y_1, \ldots, y_{s_2} \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1$ Vertreter modulo $\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1$ für eine k-Basis von $\bar{U}_1$. Sei:
$G_2 := R \cdot Y_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot Y_{s_2}$, der freie R-Modul mit der Basis $\{Y_1, \ldots, Y_{s_2}\}$,
$P_2 := K_2(\underline{x}; R) \oplus G_2$ und
$\mathrm{d}_2 : P_2 \to P_1$ definiert durch $\mathrm{d}_2 | K_2(\underline{x}; R) := \delta_2$ und $\mathrm{d}_2 | G_2 : (Y_l \mapsto y_l)$ für $l = 1, \ldots, s_2$.
Dann ist $\operatorname{Im} \mathrm{d}_2 = \operatorname{Im} \delta_2 + R \cdot y_1 + \cdots + R \cdot y_{s_2}$ und $\operatorname{Ker} \mathrm{d}_1 = \operatorname{Im} \mathrm{d}_2 + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_1$, also nach Krull-Nakayama $\operatorname{Ker} \mathrm{d}_1 = \operatorname{Im} \mathrm{d}_2$.
Allgemein:
Seien für $i \geq 2$ die $G_0, G_1, \ldots, G_{i-1}$ und $p, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \ldots, \mathrm{d}_{i-1}$ schon konstruiert mit $\mathrm{d}_j | K_j(\underline{x}; R) = \delta_j$, so daß die durch d_j induzierte Abbildung
$P_j/\mathfrak{m} \cdot P_j \to \operatorname{Im} \mathrm{d}_j/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Im} \mathrm{d}_j)$ ein Isomorphismus ist für alle $j \leq i-1$.
Betrachte
$K_i(\underline{x}; R) \xrightarrow{\delta_i} K_{i-1}(\underline{x}; R) \oplus G_{i-1} = P_{i-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{i-1}} P_{i-2}$.
Wegen $\mathrm{d}_{i-1} | K_{i-1}(\underline{x}; R) = \delta_{i-1}$ ist $\operatorname{Im} \delta_i \subseteq \operatorname{Ker} \delta_{i-1} \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$.
Betrachte $(\operatorname{Im} \delta_i + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}) \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})$.
Als k-Vektorraum ist $(\operatorname{Im} \delta_i + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})$ direkter Summand von $\operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})$, d.h. es existiert ein endlich erzeugter k-Vektorraum $\bar{U}_{i-1}$ mit $\operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}) = (\operatorname{Im} \delta_i + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}) \oplus \bar{U}_{i-1}$.
Seien $y_1, \ldots, y_{s_i} \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$ Vertreter modulo $\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$ für eine Basis von $\bar{U}_{i-1}$ als k-Vektorraum. Sei:
$G_i := R \cdot Y_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot Y_{s_i}$ der freie R-Modul mit der Basis $\{Y_1, \ldots, Y_{s_i}\}$,
$P_i := K_i(\underline{x}; R) \oplus G_i$ und
$\mathrm{d}_i : P_i \to P_{i-1}$ definiert durch $\mathrm{d}_i | K_i(\underline{x}; R) := \delta_i$ und $\mathrm{d}_i | G_i : (Y_l \mapsto y_l)$ für $l = 1, \ldots, s_i$.
Da $\operatorname{Im} \delta_i \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$ und alle $y_i \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$, gilt auch $\operatorname{Im} \mathrm{d}_i \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$, also bilden die P_i zusammen mit den d_i einen Komplex $(\mathcal{P}, \mathrm{d})$.

Behauptung: $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ ist eine freie Auflösung von k, die die Bedingungen (1)–(3) erfüllt.

Beweis: Nach Konstruktion ist

$\operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1} = \underbrace{(\operatorname{Im} \delta_i + R \cdot y_1 + \cdots R \cdot y_{s_i})}_{=\operatorname{Im} \mathrm{d}_i} + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1} = \operatorname{Im} \mathrm{d}_i + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$, also nach Krull-Nakayama: $\operatorname{Im} \mathrm{d}_i = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$, und, da auch $\operatorname{Im} \mathrm{d}_1 = \operatorname{Ker} p$ ist, ist $(\mathcal{P}, \mathrm{d}; p)$ eine Auflösung von k.

(1) ist nach Konstruktion erfüllt, weil alle $K_i(\underline{x}; R)$ endlich erzeugte freie R-Moduln sind.

(2): Nach Definition der P_i ist $K_i(\underline{x}; R)$ direkter Summand von P_i für alle i. Sei $j_i : K_i(\underline{x}; R) \to P_i$ die kanonische Injektion. Dann hat man nach Definition von d_i ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[r, "\mathrm{d}_i"] & P_{i-1} \\
K_i(\underline{x}; R) \arrow[u, "j_i"] \arrow[r, "\delta_i"] & K_{i-1}(\underline{x}; R) \arrow[u, "j_{i-1}"'] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

ex. ex.

Also ist $j := (j_i)$ ein injektiver Morphismus von Komplexen, d.h. man hat eine exakte Folge von Komplexen: $0 \to \big(\mathcal{K}(\underline{x}; R), \delta\big) \xrightarrow{j} (\mathcal{P}, \mathrm{d})$. q.e.d.

(3): Die durch d_i induzierte Abbildung $P_i/\mathfrak{m} \cdot P_i \to \operatorname{Im} \mathrm{d}_i/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Im} \mathrm{d}_i)$ ist nach Definiton surjektiv. Bleibt „injektiv“ zu zeigen. Da die Abbildung eine lineare Abbildung von k-Vektorräumen ist, genügt es dazu, wegen der Surjektivität, zu zeigen:

Behauptung: $\dim_k (P_i/\mathfrak{m} \cdot P_i) \leq \dim_k (\operatorname{Im} \mathrm{d}_i/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Im} \mathrm{d}_i))$.

Beweis: Nach Definition ist $P_i = K_i(\underline{x}; R) \oplus G_i$ und daher
$P_i/\mathfrak{m} \cdot P_i = K_i(\underline{x}; R)/\mathfrak{m} \cdot K_i(\underline{x}; R) \oplus G_i/\mathfrak{m} \cdot G_i$.
Wegen der schon gezeigten Exaktheit ist $\operatorname{Im} \mathrm{d}_i = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$, also
$\dim_k\big(\operatorname{Im} \mathrm{d}_i/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Im} \mathrm{d}_i)\big) = \dim_k\big(\operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})\big)$.
Ferner ist nach Konstruktion
$\operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}) = (\operatorname{Im} \delta_i + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}) \oplus \bar{U}_{i-1}$ mit
$\dim_k \bar{U}_{i-1} = s_i = \dim_k (G_i/\mathfrak{m} \cdot G_i)$.
Die Behauptung ist also äquivalent zu:

$\dim_k\big(K_i(\underline{x}; R)/(\mathfrak{m} \cdot K_i(\underline{x}; R))\big) \overset{!}{\leq} \dim_k\big((\operatorname{Im} \delta_i + \mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})\big)$ d.h.
δ_i induziert eine *Injektion*:
$\bar{\delta}_i : K_i(\underline{x}; R)/(\mathfrak{m} \cdot K_i(\underline{x}; R)) \longrightarrow \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}/(\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1})$.
Beweis: Nach Induktionsvoraussetzung induziert d_{i-1} einen Isomorphismus
$P_{i-1}/\mathfrak{m} \cdot P_{i-1} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} \mathrm{d}_{i-1}/\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Im} \mathrm{d}_{i-1}$. Daraus folgt $\operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1} \subseteq \mathfrak{m} \cdot P_{i-1}$.
Betrachte die Abbildungen:

$K_i(\underline{x}; R) \xrightarrow{\tilde{\delta}_i} \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{m} \cdot P_{i-1} = \mathfrak{m} \cdot K_{i-1}(\underline{x}; R) \oplus \mathfrak{m} \cdot G_{i-1} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{m} \cdot K_{i-1}(\underline{x}; R)$
Dabei bezeichnet $\tilde{\delta}_i := \delta_i | K_i(\underline{x}; R) \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}$ und λ die Inklusionsabbildung sowie π die kanonische Projektion aus der direkten Summe auf den ersten Summanden.
Es gilt dann offenbar für alle $z \in K_i(\underline{x}; R)$ die Gleichung $\pi \circ \lambda \circ \tilde{\delta}_i(z) = \delta_i(z)$. Diese Abbildungen induzieren modulo $\mathfrak{m}$ die Abbildungen:
$K_i(\underline{x}; R)/\mathfrak{m} \cdot K_i(\underline{x}; R) \xrightarrow{\bar{\delta}_i} \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1}/\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{i-1} \xrightarrow{\bar{\lambda}} \mathfrak{m} \cdot P_{i-1}/\mathfrak{m}^2 \cdot P_{i-1} =$
$\big(\mathfrak{m} \cdot K_{i-1}(\underline{x}; R)/\mathfrak{m}^2 \cdot K_{i-1}(\underline{x}; R)\big) \oplus \big(\mathfrak{m} \cdot G_{i-1}/\mathfrak{m}^2 \cdot G_{i-1}\big) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathfrak{m} \cdot K_{i-1}(\underline{x}; R)/\mathfrak{m}^2 \cdot K_{i-1}(\underline{x}; R)$.
Wir zeigen, daß die zusammengesetzte Abbildung $\bar{\pi} \circ \bar{\lambda} \circ \bar{\delta}_i$ injektiv ist. (Dann ist auch $\bar{\delta}_i$ injektiv und unsere Behauptung ist bewiesen):

Sei $z \in K_i(\underline{x};R)$ so daß die Restklasse $\bar{z}$ von z modulo $\mathfrak{m} \cdot K_i(\underline{x};R)$ im Kern von $\bar{\pi} \circ \bar{\lambda} \circ \bar{\delta}_i$ liegt. Das bedeutet also nach dem oben erwähnten
$\delta_i(z) \in \mathfrak{m}^2 \cdot K_{i-1}(\underline{x};R)$.
Wir zeigen, daß daraus folgt
$z \in \mathfrak{m} \cdot K_i(\underline{x};R)$ also $\bar{z} = 0$.
(Damit ist dann gezeigt daß $\bar{\pi} \circ \bar{\lambda} \circ \bar{\delta}_i$ injektiv ist, und somit ist der Hilfssatz bewiesen.):
$z \in K_i(\underline{x};R)$ hat eine Basisdarstellung
$$z = \sum_{1 \le \nu_1 < \cdots < \nu_i \le r} \xi_{\nu_1,\ldots,\nu_i} \cdot (e_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_i}) \quad \text{mit } \xi_{\nu_1,\ldots,\nu_i} \in R$$
(vgl. Anmerkung 1.8.10.). Nach Anmerkung 1.8.11. hat man dann:
$$\begin{aligned}\delta_i(z) &= \sum_{1 \le \nu_1 < \cdots < \nu_i \le r} \xi_{\nu_1,\ldots,\nu_i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} \cdot x_{\nu_j} \cdot (e_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{\nu_j}} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_i}) \\ &= \sum_{1 \le \mu_1 < \cdots < \mu_{i-1} \le r} \Big(\sum_{j=1}^{i} \sum_{\mu_{j-1} < \lambda < \mu_j} (-1)^{j-1} \cdot \xi_{\mu_1,\ldots,\mu_{j-1},\lambda,\mu_j,\ldots,\mu_{i-1}} \cdot x_\lambda \Big) \cdot (e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_{i-1}})\end{aligned}$$
Da die letzte Formel eine Basisdarstellung von $\delta_i(z)$ in $K_{i-1}(\underline{x};R)$ ist und nach Voraussetzung gilt $\delta_i(z) \in \mathfrak{m}^2 \cdot K_{i-1}(\underline{x};R)$, folgt:
$$\sum_{j=1}^{i} \sum_{\mu_{j-1} < \lambda < \mu_j} (-1)^{j-1} \cdot \xi_{\mu_1,\ldots,\mu_{j-1},\lambda,\mu_j,\ldots,\mu_{i-1}} \cdot x_\lambda \in \mathfrak{m}^2.$$
Das ist eine Summe über paarweise verschiedene x_λ mit Koeffizienten in R. Da $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ein minimales Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$ ist, die Restklassen modulo $\mathfrak{m}$ also eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als k-Vektorraum bilden, folgt daraus
$\xi_{\mu_1,\ldots,\mu_{j-1},\lambda,\mu_j,\ldots,\mu_{i-1}} \in \mathfrak{m}$ für alle j und λ, also insgesamt $\xi_{\nu_1,\ldots,\nu_i} \in \mathfrak{m}$ für alle $\nu_1, \ldots, \nu_i$, d.h. $z \in \mathfrak{m} \cdot K_i(\underline{x};R)$. □

3.1.16. Satz. *Sei R ein regulärer Ring, und $R[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten X über R. Dann gilt:*
$R[X]$ ist ein regulärer Ring und $\operatorname{gldh}(R[X]) = \operatorname{gldh}(R) + 1$.

Zum Beweis zeigen wir zunächst einen Hilfssatz:

3.1.17. Hilfssatz. *Sei R ein noetherscher Ring und M ein $R[X]$-Modul. Dann gilt:*
$\operatorname{pdim}_{R[X]}(M) \le \operatorname{pdim}_R(M) + 1$.

Beweis. Vorbemerkung: Sei N ein beliebiger R-Modul. Dann ist
$\operatorname{pdim}_{R[X]}(R[X] \otimes_R N) \le \operatorname{pdim}_R(N)$.
Beweis: Sei $0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to N \to 0$ eine kürzeste projektive Auflösung von N als R-Modul, also $\operatorname{pdim}_R(N) = n$ (eventuell auch $n = \infty$).
$R[X]$ ist ein flacher R-Modul, also ist dann jedenfalls
$0 \to R[X] \otimes_R P_n \to \cdots \to R[X] \otimes_R P_1 \to R[X] \otimes_R P_0 \to R[X] \otimes_R N \to 0$ exakt.
Da nach Korollar 1.3.7. die $R[X] \otimes_R P_i$ projektive $R[X]$-Moduln sind, ist das sogar eine projektive Auflösung von $R[X] \otimes_R N$, wenn auch vielleicht nicht von kürzester Länge. Es folgt $\operatorname{pdim}_{R[X]}(R[X] \otimes_R N) \le n = \operatorname{pdim}_R(N)$.

Sei nun M ein beliebiger $R[X]$-Modul und $M' := R[X] \otimes_R M$ als $R[X]$-Modul. Definiere eine $R[X]$-lineare Abbildung
$\varphi : M' \to M$ durch $\varphi(X^i \otimes y) := X^i \cdot y$ und eine $R[X]$-lineare Abbildung
$\psi : M' \to M'$ durch $\psi(X^i \otimes y) := X^{i+1} \otimes y - X^i \otimes X \cdot y$ für alle $y \in M$ und $i = 0, 1, 2, \ldots$.
Behauptung: Die Folge
$$(*) \qquad 0 \to M' \xrightarrow{\psi} M' \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

ist exakt.
Beweis: φ ist offensichtlich surjektiv; denn für jedes $y \in M$ gilt $y = \varphi(1 \otimes y)$.
ψ ist injektiv: Als R-Modul ist $R[X] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R \cdot X^i$. Also ist

$$M' = R[X] \otimes_R M \underset{R}{\simeq} \bigoplus_{i=0}^{\infty} R \cdot X^i \otimes M.$$

Ein beliebiges Element von M' ist daher eine endliche Summe $\sum X^i \otimes y_i$ mit $y_i \in M$, und es ist $\sum X^i \otimes y_i = 0 \Longleftrightarrow y_i = 0$ für alle i .
Sei nun

$$\begin{aligned} 0 &= \psi\big(\sum_{i=0}^{s} X^i \otimes y_i\big) \\ &= \sum_{i=0}^{s} (X^{i+1} \otimes y_i - X^i \otimes X \cdot y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{s+1} X^i \otimes y_{i-1} - \sum_{i=0}^{s} X^i \otimes X \cdot y_i \\ &= X^{s+1} \otimes y_s + \sum_{i=1}^{s} X^i \otimes (y_{i-1} - X \cdot y_i) - X^0 \otimes X \cdot y_0 \,. \end{aligned}$$

Nach dem oben ausgeführten folgt daraus:

$$\begin{array}{rclcrcl} & & & & y_s & = & 0, \\ y_{s-1} - X \cdot y_s & = & 0 & \Rightarrow & y_{s-1} & = & 0, \\ y_{s-2} - X \cdot y_{s-1} & = & 0 & \Rightarrow & y_{s-2} & = & 0, \\ y_{s-3} - X \cdot y_{s-2} & = & 0 & \Rightarrow & y_{s-3} & = & 0, \\ \cdots & & & & & & \\ y_1 - X \cdot y_2 & = & 0 & \Rightarrow & y_1 & = & 0, \\ y_0 - X \cdot y_1 & = & 0 & \Rightarrow & y_0 & = & 0, \end{array}$$

insgesamt also $\sum_{i=0}^{s} X^i \otimes y_i = 0\,.$ q.e.d.

Bleibt die Exaktheit in der Mitte zu zeigen:
$\varphi \circ \psi = 0$ folgt unmittelbar aus der Definition; denn für alle $y \in M$ ist
$\varphi \circ \psi(X^i \otimes y) = \varphi(X^{i+1} \otimes y - X^i \otimes X \cdot y) = X^{i+1} \cdot y - X^i \cdot X \cdot y = 0.$
Sei umgekehrt $\sum X^i \otimes y_i \in \operatorname{Ker} \varphi$. Dann ist $\sum X^i \cdot y_i = 0$.
Nun ist

$$\begin{array}{rcll} X^i \otimes y_i & = & X^i \otimes y_i - X^{i-1} \otimes X^1 \cdot y_i & (= \psi(X^{i-1} \otimes X^0 \cdot y_i)\,) \\ & + & X^{i-1} \otimes X^1 \cdot y_i - X^{i-2} \otimes X^2 \cdot y_i & (= \psi(X^{i-2} \otimes X^1 \cdot y_i)\,) \\ & + & X^{i-2} \otimes X^2 \cdot y_i - X^{i-3} \otimes X^3 \cdot y_i & (= \psi(X^{i-3} \otimes X^2 \cdot y_i)\,) \\ \cdots & & & \\ & + & X^1 \otimes X^{i-1} \cdot y_i - X^0 \otimes X^i \cdot y_i & (= \psi(X^0 \otimes X^{i-1} \cdot y_i)\,) \\ & + & X^0 \otimes X^i \cdot y_i & \\ & = & \psi\big(\sum_{j=0}^{i-1} X^j \otimes X^{i-j-1} \cdot y_i\big) & \\ & + & X^0 \otimes X^i \cdot y_i\,. & \end{array}$$

Es folgt:

$$\sum X^i \otimes y_i =$$
$$\sum_i \psi\big(\sum_{j=0}^{i-1} X^j \otimes X^{i-j-i} \cdot y_i\big) + X^0 \otimes \underbrace{\sum_i X^i \cdot y_i}_{=0} = \psi\big(\sum_i \sum_{j=0}^{i-1} X^j \otimes X^{i-j-i} \cdot y_i\big) \in \operatorname{Im} \psi\,.$$

Da $(*)$ eine exakte Folge von $R[X]$-Moduln ist, folgt aus Eigenschaft 2.5.8. (3):

$$\mathrm{pdim}_{R[X]}(M) \leq \max\{\mathrm{pdim}_{R[X]}(M'), \mathrm{pdim}_{R[X]}(M') + 1\}$$
$$= \mathrm{pdim}_{R[X]}(M') + 1 \overset{\text{Vorbem.}}{\leq} \mathrm{pdim}_R(M) + 1 \qquad \square$$

Beweis von Satz 3.1.16. Sei M ein $R[X]$-Modul. Da R ein noetherscher Ring ist, gilt nach dem Hilfssatz 3.1.17. $\mathrm{pdim}_{R[X]}(M) \leq \mathrm{pdim}_R(M) + 1 \leq \mathrm{gldh}(R) + 1$ und, weil dies für alle $R[X]$-Moduln gilt, ist auch $\mathrm{gldh}(R[X]) \leq \mathrm{gldh}(R) + 1$. Da $\mathrm{gldh}(R) < \infty$ ist, ist also auch $\mathrm{gldh}(R[X]) < \infty$ und somit ist jedenfalls $R[X]$ regulär und $\dim R[X] = \mathrm{gldh}(R[X])$ (Korollar 3.1.13).
Umgekehrt: Sei $\mathfrak{m}$ ein (maximales) Ideal von R mit $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{m}) = \dim R = \mathrm{gldh}(R)$ nach Korollar 3.1.13. Dann ist nach obigem $\mathrm{gldh}(R[X]) = \dim R[X] \geq \mathrm{ht}_{R[X]}(\mathfrak{m}, X) \geq \mathrm{ht}_{R[X]}(\mathfrak{m} \cdot R[X]) + 1 \geq$ ¶ $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{m}) + 1 = \mathrm{gldh}(R) + 1$. $\square$

3.1.18. Korollar (Syzygiensatz)**.** *Sei k ein Körper.*
$R := k[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über k in $X_1, \ldots, X_n$. Dann ist R ein regulärer Ring mit $\mathrm{gldh}(R) = n$ *.*

3.1.19. Satz (Auslander-Buchsbaum)**.** *Ein regulärer lokaler Ring ist ein ZPE-Ring.*

Für den Beweis von Satz 3.1.19. nach [14] brauchen wir einige vorbereitende Sätze:

3.1.20. Satz. *Sei R ein noetherscher Integritätsbereich, T eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, die von einer Menge Γ von Primelementen von R erzeugt wird. Dann gilt:*
Wenn R_T ein ZPE-Ring ist, dann ist auch R ein ZPE-Ring.

Beweis. Vorbemerkung: Bei einem ZPE-Ring ist trivialerweise jedes Primideal der Höhe 1 ein Hauptideal ([3, Korollar 1.5.17 und Satz 3.4.1.]).
Umgekehrt ist ein noetherscher Integritätsbereich bereits dann ein ZPE-Ring, wenn jedes Primideal der Höhe 1 ein Hauptideal ist: Da R noethersch ist, läßt sich jedes Element $\neq 0$ von R als Produkt endlich vieler irreduzibler Elemente schreiben. Wenn wir zeigen, daß jedes irreduzible Element prim ist, sind wir fertig. Sei q ein irreduzibles Element und $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von q. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz ([3, Folgerung 16.3.4.]) ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, also $\mathfrak{p} = (p)$ nach Voraussetzung. Daher ist $q = p \cdot c$. Da aber q irreduzibel und p keine Einheit ist, ist c eine Einheit und somit q ein Primelement. q.e.d.
Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1 von R. Falls $\mathfrak{p} \cap T \neq \emptyset$ ist, gibt es ein Primelement π von R mit $\pi \in \mathfrak{p}$. Da (π) ein von Null verschiedenes Primideal und $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ ist, folgt $\mathfrak{p} = (\pi)$ Hauptideal.
Sei also nun $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset$. Dann ist $\mathfrak{p} \cdot R_T$ ein Primideal der Höhe 1 von R_T, also, da R_T nach Voraussetzung ein ZPE-Ring ist, ein Hauptideal. Es gibt also ein $q \in \mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \cdot R_T = q \cdot R_T$. Wähle unter allen solchen q eines aus, so daß $R \cdot q$ maximal ist. Nenne dieses p. Dann ist also $p \cdot R_T = \mathfrak{p} \cdot R_T$. p wird dann von keinem $\pi \in \Gamma$ geteilt, weil ein solches π einerseits Einheit in R_T wäre und daher $R_T \cdot \frac{p}{\pi} = R_T \cdot p = R_T \cdot \mathfrak{p}$ wäre, andererseits aber $R \cdot \frac{p}{\pi} \supsetneq R \cdot p$ wäre entgegen der Maximalität von p. Sei nun $x \in \mathfrak{p}$. Dann gilt $t \cdot x = y \cdot p$ mit einem $t \in T$ und $y \in R$. Sei $t = \pi_1 \cdots \pi_r$ mit $\pi_i \in \Gamma$. Dann ist $p \notin \pi_i \cdot R$ und daher $y \in \pi_i \cdot R$. Durch Induktion nach r sieht man, daß daraus $y \in t \cdot R$ folgt. Schließlich ist also $x \in p \cdot R$. Folglich ist $\mathfrak{p} = p \cdot R$ ein Hauptideal. $\square$

¶Aus jeder Primidealkette ohne Wiederholungen in R entsteht durch Multiplikation mit $R[X]$ eine solche in $R[X]$.

3.1.21. Lemma (Narita)**.** [14, § 20 Lemma 1] *Sei R ein Integritätsbereich und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R mit $\mathfrak{a} \oplus R^n \simeq R^{n+1}$. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal.*

Beweis. Sei $\{e_0, \dots, e_n\}$ eine Basis für den freien Modul R^{n+1}. Betrachte $\mathfrak{a} \subset R$ und bilde auf beiden Seiten die direkte Summe mit R^n:
$\mathfrak{a} \oplus R^n \subset R \oplus R^n$. Sei f_0 eine Basis für den ersten Summanden R und $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine Basis für den zweiten Summanden R^n. Dann ist also
$\mathfrak{a} \oplus R^n = \mathfrak{a} \cdot R \oplus R^n = \mathfrak{a} \cdot f_0 \oplus \bigoplus\limits_{j=1}^{n} R \cdot f_j$.
Schreibe den Isomorphismus $\varphi : R^{n+1} \to \mathfrak{a} \oplus R^n$ bzgl. dieser Basen mit einer Matrix (a_{ij}):
$\varphi(e_i) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij} f_j$.
Sei d_i der $(i, 0)$-te Kofaktor und d die Determinante dieser Matrix. Da φ injektiv ist, ist $d \neq 0$. Außerdem gilt nach Definition der Kofaktoren $\sum\limits_{i=0}^{n} a_{i0} \cdot d_i = d$ und $\sum\limits_{i=0}^{n} a_{ij} \cdot d_i = 0$ für $j \neq 0$. Setze $e'_0 := \sum\limits_{i=0}^{n} d_i \cdot e_i$. Dann ist
$\varphi(e'_0) = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i \sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij} \cdot f_j = \sum\limits_{j=0}^{n} \big(\sum\limits_{i=0}^{n} a_{ij} \cdot d_i\big) \cdot f_j = \big(\sum\limits_{i=0}^{n} a_{i0} \cdot d_i\big) \cdot f_0 = d \cdot f_0$.
Da ferner $f_1, \dots, f_n$ im Bild von φ liegen, gibt es Elemente $e'_1, \dots, e'_n \in R^{n+1}$ mit $\varphi(e'_j) = f_j$ für $j = 1, \dots, n$. Drücke die e'_j durch die Basis $\{e_0, \dots, e_n\}$ von R^{n+1} aus:
$e'_j = \sum\limits_{k=0}^{n} c_{jk} \cdot e_k$ für alle $j = 0, \dots, n$ (also $c_{0k} = d_k$). Dann hat man:

$$(c_{jk}) \cdot (a_{ij}) = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so erhält man $\det(c_{jk}) \cdot d = d$, also $\det(c_{jk}) = 1$. Daher ist $\{e'_0, \dots, e'_n\}$ ebenfalls eine Basis von R^{n+1}.
Berechne nun $\varphi^{-1}(\mathfrak{a} \cdot f_0)$ unter Verwendung dieser Basis von R^{n+1}:
$\varphi\big(\sum\limits_{i=0}^{n} b_i \cdot e'_i\big) = b_0 \cdot d \cdot f_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i f_i \in \mathfrak{a} \cdot f_0 \Leftrightarrow b_1, \dots, b_n = 0$, weil $\{f_0, \dots, f_n\}$ eine R-Basis von $R \oplus R^n$ bilden. Also ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{a} \cdot f_0) = R \cdot e'_0$, und daher ist $\mathfrak{a} \cdot f_0 = \varphi(R \cdot e'_0) = d \cdot R \cdot f_0$.
Also ist $\mathfrak{a} = d \cdot R$ ein Hauptideal. □

Beweis von Satz 3.1.19. Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein regulärer lokaler Ring. Wir zeigen durch Induktion nach $\dim R$, daß R ein ZPE-Ring ist:
Für $\dim R = 0$ ist R ein Körper, also trivialerweise ein ZPE-Ring.
Für $\dim R = 1$ ist R ein diskreter Bewertungsring und daher auch ein ZPE-Ring. (s. Beispiele 3.1.3.)
Sei nun $\dim R > 1$. Sei $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Dann läßt sich $\{x\}$ zu einem minimalen Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$ ergänzen, und daher ist (x) nach Korollar 3.1.10. ein Primideal. Nach Satz 3.1.20. mit $\Gamma := \{x\}$ genügt es zu zeigen, daß R_x ein ZPE-Ring ist.
Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal der Höhe 1 von R_x. Wie in der Vorbemerkung zum Beweis von Satz 3.1.20. gezeigt wurde, muß man zeigen, daß $\mathfrak{P}$ ein Hauptideal von R_x ist. Sei $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap R$. Dann ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \cdot R_x$. Da R ein regulärer lokaler Ring ist, ist $\operatorname{pdim} \mathfrak{p} < \infty$ (Hauptsatz 3.1.8.), d.h. es gibt eine endliche projektive Auflösung von $\mathfrak{p}$ als R-Modul.

Da R lokal ist, ist dies sogar eine endliche freie Auflösung (Satz 1.3.8.). Da Nenneraufnahme ein exakter Funktor ist, erhält man daraus eine endliche freie Auflösung von $\mathfrak{P} = R_x \cdot \mathfrak{p}$ als R_x-Modul.
Für jedes Primideal $\mathfrak{Q}$ von R_x ist der Ring $\left(R_x\right)_{\mathfrak{Q}} = R_{\mathfrak{Q}\cap R}$ nach Korollar 3.1.11. ein regulärer lokaler Ring, dessen Dimension echt kleiner ist als die Dimension von R, weil das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R bei $R \to R_x$ zu R_x wird, also nach Induktionsvoraussetzung ein ZPE-Ring. Da $\mathfrak{P}_{\mathfrak{Q}}$ entweder ein Primideal der Höhe 1 von $\left(R_x\right)_{\mathfrak{Q}}$ oder der ganze Ring ist, ist $\mathfrak{P}_{\mathfrak{Q}}$ ein Hauptideal, also ein freier $\left(R_x\right)_{\mathfrak{Q}}$-Modul für alle $\mathfrak{Q}$. Daher ist nach Satz 1.3.9. das Ideal $\mathfrak{P}$ ein projektiver R_x-Modul. Da $\mathfrak{P}$ außerdem, wie oben gezeigt, eine endliche freie Auflösung als R_x-Modul besitzt, folgt aus Lemma 1.4.14., daß es einen freien R_x-Modul F gibt, so daß $\mathfrak{P} \oplus F$ ein freier R_x-Modul ist. Nach Lemma 3.1.21. ist dann $\mathfrak{P}$ selbst ein Hauptideal. $\square$

Wir betrachten nun noch Restklassenringe von regulären lokalen Ringen.

3.1.22. Satz. *Sei R ein regulärer lokaler Ring, $\mathfrak{a}$ ein echtes Ideal von R. Es gilt: $R/\mathfrak{a}$ ist regulär $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a}$ wird von einem Teilsystem eines regulären Parametersystems von R erzeugt.*
(Insbesondere ist $\mathfrak{a}$ dann ein Primideal.)

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: Siehe Korollar 3.1.10.

$\underline{\Rightarrow}$: Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R. Dann ist $\bar{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ das maximale Ideal von $\bar{R} := R/\mathfrak{a}$.
Man hat eine exakte Folge von k-linearen Abbildungen ($k := R/\mathfrak{m} = \bar{R}/\bar{\mathfrak{m}}$):
$0 \to \underbrace{(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2}_{\simeq \mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^2)} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2 \to 0\,.$
Es folgt: $r := \dim_k\big(\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^2)\big) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - \dim_k(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) = \dim R - \dim \bar{R}$, weil nach Voraussetzung beides reguläre lokale Ringe sind.
Sei $\{x_1,\dots,x_r\}$ ein Vertretersystem in $\mathfrak{a}$ für eine k-Basis von $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^2)$. Dann sind die Restklassen von $x_1,\dots,x_r$ linear unabhängig in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, also Teil eines minimalen Erzeugendensystems von $\mathfrak{m}$ und damit auch Teil eines regulären Parametersystems von R. Nach Korollar 3.1.10. ist daher $R/(x_1,\dots,x_r)$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $\dim R - r$ und daher ist insbesondere $(x_1,\dots,x_r)$ ein Primideal. Nach dem oben gezeigten ist dann $\dim\big(R/(x_1,\dots,x_r)\big) = \dim R - r = \dim(R/\mathfrak{a})$. Da aber $(x_1,\dots,x_r) \subseteq \mathfrak{a}$ ist und beides Primideale sind (Satz 3.1.7.), folgt $\mathfrak{a} = (x_1,\dots,x_r)$; denn wäre $\mathfrak{a} \supsetneqq (x_1,\dots,x_r)$, so könnte man das Primideal $(x_1,\dots,x_r)$ an eine maximale Primidealkette zwischen $\mathfrak{a}$ und R anhängen und erhielte so
$\dim\big(R/(x_1,\dots,x_r)\big) \geq \dim R/\mathfrak{a} + 1$. $\square$

3.1.23. Satz (Normalitätskriterium von Serre)**.** *Sei R ein noetherscher lokaler Ring. R ist genau dann normal (d.h. nullteilerfrei und ganz abgeschlossen), wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- (R_1) *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$ ist $R_{\mathfrak{p}}$ regulär (d.h. ein Körper oder ein diskreter Bewertungsring (Beispiele 3.1.3.))* ([11, Déf. 5.8.2.])
- (S_2) *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$ ist $\mathrm{t}_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 2$.* ([11, Déf. 5.7.2.])

Beweis. Die beiden Bedingungen sind notwendig:
Sei R normal und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Da R Integritätsbereich ist, ist das Nullideal das einzige Primideal der Höhe Null, und $R_{(0)} = \mathrm{Quot}(R)$ ist ein Körper.
R ist aber sogar ein Krull-Ring ([3, Def. 1.5.1.]). Also ist für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ der

Höhe Eins $R_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungring ([3, Satz 3.3.1.]). Somit ist (R_1) erfüllt.

Sei nun $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$ und $x \neq 0$ ein Element von $\mathfrak{p}\cdot R_{\mathfrak{p}}$. Mit R ist auch $R_{\mathfrak{p}}$ ein Krull-Ring. Das Hauptideal (x) ist ein Sternideal ([3, Def.1.2.3.]) und hat daher in $R_{\mathfrak{p}}$ nach [3, Zusammenfassung 1.9.9.] eine Normaldarstellung $(x) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$, wobei die $\mathfrak{q}_i$ primär zu Primidealen der Höhe 1 sind. $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$ liegt also nicht in der Vereinigung der für (x) in $R_{\mathfrak{p}}$ wesentlichen Primideale. Also enthält $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$ einen Nichtnullteiler für $R_{\mathfrak{p}}/(x)$, und somit hat $R_{\mathfrak{p}}$ mindestens die Tiefe 2. Daher ist auch (S_2) erfüllt.

Die beiden Bedingungen sind auch hinreichend:
Aus (R_1) und (S_2) folgt zunächst, daß R reduziert ist ((R_0) und (S_1) genügen hierfür! [14, p.183]):
Jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ hat die Höhe Null; denn: Wäre $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ mit $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq 1$, so wäre jedes Element von $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$ Nullteiler für $R_{\mathfrak{p}}$ ([2, Prop. 2.6.]). Andererseits wäre aber auch wegen der eineindeutigen Entsprechung der Primideale von $R_{\mathfrak{p}}$ mit den Primidealen von R, die in $\mathfrak{p}$ enthalten sind, $\mathrm{ht}\big(\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}\big) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq 1$. Wenn $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ ist, folgt aus (R_1), daß $R_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei ist. Wenn $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$ ist, folgt aus (S_2), daß $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$ einen Nichtnullteiler enthält. Widerspruch!
Sei nun $\mathrm{Ass}(R) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$. Dann gilt also $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = 0$ für alle i.
Behauptung: $\mathfrak{r} := \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r = (0)$.
Beweis: Gäbe es ein $0 \neq x \in \mathfrak{r}$, so sei $\mathfrak{a} := \mathrm{Ann}_R(x)$. Dann bestünde $\mathfrak{a}$ nur aus Nullteilern für R, also wäre $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r$ und daher o.B.d.A. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1$, weil die $\mathfrak{p}_i$ Primideale sind. Dann wäre $\frac{x}{1} \neq 0$ in $R_{\mathfrak{p}_1}$. Andererseits ist aber $\mathfrak{r}$ das Nilradikal von R und daher ist x und somit auch $\frac{x}{1}$ nilpotent. Nach (R_1) ist aber $R_{\mathfrak{p}_1}$ ein Körper, enthält also keine nilpotenten Elemente $\neq 0$. Widerspruch!
Damit ist gezeigt, daß R reduziert ist.

Sei nun $K := \mathrm{Quot}(R)$ der volle Quotientenring von R. Sei S der ganze Abschluß von R in K.
Behauptung: $S = R$, d.h. R ist ganz abgeschlossen in K.
Beweis: Sei $x = \frac{y}{z} \in K$ ganz über R mit $y, z \in R$ und z kein Nullteiler für R. Indem man eine Ganzheitsgleichung für x über R mit einer passenden Potenz von z multipliziert, erhält man eine Gleichung
$y^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot y^{n-i} \cdot z^i = 0$ mit $a_i \in R$ für alle i.
Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal von R. Man hat dann in $R_{\mathfrak{p}}$ die Gleichung
$(\frac{y}{1})^n + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1} \cdot (\frac{y}{1})^{n-i} \cdot (\frac{z}{1})^i = 0$ mit $\frac{a_i}{1} \in R_{\mathfrak{p}}$ für alle i. Da $R_{\mathfrak{p}}$ flach über R ist, ist $\frac{z}{1}$ auch ein Nichtnullteiler für $R_{\mathfrak{p}}$. Also ist $\frac{y}{z} \in \mathrm{Quot}\big(R_{\mathfrak{p}}\big)$, und aus der obigen Gleichung folgt, daß dieses Element ganz über $R_{\mathfrak{p}}$ ist. Nun sei $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. Dann ist nach Voraussetzung (R_1) der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungsring, also ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper und daher $\frac{y}{z} \in R_{\mathfrak{p}}$, d.h. $y \cdot R_{\mathfrak{p}} \subseteq z \cdot R_{\mathfrak{p}}$.
Betrachte nun eine Normaldarstellung $z \cdot R = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s$ in R, wobei die $\mathfrak{q}_i$ primär zu Primidealen $\mathfrak{p}'_i$ sind. Da z ein Nichtnullteiler von R ist haben die minimalen Primoberideale von $z \cdot R$ nach dem Krullschen Hauptidealsatz ([3, Folgerung 16.2.14.]) alle die Höhe 1, also ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_i) \geq 1$ für alle i. Wäre für ein i_0 aber für $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}'_{i_0}$ $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq 2$ so ergäbe das einen Widerspruch zur Voraussetzung (S_2): $\frac{z}{1}$ ist wegen der Flachheit von $R_{\mathfrak{p}}$ über R auch ein Nichtnullteiler in $R_{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}(R_{\mathfrak{p}}/\frac{z}{1} \cdot R_{\mathfrak{p}})$. Also bestünde $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$ aus lauter Nullteilern für $R_{\mathfrak{p}}/\frac{z}{1} \cdot R_{\mathfrak{p}}$ und daher wäre $\mathrm{t}_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) = 1$ und nicht $\mathrm{t}_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 2$, wie von (S_2) gefordert.

Nun ist $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_i \cdot R_{\mathfrak{p}'_i} \cap R$ und $z \cdot R_{\mathfrak{p}'_i} = \mathfrak{q}_i \cdot R_{\mathfrak{p}'_i}$, weil alle $\mathfrak{p}'_i$ die Höhe 1 haben, also keines in einem anderen enthalten ist.
Daher ist $z \cdot R = z \cdot R_{\mathfrak{p}'_1} \cap \cdots \cap z \cdot R_{\mathfrak{p}'_s} \cap R$ und, wie oben gezeigt $y \cdot R_{\mathfrak{p}'_i} \subseteq z \cdot R_{\mathfrak{p}'_i}$ für alle $i = 1, \ldots, s$. Also ist wegen $y \cdot R \subseteq y \cdot R_{\mathfrak{p}} \cap R$ für jedes $\mathfrak{p}$ schließlich
$y \cdot R \subseteq y \cdot R_{\mathfrak{p}'_1} \cap \cdots \cap y \cdot R_{\mathfrak{p}'_s} \cap R \subseteq z \cdot R_{\mathfrak{p}'_1} \cap \cdots \cap z \cdot R_{\mathfrak{p}'_s} \cap R = z \cdot R$, also
$y = c \cdot z$ mit $c \in R$, d.h. $\frac{y}{z} \in R$.
Bleibt zu zeigen, daß R nullteilerfrei ist.
Da R reduziert ist, ist K direktes Produkt von Körpern isomorph zu
$R_{\mathfrak{p}_i} = \operatorname{Quot}\big(R/\mathfrak{p}_i\big)$. Also $K = \bigtimes_{i=1}^{r} K_i$ mit $K_i = K \cdot e_1 \simeq \operatorname{Quot}\big(R/\mathfrak{p}_i\big)$, wobei die e_i paarweise orthogonale Idempotente sind. Es ist $e_1 + \cdots + e_r = 1$ und $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. Wegen $e_i^2 - e_i = 0$ sind die e_i ganz über R, also ist $e_i \in R$ für alle i, weil R ganz abgeschlossen in K ist. Nun ist aber R ein lokaler Ring, und in einem lokalen Ring sind 1 und 0 die einzigen Idempotenten¶. Also ist $r = 1$ (und $e_1 = 1$), und somit ist $K = K_1$ ein Körper, und R ist nullteilerfrei. $\square$

3.2. **Vollständige Durchschnitte.**

3.2.1. Definition. Ein lokaler Ring R heißt „vollständiger Durchschnitt", wenn es einen regulären lokalen Ring S und ein Teilsystem $\{x_1, \ldots, x_r\}$ eines Parametersystems von S gibt mit $R \simeq S/(x_1, \ldots, x_r)$.
Ein beliebiger noetherscher Ring R heißt „lokal vollständiger Durchschnitt", wenn $R_{\mathfrak{m}}$ ein vollständiger Durchschnitt ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R.

3.2.2. *Anmerkung.*

(1) R ist genau dann ein vollständiger Durchschnitt, wenn es einen regulären lokalen Ring S und ein Ideal $\mathfrak{a}$ von S gibt mit $R \simeq S/\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ von $r := \dim S - \dim R$ Elementen erzeugt wird.
(2) Ein vollständiger Durchschnitt ist ein C-M-Ring.

Beweis. (1) gilt nach [3, Satz 16.4.3. (2)].
(2): Nach Korollar 3.1.9. ist S ein C-M-Ring. Nach Korollar 2.3.9. ist dann R als Faktorring eines C-M-Rings nach einem Teilsystem eines Parametersystems selbst ein C-M-Ring.

$\square$

Die Eigenschaft (1) von Anmerkung 3.2.2. ist unabhängig von der speziellen Darstellung von R als Faktorring eines regulären lokalen Ringes:

3.2.3. Satz. *Sei R lokaler Ring, der ein vollständiger Durchschnitt ist, und sei S ein regulärer lokaler Ring, so daß $R \simeq S/\mathfrak{a}$ ist. Dann wird $\mathfrak{a}$ von $\dim S - \dim R$ Elementen erzeugt.*

Zum Beweis von Satz 3.2.3. nach [14] brauchen wir zunächst einige Hilfsüberlegungen, die auch für sich genommen interessant sind:

¶Ist R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein lokaler Ring und e ein Idempotent. Dann ist $e \cdot (e-1) = 0 \in \mathfrak{m}$, also entweder $e \in \mathfrak{m}$ oder $e - 1 \in \mathfrak{m}$. Falls $e \in \mathfrak{m}$, ist $e - 1$ eine Einheit von R und daher $e = 0$. Falls $e - 1 \in \mathfrak{m}$, ist $e = (e-1) + 1$ eine Einheit von R und daher $e - 1 = 0$, also $e = 1$

3.2.4. Hilfssatz. *Sei S ein regulärer lokaler Ring, $\mathfrak{n}$ sein maximales Ideal, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von S mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{n}^2$ und $R := S/\mathfrak{a}$ sowie $\mathfrak{m} = n/\mathfrak{a}$ das maximale Ideal von R. Dann gilt für die minimale Erzeugendenzahl von $\mathfrak{a}$ als S-Modul:*

$$\mu_S(\mathfrak{a}) = \varepsilon_1(R) = \dim_k\bigl(\operatorname{Tor}_1^S(k,R)\bigr) \quad (\, k := S/\mathfrak{n} = R/\mathfrak{m}\,)\,.$$

Beweis. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{n}^2$ gilt, ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{n}/(\mathfrak{a}+\mathfrak{n}^2) = \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ und daher $\operatorname{edim} R = \mu_R(\mathfrak{m}) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = \mu_S(\mathfrak{n}) = \dim S$.
Sei $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ein minimales Erzeugendensystem für $\mathfrak{n}$. Da S regulär ist, ist dies eine S-Folge. Nach dem eben gezeigten sind die Restklassen der ξ_i modulo $\mathfrak{a}$, die wir mit x_i bezeichnen, ein minimales Erzeugendensystem für $\mathfrak{m}$.
Nach Anmerkung 2.1.19. liefert der Koszul-Komplex $\mathcal{K}(\underline{\xi};S)$

$0 \to K_n(\underline{\xi};S) \xrightarrow{\mathrm{d}_n} K_{n-1}(\underline{\xi};S) \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_1} K_0(\underline{\xi};S) \xrightarrow{p} S/(\xi_1,\dots,\xi_n)\cdot S = k \to 0$
eine freie Auflösung von k als S-Modul.
Nun folgt unmittelbar aus der Definition $\mathcal{K}(\underline{x};R) = (S/\mathfrak{a}) \otimes_S \mathcal{K}(\underline{\xi};S)$. Andererseits sind nach Definition die Homologiegruppen von $(S/\mathfrak{a}) \otimes_S \mathcal{K}(\underline{\xi};S)$ gerade die $\operatorname{Tor}_p^S(k,R)$, so daß gilt:
$\operatorname{Tor}_p^S(k,R) = \mathrm{H}_p(\underline{x},R)$ also, weil $\{x_1,\dots,x_n\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$ ist:
$\varepsilon_p(R) = \dim_k\bigl(\mathrm{H}_p(\underline{x},R)\bigr) = \dim_k\bigl(\operatorname{Tor}_p^S(k,R)\bigr)$ für alle $p \geq 0$.
Aus der exakten Folge von S-Moduln
$0 \to \mathfrak{a} \to S \to R \to 0$
erhält man am Ende der langen exakten Tor-Folge:
$\underbrace{\operatorname{Tor}_1^S(k,S)}_{=0} \to \operatorname{Tor}_1^S(k,R) \xrightarrow{\partial_1} k \otimes_S \mathfrak{a} \to \underbrace{k \otimes_S S}_{\simeq k} \xrightarrow{\sim} \underbrace{k \otimes_S R}_{\simeq k} \to 0$ exakt.
Da rechts ein Isomorphismus steht, ist das Bild der Abbildung davor $= 0$ ($=$ dem Kern des Isomorphismus), so daß man erhält:
$\operatorname{Tor}_1^S(k,R) \simeq k \otimes_S \mathfrak{a} = \mathfrak{a}/\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{a}$
Nach Krull-Nakayama ist aber $\dim_k\bigl(\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{a}\bigr) = \mu_S(\mathfrak{a})$, woraus dann die Behauptung des Hilfssatzes folgt. □

3.2.5. Satz. *Sei S ein regulärer lokaler Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von S und $R := S/\mathfrak{a}$. Dann gilt:*

(1)
$$\mu_S(\mathfrak{a}) = \dim S - \operatorname{edim} R + \varepsilon_1(R)$$

(2) *R ist genau dann ein vollständiger Durchschnitt, wenn gilt:*
$$\varepsilon_1(R) = \operatorname{edim} R - \dim R$$

Beweis. (1): Induktion nach $\mu_S(\mathfrak{a})$.
Induktionsbeginn bei $\mu_S(\mathfrak{a}) = 0$: In diesem Fall ist $R = S$ ein regulärer lokaler Ring und daher $\operatorname{edim} R = \operatorname{edim} S = \dim S$ und nach Anmerkung 2.1.22. außerdem $\varepsilon_1(R) = 0$. Also ist die Behauptung richtig.
Sei nun $\mu_S(\mathfrak{a}) = r > 0$ und sei die Behauptung schon bewiesen für alle regulären lokalen Ringe S' und alle $\mathfrak{a}'$ mit $\mu_{S'}(\mathfrak{a}') < r$.
Sei $\mathfrak{n}$ das maximale Ideal von S.
1. Fall: $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{n}^2$.
Dann hat man nach Hilfssatz 3.2.4. $\mu_S(\mathfrak{a}) = \varepsilon_1(R)$. Außerdem ist in diesem Fall $\operatorname{edim} R = \operatorname{edim} S = \dim S$, so daß die Aussage des Satzes gilt.

2. Fall: $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{n}^2$.
Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{n}^2$, also auch $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{a}$.
x ist dann sowohl Teil eines minimalen Erzeugendensystems von $\mathfrak{n}$ als auch Teil eines minimalen Erzeugendensystems von $\mathfrak{a}$.
Setze $S' := S/x \cdot S$ und $\mathfrak{a}' := \mathfrak{a}/x \cdot S$. Dann ist $\mu_{S'}(\mathfrak{a}') = \mu_S(\mathfrak{a}) - 1$, und nach Korollar 3.1.10. ist S' ein regulärer lokaler Ring mit $\dim S' = \dim S - 1$ und maximalem Ideal $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}/x \cdot S$. Außerdem ist $R = S/\mathfrak{a} = (S/x \cdot S)/(\mathfrak{a}/x \cdot S) = S'/\mathfrak{a}'$.
Nach Induktionsannahme hat man:
$\mu_{S'}(\mathfrak{a}') = \dim S' - \operatorname{edim} R + \varepsilon_1(R)$
und daher $\mu_S(\mathfrak{a}) = \mu_{S'}(\mathfrak{a}') + 1 = \underbrace{\dim S' + 1}_{=\dim S} - \operatorname{edim} R + \varepsilon_1(R)$. q.e.d.

(2): Nach Voraussetzung gibt es einen regulären lokalen Ring S und ein Ideal $\mathfrak{a}$ so daß $R \simeq S/\mathfrak{a}$ ist. Nach (1) ist $\mu_S(\mathfrak{a}) = \dim S - \operatorname{edim} R + \varepsilon_1(R)$.
Wenn $\varepsilon_1(R) = \operatorname{edim} R - \dim R$ ist, folgt $\mu_S(\mathfrak{a}) = \dim S - \dim R$, und nach Anmerkung 3.2.2. (1) ist R vollständiger Durchschnitt.
Umgekehrt: Wenn R vollständiger Durchschnitt ist, gibt es nach Anmerkung 3.2.2. (1) eine Darstellung $R = \widetilde{S}/\tilde{\mathfrak{a}}$, wobei $\widetilde{S}$ ein regulärer lokaler Ring und $\tilde{\mathfrak{a}}$ ein Ideal von $\widetilde{S}$ ist mit $\mu_{\widetilde{S}}(\tilde{\mathfrak{a}}) = \dim \widetilde{S} - \dim R$. Andererseits gilt nach (1) auch
$\mu_{\widetilde{S}}(\tilde{\mathfrak{a}}) = \dim \widetilde{S} - \operatorname{edim} R + \varepsilon_1(R)$. Ein Vergleich der beiden Formeln für $\mu_{\widetilde{S}}(\tilde{\mathfrak{a}})$ liefert $\varepsilon_1(R) = \operatorname{edim} R - \dim R$. □

Beweis von Satz 3.2.3. Sei R ein vollständiger Durchschnitt und sei $R \simeq S/\mathfrak{a}$, wobei S ein regulärer lokaler Ring ist. Dann ist nach Satz 3.2.5. (1) zusammen mit (2) $\mu(\mathfrak{a}) = \dim S - \operatorname{edim} R + \varepsilon_1(R) = \dim S - \operatorname{edim} R + \operatorname{edim} R - \dim R = \dim S - \dim R$. □

3.2.6. Satz. *Sei S ein regulärer lokaler Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von S und $R := S/\mathfrak{a}$. Dann gilt:*
R ist genau dann ein vollständiger Durchschnitt, wenn $\mathfrak{a}$ von einer S-Folge erzeugt wird.

Beweis. Da sich nach Satz 2.2.12. jede S-Folge zu einem Parametersystem verlängern läßt, ist R nach Definition 3.2.1. ein vollständiger Durchschnitt, wenn $\mathfrak{a}$ von einer S-Folge erzeugt wird.
Umgekehrt: Sei R ein vollständiger Durchschnitt und $R \simeq S/\mathfrak{a}$. Dann wird $\mathfrak{a}$ nach Satz 3.2.3. von einem System $\{x_1, \ldots, x_r\}$ von $r := \dim S - \dim R$ Elementen erzeugt. Nach [3, Satz 16.4.3. (2)] ist dann $\{x_1, \ldots, x_r\}$ Teil eines Parametersystems von S und daher nach Satz 2.3.8. eine S-Folge, weil S als regulärer lokaler Ring ein C-M-Ring ist (Korollar 3.1.9). □

3.2.7. Satz. *Sei R ein lokaler Ring, der Faktorring eines regulären lokalen Rings ist und $\widehat{R}$ seine Komplettierung. Dann gilt:*
R ist vollständiger Durchschnitt genau dann, wenn $\widehat{R}$ vollständiger Durchschnitt ist.

Beweis. Es ist $\operatorname{edim} R = \operatorname{edim} \widehat{R}$ und $\dim R = \dim \widehat{R}$. Ausserdem ist nach Anmerkung 2.1.23. auch $\varepsilon_1(R) = \varepsilon_1(\widehat{R})$.
Die Aussage des Satzes folgt dann aus Satz 3.2.5. (2). □

3.3. **Gorenstein-Ringe.**

3.3.1. Definition. Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und M ein R-Modul.
$\gamma(M) := \big((0) : \mathfrak{m}\big)_M = \{x \mid x \in M, \mathfrak{m} \cdot x = 0\}$
heißt der „Sockel von M“.

3.3.2. *Anmerkung.* Offenbar ist $\gamma(M)$ ein $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum.
Falls $\gamma(M) \neq (0)$ ist, ist es ein $\mathfrak{m}$-coprimärer R-Modul ([2], Def. 1.5.) und daher ist $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{m}\}$.
Falls M noethersch ist, hat $\gamma(M)$ endliche Länge als R-Modul, weil $\mathrm{Ass}(M)$ nur aus maximalen Idealen besteht.

3.3.3. Satz. *Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein noetherscher lokaler Ring, $k := R/\mathfrak{m}$, ferner M ein C-M-Modul über R und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Parametersystem für M. Dann gilt:*
$\gamma\big(M/(x_1, \ldots, x_n) \cdot M\big) \simeq \mathrm{Ext}^n_R(k, M)$ *als R-Moduln und als k-Vektorräume, also auch*
$\dim_k \gamma\big(M/(x_1, \ldots, x_n) \cdot M\big) = \dim_k \mathrm{Ext}^n_R(k, M)$.

Beweis. Da M ein C-M-Modul ist, ist nach Satz 2.3.8. jedes Parametersystem eine M-Folge, und daher gilt nach Satz 2.2.2.
$\mathrm{Ext}^n_R(k, M) \simeq \mathrm{Hom}_R\big(k, M/(x_1, \ldots, x_n) \cdot M)\big)$.
Andererseits gilt für jeden R-Modul L die Isomorphie $\mathrm{Hom}_R(k, L) \simeq \big((0) : \mathfrak{m}\big)_L$ vermöge: $\mathrm{Hom}_R(k, L) \ni \alpha \mapsto \alpha(\bar{1}) \in \big((0) : \mathfrak{m}\big)_L$ ¶ □

3.3.4. *Folgerung.* $\dim_k \gamma\big(M/(x_1, \ldots, x_n) \cdot M\big)$ ist unabhängig vom gewählten Parametersystem $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

(Für einen elementaren Beweis dieser Folgerung siehe [13], VI, Satz 3.17.)

3.3.5. Definition. Sei M ein C-M-Modul mit $\dim M = n$ über dem lokalen Ring R mit dem Restklassenkörper k.

$$\mathrm{r}(M) := \dim_k \mathrm{Ext}^n_R(k, M)$$

heißt der „Typ von M“.

Eine wichtige Rolle spielen C-M-Ringe vom Typ 1:

3.3.6. Definition. Lokale C-M-Ringe vom Typ 1 heißen „Gorenstein-Ringe“. Ein beliebiger noetherscher Ring R heißt „Gorenstein-Ring“, wenn alle Lokalisierungen $R_\mathfrak{m}$ nach den maximalen Idealen $\mathfrak{m}$ von R Gorenstein-Ringe sind.

3.3.7. Satz. *Sei M ein C-M-Modul über dem noetherschen lokalen Ring R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und $\widehat{M}$ seine $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung. Es gilt:*

$$\mathrm{r}(\widehat{M}) = \mathrm{r}(M)\,.$$

Beweis. Es ist $\dim \widehat{M} = \dim M =: n$. Wenn $\widehat{\mathfrak{m}}$ das maximale Ideal von $\widehat{R}$ bezeichnet, gilt $k := R/\mathfrak{m} = \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}} = \widehat{R} \otimes_R k$. Ferner ist nach Satz 2.3.3. der Modul $\widehat{M}$ genau dann ein C-M-Modul über $\widehat{R}$, wenn M ein C-M-Modul über R ist. Da $\widehat{R}$ flach über

¶ Wegen $\mathfrak{m} \cdot k = 0$ ist $\mathfrak{m} \cdot \alpha(\bar{1}) = 0$, also $\alpha(\bar{1}) \in \big((0) : \mathfrak{m}\big)_L$. Ferner ist $\alpha(\bar{1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ nach Definition von α, also ist $\alpha \mapsto \alpha(\bar{1})$ injektiv. Schließlich ist $\alpha \mapsto \alpha(\bar{1})$ auch surjektiv; denn für jedes $y \in L$ mit $\mathfrak{m} \cdot y = 0$ definiert $\alpha(\bar{r}) := r \cdot y$ ein $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(k, L)$ mit $\alpha(\bar{1}) = y$.

R ist, gilt nach Satz 2.2.8.
$\operatorname{Ext}^n_{\widehat{R}}(k, \widehat{M}) = \operatorname{Ext}^n_{\widehat{R}}(\widehat{R} \otimes_R k, \widehat{R} \otimes_R M) = \widehat{R} \otimes_R \operatorname{Ext}^n_R(k, M)$.
Weil $\mathfrak{m} \cdot \operatorname{Ext}^n_R(k, \bullet) = 0$ ist (Folgerung 1.6.37), ist weiter
$\widehat{R} \otimes_R \operatorname{Ext}^n_R(k, M) \simeq k \otimes_k \operatorname{Ext}^n_R(k, M) \simeq \operatorname{Ext}^n_R(k, M)$, so daß man schließlich erhält:
$\mathrm{r}(\widehat{M}) = \dim_k \operatorname{Ext}^n_{\widehat{R}}(k, \widehat{M}) = \dim_k \operatorname{Ext}^n_R(k, M) = \mathrm{r}(M)$. □

Für den Spezialfall $M = R$ erhält man daraus sofort:

3.3.8. Korollar. *Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein noetherscher lokaler Ring und $\widehat{R}$ seine $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung. Es gilt:*
R ist Gorenstein-Ring $\Longleftrightarrow$ $\widehat{R}$ ist Gorenstein-Ring.

Eine idealtheoretische Charakterisierung der Gorenstein-Ringe liefert der folgende Satz.

3.3.9. Satz. *Ein lokaler C-M-Ring ist genau dann ein Gorenstein-Ring, wenn das von einem (und dann von jedem) Parametersystem erzeugte Ideal (durchschnitts-) irreduzibel ist.*

Da ein Parametersystem ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal erzeugt, folgt die Aussage von Satz 3.3.9. aus dem folgenden Lemma 3.3.10.:

3.3.10. Lemma. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal. Dann gilt:*
$\mathfrak{q}$ ist (durchschnitts-) irreduzibel $\Longleftrightarrow$ $\dim_{R/\mathfrak{m}} \gamma(R/\mathfrak{q}) = 1$.

Beweis. Offenbar ist $\mathfrak{q}$ genau dann in R irreduzibel bzw reduzibel, wenn (0) in $R' := R/\mathfrak{q}$ irreduzibel bzw. reduzibel ist. Da $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal ist, wird jedes Element von R' von einer Potenz von $\mathfrak{m}$ annulliert. Daher enthält jeder von Null verschiedene Untermodul U ein Element $\neq 0$, das von $\mathfrak{m}$ annulliert wird, also ist $U \cap \gamma(R') \neq 0$.
Wenn der Nullmodul von R' reduzibel ist, gibt es zwei echte Untermoduln $(0) \subset U_1, U_2 \subset R'$ mit $U_1 \cap U_2 = (0)$. Da, wie oben gezeigt dann $U_i \cap \gamma(R') \neq 0$ ist für $i = 1, 2$, folgt $\dim_{R/\mathfrak{m}} \gamma(R') \geq 2$.
Umgekehrt: Falls $\dim_{R/\mathfrak{m}} \gamma(R') \geq 2$ ist, gibt es R-Untermoduln U_i von $\gamma(R')$ mit $U_1 \cap U_2 = (0)$. Da dies auch R-Untermoduln von R' sind, folgt daraus, daß der Nullmodul reduzibel in R' ist. □

Spezielle Gorenstein-Ringe sind die vollständigen Durchschnitte:

3.3.11. Satz. *Ein noetherscher lokaler Ring, der vollständiger Durchschnitt ist (insbesondere also auch ein regulärer lokaler Ring), ist auch ein Gorenstein-Ring.*

Beweis. Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein vollständiger Durchschnitt. Nach Anmerkung 3.2.2. (2) ist R dann ein C-M-Ring. Ferner besitzt R eine Darstellung $R = S/(x_1, \ldots, x_r)$ als Faktorring eines regulären lokalen Rings S nach einer S-regulären Folge $\{x_1, \ldots, x_r\}$ (Satz 3.2.6.). Nach Satz 2.2.12. läßt sich die S-Folge $\{x_1, \ldots, x_r\}$ zu einem Parametersystem $\{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r}\}$ von S verlängern, wobei $n := \dim S$ ist. Da S regulär ist, wird das maximale Ideal $\mathfrak{n}$ von S von einem Parametersystem erzeugt. Nach Folgerung 3.3.4. ist aber
$\dim_{S/\mathfrak{n}} \gamma\big(S/\text{Ideal, das von Parametersystem erzeugt wird}\big)$
unabhängig von der Wahl des Parametersystems, also ist
$\dim_{S/\mathfrak{n}} \gamma\big(S/(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r})\big) = \dim_{S/\mathfrak{n}} \gamma(S/\mathfrak{n}) = 1$.

Wenn wir mit $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-r}$ die Restklassen der $y_1, \dots, y_{n-r}$ modulo $(x_1, \dots, x_r)$ bezeichnen, ist $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-r}\}$ ein Parametersystem für R; denn es ist $\dim R = \dim S - r = n - r$ und $R/(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-r}) = S/(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r})$. Ferner ist $\dim_{R/\mathfrak{m}} \gamma\big(R/(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-r})\big) = \dim_{S/\mathfrak{n}} \gamma\big(S/(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots y_{n-r})\big) = 1$, also ist R ein Gorenstein-Ring nach Satz 3.3.3. □

Für lokale Gorensteinringe läßt sich eine der Bedingung (2) von Hauptsatz 2.3.10. entsprechende Charakterisierung angeben:

3.3.12. Satz. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit dem Restklassenkörper k und $n := \dim R$.*
Es sind sind äquivalent:

(1) *R ist ein Gorenstein-Ring.*
(2) $\operatorname{Ext}^p_R(k, R) \simeq \begin{cases} k & \text{für } p = n \\ 0 & \text{für } p \neq n \end{cases}$

Zum Beweis brauchen wir einen Hilfssatz:

3.3.13. Hilfssatz ([14], §18, Lemma 2)**.** *Sei R ein Ring, M, N zwei R-Moduln, $x \in R$ ein Nichtnullteiler für R und für M, so daß $x \cdot N = 0$ ist. Setze $R' := R/x \cdot R$ und $M' := M/x \cdot M$. Dann gilt:*

(1) $\operatorname{Hom}_R(N, M) = 0$.
(2) $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(N, M) \simeq \operatorname{Ext}^n_{R'}(N, M')$ *für alle $n \geq 0$.*

Beweis. (1): Sei $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(N, M)$ und $y \in N$. Dann ist $x \cdot y = 0$, also $x \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y) = \varphi(0) = 0$. Da x Nichtnullteiler für M ist, folgt $\varphi(y) = 0$ und daher ist $\varphi = 0$.

(2): *Vorbemerkung*: Jeder R'-Modul L ist vermöge $R \to R/x \cdot R = R'$ in natürlicher Weise auch ein R-Modul mit $x \cdot L = 0$, und jeder R-Modul L mit $x \cdot L = 0$ ist vermöge $R \to R/x \cdot R = R'$ in natürlicher Weise ein R'-Modul.
Ferner folgt aus $x \cdot L = 0$ nach Folgerung 1.6.37. auch $x \cdot \operatorname{Ext}^p_R(L, M) = 0$, so daß auch alle $\operatorname{Ext}^p_R(L, M)$ in natürlicher Weise R'-Moduln sind.
Sind L_1 und L_2 zwei R'-Moduln, so ist jede R-lineare Abbildung $L_1 \to L_2$ zugleich eine R'-lineare Abbildung und umgekehrt, so daß gilt $\operatorname{Hom}_R(L_1, L_2) = \operatorname{Hom}_{R'}(L_1, L_2)$. Insbesondere ist also $\operatorname{Hom}_R(L, M') = \operatorname{Hom}_{R'}(L, M')$.

Betrachte $\mathcal{F}^n(\bullet) := \operatorname{Ext}^{n+1}_R(\bullet, M)$ als kontravarianten Funktor auf der Kategorie der R'-Moduln. Wir zeigen, daß $\mathcal{F}^n$ die drei Eigenschaften für rechtsabgeleitete Funktoren aus Satz 1.6.33 für $\mathcal{R}^n \operatorname{Hom}_{R'}(\bullet, M') = \operatorname{Ext}^n_{R'}(\bullet, M')$ erfüllt und somit gilt $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(N, M) = \mathcal{F}^n(N) \simeq \operatorname{Ext}^n_{R'}(N, M')$.
Beweis: 1) Weil x ein Nichtnullteiler für M ist, hat man die exakte Folge von R-Moduln $0 \to M \xrightarrow{\mu_x} M \to M' \to 0$, wobei μ_x die Multiplikation mit x bezeichnet. Wegen $\operatorname{Hom}_R(N, M) = 0$ und $x \cdot \operatorname{Ext}^1_R(N, M) = 0$ erhält man (s. Vorbemerkung) aus der zugehörigen langen exakten Homologiefolge für $\operatorname{Hom}_R(N, \bullet)$ die exakte Folge von R-Moduln
$0 = \operatorname{Hom}_R(N, M) \to \operatorname{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{\partial_1} \operatorname{Ext}^1_R(N, M) \to 0$
und daher
$\mathcal{F}^0(N) = \operatorname{Ext}^1_R(N, M) \simeq \operatorname{Hom}_R(N, M') \simeq \operatorname{Hom}_{R'}(N, M')$.
2) Da x auch ein Nichtnullteiler für R ist, hat man die exakte Folge von R-Moduln
$0 \to R \xrightarrow{\mu_x} R \to R' \to 0$.

Das ist eine freie Auflösung der Länge 1 von R' als R-Modul, (Wegen $x \neq 0$ ist R' als R-Modul nicht frei.) Sei nun F ein freier R'-Modul. Dann ist F eine direkte Summe von R-Moduln $B_i \simeq R'$. Nach obigem hat jeder R-Modul B_i eine freie Auflösung der Länge 1

$0 \to G_i \xrightarrow{\nu_i} F_i \xrightarrow{\pi_i} B_i \to 0$

mit $G_i = F_i = R$ als R-Moduln und $\nu_i = \mu_x$. Dann ist

$0 \to \bigoplus_i G_i \xrightarrow{\bigoplus \nu_i} \bigoplus_i F_i \xrightarrow{\bigoplus \pi_i} \bigoplus_i B_i = F \to 0$

eine freie Auflösung der Länge 1 von F als R-Modul. Also gilt für jeden freien R'-Modul F dann $\mathrm{pdim}_R(F) = 1$ und daher auch $\mathrm{Ext}_R^p(F, M) = 0$ für alle $p > 1$. Sei nun P ein projektiver R'-Modul. Dann ist P direkter Summand eines freien R'-Moduls F, d.h. es gibt einen R'-Modul Q mit $F = P \oplus Q$. Da $\mathrm{Ext}_R^p(\bullet, M)$ ein additiver Funktor ist, folgt daraus nach Hilfssatz 1.1.7. $\mathrm{Ext}_R^p(F, M) = \mathrm{Ext}_R^p(P, M) \oplus \mathrm{Ext}_R^p(Q, M)$. Für alle $p > 1$ ist aber, wie oben gezeigt, $\mathrm{Ext}_R^p(F, M) = 0$, also ist auch $\mathrm{Ext}_R^p(P, M) = 0$ als Untermodul von $\mathrm{Ext}_R^p(F, M)$. Man hat also

$\mathcal{F}^n(P) = \mathrm{Ext}_R^{n+1}(P, M) = 0$ für alle $n > 0$, wenn P ein projektiver R'-Modul ist.

3) Sei

$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$

eine kurze exakte Folge von R'-Moduln. Dann ist das auch eine kurze exakte Folge von R-Moduln.

Die zugehörige lange kontravariante Ext-Folge zu $\mathrm{Hom}_R(\bullet, M)$ lautet:

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Hom}_R(N'', M)}_{=0} \to \underbrace{\mathrm{Hom}_R(N, M)}_{=0} \to \underbrace{\mathrm{Hom}_R(N', M)}_{=0}$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}_R^1(N'', M)}_{=\mathcal{F}^0(N'')=\mathrm{Hom}_{R'}(N'',M')} \to \underbrace{\mathrm{Ext}_R^1(N, M)}_{=\mathcal{F}^0(N)=\mathrm{Hom}_{R'}(N,M')} \to \underbrace{\mathrm{Ext}_R^1(N', M)}_{=\mathcal{F}^0(N')=\mathrm{Hom}_{R'}(N',M')}$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}_R^2(N'', M)}_{=\mathcal{F}^1(N'')} \to \underbrace{\mathrm{Ext}_R^2(N, M)}_{=\mathcal{F}^1(N)} \to \underbrace{\mathrm{Ext}_R^2(N', M)}_{=\mathcal{F}^1(N')}$$

$$\to \cdots,$$

also

$0 \to \mathrm{Hom}_{R'}(N'', M') \to \mathrm{Hom}_{R'}(N, M') \to \mathrm{Hom}_{R'}(N', M') \to \mathcal{F}^1(N'') \to \mathcal{F}^1(N) \to \mathcal{F}^1(N') \to \cdots$

exakt.

Aus 1)–3) folgt nach Satz 1.6.33., daß $\mathcal{F}^n(N) = \mathcal{R}^n \mathrm{Hom}_{R'}(N, M')$ ist. Also ist $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N, M) \simeq \mathrm{Ext}_{R'}^n(N, M')$ für alle $n \geq 0$. $\square$

Beweis von Satz 3.3.12. (2)$\Rightarrow$(1): Da insbesondere $\mathrm{Ext}_R^p(k, R) = 0$ ist für alle $p < n$ und $\mathrm{Ext}_R^n(k, R) \neq 0$ ist, ist R nach Haupsatz 2.3.10. ein C-M-Ring. Ausserdem ist sogar $\mathrm{Ext}_R^n(k, R) \simeq k$, also $\dim_k \mathrm{Ext}_R^n(k, R) = 1$, und daher ist $\mathrm{r}(R) = 1$.

(1)$\Rightarrow$(2): Als Gorensteinring ist R ein C-M-Ring, also ist $\mathrm{Ext}_R^p(k, R) = 0$ für alle $p < n$ nach Haupsatz 2.3.10. Ferner ist nach Definition von Gorenstein-Ringen $\mathrm{r}(R) = 1$, d.h. $\dim_k \mathrm{Ext}_R^n(k, R) = 1$ und daher $\mathrm{Ext}_R^n(k, R) \simeq k$. Bleibt zu zeigen, daß auch $\mathrm{Ext}_R^i(k, R) = 0$ ist für alle $i > n$:

Sei $\mathfrak{q}$ ein von einem Parametersystem von R erzeugtes Ideal. Dieses ist nach Satz 3.3.9.

irreduzibel. Sei $R' = R/\mathfrak{q}$. Dann ist in R' das Nullideal irreduzibel. Ferner ist R' nulldimensional und von endlicher Länge.
Da jedes Parametersystem in einem C-M-Ring auch eine R-Folge ist. folgt aus Hilfssatz 3.3.13. (2) induktiv $\mathrm{Ext}_R^{n+i}(k,R) \simeq \mathrm{Ext}_{R'}^i(k,R')$ für alle $i \geq 0$.
Es genügt also zu zeigen, daß für einen nulldimensionalen lokalen Ring S endlicher Länge mit Restklassenkörper k, in dem das Nullideal irreduzibel ist, gilt:
$\mathrm{Ext}_S^i(k,S) = 0$ ist für alle $i > 0$:
Sei $(0) = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_r = S$ eine Kompositionsreihe von S, also $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i-1} \simeq k$ und $r = \ell_S(S)$.
Betrachte die kurzen exakten Folgen:

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathfrak{a}_1 \quad \longrightarrow \mathfrak{a}_2 \quad \longrightarrow k \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathfrak{a}_2 \quad \longrightarrow \mathfrak{a}_3 \quad \longrightarrow k \longrightarrow 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \longrightarrow \mathfrak{a}_i \quad \longrightarrow \mathfrak{a}_{i+1} \longrightarrow k \longrightarrow 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \longrightarrow \mathfrak{a}_{r-1} \longrightarrow S \quad \longrightarrow k \longrightarrow 0 \end{array}$$

Wende auf diese Folgen den Funktor $\mathrm{Hom}_S(\bullet, S)$ an. Weil (0) irreduzibel in S ist, ist der Sockel von S eindimensional, und daher ist $\mathrm{Hom}_S(k,S) = \mathrm{Ext}_S^0(k,S) \simeq k$. Ferner ist auch $\mathfrak{a}_1 \simeq k$, also $\mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_1, S) \simeq k$, so daß man aus der ersten Folge die lange exakte Folge erhält:

$$0 \to k \to \mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_2, S) \to k \xrightarrow{\partial_{1,1}} \mathrm{Ext}_S^1(k,S) \to \cdots .$$

Es folgt:
$\ell_S\big(\mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_2,S)\big) = 1 + 1 - \ell_S\big(\mathrm{Im}\,\partial_{1,1}\big) \leq 2$ und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\partial_{1,1} = 0$ ist.
Allgemeiner erhält man aus der i-ten Folge die lange exakte Folge

$$0 \to k \to \mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_{i+1}, S) \to \mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_i, S) \xrightarrow{\partial_{i,1}} \mathrm{Ext}_S^1(k,S) \to \cdots .$$

Behauptung: $\ell_S\big(\mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_i,S)\big) \leq i$ und "=" gilt genau dann, wenn $\partial_{1,1}, \dots, \partial_{i-1,1}$ alle Null sind.
Beweis Induktion nach i. Für $i = 2$ wurde es oben gezeigt.
Sei nun die Behauptung für ein $i \geq 2$ richtig, so folgt aus der langen exakten Folge: $\ell_S\big(\mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_{i+1},S)\big) = 1 + \ell_S\big(\mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_i,S)\big) - \ell_S\big(\mathrm{Im}\,\partial_{i,1}\big) \leq 1 + \ell_S\big(\mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_i,S)\big)$ und "=" gilt genau dann, wenn $\partial_{i,1} = 0$ ist. Setzt man für $\ell_S\big(\mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_i,S)\big)$ die Induktionsannahme für i ein, so folgt die Behauptung für $i+1$.
Nun gilt aber das Gleichheitszeichen für $i = r$; denn es ist
$\ell_S(\mathrm{Hom}_S(\mathfrak{a}_r,S)\big) = \ell_S\big(\mathrm{Hom}_S(S,S)\big) = \ell_S(S) = r$. Es folgt $\partial_{1,1} = \cdots = \partial_{r-1,1} = 0$.
Aus der zur exakten Folge $0 \longrightarrow \mathfrak{a}_{r-1} \longrightarrow S \longrightarrow k \longrightarrow 0$ gehörigen langen exakten Folge erhält man dann wegen $\partial_{r-1,1} = 0$ die exakte Folge:
$0 \to \mathrm{Ext}_S^1(k,S) \to \mathrm{Ext}_S^1(S,S) = 0$, also ist $\mathrm{Ext}_S^1(k,S) = 0$.
Nun ist das maximale Ideal das einzige Primideal von S, weil S nulldimensional ist. Aus Satz 2.7.2. folgt dann, daß $\mathrm{idim}_S\, S = 0$, also S ein injektiver S-Modul ist. Dann ist aber auch $\mathrm{Ext}_S^i(k,S) = 0$ für alle $i > 0$. □

Lokale Gorenstein-Ringe lassen sich auch charakterisieren als lokale Ringe von endlicher injektiver Dimension:

3.3.14. Satz. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit Restklassenkörper k, und sei $n := \dim R$.*
Folgende Aussagen sind äquivalent.

(1) $\mathrm{idim}_R(R) < \infty$.
(2) $\mathrm{idim}_R(R) = \dim R$.
(3) *R ist ein Gorensteinring.*
(4) *Es gibt ein $p > n$ mit* $\mathrm{Ext}_R^p(k, R) = 0$.

Zum Beweis nach [14] brauchen wir zunächst einige weitere Hilfssätze:

3.3.15. Hilfssatz. *Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Sei ferner* $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = 1$. *Dann gilt:*

$$\mathrm{Ext}_R^{i+1}(R/\mathfrak{m}, M) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M) = 0$$

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$. Da x kein Nullteiler für $R/\mathfrak{p}$ ist, hat man eine exakte Folge
$(*) \qquad 0 \to R/\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu_x} R/\mathfrak{p} \to R/(\mathfrak{p} + R \cdot x) \to 0,$
wobei μ_x die Multiplikation mit x bezeichnet. Wegen $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = 1$ ist ferner $\mathfrak{p} + R \cdot x$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, also hat $N := R/(\mathfrak{p} + R \cdot x)$ endliche Länge. Es gibt also eine Kette von Untermoduln von N
$(0) = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_r = N$ mit $N_{j+1}/N_j \simeq R/\mathfrak{m}$ für alle $j = 0, \ldots, r-1$.
Da nach Voraussetzung $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(R/\mathfrak{m}, M) = 0$ ist, folgt wie beim Beweis von Satz 2.7.2. (3)⇒(2), daß auch $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(R/(\mathfrak{p} + R \cdot x), M) = 0$ ist. Die zu der exakten Folge $(*)$ gehörige lange kontravariante exakte Ext-Folge ergibt dann die exakte Folge
$\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{\mu_x} \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M) \to \mathrm{Ext}_R^{i+1}(R/(\mathfrak{p} + R \cdot x), M) = 0\,.$
Also ist $x \cdot \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M) = \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M)$ und daher nach Krull-Nakayama bereits $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M) = 0\,.$ □

3.3.16. Hilfssatz. *Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R.*
Sei ferner $d :=$ $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p})$. *Dann gilt:*

$$\mathrm{Ext}_R^{i+d}(R/\mathfrak{m}, M) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ext}_{R_\mathfrak{p}}^i\big(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}\big) = 0\,.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$ eine Primidealkette der Länge d zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$. Dann ist diese unverfeinerbar, also $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i+1}) = 1$.
Wir zeigen durch Induktion nach j, daß gilt $\mathrm{Ext}_{R_{\mathfrak{p}_j}}^{i+d-j}(R_{\mathfrak{p}_j}/\mathfrak{p}_j \cdot R_{\mathfrak{p}_j}, M_{\mathfrak{p}_j}) = 0$ für alle $j = 0, \ldots, d$. Für $j = d$ erhält man dann die Aussage des Hilfssatzes.
Für $j = 0$ ist nichts zu zeigen; denn es ist
$\mathrm{Ext}_{R_\mathfrak{m}}^{i+d}(R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m} \cdot R_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) = R_\mathfrak{m} \otimes_R \mathrm{Ext}_R^{i+d}(R/\mathfrak{m}, M)$ nach Satz 2.2.8.
Sei nun $j > 0$ und sei die Behauptung für $j-1$ schon gezeigt. Sei $S := R_{\mathfrak{p}_{j-1}}$ und $\mathfrak{M} := \mathfrak{p}_{j-1} \cdot R_{\mathfrak{p}_{j-1}}$ das maximale Ideal von $R_{\mathfrak{p}_{j-1}}$ sowie $\mathfrak{P}_j := \mathfrak{p}_j \cdot R_{\mathfrak{p}_{j-1}}$.
Dann ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{M}/\mathfrak{P}_j) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{j-1}/\mathfrak{p}_j) = 1$.
Außerdem ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{Ext}_S^{i+d-(j-1)}(S/\mathfrak{M}, M_{\mathfrak{p}_{j-1}}) = 0$.
Nach Hilfssatz 3.3.15. folgt daraus
$\mathrm{Ext}_S^{i+d-j}(S/\mathfrak{P}_j, M_{\mathfrak{p}_{j-1}}) = 0$.
Nun ist aber $R_{\mathfrak{p}_j} = S_{\mathfrak{P}_j}$, $(S/\mathfrak{P}_j)_{\mathfrak{P}_j} = R_{\mathfrak{p}_j}/\mathfrak{p}_j \cdot R_{\mathfrak{p}_j}$, $(M_{\mathfrak{p}_{j-1}})_{\mathfrak{P}_j} = M_{\mathfrak{p}_j}$, so daß sich durch Lokalisieren nach $\mathfrak{P}_j$ (Satz 2.2.8.) ergibt: $\mathrm{Ext}_{R_{\mathfrak{p}_j}}^{i+d-j}(R_{\mathfrak{p}_j}/\mathfrak{p}_j \cdot R_{\mathfrak{p}_j}, M_{\mathfrak{p}_j}) = 0\,.$ □

Beweis von Satz 3.3.14.
(1)⇒(2): *Vorbemerkung*: Sei $r := \mathrm{idim}_R(R)$. Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von R mit $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = \dim R =: n$. Als minimales Primideal gehört $\mathfrak{p}$ zu $\mathrm{Ass}(R)$ und damit

ist auch $\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R_\mathfrak{p})$. Also gibt es einen R-Untermodul $U \simeq R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}$ in $R_\mathfrak{p}$. Die Injektion $U \to R_\mathfrak{p}$ ist dann ein Element $\neq 0$ von $\mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}\big(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}\big)$, also ist $\mathrm{Ext}^0_{R_\mathfrak{p}}\big(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}\big) = \mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}\big(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}\big) \neq 0$. Nach Hilfssatz 3.3.16. ist dann auch $\mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{m}, R) \neq 0$. Wäre $r < n$, also $r \leq n-1$, so wäre nach Satz 2.5.6. $\mathrm{Ext}^n_R(N, R) = 0$ für alle R-Moduln N, also auch $\mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{m}, R) = 0$ im Widerspruch zu dem oben gezeigten. Also ist $r \geq n$.
Wir zeigen nun die Behauptung durch Induktion nach r.
Falls $r = 0$ ist, ist dann auch $n = 0$, also $\mathrm{idim}_R(R) = \dim R$.
Sei nun $r > 0$ und die Behauptung schon gezeigt für alle Ringe R' mit $\mathrm{idim}\, R' < r$. Betrachte den Funktor $\mathrm{Ext}^r_R(\bullet, R)$. Wegen Satz 2.5.6 ist $\mathrm{Ext}^{r+1}_R(\bullet, R) = 0$. Man erhält daher aus der langen exakten kontravarianten Ext-Folge (Satz 1.6.21.), daß $\mathrm{Ext}^r_R(\bullet, R)$ ein *rechtsexakter* kontravarianter Funktor ist.
Nach Satz 2.7.2. gibt es ferner ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathrm{Ext}^r_R(R/\mathfrak{p}, R) \neq 0$.
Wäre $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, so gäbe es ein Element $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$. Da $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist, ist die Multiplikation μ_x mit x injektiv, so daß man eine exakte Folge erhielte
$0 \to R/\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu_x} R/\mathfrak{p}$. Wendet man darauf den rechtsexakten Funktor $\mathrm{Ext}^r_R(\bullet, R)$ an, so ginge diese über in die exakte Folge
$\mathrm{Ext}^r_R(R/\mathfrak{p}, R) \xrightarrow{\mu_x} \mathrm{Ext}^r_R(R/\mathfrak{p}, R) \to 0$
(Beachte Satz 1.6.35.). Dann wäre also $x \cdot \mathrm{Ext}^r_R(R/\mathfrak{p}, R) = \mathrm{Ext}^r_R(R/\mathfrak{p}, R)$ und daher nach Krull-Nakayama auch $\mathrm{Ext}^r_R(R/\mathfrak{p}, R) = 0$, weil $x \in \mathfrak{m}$.
Nach Voraussetzung war aber $\mathrm{Ext}^r_R(R/\mathfrak{p}, R) \neq 0$, so daß folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ und daher ist $\mathrm{Ext}^r_R(k, R) \neq 0$.
$\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}(R)$; denn sonst gäbe es einen R-Untermodul $\simeq k$ in R, also eine exakte Folge $0 \to k \to R$. Die Anwendung des rechtsexakten Funktors $\mathrm{Ext}^r_R(\bullet, R)$ ergäbe eine exakte Folge $\mathrm{Ext}^r_R(R, R) \to \mathrm{Ext}^r_R(k, R) \to 0$. Nun ist aber $\mathrm{Ext}^r_R(R, R) = 0$, weil R frei ist, also wäre $\mathrm{Ext}^r_R(k, R) = 0$ im Widerspruch zu dem oben gezeigten. Daher gibt es ein $x \in \mathfrak{m}$, welches Nichtnullteiler für R ist. Sei $R' := R/x \cdot R$. Jeder R'-Modul L ist dann vermöge des kanonischen Homomorphismus $R \to R'$ auch ein R-Modul mit $x \cdot L = 0$. Nach Hilfssatz 3.3.13. ist dann $\mathrm{Ext}^i_{R'}(L, R') = \mathrm{Ext}^{i+1}_R(L, R)$ für jeden R'-Modul L und daher $\mathrm{idim}_{R'}(R') \leq \mathrm{idim}_R(R) - 1 = r - 1$. Nun ist aber k auch der Restklassenkörper von R' und daher ein R'-Modul. Wie oben gezeigt wurde ist $\mathrm{Ext}^r_R(k, R) \neq 0$. Also ist auch $\mathrm{Ext}^{r-1}_{R'}(k, R') = \mathrm{Ext}^r_R(k, R) \neq 0$ und somit auch $\mathrm{idim}_{R'}(R') \geq r - 1$, insgesamt also $\mathrm{idim}_{R'}(R') = r - 1$.
Es ist aber auch $\dim R' = \dim R - 1$ nach [3] Satz 16.4.3., weil $\{x\}$ als R-reguläre Folge Teil eines Parametersystems für R ist (Satz 2.2.12). Nach Induktionsvoraussetzung gilt $r - 1 = \mathrm{idim}_{R'}(R') = \dim R' = n - 1$, also ist $r = n$. q.e.d.

(2)$\Rightarrow$(3): Induktion nach $n := \dim R$:
Induktionsanfang bei $n = 0$: In diesem Fall ist $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(R)$, also gibt es einen R-Untermodul von R, der isomorph zu $R/\mathfrak{m} = k$ ist. Man hat also eine exakte Folge $0 \to k \to R$. Nach Voraussetzung (2) ist $\mathrm{idim}_R(R) = 0$, also R injektiv, so daß $\mathrm{Hom}_R(\bullet, R)$ rechtsexakt ist. Man erhält so aus der obigen exakten Folge die exakte Folge $R = \mathrm{Hom}_R(R, R) \to \mathrm{Hom}_R(k, R) \to 0$.
Daher wird $\mathrm{Hom}_R(k, R)$ von einem Element erzeugt. Die obige Injektion von k nach R ist ein Element $\neq 0$ von $\mathrm{Hom}_R(k, R)$, also ist $\mathrm{Hom}_R(k, R)$ monogen und $\neq 0$ und daher $\mathrm{Ext}^0_R(k, R) = \mathrm{Hom}_R(k, R) \simeq k$, also $\mathrm{r}(R) = 1$. Ferner ist R wegen $\dim R = 0$ trivialerweise C-M-Ring. Also ist R ein Gorensteinring.
Sei nun $n > 0$ und sei die Behauptung bewiesen für alle Ringe mit Dimension $< n$.

Wie unter (1)$\Rightarrow$(2) gezeigt wurde, ist auf Grund der endlichen injektiven Dimension von R in diesem Fall $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}(R)$. Also gibt es einen Nichtnullteiler $y \in \mathfrak{m}$. Sei $R' := R/y \cdot R$. Dann hat R' ebenfalls den Restklassenkörper k und es ist, wie am Ende von (1)$\Rightarrow$(2) gezeigt, $\dim R' = \dim R - 1 = n - 1$ und auch
$\mathrm{idim}_{R'}(R') = \mathrm{idim}_R(R) - 1 = n - 1$. Nach Hilfssatz 3.3.13. ist dann
$$\mathrm{Ext}^i_R(k, R) = \mathrm{Ext}^{i-1}_{R'}(k, R') = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < i \neq n \\ k & \text{für } i = n, \end{cases}$$
wobei die letzte Gleichheit nach Induktionsannahme gilt, und auch
$\mathrm{Ext}^0_R(k, R) = \mathrm{Hom}_R(k, R) = 0$. Aus Satz 3.3.12 folgt dann, daß R ein Gorensteinring ist.

(3)$\Rightarrow$(4): Nach Satz 3.3.12. gilt sogar für *alle* $p > n$, daß $\mathrm{Ext}^p_R(k, R) = 0$ ist.

(4)$\Rightarrow$(1): Induktion nach $n := \dim R$.

$n = 0$: Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist das einzige Primideal von R. Nach (4) ist
$\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{m}, R) = 0$ für ein $p > 0$, also ist nach Satz 2.7.2. dann $\mathrm{idim}_R(R) \leq p-1 < \infty$.

$n > 0$: Sei die Behauptung schon gezeigt für alle noetherschen lokalen Ringe einer Dimension $< n$. Nach (4) ist $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{m}, R) = 0$ für ein $p > n$. Wir zeigen, daß auch für alle Primideale $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ gilt $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R) = 0$. (Nach Satz 2.7.2. ist dann $\mathrm{idim}_R(R) \leq p - 1 < \infty$. q.e.d.)

Sei $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ ein Primideal von R und $d := \mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p})$. Da nach (4) gilt $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{m}, R) = 0$ für ein $p > n$, ist nach Hilfssatz 3.3.16. dann $\mathrm{Ext}^{p-d}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) = 0$. Ferner ist offenbar $\dim R_\mathfrak{p} \leq \dim R - d < p - d$. Also ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{idim}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) < \infty$ und somit nach (1)$\Rightarrow$(2) auch $\mathrm{idim}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) = \dim R_\mathfrak{p}$. Da Ext in unserer Situation mit Lokalisierung vertauscht (Satz 2.2.8), gilt dann für jeden endlich erzeugten R-Modul M nach Satz 2.5.6.
$\big(\mathrm{Ext}^p_R(M, R)\big)_\mathfrak{p} = \mathrm{Ext}^p_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) = 0\,;$
denn es ist ja $p > n > \mathrm{idim}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})$. Daher liegt keines dieser Primideale $\neq \mathfrak{m}$ in $\mathrm{Supp}\big(\mathrm{Ext}^p_R(M, R)\big)$, so daß gilt $\mathrm{Supp}\big(\mathrm{Ext}^p_R(M, R)\big) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$.

Da außerdem $\mathrm{Ext}^p_R(M, R)$ ein endlich erzeugter R-Modul ist, weil M endlich erzeugt ist, gilt $\ell_R\big(\mathrm{Ext}^p_R(M, R)\big) < \infty$.

Wir zeigen nun, daß daraus folgt $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R) = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$:

Gäbe es ein $\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R) \neq 0$, so gäbe es auch ein bzgl. dieser Eigenschaft maximales $\mathfrak{p}$, weil R noethersch ist. Sei also $\mathfrak{p}$ ein solches. Da nach Voraussetzung $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{m}, R) = 0$ ist ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, und daher gibt es ein $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$. Da x kein Nullteiler für $R/\mathfrak{p}$ ist, hat man eine exakte Folge
$$0 \to R/\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu_x} R/\mathfrak{p} \to R/(\mathfrak{p} + R \cdot x) \to 0,$$
wobei μ_x die Multiplikation mit x bezeichnet. Da $R/(\mathfrak{p} + R \cdot x)$ ein endlich erzeugter R-Modul und R noethersch ist, gibt es eine Kette von Untermoduln
$(0) = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_r = R/(\mathfrak{p}+R\cdot x)$ mit $N_{i+1}/N_i \simeq R/\mathfrak{p}_i$ für gewisse Primideale $\mathfrak{p}_i$ von R ([7] §1 no 4 Théorème 1). Dann ist $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}_R(N_{i+1}/N_i)$. Andererseits gilt aber auch $(\mathfrak{p} + R \cdot x) \cdot (N_{i+1}/N_i) = 0$, weil $N_{i+1} \subseteq R/(\mathfrak{p} + R \cdot x)$ ist. Also ist $\mathfrak{p}_i \supsetneq \mathfrak{p}$, und wegen der Maximalität von $\mathfrak{p}$ ist daher $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}_i, R) = 0$ für alle i. Wie im Beweis von Satz 2.7.2. (3)$\Rightarrow$(2) schließt man daraus $\mathrm{Ext}^p_R\big(R/(\mathfrak{p} + R \cdot x), R\big) = 0$.

Aus der zu der kurzen exakten Folge $0 \to R/\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu_x} R/\mathfrak{p} \to R/(\mathfrak{p} + R \cdot x) \to 0$ gehörigen langen kontravarianten Ext-Folge erhält man daher die exakte Folge
$$0 = \mathrm{Ext}^p_R\big(R/(\mathfrak{p} + R \cdot x), R\big) \to \mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R) \xrightarrow{\mu_x} \mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R),$$
also ist die Multiplikation mit x eine injektive Abbildung von $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R)$ in sich.

Da dieser Modul aber endliche Länge hat, folgt aus der Injektivität die Surjektivität, so daß man erhält $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R) = x\cdot\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R)$. Nach Krull-Nakayama folgt daraus $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R) = 0$ im Widerspruch zur Auswahl von $\mathfrak{p}$. Also ist $\mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{p}, R) = 0$ für *alle* Primideale $\mathfrak{p}$ von R. $\square$

3.4. **Eindimensionale Gorenstein-Ringe.** Bei eindimensionalen Ringen hat man besonders einfache Kriterien, zu erkennen, ob es sich um einen Gorenstein-Ring handelt. Wir erweitern zunächst die Definition des Inversen eines Ideals auf den Fall, daß der Ring Nullteiler besitzt:

3.4.1. Definition. Sei R ein Ring und $K := \mathrm{Quot}(R)$ sein voller Quotientenring. Ferner sei $\mathfrak{a}$ ein (gebrochenes) R-Ideal aus K. (D.h. $\mathfrak{a}$ ist ein R-Untermodul von K, so daß es einen Nichtnullteiler $y \in R$ gibt mit $y \cdot \mathfrak{a} \subseteq R$.)
$\mathfrak{a}^{-1} := \{x \mid x \in K, \quad x \cdot \mathfrak{a} \subseteq R\}$.

Aus der Definition folgt sofort:

3.4.2. *Anmerkung.* Sei R ein Ring und $K := \mathrm{Quot}(R)$ sein voller Quotientenring. Ferner sei $\mathfrak{a}$ ein R-Ideal aus K und t ein Nichtnullteiler aus K. Dann gilt:
$(t \cdot \mathfrak{a})^{-1} = t^{-1} \cdot \mathfrak{a}^{-1}$.

3.4.3. Satz. *Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein lokaler C-M-Ring der Dimension 1 und $y \in \mathfrak{m}$ ein Nichtnullteiler. Dann gilt:*
$\gamma\big(R/y \cdot R\big) \simeq \mathfrak{m}^{-1}/R$ *als R-Moduln und als $R/\mathfrak{m}$-Vektorräume.*

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{m}^{-1}$. Wegen $y \in \mathfrak{m}$ ist dann $x\cdot y \in R$ und $\mathfrak{m}\cdot(x\cdot y) = (\mathfrak{m}\cdot x)\cdot y \in R\cdot y$, d.h. $\overline{x \cdot y} \in \gamma(R/y \cdot R)$. Dabei bezeichnet die Überstreichung die Restklasse modulo $y \cdot R$.
Die Multiplikation mit y definiert also eine R-lineare Abbildung
$\varphi : \mathfrak{m}^{-1} \ni x \mapsto \overline{x \cdot y} \in \gamma\big(R/y \cdot R\big)$.
Es ist $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot y \in y \cdot R \Leftrightarrow x \in R$, weil y ein Nichtnullteiler von R ist. Also ist $\mathrm{Ker}\,\varphi = R$ und somit induziert φ eine *injektive* R-lineare Abbildung
$\bar\varphi : \mathfrak{m}^{-1}/R \to \gamma\big(R/y \cdot R\big)$.
$\bar\varphi$ ist aber auch surjektiv:
Sei $\bar z \in \gamma\big(R/y \cdot R\big)$. Dann ist $z \in R$ mit $z \cdot \mathfrak{m} \subseteq y \cdot R \Leftrightarrow \frac{z}{y} \cdot \mathfrak{m} \subseteq R \Leftrightarrow \frac{z}{y} \in \mathfrak{m}^{-1}$.
Folglich ist $\bar z = \varphi\big(\frac{z}{y}\big)$.
$\bar\varphi$ ist also ein R-Isomorphismus, und, da sowohl $\mathfrak{m}^{-1}/R$ als auch $\gamma\big(R/y \cdot R\big)$ in natürlicher Weise $R/\mathfrak{m}$-Vektorräume sind, auch ein $R/\mathfrak{m}$-Isomorphismus. $\square$

3.4.4. Korollar. *Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein lokaler Ring der Dimension 1. Es gilt:*
R ist ein Gorenstein-Ring $\Leftrightarrow \dim_{R/\mathfrak{m}}\big(\mathfrak{m}^{-1}/R\big) = 1$.

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$: Als Gorenstein-Ring ist R ein C-M-Ring. Also gibt es in $\mathfrak{m}$ einen Nichtnullteiler y. Wegen $\dim R = 1$ ist $\{y\}$ ein Parametersystem für R. Nach Satz 3.4.3 ist $\mathfrak{m}^{-1}/R$ isomorph zum Sockel von $R/y \cdot R$ und dieser hat nach Definition eines Gorenstein-Rings die Dimension 1 über $R/\mathfrak{m}$.

$\underline{\Leftarrow}$: Bestünde $\mathfrak{m}$ nur aus Nullteilern, so wäre $\mathrm{Quot}(R) = R$, also auch $\mathfrak{m}^{-1} = R$. Da aber nach Voraussetzung $\dim_{R/\mathfrak{m}}\big(\mathfrak{m}^{-1}/R\big) = 1$ ist, enthält $\mathfrak{m}$ einen Nichtnullteiler y. Also ist R ein C-M-Ring und $\{y\}$ ein Parametersystem. Da nach Satz 3.4.3 $\mathfrak{m}^{-1}/R$ isomorph zum Sockel von $R/y \cdot R$ ist, folgt aus $\dim_{R/\mathfrak{m}}\big(\mathfrak{m}^{-1}/R\big) = 1$, daß R ein Gorenstein-Ring ist. $\square$

Eine Klasse von eindimensionalen Gorensteinringen sind die eindimensionalen lokalen C-M-Ringe, deren maximales Ideal von 2 Elementen erzeugt wird:

3.4.5. Satz ([1], Satz 2). *Sei R ein lokaler eindimensionaler C-M-Ring, dessen maximales Ideal von zwei Elementen erzeugt wird. Dann ist R ein Gorenstein-Ring.*

Beweis. Weil R ein C-M-Ring ist, enthält $\mathfrak{m}$ einen Nichtnullteiler. Im Hinblick auf das Kriterium von Korollar 3.4.4. folgt die Behauptung dann aus dem nachfolgenden Satz 3.4.6. □

3.4.6. Satz. *Sei R ein eindimensionaler noetherscher lokaler Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal von R, das von zwei Elementen erzeugt wird und einen Nichtnullteiler enthält. Dann gilt: $\ell_R(\mathfrak{a}^{-1}/R) = \ell_R(R/\mathfrak{a})$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a} = (a, b)$. Nach Hilfssatz 3.4.7. können wir o.B.d.A. annehmen, daß a ein Nichtnullteiler von R ist.
Betrachte die Idealkette $R \supset \mathfrak{a} \supseteq (a)$. Weil a ein Nichtnullteiler, also $\{a\}$ ein Parametersystem von R ist, ist $\ell_R(R/(a)) < \infty$. Also gilt $\ell_R(R/\mathfrak{a}) = \ell_R(R/(a)) - \ell_R(\mathfrak{a}/(a))$.
Betrachte die R-lineare Abbildung $\varphi : R \ni x \mapsto x \cdot b + (a) \in \mathfrak{a}/(a)$. Wegen $\mathfrak{a} = (a, b)$ ist φ surjektiv. Ferner ist
$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \mid x \in R, x \cdot b \in (a)\} = \{x \mid x \in R, x \cdot \mathfrak{a} \subseteq (a)\} = ((a) : \mathfrak{a})$.
Andererseits gilt, weil a Nichtnullteiler für R ist:
$a \cdot \mathfrak{a}^{-1} = \{a \cdot x \mid x \in \operatorname{Quot}(R), x \cdot \mathfrak{a} \subseteq R\} = \{z \mid z \in \operatorname{Quot}(R), \frac{z}{a} \cdot \mathfrak{a} \subseteq R\} =$
$\{z \mid z \in \operatorname{Quot}(R), z \cdot \mathfrak{a} \subseteq (a)\}$.
Also ist $((a) : \mathfrak{a}) = a \cdot \mathfrak{a}^{-1} \cap R$. Da aber $a \in \mathfrak{a}$ ist, ist sowieso $a \cdot \mathfrak{a}^{-1} \subseteq R$, also ist $((a) : \mathfrak{a}) = a \cdot \mathfrak{a}^{-1}$.
Insgesamt ist also $\operatorname{Ker}\varphi = a \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ und daher $\ell_R(\mathfrak{a}/(a)) = \ell_R(R/a \cdot \mathfrak{a}^{-1})$.
Man hat also $\ell_R(R/\mathfrak{a}) = \ell_R(R/(a)) - \ell_R(R/a \cdot \mathfrak{a}^{-1})$.
Ferner gilt wegen $\mathfrak{a}^{-1} \supseteq R$ noch $R \supseteq a \cdot \mathfrak{a}^{-1} \supseteq (a)$ und daher
$\ell_R(R/a \cdot \mathfrak{a}^{-1}) = \ell_R(R/(a)) - \ell_R(a \cdot \mathfrak{a}^{-1}/a \cdot R)$.
Nun ist aber a ein Nichtnullteiler für R, also auch für $\operatorname{Quot}(R)$. Deshalb ist die Multiplikation mit a eine injektive R-lineare Abbildung von $\operatorname{Quot}(R)$ in sich. Bei dieser Abbildung geht $\mathfrak{a}^{-1}$ über in $a \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ und R über in $a \cdot R$, so daß man die Isomorphie $\mathfrak{a}^{-1}/R \simeq a \cdot \mathfrak{a}^{-1}/a \cdot R$ als R-Moduln erhält. Daher ist dann
$\ell_R(R/\mathfrak{a}) = \ell_R(R/(a)) - \ell_R(R/a \cdot \mathfrak{a}^{-1}) = \ell_R(a \cdot \mathfrak{a}^{-1}/a \cdot R) = \ell_R(\mathfrak{a}^{-1}/R)$. □

Im Beweis von Satz 3.4.6. wurde benutzt:

3.4.7. Hilfssatz. *Sei R ein eindimensionaler noetherscher lokaler Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, das einen Nichtnullteiler enthält. Dann besitzt $\mathfrak{a}$ ein Erzeugendensystem minimaler Länge, das aus lauter Nichtnullteilern besteht.*

Beweis. Vorbemerkung: 1) Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ die assoziierten Primideale von R. Da $\mathfrak{a}$, also auch das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R, einen Nichtnullteiler enthält, ist $\mathfrak{m}$ nicht assoziiert zu R. Die $\mathfrak{p}_i$ haben also alle die Höhe Null.
2) Sei x ein Nullteiler und y ein Nichtnullteiler von R. Dann gibt es ein $\xi \in R$ so daß $x + \xi \cdot y$ ein Nichtnullteiler ist.
Beweis: Die Nullteiler von R sind die Elemente von $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Also gilt zunächst $y \notin \mathfrak{p}_i$ für alle i. Sei die Numerierung o.B.d.A. so gewählt, daß
$x \in \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r$ und $x \notin \mathfrak{p}_{r+1} \cup \dots \cup \mathfrak{p}_n$.

Wähle ein
$\xi \notin \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r$ und $\xi \in \mathfrak{p}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$.
(Ein solches ξ gibt es; denn andernfalls wäre $\mathfrak{p}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r$ und daher wäre zunächst $\mathfrak{p}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}_j$ für ein j mit $1 \leq j \leq r$ und daher dann auch $\mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{p}_j$ für ein k mit $r+1 \leq k \leq n$. Da aber $\mathfrak{p}_j$ und $\mathfrak{p}_k$ zwei verschiedene Primideale der Höhe Null sind, kann das nicht sein.)
Dann gilt:
$x + \xi \cdot y \notin \mathfrak{p}_i$ für $1 \leq i \leq r$, weil $x \in \mathfrak{p}_i$ aber $\xi \notin \mathfrak{p}_i$ und $y \notin \mathfrak{p}_i$, also auch $\xi \cdot y \notin \mathfrak{p}_i$ und auch
$x + \xi \cdot y \notin \mathfrak{p}_i$ für $r+1 \leq i \leq n$, weil $x \notin \mathfrak{p}_i$ aber $\xi \in \mathfrak{p}_i$ und daher auch $\xi \cdot y \in \mathfrak{p}_i$.
Also ist $x + \xi \cdot y$ kein Nullteiler für R.

Sei $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{a}$ und sei y der nach Voraussetzung in $\mathfrak{a}$ enthaltene Nichtnullteiler für R. Für jedes x_i, das Nullteiler für R ist, gibt es nach der Vorbemerkung ein $\xi_i \in R$, so daß $x_i + \xi_i \cdot y$ ein Nichtnullteiler ist. Setze

$$x'_i := \begin{cases} x_i & \text{falls } x_i \text{ ein Nichtnullteiler ist} \\ x_i + \xi_i \cdot y & \text{falls } x_i \text{ ein Nullteiler ist.} \end{cases}$$

Dann ist $\{x'_1, \ldots, x'_m, y\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{a}$, das aus lauter Nichtnullteilern besteht. Da R ein lokaler Ring ist, kann man aus diesem Erzeugendensystem ein solches von minimaler Länge auswählen. □

Eindimensionale lokale Gorenstein-Ringe haben noch weitere interessante charakterisierende Eigenschaften:

3.4.8. Satz. *Sei R ein eindimensionaler lokaler C-M-Ring. Die folgenden Ausagen sind äquivalent:*

(1) *R ist ein Gorensteinring.*
(2) *Für jedes (gebrochene) R-Ideal, das einen Nichtnullteiler enthält, gilt* $\mathfrak{a} = \left(\mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1}$.
(3) *Für jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}$, das einen Nichtnullteiler enthält, gilt* $\ell_R\left(\mathfrak{a}^{-1}/R\right) = \ell_R(R/\mathfrak{a})$.

Beweis. (1)⇒(2): Da sich jedes gebrochene Ideal $\mathfrak{a}$ durch Multiplikation mit einem Nichtnullteiler $t \in R$ in ein ganzes Ideal $\mathfrak{b} := t \cdot \mathfrak{a}$ verwandeln läßt und nach Anmerkung 3.4.2. überdies gilt $\left(\mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1} = t^{-1} \cdot \left(\mathfrak{b}^{-1}\right)^{-1}$, können wir o.B.d.A annehmen $\mathfrak{a} \subseteq R$. Sei $a \in \mathfrak{a}$ ein nach Voraussetzung existierender Nichtnullteiler. Wegen $\dim R = 1$ ist (a) ein Parameterideal, das wegen Voraussetzung (1) nach Satz 3.3.9. irreduzibel ist. Nach dem nachstehenden Satz 3.4.9. ist dann $\mathfrak{a} = \big((a) : \big((a) : \mathfrak{a}\big)\big)$. Außerdem gilt, wie beim Beweis von Satz 3.4.6. gezeigt wurde, wegen $a \in \mathfrak{a}$ und $a \in \big((a) : \mathfrak{a}\big)$ auch $\big((a) : \mathfrak{a}\big) = a \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ und $\big((a) : \big((a) : \mathfrak{a}\big)\big) = a \cdot \big((a) : \mathfrak{a}\big)^{-1}$, also insgesamt unter Berücksichtigung von Anmerkung 3.4.2.
$\mathfrak{a} = \big((a) : \big((a) : \mathfrak{a}\big)\big) = a \cdot \big((a) : \mathfrak{a}\big)^{-1} = a \cdot \left(a \cdot \mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathfrak{a}^{-1}\right)^{-1}$. q.e.d.

(2)⇒(3): Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_r = R$ eine Kompositionsreihe. Durch Inversenbildung erhält man eine Reihe $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}_0^{-1} \supseteq \mathfrak{a}_1^{-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_r^{-1} = R$.
Wäre $\mathfrak{a}_{i-1}^{-1} = \mathfrak{a}_i^{-1}$ für ein i, so folgte durch abermalige Inversenbildung nach (2), daß $\mathfrak{a}_{i-1} = \left(\mathfrak{a}_{i-1}^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathfrak{a}_i^{-1}\right)^{-1} = \mathfrak{a}_i$ wäre (da $\mathfrak{a}$ und damit auch alle $\mathfrak{a}_i$ einen Nichtnullteiler enthalten), was der Voraussetzung widerspricht, daß die anfangs angegebene Reihe eine Kompositionsreihe ist. Also sind in der Reihe $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}_0^{-1} \supseteq \mathfrak{a}_1^{-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_r^{-1} = R$

alle Glieder verschieden und daher $\ell_R\bigl(\mathfrak{a}^{-1}/R\bigr) \geq \ell_R(R/\mathfrak{a})$.
Geht man umgekehrt von einer Kompositionsreihe zwischen $\mathfrak{a}^{-1}$ und R aus, so erhält man durch Inversenbildung auf dieselbe Weise $\ell_R(R/\mathfrak{a}) \geq \ell_R\bigl(\mathfrak{a}^{-1}/R\bigr)$, also insgesamt $\ell_R(R/\mathfrak{a}) = \ell_R\bigl(\mathfrak{a}^{-1}/R\bigr)$.

(3)$\Rightarrow$(1): $\mathfrak{m}$ enthält nach Voraussetzung einen Nichtnullteiler, also gilt nach Voraussetzung (3) $\dim_{R/\mathfrak{m}}\bigl(\mathfrak{m}^{-1}/R\bigr) = \ell_R\bigl(\mathfrak{m}^{-1}/R\bigr) = \ell_R(R/\mathfrak{m}) = 1$, und daher ist R nach Korollar 3.4.4. ein Gorenstein-Ring. □

Bleibt noch zu zeigen:

3.4.9. Satz (Gröbner [10], Satz 7). *Sei R ein noetherscher lokaler Ring und $\mathfrak{q}$ ein irreduzibles Ideal von R, das primär zum maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist. Dann gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a}$*

$$\mathfrak{a} = \bigl(\mathfrak{q} : (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})\bigr)\,.$$

Beweis. 1) *Vorbemerkung*: Es gibt ein Element $u \in R$ mit $(\mathfrak{q} : \mathfrak{m}) = \mathfrak{q} + (u)$ (und trivialerweise $\mathfrak{m} \cdot u \in \mathfrak{q}$), d.h. $\ell_R\bigl((\mathfrak{q} : \mathfrak{m})/\mathfrak{q}\bigr) \leq 1$.
Beweis: Offenbar ist zunächst $\mathfrak{q} \subseteq (\mathfrak{q} : \mathfrak{m})$. Sei nun r minimal gewählt, so daß es Elemente $u_1, \dots, u_r$ gibt mit $(\mathfrak{q} : \mathfrak{m}) = \mathfrak{q} + (u_1, \dots, u_r)$. Dann gilt nach Definition von $\mathfrak{q} : \mathfrak{m}$ sicher $\mathfrak{m} \cdot u_i \in \mathfrak{q}$ für alle i, also ist $\ell_R\bigl(\mathfrak{q} + (u_i)/\mathfrak{q}\bigr) = 1$. Wegen $\mathfrak{q} \subseteq \bigl((\mathfrak{q} + (u_1)) \cap (\mathfrak{q} + (u_r))\bigr) \subseteq \mathfrak{q} + (u_1)$ ist dann $(\mathfrak{q} + (u_1)) \cap (\mathfrak{q} + (u_r)) = \mathfrak{q}$ für $r > 1$. Da nach Voraussetzung aber $\mathfrak{q}$ irreduzibel ist, muß $r = 1$ sein.

2) Reduktion auf den Fall $\mathfrak{q} = 0$, wobei 0 das Nullideal bezeichnet:
Sei $R' := R/\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a}' := \mathfrak{a}/\mathfrak{q}$. Dann ist das Nullideal irreduzibel in R'.
Wir zeigen anschließend unter 3)–4) im nulldimensionalem Fall:
$\mathfrak{a}' = \bigl(0 : (0 : \mathfrak{a}')\bigr)$. Daraus folgt dann $\mathfrak{a} = \bigl(\mathfrak{q} : (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})\bigr)$.
Beweis: Sei $\psi : R \to R' = R/\mathfrak{q}$ kanonisch und $\mathfrak{c}$ ein beliebiges ganzes Ideal von R mit $\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{q}$. Dann rechnet man auf Grund der Definitionen sofort nach, daß gilt
$\psi(\mathfrak{q} : \mathfrak{c}) = \bigl(0 : \psi(\mathfrak{c})\bigr)$[¶]. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{q}$ und, weil $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal ist, gilt auch $(\mathfrak{q} : \mathfrak{a}) \supseteq \mathfrak{q}$. Nach dem oben Bemerkten ist dann
$\psi\bigl(\mathfrak{q} : (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})\bigr) = \bigl(0 : \psi(\mathfrak{q} : \mathfrak{a})\bigr) = \bigl(0 : (0 : \mathfrak{a}')\bigr) = \mathfrak{a}'$.
Da auch $(\mathfrak{q} : \mathfrak{a})$ ein ganzes Ideal ist, gilt $\bigl(\mathfrak{q} : (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})\bigr) \supseteq \mathfrak{q} = \operatorname{Ker}\psi$, so daß für die Urbilder unter ψ folgt:
$\bigl(\mathfrak{q} : (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})\bigr) = \overset{-1}{\psi}\bigl(\psi\bigl(\mathfrak{q} : (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})\bigr)\bigr) = \overset{-1}{\psi}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}$.
Wir machen daher für das Folgende o.B.d.A. die
Voraussetzung: R ist ein nulldimensionaler noetherscher lokaler Ring mit irreduziblem Nullideal und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges echtes Ideal von R.

3) Da 0 primär zu $\mathfrak{m}$ ist, ist $\ell_R(R) < \infty$. Sei
$(*)\quad 0 = \mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{b}_{r-1} = \mathfrak{m} \subset \mathfrak{b}_r = R$
eine R-Modul-Kompositionsreihe für R, also $r = \ell_R(R)$.
Wir zeigen, daß dann auch die Reihe
$(**)\quad 0 = \bigl(0 : \mathfrak{b}_r\bigr) \subseteq \bigl(0 : \mathfrak{b}_{r-1}\bigr) \subseteq \cdots \subseteq \bigl(0 : \mathfrak{b}_0\bigr) = R$
eine R-Modul-Kompositionsreihe für R ist.
Beweis: Es ist klar, daß die schwachen Inklusionen „$\subseteq$“ gelten. Wenn wir zeigen, daß

[¶] Aus $\mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{q} : \mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{q}$ folgt $\psi(\mathfrak{c}) \cdot \psi(\mathfrak{q} : \mathfrak{c}) \subseteq \psi(\mathfrak{q}) = 0$, also ist $\psi(\mathfrak{q} : \mathfrak{c}) \subseteq \bigl(0 : \psi(\mathfrak{c})\bigr)$.
Umgekehrt: Sei $x \in R$ mit $\psi(x) \in \bigl(0 : \psi(\mathfrak{c})\bigr)$. Dann ist $\psi(x \cdot \mathfrak{c}) = \psi(x) \cdot \psi(\mathfrak{c}) = 0$ und daher $x \cdot \mathfrak{c} \in \operatorname{Ker}\psi = \mathfrak{q}$. Also ist $x \in (\mathfrak{q} : \mathfrak{c})$ und daher $\psi(x) \in \psi(\mathfrak{q} : \mathfrak{c})$. Folglich gilt auch $\bigl(0 : \psi(\mathfrak{c})\bigr) \subseteq \psi(\mathfrak{q} : \mathfrak{c})$.

sich zwischen je zwei Glieder der Reihe $(**)$ kein Ideal mehr echt dazwischenschieben läßt, muß auch an allen Stellen die scharfe Inklusion „$\subset$“ gelten; denn andernfalls erhielte man, indem man die Glieder, die vor einem Gleichheitszeichen stehen, wegließe, eine Kompositionreihe einer Länge $< r$ für R, was unmöglich ist, da nach Jordan-Hölder alle Kompositionsreihen dieselbe Länge $\ell_R(R)$ haben.
Sei $\mathfrak{b} := \mathfrak{b}_{i-1}$ ein beliebiges Glied der Kette $(*)$. Dann ist das unmittelbar darauf folgende Glied von der Form $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b} + (c)$ mit $\mathfrak{m} \cdot c \subseteq \mathfrak{b}$, weil $\mathfrak{b}_i/\mathfrak{b}_{i-1} \simeq R/\mathfrak{m}$ ist für alle $i = 1, \dots, r$.
Es folgt $\big(0 : \mathfrak{b}\big) \cdot c \cdot \mathfrak{m} \subseteq \big(0 : \mathfrak{b}\big) \cdot \mathfrak{b} = 0$ und daher $\big(0 : \mathfrak{b}\big) \cdot c \subseteq \big(0 : \mathfrak{m}\big)$.
Da nach der Vorbemerkung $\ell_R\big(0 : \mathfrak{m}\big) \leq 1$ ist, folgt aus dem eben gezeigten, daß es nur zwei mögliche Fälle gibt: $\big(0 : \mathfrak{b}\big) \cdot c = 0$ oder $\big(0 : \mathfrak{b}\big) \cdot c = \big(0 : \mathfrak{m}\big)$.

1. Fall. $\big(0 : \mathfrak{b}\big) \cdot c = 0$. In diesem Fall ist also $\big(0 : \mathfrak{b}\big) \subseteq \big(0 : (c)\big)$ und daher $\big(0 : \big(\mathfrak{b} + (c)\big)\big) = \big(0 : \mathfrak{b}\big) \cap \big(0 : (c)\big) = \big(0 : \mathfrak{b}\big)$. Also wären in diesem Falle $\big(0 : \mathfrak{b}_{i-1}\big) = \big(0 : \mathfrak{b}\big) = \big(0 : (\mathfrak{b} + (c))\big) = \big(0 : \mathfrak{b}_i\big)$, so daß man zwischen $\big(0 : \mathfrak{b}_i\big)$ und $\big(0 : \mathfrak{b}_{i-1}\big)$ nichts mehr einfügen kann. (Nachträglich folgt dann, wenn die Behauptung bewiesen ist, daß dieser Fall nicht eintreten kann, weil sonst die Kompositionsreihe zu kurz wäre.)

2. Fall. $0 \neq \big(0 : \mathfrak{b}\big) \cdot c = \big(0 : \mathfrak{m}\big)$. Nach der Vorbemerkung ist $\big(0 : \mathfrak{m}\big) = (u)$ mit $\mathfrak{m} \cdot u = 0$, also $\operatorname{Ann}_R(u) = \mathfrak{m}$. Man hat also $\big(0 : \mathfrak{b}\big) \cdot c = R \cdot u \simeq R/\mathfrak{m}$.
Sei $w \in \big(0 : \mathfrak{b}\big)$ beliebig. Dann gibt es also ein $v \in R$ mit $w \cdot c = v \cdot u$. Ist auch $w \cdot c = v' \cdot u$, so ist $v - v' \in \operatorname{Ann}_R(u) = \mathfrak{m}$, d.h. die Restklasse von v modulo $\mathfrak{m}$ ist durch w eindeutig bestimmt. Die Abbildung
$\varphi : \big(0 : \mathfrak{b}\big) \ni w \mapsto \bar{v} \in R/\mathfrak{m}$
ist offenbar R-linear und $\neq 0$, also wegen $\ell_R(R/\mathfrak{m}) = 1$ auch surjektiv.
Sei nun $\varphi(w) = 0$, das bedeutet $v \in \mathfrak{m}$. Dann ist $w \cdot c = v \cdot u = 0$, weil $u \in \big(0 : \mathfrak{m}\big)\big)$.
Es folgt $w \in \big(0 : (c)\big)$.
Umgekehrt: Sei $w \in \big(0 : (c)\big)$. Dann ist also $v \cdot u = w \cdot c = 0$ und daher $v \in \mathfrak{m}$, weil $R \cdot u \simeq R/\mathfrak{m}$ ist.
Insgesamt folgt
$\operatorname{Ker} \varphi = \big(0 : \mathfrak{b}\big) \cap \big(0 : (c)\big)$ und daher
$\big(0 : \mathfrak{b}\big)/\big((0 : \mathfrak{b}) \cap (0 : (c))\big) \simeq R/\mathfrak{m}$.
Es folgt:

$$\begin{aligned} \big(0 : \mathfrak{b}_{i-1}\big)/\big(0 : \mathfrak{b}_i\big) &= \big(0 : \mathfrak{b}\big)/\big(0 : (\mathfrak{b} + (c))\big) \\ &= \big(0 : \mathfrak{b}\big)/\big((0 : \mathfrak{b}) \cap (0 : (c))\big) \\ &\simeq R/\mathfrak{m}. \end{aligned}$$

Also kann man auch zwischen $\big(0 : \mathfrak{b}_i\big)$ und $\big(0 : \mathfrak{b}_{i-1}\big)$ nichts mehr echt einfügen.

4) Es gilt: $\ell_R(\mathfrak{a}) + \ell_R\big((0 : \mathfrak{a})\big) = \ell_R(R)$.
Beweis: Verfeinere die Reihe $0 \subseteq \mathfrak{a} \subseteq R$ zu einer Kompositionsreihe
$\underbrace{0 = \mathfrak{b}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{b}_s := \mathfrak{a}}_{s = \ell_R(\mathfrak{a})} \subset \mathfrak{b}_{s+1} \subset \cdots \subset \mathfrak{b}_r = R$.
Nach 3) erhält man dann eine Kompositionsreihe
$\underbrace{0 = \big(0 : \mathfrak{b}_r\big) \subset \cdots \subset \big(0 : \mathfrak{b}_s\big) = \big(0 : \mathfrak{a}\big)}_{r-s = \ell_R(0:\mathfrak{a})} \subset \big(0 : \mathfrak{b}_{s-1}\big) \subset \cdots \subset \big(0 : \mathfrak{b}_0\big) = R$.
Es folgt: $\ell_R(\mathfrak{a}) + \ell_R\big((0 : \mathfrak{a})\big) = s + (r - s) = r = \ell_R(R)$.

5) $\mathfrak{a} \overset{!}{=} \big(0 : (0 : \mathfrak{a})\big)$

Beweis: Wegen $\mathfrak{a}\cdot\big(0:\mathfrak{a}\big)=0$ gilt jedenfalls $\mathfrak{a}\subseteq\big(0:(0:\mathfrak{a})\big)$. Aus 4), angewandt auf die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\big(0:\mathfrak{a}\big)$ folgt $\ell_R(\mathfrak{a})+\ell_R\big((0:\mathfrak{a})\big)=\ell_R(R)=\ell_R\big((0:\mathfrak{a})\big)+\ell_R\big(0:(0:\mathfrak{a})\big)$. Daher ist $\ell_R(\mathfrak{a})=\ell_R\big(0:\big(0:\mathfrak{a}\big)\big)$. Zusammen mit $\mathfrak{a}\subseteq\big(0:(0:\mathfrak{a})\big)$ ergibt das $\mathfrak{a}=\big(0:(0:\mathfrak{a})\big)$. $\square$

Literatur

[1] Robert Berger, *Über eine Klasse unvergabelter lokaler Ringe*, Math. Ann. **146** (1962), 98–102.

[2] Robert W. Berger, *Various Notions of Associated Prime Ideals*, Annales Universitatis Saraviensis, Series Mathematicae **5** (1994), no. 3, 245–271.

[3] ———, *Kommutative Algebra I*, Annales Universitatis Saraviensis, Series Mathematicae **8** (1997), no. 1, 1–148.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative, Chap.I, Modules Plats*, Hermann, Paris, 1961, Éléments de Mathématique.

[5] ———, *Algèbre Commutative, Chap.II, Localisation*, Hermann, Paris, 1961, Éléments de Mathématique.

[6] ———, *Algèbre Commutative, Chap.III, Graduation, Filtration et Topologies*, Hermann, Paris, 1961, Éléments de Mathématique.

[7] ———, *Algèbre Commutative, Chap.IV, Idéaux premiers associés et Décomposition primaire*, Hermann, Paris, 1961, Éléments de Mathématique.

[8] ———, *Algèbre, Chap.10. Algèbre Homologique*, Masson, 1980, Éléments de Mathématique.

[9] Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[10] W. Gröbner, *Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen*, Math. Ann. **110** (1934), 197–222.

[11] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique IV, Étude Locale des Schémas et des Morphismes de Schémas (Seconde Partie)*, Publ. Math. IHES **24** (1965), 3–231.

[12] Jürgen Herzog and Ernst Kunz, *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lecture Notes in Math., vol. 238, Springer-Verlag, 1971.

[13] Ernst Kunz, *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*, Vieweg, 1980.

[14] Hideyuki Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1990.

[15] Jean-Pierre Serre, *Algèbre locale, multiplicités*, 2 ed., Lecture Notes in Math., vol. 11, Springer-Verlag, 1965, Cours au Collège de France 1957–58, rédigé par Pierre Gabriel.

Index