Hrsg. Martin Hülse

Seminar der Prozeßinformatik:

Entropie und Information

Wintersemester 1996/97

Friedrich–Schiller–Universität Jena
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Rechnerarchitektur und
-kommunikation

Christian Günsel, Mario Walther,
Martin Hülse, Alexander Karosseit,
Wolfram Hesse, Sven Kiontke

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

informatio

Bei diesem Manuskript handelt es sich um die überarbeiteten Vorträge zum Seminar: „Entropie und Information“. Jenes wurde im Rahmen der Vertiefungsrichtung Prozeßinformatik im Studiengang Informatik-Diplom der Friedrich-Schiller-Universität im Wintersemester 1996/97 durchgeführt.

Eigentlich sollte man annehmen, daß auf die Frage: *„Was ist Information?“* jeder Informatikstudent umfangreich antworten könnte. Ein Seminar zu diesen Thema - zumal im Hauptstudium - sollte wohl als überflüssig gelten. Das dieser Schein trügt, wird schon in den Anfangskapiteln vieler Bücher, die sich als „Einführung in die Informatik“verstehen, sehr deutlich.

Da werden z.B. „Nachricht und Information als nicht weiter definierbare Grundbegriffe“ eingeführt, deren „Verwendung an einigen Beispielen“[BaGo91] erläutert wird. Andere wiederum besinnen sich sofort auf ihr angelsächsisches Äquivalent *computer science* und schlagen schnell eine Brücke zur „Informations- (oder auch: Daten-) Verarbeitung“. Womit man natürlich sofort bei den „Datenverarbeitungsaufgaben “ wäre, die „sich heute in der Tat mit Hilfe von Computern lösen“[KR91] lassen. Als Leser jener Zeilen hatte ich das Gefühl, der Autor hätte dort auch gern „zum Glück“eingefügt.

Dank dieser geschickten Worttransformationen bleibt also den Studenten, die sich immerhin mehrere Jahre der *Wissenschaft von der Informationsverarbeitung* widmen wollen, die Diskussion um das Wesen der Information erst einmal oder ganz vorenthalten. Und ich wage zu behaupten, dies ist den wenigsten bewußt.

Ein Teilgebiet der Prozeßinformatik ist die Sensorik. Dort geht es auch um die elektro-technische Ermittlung physikalischer Größen aus der Umwelt. Ein Meßprozeß ist aber, wie in den folgenden Kapiteln auch aufgeführt, ein Informationsprozeß ,und somit wird die Information zu einem tragenden Element der Prozeßinformatik, den dieses Seminar Rechnung tragen wollte.

Die Information wird hier über die physikalische Größe Entropie eingeführt. Kapitel 2 bis 4 befassen sich in erster Linie mit der Entropie in der Phänomenologischen und der Statistischen Thermodynamik. Wobei aber schon die Bezüge zur Informationstheorie dargelegt werden.

Um Entropie und Information in der SHANNONsche Informationstheorie geht es in Kapitel 5. Dabei werden wir bemerken wie hilfreich die ersten Kapitel für das Verständnis der Informationstheorie sind, da nun Unbestimmtheit, Entropie und Information nicht mehr nur als sinnvolle aber ursprungslose und abstrakte Begriffe eingeführt werden müssen.

Die letzten beiden Kapitel befassen sich mit der Informationsverarbeitung des Menschen. Dabei wurde in Kapitel 6 ein hoher Wert auf die exakten psychologischen Grundlagen gelegt. Als eine Weiterführung von Kapitel 5, bzgl. der menschlichen Sprache, Musik und Harmonie kann das letzte Kapitel verstanden werden.

Jedes Kapitel (ausgenommen dieses) ist direkt aus einem Seminarvortrag hervorgegangen. Den Autoren der einzelnen Kapitel, meinen Mitkommilitonen, danke ich hiermit für die nicht selbstverständliche Unterstützung bei der Erstellung dieses Skriptes.

Martin Hülse , Jena am 27.Juli 1997

Kapitel 2

Entropie in der Phänomenologischen Thermodynamik

Christian Günsel

Für den Begriff der Entropie gibt es in Mathematik, Physik und Psychologie unterschiedliche Definitionen. Allen Disziplinen gemeinsam ist jedoch die Auffassung von Entropie als Maß für den Ordnungszustand eines Systems, wobei die Entropie mit abnehmender Ordnung wächst.

Das vorliegende Kapitel dient zur Einführung in das „thermodynamische Umfeld" der klassischen – im Gegensatz zur statistischen – physikalischen Entropie.

Die genauere Untersuchung und einige zusätzliche Betrachtungen über irreversible Prozesse im Zusammenhang mit dem CARNOTschen Kreisprozeß bleiben dem Kapitel „Entropie als Zustandsgröße" vorbehalten.

2.1 Eine nützliche Erfindung...

Ohne Verletzung des Energiesatzes (den wir später für die Thermodynamik durch $dU = dQ + dW$ formulieren und als I. Hauptsatz bezeichnen werden) ist eine periodisch arbeitende Maschine denkbar, die ein Schiff durch Umwandlung eines Teils der Wärmeenergie des Meerwassers antreibt.

Eine solche Maschine hätte gewaltige ökologische und wirtschaftliche Vorteile: Da sich ein Schiff stets auf einer Äquipotentialfläche (bezüglich des Gravitationspotentials) bewegt, dient die Antriebsenergie ausschließlich zur Überwindung der Reibung. Unsere hypothetische Maschine würde dem Meerwasser gerade soviel Wärme entziehen, wie die sich bewegenden Teile des Schiffes durch Reibung wieder abgeben, d.h. das Schiff könnte „spurlos" und kostenlos die Ozeane befahren.

Leider hat noch niemand eine solche Maschine konstruiert, und es scheint so, als ob das auch niemals gelingen kann. Die Unmöglichkeit eines solchen *Perpetuum mobile II. Art* – der II. Hauptsatz der Thermodynamik – ist, wie bisher alle physikalischen Sätze, eine reine Erfahrungstatsache, die allerdings durch bestimmte statistische Betrachtungen (siehe im entsprechenden Kapitel) tiefer begründet werden kann.

2.2 Grundbegriffe

„Wärme ist ungeordnete Molekülbewegung“, Temperatur „nur ein anderes Maß für die mittlere kinetische Energie der Moleküle.“ [GER93]

Gasdruck entsteht durch Stöße der Moleküle mit der Gefäßwand. Ausgangspunkt für thermodynamische Betrachtungen ist meist das Modell des idealen Gases, das gekennzeichnet ist durch folgende Eigenschaften:

- die Teilchen haben kein Eigenvolumen
- zwischen ihnen wirken keine Kräfte
- als Wechselwirkung zugelassen sind nur elastische Stöße mit der Gefäßwand

Die Größen Druck $p[N/m^2]$, Volumen $V[m^3]$ und Temperatur $T[K]$ kennzeichnen den Zustand eines idealen Gases eindeutig. Sie stehen in folgender Beziehung:

$$\boxed{\frac{pV}{T} = \text{const.}} \qquad \textbf{thermische Zustandsgleichung des idealen Gases} \tag{2.1}$$

Wir unterscheiden 4 Arten von Zustandsänderungen des idealen Gases:

- isotherme: $T = \text{const.}$, $dU = 0$, $dQ = -dW$
- isobare: $p = \text{const.}$, $dU = dQ + dW$
- isochore: $V = \text{const.}$ $dU = dQ$, $dW = 0$
- adiabatische: kein Wärmeaustausch, $dU = dW$, $dQ = 0$

Der Energiesatz (I. Hauptsatz der Thermodynamik) besagt, daß die Summe aus Wärmeenergie $Q[J]$ und mechanischer Energie $W[Nm]$ in einem abgeschlossenen System konstant bleibt. Formuliert wird dies unter Zuhilfenahme der inneren Energie $U[J]$ eines Systems:

$$\boxed{dU = dQ + dW} \qquad \textbf{I. Haupsatz} \tag{2.2}$$

Gleichwertig ist die Aussage, daß es kein *Perpetuum mobile I. Art* (eine Maschine, die Energie aus dem Nichts erzeugt) geben kann.

Irreversible Prozesse

Eine wichtige Eigenschaft von Zustandsänderungen ist die *Umkehrbarkeit*. Ein Prozess heißt *reversibel* (umkehrbar), wenn er *ohne zusätzlichen Arbeitsaufwand* (Energiebedarf über die vom Energiesatz ohnehin geforderte Menge hinaus) auch in die entgegengesetzte Richtung ablaufen kann. Ein Prozess, bei dem das nicht möglich ist, heißt *irreversibel.*

Reibungsfreie mechanische Vorgänge sind reversibel: ein frei fallender Ball durchläuft nach elastischem Stoß mit dem Boden seine Bahn in umgekehrter Richtung, ohne daß zusätzliche Arbeit aufgewendet werden muß. Prozesse, die Wärmeaustausch beinhalten, sind irreversibel; ebenso Diffusionsprozesse (es ist noch nie beobachtet worden, daß sich zwei Gase von selbst entmischen, oder ein herabgefallener Dachziegel unter Abkühlung wieder aufsteigt).

2.3 Der Carnotsche Kreisprozeß

Wir wenden uns nun dem II. Hauptsatz zu und nähern uns damit unserem Hauptanliegen, der Erklärung der Entropie.

Schon lange (sogar schon vor der Erkenntnis des I. Hauptsatzes) war bekannt, daß sich zwar mechanische Energie durch Reibung vollständig in Wärme umwandeln läßt, daß aber umgekehrt, bei der Gewinnung von Arbeit aus thermischer Energie stets *ein Teil* der Wärme übrigbleiben *muß*. Wie groß dieser Teil ist, hat CARNOT (*Carnot, Sadi 1796-1832*) durch ein Gedankenexperiment ermittelt:

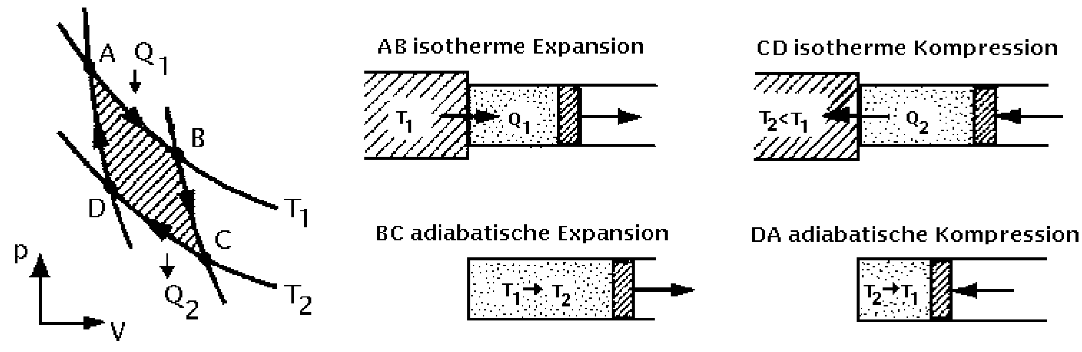


Abbildung 2.1: Der CARNOT-Prozeß

In Abb. 2.1 ist eine *geschlossene* Folge von Zustandsänderungen eines idealen Gases dargestellt, ein sogenannter Kreisprozeß. Dieser CARNOT-Prozeß ist reversibel, weil alle Zustandsänderungen *quasistatisch*, d.h. langsam und in infinitesimal kleinen Schritten geführt werden, so daß sich das Gas stets im thermodynamischen Gleichgewicht mit der Umgebung befindet.

Prozeßbeschreibung

Die für die isotherme Expansion im Schritt AB notwendige Wärme $Q_1 > 0$ wird einem heißen Körper T_1 entnommen; die geleistete Arbeit ist $W_{AB} < 0$. Im Schritt BC expandiert das Gas unter Leistung der Arbeit W_{BC} adiabatisch (d.h. ohne Wärmeaustausch!); es kühlt sich dabei auf T_2 ab. Die bei der anschließend unter Aufwendung der Arbeit $W_{CD} > 0$ durchgeführten isothermen

Kompression freiwerdende Wärme $Q_2 < 0$ wird an den kalten Körper der Temperatur T_2 abgeführt. Schließlich erfolgt noch eine adiabatische Kompression, die das Gas wieder auf T_1 aufheizt.

Die beiden adiabatischen Arbeitsanteile heben sich in der Summe auf, als Nutzarbeit bleibt

$$W = W_{AB} + W_{CD} = Q_1 - \mid Q_2 \mid = Q_1 + Q_2 \text{ mit } Q_2 < 0$$

Wird der Prozeß in Richtung ABCDA durchlaufen, dann ist $W > 0$; dies ist die Arbeitsweise einer **Wärmekraftmaschine**, wie z.B. dem Verbrennungsmotor. Dem Wirkprinzip einer **Wärmepumpe** entspricht die umgekehrte Prozeßrichtung ADCBA, hier ist $W < 0$, allerdings geht Wärme vom kalten zum heißen Körper über (z.B. Kühlschrank).

Wirkungsgrad

Die entscheidende Kenngröße des CARNOT-Prozesses ist sein *Wirkungsgrad*, das Verhältnis von geleisteter Arbeit zur vom heißen Körper entnommener Wärme:

$$\eta_c = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \tag{2.3}$$

Ein Wirkungsgrad von $\eta_c = 1$ bedeutet, daß $Q_2 = 0$ gilt, also *sämtliche* Wärme in Arbeit umgewandelt wird, was nach dem durch jahrhundertelange Erfahrung gestützten II. Hauptsatz nicht möglich ist. Ohne Herleitung sei hier der Wirkungsgrad angegeben:

$$\boxed{\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1}} \qquad \textbf{Wirkungsgrad der Carnot-Maschine} \tag{2.4}$$

Diese erstaunliche Gleichung legt nun den anfänglich erwähnten Anteil der nicht umwandelbaren Wärmeenergie *ausschließlich* in Abhängigkeit der beiden Temperaturen fest.

2.4 Entropie

Definition

Interessanterweise läßt sich zeigen, daß der Wirkungsgrad einer *beliebigen* periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschine höchstens so groß wie der der CARNOT-Maschine sein kann; gäbe es nämlich eine Maschine X mit höherem Wirkungsgrad, so könnte im Widerspruch zum zweiten Hauptsatz ein Perpetuum mobile II. Art durch Kopplung von X und einer als Wärmepumpe arbeitenden CARNOT-Maschine konstruiert werden. (siehe auch im Kapitel über die Entropie als Zustandsgröße)

Daraus folgt, daß der Wirkungsgrad eines *irreversiblen* Prozesses *echt kleiner* als der des CARNOT-Prozesses sein muß.

Aus 2.3 und 2.4 folgt:

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{2.5}$$

Das Gleichheitszeichen gilt für reversible Prozesse.
Daraus folgt:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \tag{2.6}$$

Verallgemeinernd gilt für jeden reversiblen Kreisprozeß (siehe Abb. 2.2):

$$\sum_i \frac{Q_{rev,i}}{T_i} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \oint \frac{dQ_{rev}}{T} = 0 \tag{2.7}$$

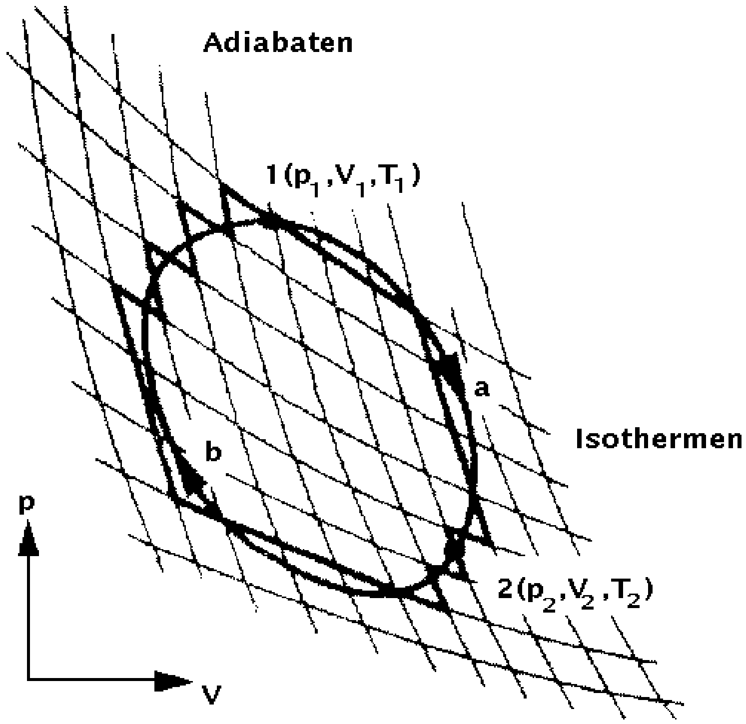


Abbildung 2.2: Beliebiger Kreisprozeß

Jetzt sind wir bereit für die Definition der Entropie:

$$\boxed{dS = \frac{dQ_{rev}}{T}} \qquad \textbf{Entropie} \tag{2.8}$$

Die Entropie können wir zur Kennzeichnung des Zustands eines Systems in analoger Weise wie die Temperatur verwenden, wenn ein Nullpunkt festgelegt wird. Bei reversibel adiabatischen Prozessen bleibt die Entropie wegen $dQ_{rev} = 0$ ungeändert. Wird ein Teil eines Kreisprozeß irreversibel geführt (z.B. in Abb. 2.2a), so folgt aus 2.6:

$$\oint \frac{dQ}{T} = (a)\int_1^2 \frac{dQ}{T} + (b)\int_2^1 \frac{dQ_{rev}}{T} = (a)\int_1^2 \frac{dQ}{T} + S_1 - S_2 < 0 \tag{2.9}$$

Ist das System *abgeschlossen*, so folgt mit $dQ = 0$ aus 2.9:

$$\boxed{S_2 > S_1} \qquad \textbf{Entropiesatz} \tag{2.10}$$

Dies ist eine neue Formulierung des II. Hauptsatzes – die Entropie kann in einem abgeschlossenen System nur zunehmen. Diese Aussage wird sich später als äquivalent zu der (direkt einleuchtenden) Tatsache erweisen, daß ein abgeschlossenes System dem Zustand höchster *Wahrscheinlichkeit* zustrebt.

Absolutwerte der Entropie

Die bisherigen Betrachtungen allein lassen Angaben von Absolutwerten der Entropie nicht zu. Das **Nernstsche Wärmetheorem** (*Nernst, Walther 1864-1941*) besagt jedoch, daß die Entropie bei $T = 0\text{K}$ auch bei beliebigen isothermen Prozessen konstant bleibt (ganz im Gegensatz zu $T > 0\text{K}$ – z.B. isotherme Expansion im Vakuum). Quantenstatistische Untersuchungen von PLANCK (*Planck, Max 1858-1947*) zeigen, daß gilt:

$$\boxed{S \to 0 \text{ für } T \to 0} \qquad \textbf{III. Hauptsatz} \tag{2.11}$$

Dies ist der III. Hauptsatz der Thermodynamik. Er liefert den Nullpunkt für die „Entropieskale". Eine Entropie von 0 bedeutet maximale Ordnung und ist nicht erreichbar, da aus dem III. Hauptsatz und dem Wärmetheorem folgt, daß bei $T = 0\text{K}$ die spezifische Wärmekapazität 0 ist. Eine noch so geringe Wärmezufuhr bewirkt dann eine endliche Temperaturerhöhung.

2.5 Entropie anschaulich

Reversible Mischung zweier Gase

Ein „raffiniertes" [GER93] Gedankenexperiment aus [JOOS] kann uns verdeutlichen, wie sich die Entropie bei Prozessen ohne Wärmeaustausch ändern kann. Entscheidend ist, daß in der Definition ausdrücklich die *reversible* Überführung zwischen den Zuständen verlangt wird; man kann also bei irreversiblen Prozessen ohne Wärmebeteiligung *nicht* folgern: $dS = dQ/T \wedge dQ = 0 \to dS = 0$!

Wir betrachten zwei Gefäße die, angeordnet wie in Abb. 2.3a, jeweils verschiedene Gase gleichen Druckes enthalten. Der Boden des oberen Gefäßes (gepunktet) sei vollkommen durchlässig für Gas 2, jedoch nicht für Gas 1; der Deckel des unteren Gefäßes (gestrichelt) sei durchlässig für Gas 1, jedoch nicht für Gas 2.

Durch Ineinanderschieben der beiden Gefäße (Abb. 2.3b) können die Gase reversibel gemischt werden, wozu wegen der wechselseitigen Durchlässigkeit keine Arbeit erforderlich ist. Nach vollständiger Mischung werden die selektiv durchlässigen Trennwände entfernt (damit die Gase gemischt bleiben) und die beiden Gefäße wieder in die Ausgangsposition gebracht. Dabei verrichtet das Gasgemisch jedoch Expansionsarbeit an der Umgebung, die ihm, will man die Temperatur aufrechterhalten, in Form von Wärme wieder zugeführt werden muß. Der Zustand in Abb.2.3d entspricht *genau* demjenigen, der sich

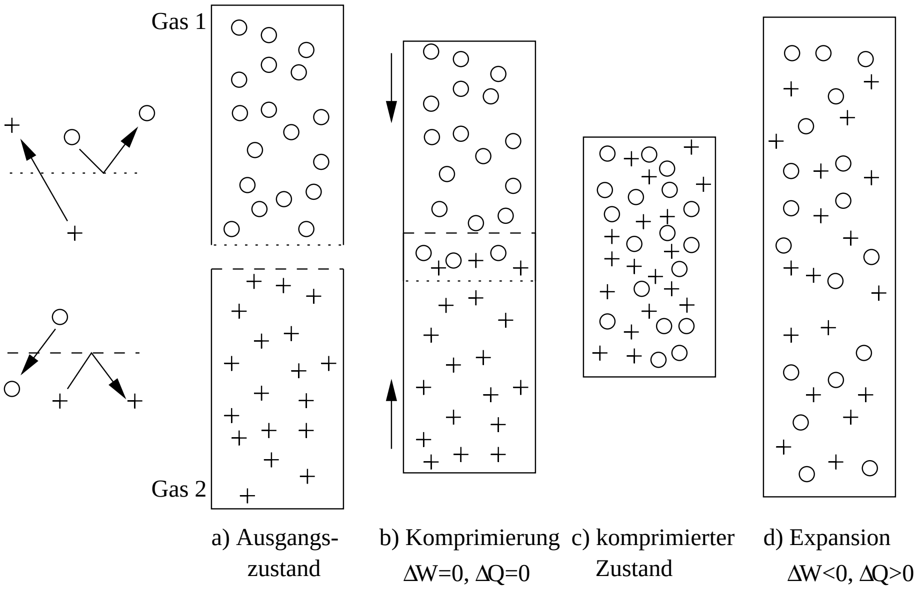


Abbildung 2.3: Reversible Gasmischung

bei irreversibler Mischung des Gases (erreichbar durch einfaches Entfernen der Trennwände *ohne* Wärmezufuhr) einstellt.

Der beschriebene Prozess ist reversibel, weil die gewonnene Expansionsarbeit genau zur erneuten Komprimierung ausreicht, wobei die vorher zugeführte Wärme wieder abgegeben wird. Die Gase können dann wieder mittels der selektiven Wände ohne Arbeitsaufwand getrennt werden.

Die Entropie ist also phänomenologisch durchaus greifbar, im beschriebenen Experiment ist ihre Änderung gleich dem Quotienten aus bei der Expansion zugeführten Wärme und der herrschenden Temperatur:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

Entropie und Information

So deutlich, wie in der Untersuchung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Entropie (deren Definition sich „natürlich“ als äquivalent erweist), tritt die Verbindung zur Information hier nicht zu Tage. Wir können uns allerdings überlegen, daß wir bei dem oben beschriebenen Experiment im Ausgangszustand der Gefäße mehr Information über die Gasmoleküle haben. Wir wissen, daß sich alle Moleküle des Gases 1 im oberen Gefäß befinden, entsprechendes gilt für Gas 2. Nach der Diffusion (der Entropieerhöhung) ist der Ort der Gasmoleküle unbestimmter (jeweils oberes *oder* unteres Gefäß).

Dies legt nahe, daß die Information abnimmt, wenn die Entropie wächst, was zur Folge hätte, daß Information in einem abgeschlossen System niemals zunehmen kann. Das klingt erst einmal einleuchtend und soll in nachfolgenden Kapiteln näher untersucht werden.

Kapitel 3

Entropie als Zustandsgröße

Mario Walther

3.1 Formulierung des II. Hauptsatzes

Beim Versuch, auf allgemeiner Weise ien PM II zu konstruieren, gewinnen wir eine mathematische Bedingung für die Unmöglichkeit einer solchen Maschine, welche der Formulierung des II. Hauptsatzes äquivalent ist.
Nun wird ein **Carnotprozeß** mit den Isothermen t_1 und t_2 an einem beliebigen thermodynamischen System X durchgeführt. Entsprechend gilt die Bilanz von Wärme und Arbeit $Q_2 = Q_1 + A$, da auch hier die Gültigkeit des I. Hauptsatzes vorausgesetzt wird. Aufgrund unbekannter Adiabatenparameter kann jedoch die 2. Bedingung des idealen Gases nicht übernommen werden, d.h. über den Wirkungsgrad des Systems kann zunächst nichts ausgesagt werden.
Für diesen Wirkungsgrad η_x nehmen wir an , daß $\eta_x < \eta_c$ sei. Nun stellen wir folgende Überlegungen an: Entsprechend Bild 3.1 verwenden wir zwei Wärmebäder $t_2 > t_1$. Jetzt lassen sich mit den beiden Systemen, dem idealen Gas und dem System X, Carnotsche Kreisprozesse reversibel durchführen. Dies ermöglicht prinzipiell, diese Prozesse auch umgekehrt zu durchlaufen.

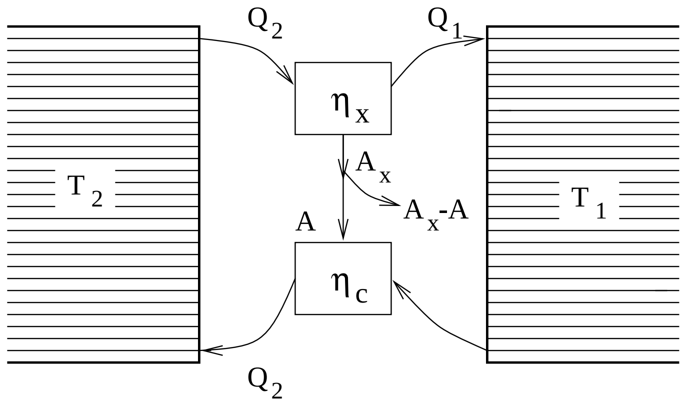


Abbildung 3.1: Konstruktion eines PM II mit $\eta_x < \eta_c$

Zuerst wird nun der Kreisprozeß am System X durchgeführt. Dazu wird dem Wärmebehälter T_2 die Wärmemenge Q_2 entnommen, wovon der Anteil $A_x = \eta_x Q_2$ in mechanische Arbeit überführt wird. Von der so gewonnenen mechanische Arbeit A_x zweigen wir einen Teil , $A = \eta_c Q_2$, ab, welcher dazu beötigt wird, den Kreisprozeß rückwärts zu durchlaufen und somit die entnommene Wärmemenge Q_2 dem Behälter T_2 wieder zuzuführen. Damit ist T_2 wieder in seinem ursprünglichen Zustand. Da sich aber auch das System X und das ideale Gas in Ursprungszustand befinden, können wir sagen, daß das Gesamtsystem eine Periode duchlaufen hat. Hierbei wurde die mechanische Arbeit

$$\Delta A \equiv A_x - A = (\eta_x - \eta_c)Q_2 > 0 \qquad \text{falls} \qquad \eta_x > \eta_c \tag{3.1}$$

gewonnen. Die entsprechende Wärme wurde T_1 entzogen und ergibt sich aus der Energiebilanz. Da $\eta_x > \eta_c$ ist also mechanische Arbeit ΔA vom Gesamtsystem abgegeben und wirklich ein PM II konstruiert worden. Der II. Haupsatz zeigt aber die Unmöglichkeit eines PM II auf. Somit ist unsere Voraussetzung falsch. Unter der Voraussetzung $\eta_x < \eta_c$ würde der in Abbildung 3.1 betrachtete Kreisprozeß $\Delta A < 0$ liefern. Wegen des in beiden Systemen reversibel durchgeführten Prozeßablaufes wäre es möglich, alle Prozesse auf umgekehrtem Weg zu durchlaufen. Dabei entstünde dann

$$\Delta A > 0 \qquad \text{für} \qquad \eta_x < \eta_c. \tag{3.2}$$

So widerspricht auch diese Voraussetzung dem II. Hauptsatz und es bleibt daher nur noch die Möglichkeit

$$\eta_x = \eta_c \equiv \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \tag{3.3}$$

für den **Wirkungsgrad** des Systems X **bei reversibler Prozeßfürung**, weil dann in beiden Richtungen für die gewonnene Arbeit $\Delta A = 0$ gilt und kein Widerspruch zum II. Hauptsatz entsteht.
Diese Überlegungen zeigen, daß der II. Hauptsatz unmittelbar zur Folge hat, daß der Wirkungsgrad η_x für einen reversibel geführten Carnotprozeß an einem beliebigen thermodynamischen System X den gleichen Wert η_c wie beim idealen Gas benutzen muß. Andererseits ist η_x nach dem I. Hauptsatz als Verhältnis von abgegebener Arbeit A zu aufgenommener Wärme Q_2 definiert:

$$\eta_x = \frac{A}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}. \tag{3.4}$$

Aus (3.3) und (3.4) folgt somit $T_1/T_2 = Q_1/Q_2$ oder

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \tag{3.5}$$

für den **reversibel geführten Kreisprozeß** an einem beliebigen thermodynamischen System. Da im Prozeß, wie im vorherigen Kapitel besprochen, nur auf denIsothermen T_2 und T_1 Wärme zu- bzw. abgeführt wird, läßt sich (3.5) durch

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \tag{3.6}$$

ersetzen. Dies gilt zunächst nur für das dort gezeugte Carnot-Viereck. Betrachten wir jetzt einen **beliebig geformten Kreisprozeß**, so können wir die vorhandene Kurve - zumindest infinitesimal - durch kleine adiabatische und isotherme Kurvenstücke ersetzen. So wird die von der Kurve umrandete Fläche in einzelne Vierecke aufgeteilt, die nur von Adiabaten und Isothermen begrenzt sind. Für jedes dieser Flächenstücke gilt also (3.6). Summieren wir die Gleichungen (3.6) für alle Flächenstücke auf, so erhalten wir einerseits Null, andererseits kompensieren sich die Beträge aller inneren Kurvenstücke, weil sie zweifach in entgegengesetzter richtung durchlaufen werden. Es verbleiben daher nur die Beträge der Randkurve. Deshalb gilt (3.6) auch für beliebig umrandete, geschlossene Kurven im Zustandsdiagramm.
Jetzt betrachten wir das **Integral**

$$\int_{V_0,T_0}^{V_1,T_1} \frac{\delta Q}{T} = S(V_1, T_1) - S(V_0, T_0) \tag{3.7}$$

für eine endliche Zustandsänderung $V_0, T_0 \longrightarrow V_1, T_1$, die **auf zwei verschiedenen Wegen** I und II durchgeführt wird. Würde das Integral auf dem Weg I und II verschiedene Beiträge liefern, so erhielten wir bei einem geschlossenen Durchlauf (I vorwärts, II rückwärts) einen von Null verschiedenen Beitrag im Widerspruch zu (3.6). Es kann also nur von den Anfangs- und Endpunkten abhängen und definiert somit eine neue Zustandsfunktion. Äquivalent zu (3.6) ist also die Aussage

$$\frac{\delta Q}{T} = dS(V, T, ...), \tag{3.8}$$

daß $\delta Q/T$ eine **neue Zustandsgröße**, die **Entropie** S, definiert.
Wie erhalten also folgende, untereinander **gleichwertige Formulierungen** des II. Hauptsatzes der Thermodynamik:

1. Unmöglichkeit eines PM II.

2. Der reversible Carnotsche Wirkungsgrad eines beliebigen thermodynamischen Systems ist $\eta_x = \eta_c \equiv 1 - T_1/T_2$.

3. $\delta Q/T$ ist entsprechend (3.6) integrabel.

4. Die durch $\delta Q/t \equiv dS$ definierte Entropie S ist eine Zustandsgröße.

5. Bei irreversiblen, infinitesimalen Zustandänderungen im abgeschlossenen system gilt stets $(\delta S)_{irr} > 0$.

Diese Betrachtungen zeigen, daß die **Entropie** S im Rahmen des II. Hauptsatzes eine in gleicher Weise **zentrale Rolle** spielt wie die Energie E im Zusammenhang mit dem I. Hauptsatz. Offen bleibt hier aber die physikalische Bedeutung der Größe S. Aufgrund des offensichtlich abstrakten, wenig anschaulichen Charakters der Entropie soll hier nur auf die Untersuchung irreversibler Zustandsänderungen und die in einem der folgenden Kapitel besprochenen statistische Deutung der Entropie verwiesen werden.

3.2 Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse

Der II. Hauptsatz ist eine Aussage über die Entropie, während der erste die quantitative Seite des Satzes von der Erhaltung und Umwandlung der Energie ausdrückt. Er ist ebenso wie der I. Hauptstaz eine Verallgemeinerung experimenteller Erfahrungen. Obwohl Carnot von einem Wärmestoff ausging, erhielt er die richtige Aussage, daß der Wirkungsgrad von Wärmekraftmaschinen, die nach dem Prinzip des Kreisprozesses arbeiten, vom Arbeitsstoff unabhängig ist. Wichtig erscheint an dieser Stelle noch die Tatsache, daß die Begriffe Wärme und Arbeit als Formen der Energieübertragung, die in der Thermodynamik betrachtet werden, einander nicht gleichwertig sind. Arbeit kann unmittelbar in Energie beliebiger Form verwandelt werden, Wärme hingegen nur zur Erhöhung der inneren Energie beitragen. (Unmittelbar bedeutet in diesem Zusammenhang: ohne vorherige Umwandlung in Arbeit.)
Bezeichnet man die Erscheinung, daß sich der thermodynamische Zustand des Arbeitskörpers ändert (nichtgeschlossener Prozeß) bzw. der Arbeitskörper einen Teil der Wärme auf "andere Körper" überträgt und sich deren thermodynamischer Zustand ändert (Kreisprozeß), als "**Kompensation**", so findet man experimentell, daß Wärme nicht ohne "Kompensation"vollständig in Arbeit, Arbeit dagegend ohne "Kompensation" vollständig in Wärme umgewandelt werden kann. Aus diesem Grund verlaufen die natürlichen Prozesse einseitig. In einem abgeschlossenen System haben selbständig ablaufende Prozesse stets die Richtung, in der die potentiell mögliche Arbeit kleiner wird.

3.3 Reversible und irreversible Prozesse

Dieser qualitative Unterschied zwischen Arbeit und Wärme gestattet es, alle Prozesse in reversible und irreversible einzuteilen. Der II. Hauptsatz sagt somit aus, daß keine Prozesse existieren, bei denen Wärme ohne "Kompensation" in Arbeit umgewandelt wird, während es Prozesse gibt, die nicht mit einer solchen Umwandlung verbunden sind. Ein Prozeß, bei dem ein System aus dem Zustand 1 in den Zustand 2 übergeht, wird als **reversibel** bezeichnet, wenn der Übergang von 2 nach 1 mit einer vollständigen Umwandlung von Wärme in Arbeit verbunden ist; er heißt **irreversibel**, wenn beim Übergang von 2 nach 1 eine nichtkompensierte Umwandlung von Arbeit in Wärme erfolgt.
Jeder quasistatische Prozeß ist reversibel. Bei einem solchen Prozeß wird der Zustand zu jedem Zeitpunkt vollständig durch die äußeren Parameter bestimmt. Ändern sich also die genannten Parameter in der umgekehrten Richtung, so durchläuft das System in umgekehrter Richtung alle Zustände und gelangt in den Anfangszustand zurück, ohne in der Umgebung irgendwelche Änderungen zurückzulassen.
Die Entropieänderung, welche nach dem II. Hauptsatz existiert, ist ein **Maß für die Irreversibilität** eines Prozesses, der in einem abgeschlossenen System stattfindet. Aus der Eindeutigkeit der Entropie folgt also, daß jeder irreversible Prozeß nichtstatisch ist. Zur Vollständigkeit seien nun noch einige Beispile für irreversible Prozesse genannt:

1. Der Wärmeaustausch zwischen zwei Körpern mit verschiedenen Temperaturen ist ein irreversibler Prozeß, weil beim umgekehrten Vorgang dem kälteren Körper eine bestimmte Wärmemenge entzogen, ohne "Kompensation" in Arbeit umgewandelt und die Arbeit zur Vergrößerung der inneren Energie des wärmeren Körpers aufgewandt werden müßte.

2. Bei der Expansion eines Gases im Vakuum wird keine Arbeit geleistet, während es nicht möglich ist, ein Gas ohne Arbeitsaufwand zu komprimieren. Die bei der Kompression zu leistende Arbeit würde zur Erwärmung des Gases führen, was man durch Wärmeentzug ausgleichen müßte. Sollen aber in der Umgebung keine Änderungen zurückbleiben, so muß man diese Wärme in Arbeit unwandeln, was ohne "Kompensation" unmöglich ist.

3. Ein weiterer irreversibler Prozeß ist die Diffusion.

Kapitel 4

Entropie in der Statistischen Thermodynamik

Martin Hülse

4.1 Motivation

Nach den Kapiteln zur Entropie in der Phänomenologischen Thermodynamik soll in diesem das Wesen der Entropie mit den Mitteln der Statistischen Thermodynamik erläutert werden. Eigentliches Ziel dieses Kapitels ist es, zu erkennen, daß man mit dieser Sicht der Entropie schon sehr nahe beim Kern unserer eigentlichen Fragestellung *„Was ist Information ?“* angelangt ist.

Der Begriff statistische Thermodynamik legt nahe, welche neuen mathematischen Werkzeuge man gebrauchen muß, wenn die Gesetzmäßigkeiten der Thermodynamik nicht mehr rein phänomenologisch, sondern unter besonderer Berücksichtigung des Teilchencharakters der Stoffe betrachtet werden. Die Konsequenzen dieser Grundüberlegung werden hier erläutert.

An dem relativ einfachen Beispiel der Dichteverteilung eines idealen Gases wird das Prinzip der statistischen Beschreibung thermodynamischer Systeme dargelegt. Damit soll ein qualitatives Verständnis der Entropie in der statistischen Thermodynamik erreicht werden, da hier auf die exakte Herleitung verzichtet wird.

Man wird aber erkennen, daß diese vereinfachte Sicht vollkommen ausreichend ist, um den Zusammenhang zwischen Entropie und Information ein erstes Mal zu erfassen. Damit wäre das weitschweifig anmutende, aber dennoch unverzichtbare, Ausholen für die Einführung des abstrakten Begriffes Information legitimiert.

4.2 Entropie und Wahrscheinlichkeit thermodynamischer Systeme

In dem Kapitel zur Pänomenologischen Thermodynamik wurden die thermodynamischen Eigenschaften eines expandierenden Gases schon näher beleuchtet.

Es wurde klar, daß es einen Zusammenhang zwischen der Entropie und dem Zustand eines thermodynamischen Systems geben muß. Der Zustand eines Systems kann aber auch durch die Wahrscheinlichkeit des Systems, es in diesem Zustand anzutreffen, beschrieben werden. Somit existiert also eine Abhängigkeit zwischen Entropie und der Wahrscheinlichkeit bzgl. des Zustandes eines Systems.

Weiterhin ist klar, daß die Entropien zweier unabhängiger Systeme auch unabhängig sind.

Man führe sich das klassische Beispiel zweier diffundierenden Gase und deren nachfolgende Trennung vor Auge. Die Wärmemenge, die nach diesen Prozeß dem System wieder zugeführt werden mußte, um den thermodynamischen Anfangszustand wieder zu erreichen, galt als Maß der Entropieänderung.

Betrachtet man nun zwei solche Systeme, so wird klar, daß sich die Gesamtentropie der Systeme aus der Summe der Einzelentropien ergibt. Betrachtet man aber die Wahrscheinlichkeit beider Systeme, sie genau in diesen zwei Zuständen vorzufinden, stellt man fest, daß diese sich aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten der unabhängigen Systeme ergibt.

Zwischen der Entropie als *additive* und der Wahrscheinlichkeit als *multiplikative* Größe muß also folgender funktioneller Zusammenhang bestehen:

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Offenbar realisiert die Funktion $ln(x_1 x_2) = ln(x_1) + ln(x_2)$ diese Abhängigkeit. Daher setzt man:

$$S = k \ln W.$$

Dies ist die berühmte BOLTZMANNsche Gleichung, wobei S die Entropie, W die Wahrscheinlichkeit und k die BOLTZMANNkonstante darstellen.

Bleibt nun zu klären, wie die Wahrscheinlichkeit in der Thermodynamik beschrieben wird. In der Klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie wird als Maß der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses der Quotient aus der Anzahl der günstigen und der Anzahl der möglichen Ereignisse definiert.

$$Wahrscheinlichkeit = \frac{guenstigeFaelle}{moeglicheFaelle} \leq 1$$

In der Thermodynamik dagegen gilt die Anzahl der günstigen Fälle als Maß der Wahrscheinlichkeit. Dies hat zur Folge, daß es sich bei thermodynamischen Wahrscheinlichkeiten um große Zahlen handeln wird.

4.3 Dichteverteilung eines Gases und deren Wahrscheinlichkeiten

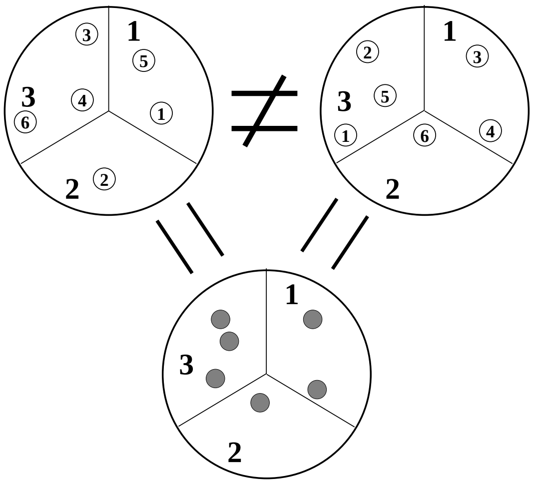
Der funktionelle Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit eines thermodynamischen Systems ist nun klar beschrieben. Um quantitative Aussagen bzgl. der Entropie zu erhalten, muß man nur noch die Wahrscheinlichkeit des Zustandes eines Systems betrachten. Dies wird am einfachen Beispiel der Dichteverteilung eines Idealen Gases erläutert. Für die exakte Herleitung der Entropie eines thermodynamischen Systems benötigt man zwar die Energieverteilung der Teilchen, doch das hier behandelte Beispiel macht die verwendeten Prinzipien am deutlichsten. Außerdem soll uns hier die physikalische Gleichung der Entropie nicht weiter interessieren, da sie für die späteren Betrachtungen zur Informationstheorie keine quantitative Rolle spielt.

Das Maß der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der günstigen Fälle eines Zustands. Man kann den Zustand eines thermodynamischen Systems am besten beschreiben, indem das System in Zellen aufgeteilt wird und festgestellt wird, welche Teilchen sich in welcher Zelle aufhalten.

Als Beispiel soll ein in drei Zellen $1, 2, 3$ aufgeteiltes System, in dem sich 6 Teilchen $1, 2, \dots 6$ befinden, dienen. Dabei könnten sich folgende Zustände einstellen:

Teilchennr.	1	2	3	4	5	6
Zellennr.	1	2	3	3	1	3
	oder auch					
Teilchennr.	1	2	3	4	5	6
Zellennr.	3	3	1	1	3	2

Da es für die Dichteverteilung eines Gases völlig egal ist, welches Teilchen nun genau in welcher Zelle ist, sondern nur die Anzahl der Teilchen in der Zelle eine Rolle spielt, könnte man auch die Dichteverteilung bzw. die Zustände, die jene Verteilungen realisieren, kompakt so beschreiben:



$$N_1 = 2$$
$$N_2 = 1$$
$$N_3 = 3$$

N_i steht für die Anzahl der Teilchen in Zelle i. Es ist leicht zu sehen, daß diese kompakte Schreibweise die Dichteverteilung der beiden oben aufgeführten Verteilungen angibt. Sie haben also die gleiche Dichteverteilung, obwohl jedes Teilchen sich in einer anderen Zelle befindet. Das kommt daher, weil die beiden *Mikrozustände* den gleichen *Makrozustand* beschreiben.

Es ist bekannt, daß das Maß der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit die Anzahl der günstigen Fälle ist. Die günstigen Fälle sind in diesem Zusammenhange die Anzahl der Mikrozustände, welche den gleichen Makrozustand repräsentieren. Der thermodynamische Zustand mit den meisten Mikrozuständen hat also die größte Wahrscheinlichkeit.

Unser Beispiel würde also folgende Mikro- und Makrozustands- bzw. Wahrscheinlichkeitstabelle ergeben (N ist Anzahl der Teilchen):

$$W = \frac{N!}{\prod N_i!}$$

N_1	6	5	4	4	3	3	2
N_2	0	1	2	1	3	2	2
N_3	0	0	0	1	0	1	2
W	1	6	15	30	20	60	**90**

Die meisten Mikrozustände besitzt der Makrozustand, der eine Gleichverteilung der Dichte im Idealen Gas repräsentiert. Der Zustand mit der gleichmäßigen Dichteverteilung hat also die höchste Wahrscheinlichkeit.

Sei $\Delta\tau_i$ der Rauminhalt der Zelle i, somit erhält man folgende Beziehung $N_i = f(i) \cdot \Delta\tau_i$ und es gelten folgende Verteilungsfunktionen :

1. für die Dichteverteilung gleichgroßer Zellen
$$f(i) = const$$

2. für die Dichteverteilung verschieden großer Zellen
(g_i ...Wahrscheinlichkeit der Zelle $\Delta\tau_i$)
$$f(i) = \frac{Ng_i}{\sum g_i \Delta\tau_i}$$

3. für die Energieverteilung ($u(i)$ Energie der Teilchen in der Zelle i)
$$\begin{aligned} f(i) &= \frac{N \cdot e^{\frac{-u(i)}{kT}}}{\sum e^{\frac{-u(i)}{kT}} \cdot \Delta\tau_i} \\ \sigma &= \sum e^{\frac{-u(i)}{kT}} \cdot \Delta\tau_i \\ f(i) &= \frac{N}{\sigma} \cdot e^{-\frac{u(i)}{kT}} \end{aligned}$$

4. damit erhalten wir folgende Gleichung der Entropie in der Statistischen Thermodynamik ($[h]^s$ Normierungsfaktor des Phasenraumvolumens)
$$S = \frac{U}{T} + kN \cdot ln(\frac{\sigma}{[h]^s})$$

Aus diesen Betrachtungen folgt eine neue statistische Deutung des 2.Hauptsatzes der Thermodynamik - **ein abgeschlossenes System strebt zu einem Zustand maximaler Wahrscheinlichkeit.**

4.4 Information als eine statistische Deutung der Entropie

Will man nun den Zusammenhang von Entropie und Information verstehen, so braucht man nur von einem vorliegenden System ausgehen, deren Mikrozustand nicht bekannt ist, und fragen: *Wie hoch ist das Informationsdefizit?*

Sei W_a die Anzahl der (gleichwahrscheinlichen) möglichen Zustände des Systems am Anfang, W_e die Anzahl der möglichen Zustände nach dem Informationsprozeß und ΔI der Informationsgewinn in *bit*. So gilt folgende Gleichung:

$$\boxed{\Delta I = ld(\tfrac{W_a}{W_e}).} \tag{4.1}$$

Diffundiert z.B. ein Gas in ein größeres Volumen, so hat man einen Informationsverlust. Hat sich das Volumen verdoppelt und unter der Annahme, daß alle anderen Möglichkeiten für die Verteilung der Moleküle unverändert bleiben, beträgt der Informationsverlust 1 bit [JUNG]. Da folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
W_e &= 2 \cdot W_a \\
\Delta I &= \mathrm{ld}\frac{W_a}{W_e} = -1 \\
S_e &= \mathrm{ld}(W_e) = \mathrm{ld}(2 \cdot W_a) = \mathrm{ld}W_a + \mathrm{ld}(2) = S_a + \mathrm{ld}(2) \\
\Delta S &= \mathrm{ld}(2) = 1 \\
\Delta S &= -\Delta I
\end{aligned}$$

Die Entropiezunahme ist so groß wie die negative Informationszunahme. Sei zu diesen Beispiel noch bemerkt, daß hier das Grundlagen zum Informationsgewinn durch Messung [DOE] liegen.

Weiterhin könnten wir nun eine neue informationstheoretische Deutung des 2.Hauptsatzes der Thermodynamik formulieren - **Information vermehrt sich nicht von selbst.**

4.5 Doch was steht da geschrieben?!

Die folgenden Beiträge aus Wissenschaft, Sachbuch und Belletristik sollen natürlich nicht nur der reinen Unterhaltung dienen. Da ich hier nicht bis zum exakten mathematisch pysikalischen Kern vordringen konnte (dies hätte den Rahmen unseres Seminars gesprengt, aus dem dieses Kapitel hervorgegangen ist), so wollte ich doch ein Beispiel geben, wie auch mit einem auf mehr Anschaulichkeit beruhenden Entropiebegriff argumentiert werden kann. Was aber nicht als Aufruf zu unseriöser „Philosophiererei“ verstanden werden soll. War ein Hauptanliegen des Seminars doch gerade, für Entropie und Information - zu weiterführender Diskussion - eine exakt wissenschafliche und einheitliche Basis zu schaffen.

Ob nun alle diese Texte diesen Grundgedanken genügend Rechnung tragen ... – möge der Leser selbst zu einer Wertung kommen ! Vielleicht wird er gerade dadurch zu weitergehenden Studien motiviert.

- **Entropie - der Stein der Weisen** Frei nach Stephen W. Hawking [1]

  Die Erkenntnis: "Die Tatsache, daß die Fläche [des Ereignishorizontes (Anm. des Autors)] des Schwarzen Loches nicht abnimmt, erinnerte mich stark an das Verhalten einer physikalischen Größe namens Entropie, ..."

  Der Widerspruch: " Doch wenn ein Schwarzes Loch in der Nähe ist, scheint es eine sehr viel einfachere Möglichkeit zu geben, gegen den Zweiten Hauptsatz zu verstoßen: Man braucht nur etwas Materie mit einem hohen Maß an Entropie, zum Beispiel einen Behälter mit Gas, in das Schwarze Loch zu werfen. Die Gesamtentropie außerhalb des Schwarzen Loches würde abnehmen. "

  Eine weitreichende Konsequenz: " ... schlug [...] vor, die Fläche des Ereignishorizontes als ein Maß für die Entropie des Schwarzen Loches anzusehen : ..."

  " Wenn ein Schwarzes Loch Entropie besitzt, dann sollte es auch eine Temperatur haben. Nun muß aber ein Körper mit einer bestimmten Temperatur ein gewisses Maß an Strahlung abgeben.[...] Diese Strahlung ist erforderlich, um eine Verletzung des Zweiten Hauptsatzes zu vermeiden."

  Des Rätsels Lösung: "Doch je mehr ich darüber nachdachte, desto zutreffender schienen mir die Näherungen zu sein. Endgültig überzeugt davon, daß die Emission real sei, war ich, als ich feststellte, [...] daß das Schwarze Loch Teilchen in genau der Menge emittiert, die erforderlich ist, um Verstöße gegen den Zweiten Hauptsatz zu vermeiden."

  und die nächste Frage: "Wie ist es möglich, daß ein Schwarzes Loch Teilchen zu emittieren scheint, wo wir doch wissen, daß seinem Ereignishorizont nichts zu entrinnen vermag?"

- **Information und Entropie - Der Stoff aus dem Romane sind** S. Lem, "Die Stimme des Herrn" [2]

  > " Der Destruktionstrieb ergäbe sich unmittelbar aus der Thermodynamik. Das Leben sei Betrug, ein Unterschlagungsversuch, das Bestreben, die ja doch unvermeidlichen und unerbitterlichen Gesetze zu umgehen;[...] Um fortzubestehen, müsse es sich von der Ordnung nähren, und da es diese - hoch organisiert - außerhalb des Lebens nirgendwo gebe, sei es dazu verdammt, sich selber aufzufressen; man müsse zerstören, um zu leben, sich von der Ordnung nähren, die insoweit Nahrung ist, als sie sich zunichte machen läßt. Nicht Ethik, sondern die Physik legt diese Gesetzmäßigkeit fest.[...] Auch das zweite Merkmal

[1] S. W. Hawking, Eine kurze Geschichte der Zeit - Die Suche nach der Urkraft des Universums; Deutsch H. Kober,Dr. B. Schmidt; Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH; 191.-220. Tausend März 1993;S.132-136

[2] Stanislaw Lem, Die Stimme des Herrn;Aus dem Polnischen R. Buschmann; Verlag Volk und Welt,Berlin 1981;1.Auflage 1981;S.144f

des Menschen, jenes im übrigen, das er mit beinahe sämtlichen Organismen gemein hat - die Geschlechtigkeit -, leitet er, auf seine Weise philosophierend, aus der thermodynamischen Statistik, und zwar aus deren informationstheoretischen Zweig ab. Das Chaos [oder Entropie (Anm. des Autors)] das jedwedem Ordnungsversuch auflauere, habe zur Folge, daß die Information bei der Übermittlung immer eine Verarmung erfahre. Um den tödlichen Rauschen entgegenzuwirken, um die errungene Ordnung vorübergehend zu verbreiten, müsse man unbedingt beständig die ≫Erbtexte≪ einander gegenüberstellen. Eine solche Konfrontation, dieses ≫Kollationieren≪, das die Beseitigung von ≫Irrtümern≪ bezwecke, eben dies sei die Rechtfertigung und die Ursache für das Entstehen der Zweigeschlechtigkeit. Also in der Physik der Informationsübermittlung, in der Übertragungstheorie seien die Urheber des Geschlechts zu suchen. Die Gegenüberstellung der Erbinformation in jeder Generation war eine Notwendigkeit, eine Bedingung, ohne die sich das Leben nicht hätte halten können, der gesamte biologische, algedonische, psychische, kulturelle Rest sei nunmehr eine Ableitung, der Wald der Konsequenzen, der dem harten, von den Gesetzen der Physik geformten Samenkorn entsprossen war.“

- **Der Entropiebegriff in der Modernen Gesellschaftskritik - Nutzen und Mißbrauch?**

“Wie die Begriffe Leistungsfähigkeit und BSP [Bruttosozialprodukt (Anm. des Autors)] müssen auch Produktivität und Gewinn innerhalb eines umfassenden ökologischen Zusammenhanges neu definiert und in Zusammenhang mit den beiden grundlegenden Variablen Energie und Entropie gebracht werden. Dabei sollte man jedoch im Auge behalten, daß der Begriff zwar als Variable in einer ökonomischen Analyse wertvoll ist, andererseits aber der Rahmen der klassischen Thermodynamik, aus dem er stammt, recht begrenzt ist. Dieser Begriff ist insbesondere nicht angebracht, um lebende, sich selbst organisierende Systeme zu beschreiben - seien es individuelle Organismen, gesellschaftliche oder Ökosysteme.[...] Neuere ökonomische Analysen unter Einbeziehung der Entropie haben den Zweiten Hauptsatz manchmal irrtümlicherweise für ein absolutes Naturgesetz gehalten.“ [3]

“Seitdem sich der Mensch mit den großtechnischen Mitteln am Abbau der lebendigen Natur beteiligt und Abfall erzeugt, überwiegt die Entropie auf der Erde bei weitem die Naturproduktion. Der Umschlag in die negative Bilanz wird sich irgend-

[3] Frifjof Capra; Wendezeit, Bausteine für ein neues Weltbild;aus dem amerikanischen von E. Schuhmacher; Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, München; ungekürzte Ausgabe, 4.Auflage August 1995;S.445f

wann im 20.Jahrhundert ereignet haben. Die ökologische Weltbilanz wird immer negativer, und zwar in dem Maße, wie das fälschlich so genannte wirtschaftliche Wachstum zunimmt. Das heutige Weltprogramm, welches sich die Entwicklung der Unterentwickelten zum hochtechnischen Zivilisationsstandard zum Ziel setzt, ist ein perfektes Entropieprogramm“ [4]

“Wie nennt man den Ausgleich der Differenzen auf ein gemeinsames Mittelmaß? Entropie. Und diese besondere Art von Entropie läuft inzwischen unter einem höchst fragwürdigen Namen ab : Multikulturelle Gesellschaft.[. . .] Wenn dagegen viele Kulturen in einem Raum zusammengemixt werden, so ergibt das entweder ein neben- und gegeneinander oder - wie in der physikalischen Wärmelehre - Entropie, also ein Gemisch, dessen Wert mit zunehmender Durchmischung sinkt, bis es letzten Endes keinen Wert mehr hat. Eine Gesellschaft als multikulturell zu bezeichnen, heißt nichts anderes als festzustellen, daß sie keine Kultur hat.“[5]

“Es wird in dieser Welt nie eine multikulturelle Gesellschaft geben, die das Adjektiv kulturell wirklich verdient. Je stärker die Völker durcheinander brodeln, um so größer die Entropie, ein um so geringeres Maß an Kultur ist das Ergebnis. Und auch zu einer friedlicheren Welt kann dieser Weg gerade nicht führen.“[6]

[4]H. Gruhl;Himmefahrt ins Nichts, Der geplünderte Planet vor dem Ende;1992 Albert Langen/Georg Müller Verlag; 2.Auflage April 1992;S.255

[5]H. Gruhl,S.311

[6]H. Gruhl,S.314

Kapitel 5

Entropie und Information – zur SHANNONschen Informationstheorie

Alexander Karosseit

5.1 Unbestimmtheit

Die Umwelt, die ein Mensch beobachtet, setzt sich aus mehr oder weniger zufälligen, von ihm unvorhersehbaren Ereignissen zusammen. Je mehr er über einen Umstand weiß, desto mehr kann er auch über seinen weiteren Verlauf aussagen. Im Folgenden sollen nun dieses „mehr oder weniger Zufällige" und das „Wissen" durch die Einführung der Begriffe der Entropie bzw. der Information etwas genauer spezifiziert werden.

Zur weiteren Motivation sollen die folgenden Feststellungen dienen. Sie stellen die Schlußfolgerungen aus den *Ausgängen* der jeweilig durchgeführten *Versuche* dar.

- *Ziehmlich gewiß* ist, daß der nächste Rabe, den wir treffen, schwarz sein wird.

- *Weit weniger Sicher* ist, ob der nächste Passant in der Fußgängerzone Rechts- oder Linkshänder ist.

- *Noch wesentlich unsicherer* ist, ob es sich um einen Mann oder eine Frau handeln wird.

- Als *ungewiß* würde man intuitiv den Ausgang einer Lottoziehung bezeichnen.

Was hier verdeutlicht werden soll, ist, daß der *Grad der Unbestimmtheit* für beliebige Versuche *nicht* gleich sein wird.

5.2 Ein Maß für den Grad der Unbestimmtheit

5.2.1 Ansatz

Wir suchen eine zahlenmäßige Charakteristik für den Grad der Unbestimmtheit eines Versuchs in Abhängigkeit von der Anzahl seiner Ausgänge k, also eine Funktion $f(k)$. Diese sollte auf jeden Fall *wachsen in k und gleich Null sein für* $k = 1$.

Der Versuch α habe k gleichwahrscheinliche Ausgänge, der Versuch β habe l gleichwahrscheinliche Ausgänge.

Der zusammengesetzte Versuch $\alpha\beta$ (gleichzeitige Ausführung der Versuche) hat nun kl gleichwahrscheinliche Ausgänge (alle Kombinationen).

Naheliegend ist, daß die Unbestimmtheit des zusammengesetzten Versuches größer ist als die eines einzelnen. Wir nehmen also an, daß *die Unbestimmtheit von $\alpha\beta$ gleich der Summe der jeweiligen Unbestimmtheiten der Einzelversuche α und β* ist. Es müssen also folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, && (5.1)\\ f(kl) &= f(k) + f(l), && (5.2)\\ f(k) &> f(l) \text{ für } k > l. && (5.3) \end{aligned}$$

Man kann beweisen, daß

$$f(k) = \log k \tag{5.4}$$

die einzige Funktion ist, die diese Bedingungen erfüllt.

Aus der Basis des Logarithmus ergibt sich auch die Einheit dieses Maßes: (im Fall $\log_2 k$) die Unbestimmtheit des Versuches mit zwei gleichwahrscheinlichen Ausgängen (Münzewerfen etc.) – „Ja-Nein-Einheit"; ein *bit*.

Wahrscheinlichkeitstabelle für einen Versuch mit k gleichwahrscheinlichen Ausgängen:

Versuchsausgänge	A_1	A_2	A_3	$\cdots$	A_k
Wahrscheinlichkeiten	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$	$\frac{1}{k}$

Da der Versuch die Unbestimmtheit $\log k$ hat, kann man für jeden einzelnen Ausgang sagen, er hat den k-ten Teil dieser Unbestimmtheit, also $\frac{1}{k}\log k = -\frac{1}{k}\log\frac{1}{k}$.

Betrachtet man nun einen Versuch mit folgender Wahrscheinlichkeitstabelle:

Versuchsausgänge	A_1	A_2	A_3
Wahrscheinlichkeiten	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

ergeben sich für die einzelnen Versuchsausgänge die Unbestimmtheiten $-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}$, welche wir wieder zur gesamten Unbestimmtheit des Versuchs zusammenfassen können:

$$-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}$$

$\rightsquigarrow$ Allgemein für einen Versuch α:

Versuchsausgänge	A_1	A_2	A_3	$\cdots$	A_k
Wahrscheinlichkeiten	$p(A_1)$	$p(A_2)$	$p(A_3)$	$\cdots$	$p(A_k)$

ergibt sich also ein Grad der Unbestimmtheit von:

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= -p(A_1)\log p(A_1) - p(A_2)\log p(A_2) - p(A_3)\log p(A_3) - \cdots \\ &\quad -p(A_k)\log p(A_k) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Man bezeichnet $H(\alpha)$ als die *Entropie* des Versuchs α.

5.2.2 Eigenschaften von $H(\alpha)$

- Die Entropie nimmt nie negative Werte an, da $0 \leq p(A) \leq 1$ ist.
- Ist für einen Ausgang A_i die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens $p(A_i)$ gleich Null, braucht er nicht mehr mit betrachtet zu werden (streng: $\log p(A_i)$ ist nicht definiert).
- $H(\alpha)$ wird also nur dann gleich Null, wenn eine der Wahrscheinlichkeiten $p(A_1), p(A_2), \ldots, p(A_k)$ gleich Eins ist; alle anderen Null.
- $H(\alpha)$ wird maximal für gleichwahrscheinliche Ausgänge.

5.2.3 Beispiel

Ein bestimmter Ort am 15. Juni (Versuch α_1):

Versuchsausgänge	Regen	kein Niederschlag
Wahrscheinlichkeiten	0,4	0,6

Der selbe Ort am 15. November (Versuch α_2):

Versuchsausgänge	Regen	Schnee	kein Niederschlag
Wahrscheinlichkeiten	0,65	0,15	0,2

$$\begin{aligned}
H(\alpha_1) &= -0,4\log 0,4 - 0,6\log 0,6 \approx 0,97 \text{ bit},\\
H(\alpha_2) &= -0,65\log 0,65 - 0,15\log 0,15 - 0,2\log 0,2\\
&\approx 1,28 \text{ bit} > H(\alpha_1)
\end{aligned}$$

5.3 Die Entropie zusammengesetzter Versuche

5.3.1 Die bedingte Entropie

Für zwei von einander *unabhängige* Versuche α und β sowie den zusammengesetzten Versuch $\alpha\beta$ gilt folgende Beziehung:

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha) + H(\beta), \tag{5.6}$$

die Additionsregel für Entropien.

Bedingen sich die Versuche jedoch, ergibt sich für die Zusammensetzung folgendes:

$$\begin{aligned}
H(\alpha\beta) = \; & -p(A_1B_1)\log p(A_1B_1) - p(A_1B_2)\log p(A_1B_2) - \cdots\\
& -p(A_1B_l)\log p(A_1B_l)\\
& -p(A_2B_1)\log p(A_2B_1) - p(A_2B_2)\log p(A_2B_2) - \cdots\\
& -p(A_2B_l)\log p(A_2B_l)\\
& \vdots\\
& -p(A_kB_1)\log p(A_kB_1) - p(A_kB_2)\log p(A_kB_2) - \cdots\\
& -p(A_kB_l)\log p(A_kB_l),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei $A_1, A_2, \ldots, A_k$ und $B_1, B_2, \ldots, B_l$ die jeweiligen Ausgänge der Versuche α bzw. β sind.

Da nun die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B_j von der Bedingung A_i abhängen soll, führt man die bedingte Wahrscheinlichkeit $p_{A_i}(B_j)$ ein.

$$p(A_iB_j) = p(A_i)p_{A_i}(B_j). \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
H(\alpha\beta) &= -p(A_1)p_{A_1}(B_1)(\log p(A_1) + \log p_{A_1}(B_1)) \\
&\quad -p(A_1)p_{A_1}(B_2)(\log p(A_1) + \log p_{A_1}(B_2)) - \cdots \\
&\quad -p(A_1)p_{A_1}(B_l)(\log p(A_1) + \log p_{A_1}(B_l)) \cdots \\
&= -p(A_1)\underbrace{(p_{A_1}(B_1) + p_{A_1}(B_2) + \cdots + p_{A_1}(B_l))}_{1}\log p(A_1) \\
&\quad +p(A_1)(-p_{A_1}(B_1)\log p_{A_1}(B_1) - p_{A_1}(B_2)\log p_{A_1}(B_2) - \cdots \\
&\quad - - p_{A_1}(B_l)\log p_{A_1}(B_l)) \cdots
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$H_\alpha(\beta) = p(A_1)H_{A_1}(\beta) + p(A_2)H_{A_2}(\beta) + \cdots + p(A_k)H_{A_k}(\beta) \tag{5.10}$$

Die allgemeine Regel zur Bestimmung der Entropie des Versuchs $\alpha\beta$ lautet also

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha) + H_\alpha(\beta). \tag{5.11}$$

5.3.2 Eigenschaften der Größe $H_\alpha(\beta)$

- $H_\alpha(\beta)$ ist nicht negativ.
- Sie wird nur dann gleich Null, wenn $H_{A_1}(\beta) = H_{A_2}(\beta) = \cdots = H_{A_k}(\beta) = 0$, also wenn bei beliebigem Ausgang von α, die Ergebnisse des Versuchs β vollkommen bestimmt sind.
- $\rightsquigarrow 0 \leq H_\alpha(\beta) \leq H(\beta)$.

5.3.3 Beispiel

Der Krankenstand wird representiert durch den Versuch β:

Versuchsausgänge	gesund (B_1)	krank (B_2)
Wahrscheinlichkeiten	0,98	0,02

Dann ist

$$H(\beta) = -0,98\log 0,98 - 0,02\log 0,02 \approx 0,14 \text{ bit}.$$

Ein Test α fällt bei allen wirklich Kranken positiv aus, bei gesunden Menschen ebenso oft positiv wie negativ.

Versuchsausgänge	positiv (A_1)	negativ (A_2)
Wahrscheinlichkeiten	0,51	0,49

Hat der Versuch α den Ausgang A_1, was am wahrscheinlichsten ist, erhält man nun die *bedingten* Wahrscheinlichkeiten der Ausgänge des Versuchs β

$$p_{A_1}(B_1) = \frac{49}{51} \text{ und } p_{A_1}(B_2) = \frac{2}{51},$$

d.h. unter 51 „positiv“ getesten sind 49 gesunde und 2 kranke Menschen. Es ergibt sich die bedingte Entropie

$$H_{A_1}(\beta) = -\frac{49}{51}\log\frac{49}{51} - \frac{2}{51}\log\frac{2}{51} \approx 0,24 \text{ bit}.$$

Fällt der Test α negativ aus (Ausgang A_2), ist der Probant garantiert gesund,

$$H_{A_2}(\beta) = 0.$$

Damit vermindert die Realisierung des Versuchs α den Grad der Unbestimmtheit von β um ca. $0,02$ bit.

$$H_\alpha(\beta) = 0,51 H_{A_1}(\beta) + 0,49 H_{A_2}(\beta) \approx 0,12 \text{ bit}.$$

5.4 Der Begriff der Information

Die Differnz von $0,02$ bit aus dem Beispiel oben ist also die Menge an Information, die der Testversuch gegenüber dem Grundwissen (Grundversuch β) gebracht hat. Die folgende Gleichung zeigt nun deutlich, daß der Informationsgewinn schlicht und einfach ein Verlust an Unsicherheit ist.

$$I(\alpha,\beta) = H(\beta) - H_\alpha(\beta) \tag{5.12}$$

Gleichung (5.12) ist in Übereinstimmung mit Gleichung (4.1), man verdeutliche sich die mathematische Definition der Entropie H in (5.5). Wobei (5.12) eine strengere Formulierung darstellt, da hier nicht nur die wahrscheinlichsten Zustände einbezogen wurden, was in der Thermodynamik der Fall war.

Kapitel 6

Psychologischer Ansatz

Wolfram Hesse

6.1 Motivation

Möge das folgende Kapitel auf den ersten Blick nicht direkt zum Thema passen. Meiner Meinung nach darf es aber in der Diskussion über Informationsverarbeitung nicht fehlen.
Ich möchte einerseits ein Verständnis vermitteln, wie der Mensch Informationen aus der Umwelt verarbeitet, andererseits soll es zur Diskussion beitragen, ob der Mensch mit einem technischen Gerät bzw. einem physikalischen Prozeß verglichen werden kann.
Bei der Aufnahme und Verarbeitung von Informationen beim Menschen spielen Wahrnehmung und Gedächtnis eine entscheidende Rolle. Diese Gebiete der Psychologie möchte ich in meiner Ausarbeitung vorstellen.
Da oft - fälschlicher Weise - Psychologie als die Lehre der Seele definiert wird, möchte ich den Gegenstand und die Ziele der Psychologie als anerkannte Wissenschaft an diesem Punkt aufführen:
Der **Gegenstand** der Psychologie sind Verhalten, Erleben und Bewußtsein des Menschen, deren Entwicklung über die Lebensspanne und deren innere (Individuum) und äußere (Umwelt) Bedingungen und Ursachen.
Ziele der Psychologie sind die Beschreibung, Erklärung und Vorhersage des Verhaltens.
Bei meiner Ausarbeitung habe ich mich hauptsächlich an das Lehrbuch „Psychologie“von [ZIM92] gehalten.

6.2 Wahrnehmung

Definition:
Bei der Wahrnehmung werden sich ständig ändernde oft chaotische Inputs über unsere Sinnesorgane aufgenommen. Diese gewonnenen Reize werden individuell organisiert und interpretiert. Genauere Erläuterungen folgen im nächsten Abschnitt.

6.2.1 Drei Abschnitte der Wahrnehmung

- **Sensorische Empfindung**
  Sinnesempfindungen (physikalische Reize, wie Licht oder Schallwellen), werden kodiert und analysiert. Das heißt, es existieren Mechanismen, die physikalische Energie in neurale Aktivität von Gehirnzellen umwandeln. In dieser neuralen Aktivität sind Informationen über die Art der Stimulation der Rezeptororgane verschlüsselt.

- **Wahrnehmung im engeren Sinne:**
  Alle Informationen, die man aufnimmt, werden jedoch nicht weiterverarbeitet. Die „durchdringenden“Informationen sind von genetischen und individuellen Prioritäten abhängig. Ein Beispiel dafür ist der Aufenthalt in einer Diskothek oder auf einer Fete: Man unterhält sich mit seiner Gesprächsperson, obwohl man vielen anderen -oft stärkeren- Reizen ausgesetzt ist (laute Musik, andere Unterhaltungen u.ä.).
  Die gewonnenen („gefilterten“) Informationen werden zusammengefaßt, organisiert und modifiziert. So ergeben beim Lesen zwei senkrechte Linien, die mit einer waagerechten Linie verbunden sind, den Buchstaben **H**. Dieses schlußfolgert man, weil man das entsprechende Wissen hat. Dieses Wissen wird auch zum vervollständigen ungenauer Informationen benötigt. So sind viele Informationen vom Kontext abhängig, in dem wir sie aufnehmen.

  Ein Beispiel ist folgende Wortgruppe: 

  (vgl. [ZIM92] S. 182)
  Die Buchstaben **A** und **H** haben das gleiche Aussehen. Trotzdem können wir die Buchstaben dem jeweiligen Wort richtig zuordnen.

- **Klassifikation**

  1. **Einordnung** der identifizierten Objekte **in vertraute Kategorien**.
     Das heißt,
     „runde Gegenstände werden zu Fußbällen, Münzen, Orangen, ... “.
  2. Ermittlung der **Funktion** des wahrgenommenen Gegenstandes
     Das heißt,
     „ein runder Gegenstand mit dem man Ware einkaufen kann ist z.B. eine Münze“.