# Krullbewertungen

Karl Mathiak

TU Braunschweig 1994

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Geordnete Gruppen

Eine Gruppe $G$ heißt eine *geordnete Gruppe*, wenn gilt:

1. $G$ ist linear geordnet.
2. Aus $a \leq b$ folgt $ac \leq bc$ und $ca \leq cb$ für alle $a, b, c \in G$.

**Beispiele**

1.) $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Beide Gruppen sind isomorph: Die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \qquad x \mapsto e^x$$

ist ein ordnungserhaltender Isomorphismus.

2.) Lexikographische Anordnung: Seien $G_1, \ldots, G_n$ geordnete Gruppen und

$$G = G_1 \times \ldots \times G_n = \prod_{i=1}^{n} G_i$$

ihr direktes Produkt. Durch

$$(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n),$$

falls es ein $1 \leq i \leq n$ mit

$$a_i < b_i \quad \text{und} \quad a_j = b_j \text{ für } j < i$$

gibt, und komponentenweise Verknüpfung wird $G$ eine geordnete Gruppe.

3.) Nichtabelsche geordnete Gruppe: Sei

$$G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\}.$$

Durch die Verknüpfung

$$(a, b) \circ (c, d) := (ac, ad + b)$$

wird $G$ bezüglich der lexikographischen Anordnung

$$(a, b) < (c, d) \iff (a < c) \vee (a = c \wedge b < d)$$

eine nicht-kommutative geordnete Gruppe.

Aus den Axiomen für eine geordnete Gruppe erhält man folgende *Eigenschaften*: Es seien $a, b, c \in G$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(A)
$$\begin{aligned} a \leq b \wedge c \leq d \quad &\Longrightarrow \quad ac \leq bd \\ a \leq b \wedge c < d \quad &\Longrightarrow \quad ac < bd \end{aligned}$$

(B)
$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Longrightarrow \quad a^n \leq b^n \\ a < b \quad &\Longrightarrow \quad a^n < b^n \end{aligned}$$

(C)
$$a \leq b \quad \Longrightarrow \quad b^{-1} \leq a^{-1}$$

**Satz 1.1** *Alle vom Einselement verschiedenen Elemente von $G$ haben unendliche Ordnung.*

**Beweis:** Sei $e$ das Einselement von $G$. Aus $e < x$ bzw. $x < e$ folgt nach (B) $e < x^n$ bzw. $x^n < e$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist stets $e \neq x^n$. □

DEFINITION Eine Teilmenge $S$ einer geordneten Menge $M$ heißt *konvex*, wenn gilt:

$$s_1 \leq x \leq s_2\,, \quad s_1, s_2 \in S,\, x \in M \quad \Longrightarrow \quad x \in S\,.$$

**Satz 1.2** *Die konvexen Untergruppen einer geordneten Gruppe $G$ sind bezüglich der Inklusion linear geordnet, d.h. für zwei konvexe Untergruppen $U_1, U_2$ von $G$ gilt $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.*

**Beweis:** Seien $U_1, U_2$ konvexe Untergruppen von $G$ mit $U_1 \not\subseteq U_2$, etwa $x \in U_1$ und $x \notin U_2$. Man kann $x > e$ annehmen (andernfalls wählt man $x^{-1}$). Sei $y \in U_2$. Dann ist $y < x$, weil aus $e < x \leq y$ wegen der Konvexität von $U_2$ $x \in U_2$ folgen würde. Außerdem ist $x^{-1} < y$, weil aus $y \leq x^{-1} < e$ wegen der Konvexität von $U_2$ $x^{-1} \in U_2$ folgen würde. Aus $x^{-1} < y < x$ folgt aber $y \in U_1$ wegen der Konvexität von $U_1$. Also ist $U_2 \subseteq U_1$. □

**Beispiel**

Sei $G = \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ lexikographisch geordnet. Bezüglich der komponentenweisen Addition ist $\mathbb{Z}^n$ eine abelsche Gruppe.

1.) Die Mengen

$$U_k = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 = \ldots = x_k = 0\} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

sind konvexe Untergruppen von $\mathbb{Z}^n$:
Die Gruppeneigenschaften sind trivialerweise erfüllt. Ferner folgt aus

$$x \leq y \leq x' \quad \text{mit} \quad x, x' \in U_k\,,$$

daß auch die ersten $k$ Komponenten von $y$ Null sind, also $y \in U_k$.

2.) Jede konvexe Untergruppe $U$ von $\mathbb{Z}^n$ ist eine der Untergruppen $U_k$:
Wähle $k$ maximal mit $U \subseteq U_k$. Ist $k = n$, so ist $U_k = U_n = 0 = U$. Sei also $k < n$. Dann gibt es ein $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ mit

$$x_1 = \ldots = x_k = 0 \quad \text{und} \quad x_{k+1} \neq 0\,.$$

Ist $y = (y_1, \ldots, y_n) \in U_k$, so gibt es ein $t \in \mathbb{Z}$ mit

$$-tx_{k+1} \leq y_{k+1} \leq tx_{k+1}\,.$$

Dann ist

$$-tx \leq y \leq tx\,,$$

also $y \in U$, weil $U$ konvex ist. Damit ist $U_k \subseteq U$. Insgesamt ist damit $U = U_k$.
Ergebnis:

$$U_0 = \mathbb{Z}^n \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots \supseteq U_n = 0$$

ist die Kette aller konvexen Untergruppen von $\mathbb{Z}^n$.

Definition Die Anzahl der echten konvexen Untergruppen heißt *Rang* der geordneten Gruppe.

Wegen $\operatorname{Rang} \mathbb{Z}^n = n$ treten alle natürlichen Zahlen als Rang von geordneten Gruppen auf.

Definition Eine geordnete Gruppe $G$ heißt *archimedisch geordnet*, wenn zu jedem $a > e$ und zu jedem $b \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b \leq a^n$$

existiert.

$G$ ist genau dann archimedisch geordnet, wenn zu jedem $a > e$ und jedem $b \in G$ ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$a^n \leq b < a^{n+1}$$

existiert.

**Satz 1.3** *Eine Gruppe $G$ ist genau dann archimedisch geordnet, wenn ihr Rang gleich 1 ist.*

**Beweis:** 1.) Sei $G$ archimedisch geordnet und $U \neq \{e\}$ eine konvexe Untergruppe von $G$. Sei $a \in U$, $a > e$ und $b \in G$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$a^n \leq b < a^{n+1} \, .$$

Weil $U$ konvex ist, folgt $b \in U$, also ist $G \subseteq U$, d.h. $G = U$. Damit ist $\operatorname{Rang} G = 1$.
2.) Sei $\operatorname{Rang} G = 1$ und $a > e$. Die Menge

$$U_a = \{b \in G \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a^{-n} \leq b \leq a^n\}$$

ist eine konvexe Untergruppe: Seien $b, c \in U_a$. Dann gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$a^{-n} \leq b \leq a^n$$

und

$$a^{-m} \leq c \leq a^m \, .$$

Wegen

$$a^{-m} \leq c^{-1} \leq a^m$$

folgt hieraus

$$a^{-(n+m)} \leq bc^{-1} \leq a^{n+m} \, ,$$

also $bc^{-1} \in U_a$. Ist $b \leq x \leq c$ mit $x \in G$, so gilt

$$a^{-k} \leq x \leq a^k \quad \text{mit} \quad k := \max(n, m) \, ,$$

also $x \in U_a$, d.h. $U_a$ ist eine konvexe Untergruppe.

Wegen $a \in U_a$ ist $U_a \neq \{e\}$. Weil $\operatorname{Rang} G = 1$ ist, folgt daher $U_a = G$. Damit gibt es zu jedem $b \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b \leq a^n$, d.h. $G$ ist archimedisch geordnet. $\square$

# 2 Archimedisch geordnete Gruppen

DEFINITION Eine geordnete Gruppe $G$ heißt *archimedisch geordnet*, wenn zu jedem $a > e$ und zu jedem $b \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b \le a^n$$

existiert.

$G$ ist genau dann archimedisch geordnet, wenn zu jedem $a > e$ und jedem $b \in G$ ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$a^n \le b < a^{n+1}$$

existiert.

**Beispiele**

1.) $(\mathbb{R}, +)$ ist archimedisch geordnet. Aber auch die Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen ist bezüglich der Multiplikation archimedisch geordnet: Seien $b > 0$ und $a > 1$, also $a = 1 + h$ mit $h > 0$. Dann ist nach BERNOULLI für genügend großes $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = (1+h)^n \ge 1 + nh > b\,.$$

2.) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei lexikographisch geordnet. $G$ ist nicht archimedisch geordnet, denn es ist $(0,0) < (0,1)$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n\,(0,1) = (0,n) < (1,0)\,.$$

**Satz 2.1** *Eine archimedisch geordnete Gruppe ist kommutativ.*

**Beweis:**

1. Fall: Die Menge $P = \{x \in G \mid e < x\}$ enthält ein kleinstes Element $c > e$.

Sei $a \in G$ beliebig. Weil $G$ archimedisch geordnet ist, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$c^n \le a < c^{n+1}\,, \qquad \text{also} \qquad e \le ac^{-n} < c\,.$$

Weil $c$ minimal in $P$ ist, folgt $ac^{-n} = e$, also $a = c^n$. Damit ist $G$ zyklisch, also insbesondere kommutativ.

2. Fall: Die Menge $P = \{x \in G \mid e < x\}$ besitzt kein kleinstes Element. Wir beweisen zuerst eine

**Zwischenbehauptung** Ist $x > e$, so gibt es ein $z \in G$ mit

$$e < z < x \qquad \text{und} \qquad e < z^2 \leq x\,.$$

*Beweis:* Weil $P$ kein kleinstes Element besitzt, gibt es ein $y \in P$ mit

$$e < y < x\,.$$

Ist $y^2 \leq x$, so kann man $z = y$ setzen. Ist dagegen $x < y^2$, so setze man $z = xy^{-1}$. Aus $y < x < y^2$ folgt

$$e < z = xy^{-1} < y$$

und hieraus

$$z < z^2 < zy = x\,.$$

Die Kommutativität von $G$ beweist man jetzt indirekt. Angenommen, für zwei Elemente $a, b$ aus $G$ gilt

$$ab \neq ba\,, \qquad \text{etwa} \qquad ab > ba\,.$$

Dann ist

$$e < x := aba^{-1}b^{-1}\,.$$

Nach obiger Zwischenbehauptung gibt es daher ein $z \in G$ mit

$$e < z < x \qquad \text{und} \qquad e < z^2 \leq x\,.$$

Weil $G$ archimedisch geordnet ist, gibt es $n, m \in \mathbb{Z}$ mit

$$z^m \leq a < z^{m+1} \qquad \text{und} \qquad z^n \leq b < z^{n+1}\,.$$

Daraus folgt

$$x = aba^{-1}b^{-1} < z^{m+1}z^{n+1}z^{-m}z^{-n} = z^2\,,$$

also ein Widerspruch zu $z^2 \leq x$. Folglich ist $G$ kommutativ. □

Wie der folgende Satz zeigt, lassen sich die archimedisch geordneten Gruppen als Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$ auffassen.

**Satz 2.2 (Hölder 1901)** *$G$ sei archimedisch geordnet und $a > e$ ein fest gewähltes Element von $G$. Dann gibt es genau einen isotonen (d.h. ordnungserhaltenden) und injektiven Homomorphismus*

$$f : G \to (\mathbb{R}, +) \qquad \textit{mit } f(a) = 1\,.$$

**Beweis:** Sei $x \in G$. Definiere

$$U(x) := \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z},\, m \in \mathbb{N},\, a^n \leq x^m \right\} .$$

Diese Menge rationaler Zahlen besitzt folgende Eigenschaften:

(1) Aus $q' \leq q$ und $q \in U(x)$ folgt $q' \in U(x)$.

*Beweis:* Es sei

$$q' = \frac{n'}{m'} \leq \frac{n}{m} = q$$

mit $n, n' \in \mathbb{Z}$, $m, m' \in \mathbb{N}$ und $a^n \leq x^m$. Dann ist

$$a^{mn'} \leq a^{nm'} \leq x^{mm'} ,$$

also

$$q' = \frac{mn'}{mm'} \in U(x) .$$

(2) Aus $x^m < a^n$ folgt $\frac{n}{m} \notin U(x)$.

*Beweis:* Angenommen, es wäre

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \in U(x) , \qquad a^{n'} \leq x^{m'} .$$

Dann würde

$$x^{mm'} < a^{nm'} = a^{n'm} \leq x^{mm'} ,$$

also ein Widerspruch folgen.

(3) Es ist $U(x) \neq \emptyset$ und $\sup U(x) < \infty$.

*Beweis:* Weil $G$ archimedisch geordnet ist, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$a^n \leq x < a^{n+1} ,$$

also ist $n \in U(x)$ und $n + 1 \notin U(x)$. Damit ist $U(x) \neq \emptyset$ und $n + 1$ eine obere Schranke von $U(x)$. Folglich existiert das Supremum von $U(x)$.

Wir definieren für $x \in G$

$$f(x) := \sup U(x)$$

und erhalten hiermit eine Abbildung $f : G \to \mathbb{R}$.

(5) Es gilt

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in G$.

*Beweis:* Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existieren $n,\ n' \in \mathbb{Z}$ mit

$$a^n \le x^m < a^{n+1} \qquad a^{n'} \le y^m < a^{n'+1},$$

also, da $G$ nach Satz 2.1 kommutativ ist,

$$(*) \qquad a^{n+n'} \le x^m y^m = (xy)^m < a^{n+n'+2}$$

$$(**) \qquad \frac{n}{m} \le f(x) < \frac{n+1}{m} \quad \text{und} \quad \frac{n'}{m} \le f(y) < \frac{n'+1}{m}.$$

Aus $(*)$ folgt

$$\frac{n+n'}{m} \le f(xy) < \frac{n+n'+2}{m},$$

aus $(**)$ durch Addition

$$\frac{n+n'}{m} \le f(x) + f(y) < \frac{n+n'+2}{m}.$$

Damit ist

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| < \frac{2}{m},$$

also, weil $m$ beliebig gewählt werden kann, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

(5) $f$ ist isoton und injektiv.

*Beweis:* Sei $x < y$, also $e < yx^{-1}$. Weil $G$ archimedisch geordnet ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$a \le (yx^{-1})^n\,.$$

Es folgt

$$0 < \frac{1}{n} \le f(yx^{-1}) = f(y) - f(x)\,,$$

also

$$f(x) < f(y)\,.$$

Damit ist $f$ isoton und injektiv.

(6) Es ist $f(a) = 1$.

*Beweis:* Wegen

$$\begin{aligned} U(a) &= \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N},\ a^n \le a^m \right\} \\ &= \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N},\ n \le m \right\} \\ &= \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \le 1 \} \end{aligned}$$

ist $f(a) = \sup U(a) = 1$.

(7) Die Abbildung $f$ ist eindeutig bestimmt.

*Beweis:* Sei $g$ ein injektiver und isotoner Homomorphismus

$$g : G \to (\mathbb{R}, +) \quad \text{mit} \quad g(a) = 1\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} \in U(x) \quad &\Longrightarrow \quad a^n \leq x^m \quad \Longrightarrow \quad n\,g(a) \leq m\,g(x) \\ &\Longrightarrow \quad n \leq m\,g(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{m} \leq g(x) \end{aligned}$$

ist $g(x)$ eine obere Schranke von $U(x)$, also

$$f(x) = \sup U(x) \leq g(x)\,.$$

Aus $\frac{n}{m} \notin U(x)$, also $a^n > x^m$, folgt entsprechend $g(x) < \frac{n}{m}$. Damit ist $g(x)$ die kleinste obere Schranke von $U(x)$, also $g(x) = f(x)$ für alle $x \in G$. □

Eine wichtige Folgerung von Satz 2.2 ist die Existenz des Logarithmus und damit auch der Exponentialfunktion als Umkehrfunktion des Logarithmus. Sei $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ die Gruppe der positiven reellen Zahlen bezüglich der Multiplikation. Wie wir bereits wissen, ist die Gruppe archimedisch geordnet. Folglich gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} &\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \\ &x < y \;\Rightarrow\; \log_a(x) < \log_a(y) \\ &\log_a(a) = 1. \end{aligned}$$

**Bemerkung** Die Auswahl von $a \in G$ in Satz 2.2 und die Bedingung $f(a) = 1$ dienen nur dazu, $f$ eindeutig festzulegen. Ist $g : G \to (\mathbb{R}, +)$ ein beliebiger isotoner und injektiver Homomorphismus, so gilt $g = c \cdot f$ mit $0 \leq c \in \mathbb{R}$, d.h. alle isotonen und injektiven Homomorphismen $g : G \to (\mathbb{R}, +)$ ergeben sich durch Multiplikation von $f$ mit einer positiven reellen Zahl.

**Beweis:** Aus $e < a$ folgt $g(e) = 0 < g(a)$. Setze $c := g(a)$. Die Abbildung

$$g^*(x) := \frac{1}{c}\,g(x) \qquad (x \in G)$$

ist dann ebenfalls ein isotoner und injektiver Homomorphismus. Außerdem gilt $g^*(a) = 1$, also ist $g^* = f$ nach Satz von Hölder, also $g(x) = cf(x)$ für alle $x \in G$. □

**Anwendungen**

1.) Die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$$

haben die Form $f(x) = cx$ mit $0 < c \in \mathbb{R}$.
2.) Sei $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ die Gruppe der positiven reellen Zahlen bezüglich der Multiplikation. Die Abbildungen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$
$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$$

haben die Form

$$f(x) = c \ln x\,, \qquad (0 < c \in \mathbb{R})\,.$$

# 3 Krullbewertungen

DEFINITION $K$ sei ein Körper. Ein Teilring $B$ von $K$ heißt ein *Bewertungsring*, wenn für $x \in K^\times$ stets
$$x \in B \quad \text{oder} \quad x^{-1} \in B$$
gilt.

**Beispiel**

1.) $B = K$ heißt der triviale Bewertungsring.

2.) $K$ sei nicht-archimedisch bewertet. Dann ist
$$B = \{x \in K \mid |x| \le 1\}$$
ein Bewertungsring (siehe Vorlesung).

3.) Sei $K = k(x, y)$, wobei $k$ ein Körper und $x, y$ algebraisch unabhängig über $k$ sind. Jedes $f \in K$, $f \neq 0$ besitzt die Darstellung
$$f = x^k y^\ell \, \frac{h(x, y)}{g(x, y)},$$
wobei $k, \ell$ eindeutig bestimmte Elemente aus $\mathbb{Z}$ und $h, g$ zu $x, y$ teilerfremde Polynome sind. Definiert man
$$\operatorname{ord}_x f = k\,, \quad \operatorname{ord}_y f = \ell \qquad \text{für } f \neq 0$$
und
$$\operatorname{ord}_x f = \operatorname{ord}_y f = \infty \qquad \text{für } f = 0\,,$$
so sind
$$B_1 = \{f \in K \mid \operatorname{ord}_x f \ge 0\}$$
und
$$B_2 = \{f \in K \mid \operatorname{ord}_x f > 0 \ \vee \ (\operatorname{ord}_x f = 0 \wedge \operatorname{ord}_y f \ge 0)\}$$
Bewertungsringe von $K$. Es gilt
$$B_2 \subset B_1 \subset K\,.$$
Wegen
$$\frac{1}{y} \notin B_2\,, \quad \text{aber} \quad \frac{1}{y} \in B_1$$

und

$$\frac{1}{x} \notin B_1 , \quad \text{aber} \quad \frac{1}{x} \in K$$

sind die Inklusionen echt.

Bemerkung Wie wir später sehen werden, ist $B_2$ nicht Bewertungsring einer nicht-archimedischen Bewertung.

Definition Sei $K$ ein Körper. Eine nicht-leere Teilmenge $I$ von $K$ heißt *gebrochenes Ideal* bezüglich eines Bewertungsringes $B$, wenn $IB$ in $I$ enthalten ist, d.h. wenn gilt:

(1) $$x \in I, y \in B \implies xy \in I .$$

**Eigenschaften**

(2) $$x \in I \implies -x \in I$$

(3) $$x, y \in I \implies x + y \in I$$

**Beweis:** (2): Für einen Bewertungsring gilt stets $1 \in B$ und $-1 \in B$, weil $1^{-1} = 1$ und $(-1)^{-1} = -1$ ist. Damit folgt (2) aus (1).

(3): Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist (3) offensichtlich erfüllt. Seien also $x, y$ von Null verschieden. Weil $B$ ein Bewertungsring ist, ist

$$x^{-1}y \in B \quad \text{oder} \quad (x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in B ,$$

also

$$1 + x^{-1}y \in B \quad \text{oder} \quad y^{-1}x + 1 \in B .$$

Damit ist aber nach (1)

$$x + y = x\,(1 + x^{-1}y) = y\,(y^{-1}x + 1) \in I .$$

□

**Korollar 3.1** *Ist $I$ in $B$ enthalten, so ist $I$ ein Ideal von $B$ (im ringtheoretischen Sinn).*

Die gebrochenen Ideale, die in $B$ liegen, nennt man auch *ganze Ideale.*

**Beispiel**

1.) Für jedes $x \in K$ ist

$$xB = \{xy \mid y \in B\}$$

ein gebrochenes Hauptideal. Ist $x \in B$, so ist $xB$ ein ganzes Ideal. Ist $x \notin B$, so ist $xB \nsubseteq B$ wegen $x \cdot 1 = x \notin B$.

2.) Ist $B'$ ein Oberring von $B$, so ist $B'$ ein gebrochenes Ideal bezüglich $B$. Außerdem ist $B'$ ein Bewertungsring:

$$x \notin B' \quad \Longrightarrow \quad x \notin B \quad \Longrightarrow x^{-1} \in B \quad \Longrightarrow x^{-1} \in B' .$$

**Satz 3.2** *Die Menge der gebrochenen Ideale (bezüglich eines festen Bewertunsgringes $B$) sind bezüglich der Inklusion linear geordnet.*

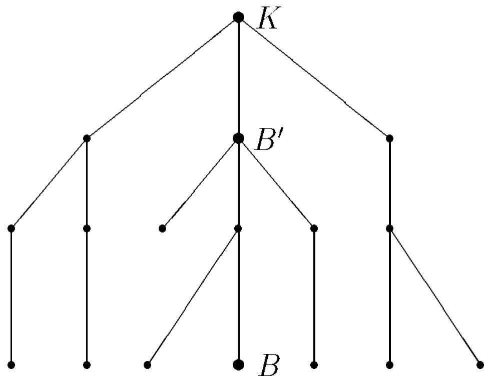
**Beweis:** Seien $I_1, I_2$ gebrochene Ideale und $I_1 \nsubseteq I_2$. Dann gibt es ein $x \in I_1$ mit $x \notin I_2$. Sei $y \in I_2$, $y \neq 0$. Wegen

$$y\,(y^{-1}x) = x \notin I_2$$

ist $y^{-1}x \notin B$. Weil $B$ ein Bewertungsring ist, folgt $x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1} \in B$ und damit $y = x\,(x^{-1}y) \in I_1$. Also ist $I_2 \subseteq I_1$. □

**Korollar 3.3** *Die Menge der Oberringe $B'$ über einem Bewertungsring $B$ ist bezüglich der Inklusion linear geordnet.*

Interpretiert man jeden Bewertungsring von $K$ als Knoten in einem Graphen, dessen Kanten durch die Inklusion der Bewertungsringe gegeben sind, so bildet der so konstruierte Graph einen Baum (das ist ein Graph ohne Kreise).



**Korollar 3.4** *Die Menge der von Null verschiedenen gebrochenen Hauptideale*

$$\Gamma = \{xB \mid x \in K^\times\}$$

*bildet bezüglich der Verknüpfung*

$$xB \cdot yB := xyB \qquad (x, y \in K^\times)$$

*eine geordnete Gruppe, wobei die Ordnung durch die Inklusion gegeben ist.*

**Beweis:** 1.) Die Verknüpfung ist wohldefiniert, denn aus $xB = x'B$ und $yB = y'B$ folgt

$$xyB = xy'B = y'xB = y'x'B = x'y'B\,.$$

2.) Die Gruppeneigenschaften von $\Gamma$ folgen direkt aus den Körpereigenschaften von $K$.

3.) Nach Satz 3.2 ist $\Gamma$ als Untermenge einer lineare geordneten Menge linear geordnet. Ferner gilt für $xB$, $yB$, $zB \in \Gamma$ mit $xB \subseteq yB$

$$xB \cdot zB = xzB = zxB \subseteq zyB = yzB = yB \cdot zB$$

und analog

$$zB \cdot xB \subseteq zB \cdot yB\,.$$

Also ist $\Gamma$ eine geordnete Gruppe. □

Sei $\Gamma$ eine multiplikativ geschriebene geordnete Gruppe. Erweitere $\Gamma$ durch ein Element 0 zu $\widehat{\Gamma} := \Gamma \cup \{0\}$ und setze

$$0 \leq \gamma \quad \text{und} \quad 0 \cdot \gamma = \gamma \cdot 0 = 0$$

für alle $\gamma \in \Gamma$.

## Beispiel

1.) Es ist $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \cup \{0\}$, und $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist eine geordnete Gruppe.

2.) Für die geordnete Gruppe $\Gamma$ aller von Null verschiedenen gebrochenen Hauptideale bezüglich eines festen Bewertungsringes $B$ ist $\widehat{\Gamma} = \{xB \mid x \in K\}$.

Definition Sei $K$ ein Körper und $\Gamma$ eine geordnete Gruppe. Eine Abbildung

$$|\ | : K \to \widehat{\Gamma} = \Gamma \cup \{0\}\,, \quad x \mapsto |x|\,,$$

heißt eine *Krullbewertung*, wenn für $x, y \in K$ gilt:

1. $|x| = 0 \iff x = 0$

2. $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$

3. $|xy| = |x| \cdot |y|$

Bemerkung Krullbewertungen sind Verallgemeinerungen der reellen nicht-archimedischen Bewertungen. Die reellen archimedischen Bewertungen sind dagegen keine Krullbewertungen.

**Einfache Eigenschaften**

(A) Bezeichnet man das neutrale Element von $\Gamma$ ebenfalls mit 1, so gilt

$$|1| = |-1| = 1\,.$$

*Beweis:* Wegen $|1|, |-1| \neq 0$ ist $|1|, |-1| \in \Gamma$. Aus $|1| = |1 \cdot 1| = |1| \cdot |1|$ folgt $|1| = 1$. Wegen $|-1|^2 = |1| = 1$ hat $|-1|$ in $\Gamma$ endliche Ordnung. Weil $\Gamma$ eine geordnete Gruppe ist, folgt $|-1| = 1$.

*Folgerung* Für alle $x \in K$ gilt $|x| = |-x|$.

(B) Ist $|x| \neq |y|$, so ist $|x + y| = \max(|x|, |y|)$. Der Beweis erfolgt analog dem für nicht-archimedische reelle Bewertungen.

(C) $B = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ ist ein Bewertungsring in $K$.

*Beweis:* 1.) Für $x, y \in B$ gilt

$$|x - y| \leq \max(|x|, |y|) \leq 1\,, \qquad \text{also } x - y \in B$$

und

$$|xy| = |x|\,|y| \leq 1\,, \qquad \text{also } xy \in B\,.$$

Wegen $1 \in B$ ist $B \neq \emptyset$. Also ist $B$ ein Ring.
2.) Sei $x \in K$ mit $x \notin B$. Dann ist $|x| > 1$, also $|x^{-1}| < 1$, d.h. es ist $x^{-1} \in B$. Damit ist $B$ eine Bewertungsring von $K$.

**Satz 3.5** *Zu jedem Bewertungsring $B$ von $K$ existiert eine Krullbewertung $|\ |$, so daß*
$$B = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$
*ist.*

**Beweis:** Sei $\widehat{\Gamma}$ die Menge aller gebrochenen Hauptideale $xB$, $x \in K$. Nach Korollar 3.4 ist $\Gamma = \{xB \mid x \in K^\times\}$ eine geordnete Gruppe. Definiere

$$|\ | : K \to \widehat{\Gamma}, \quad x \mapsto |x| = xB\,.$$

Nachweis der Axiome:

1. $|x| = 0 \iff xB = 0 \iff x = 0.$

2. Für alle $x, y \in K$ ist wegen
$$(x+y)B \subseteq xB + yB \subseteq \max(xB, yB)$$
$|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$.

3. Für alle $x, y \in K$ ist
$$|xy| = xyB = xB \cdot yB = |x|\,|y|\,.$$

Schließlich ist

$$\{x \in K \mid |x| \leq 1\} = \{x \in K \mid xB \subseteq 1 \cdot B\} = \{x \in K \mid x \in B\} = B\,.$$

□

Definition Zwei Krullbewertungen $|\ |_1$ und $|\ |_2$ von $K$ heißen *äquivalent*, $(|\ |_1 \sim |\ |_2)$, wenn gilt:
$$|x|_1 \leq |y|_1 \iff |x|_2 \leq |y|_2$$
für alle $x, y \in K$.

Hierdurch werden die Krullbewertungen in Klassen äquivalenter Bewertungen eingeteilt. Es gilt

$$|\ |_1 \sim |\ |_2 \iff B_1 = \{x \in K \mid |x|_1 \leq 1\} = B_2 = \{x \in K \mid |x|_2 \leq 1\}\,.$$

Satz 3.5 sagt aus, daß die Mengen der Bewertungsringe von $K$ bijektiv der Menge der Klassen äquivalenter Krullbewertungen entspricht.

$G = \{|x| \in \Gamma \mid x \neq 0\}$ ist eine Untergruppe von $\Gamma$ und heißt *Wertegruppe* der Bewertung.

Die Wertegruppen äquivalenter Bewertungen sind ordnungsisomorph (d.h $f : G_1 \to G_2$, $f(|x|_1) = |x|_2$ ist ein isotoner Isomorphismus).

Definition Eine Krullbewertung heißt eine Bewertung vom Rang $n$, wenn ihre Wertegruppe den Rang $n$ besitzt.

**Satz 3.6** *Die Bewertungen vom Rang* 1 *sind genau diejenigen, die zu den reellen nicht-archimedischen Bewertungen äquivalent sind.*

**Beweis:** 1.) Hat die Wertegruppe den Rang 1, so ist $G$ archimedisch geordnet. Nach Satz 2.2 gibt es dann einen isotonen und injektiven Homomorphismus

$$g : G \to (\mathbb{R}, +), \qquad g(1) = 0.$$

Setzt man $f = \exp \circ g$, so erhält man einen isotonen und injektiven Homomorphismus

$$f : G \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \qquad f(1) = 1.$$

Die durch

$$|x|_1 := \begin{cases} f(|x|) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierte Bewertung ist dann reell und äquivalent zu $|\ |$.

2.) Die Wertegruppe einer reellen nicht-archimedischen Bewertung ist Untergruppe von $(\mathbb{R}^+, \times)$, also archimedisch und hat daher nach Satz 1.3 den Rang 1. $\square$

# 4 Primideale

Definition Ein Ideal $P$ von $B$ heißt *Primideal*, wenn $P \neq B$ ist und für alle $x, y \in B$ mit $xy \in P$ stets $x \in P$ oder $y \in P$ folgt.

**Satz 4.1** *Ist $P$ ein Primideal eines Bewertungsringes $B$ von $K$, so gilt*

*(P)* $xy \in P \quad \Longrightarrow \quad x \in P$ *oder* $y \in P$

*für alle* $x, y \in K$.

**Beweis:** Sind $x, y \in B$, so ergibt sich (P) direkt aus der Definition des Primideals. Ist $x \notin B$ oder $y \notin B$, etwa $y \notin B$, so ist $y^{-1} \in B$, also $x = (xy)\,y^{-1} \in P$. □

Im folgenden soll der Zusammenhang zwischen den konvexen Untergruppen der Wertegruppe und den Primidealen des Bewertungsringes untersucht werden. Wir beweisen zunächst den

**Hilfssatz 4.2** *Ist $U$ eine konvexe Untergruppe der Wertegruppe $G$, so ist*

$$P = \{x \in B \mid |x| \notin U\}$$

*ein Primideal von $B$.*

**Beweis:** 1.) Wegen $0 \in P$ und $1 \notin P$ ist $P$ eine echte nicht-leere Teilmenge von $B$.
2.) $P$ ist ein Ideal von $B$: Sei $x \in P$, $y \in B$. Dann ist

$$|xy| = |x|\,|y| \leq |x| \leq 1 = |1|\,.$$

Weil $U$ konvex ist, folgt

$$|xy| \in U \quad \Longrightarrow \quad |x| \in U$$

oder gleichwertig hiermit

$$|x| \notin U \quad \Longrightarrow \quad |xy| \notin U\,.$$

Wegen $x \in P$ ist $|x| \notin U$, also $|xy| \notin U$, d.h. es ist $xy \in P$.
Für $x, y \in P$ ist

$$|x - y| \leq \max\left(|x|, |y|\right) \leq 1 = |1|\,.$$

Wäre nun $x - y \notin P$, so wäre $|x - y| \in U$. Aus der Konvexität von $U$ würde dann $|x|$ oder $|y| \in U$, also $x$ oder $y \notin P$ folgen, im Widerspruch zur Wahl von $x$ und $y$. Also ist $x - y \in P$.

Insgesamt ist damit $P$ ein Ideal von $B$.
3.) $P$ ist ein Primideal: Seien $x, y \in B$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
xy \in P \quad &\Longrightarrow \quad |xy| = |x|\,|y| \notin U \\
&\Longrightarrow \quad |x| \notin U \ \text{ oder } \ |y| \notin U \\
&\Longrightarrow \quad x \in P \ \text{ oder } \ y \in P\,.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Also ist $P$ ein Primideal. □

**Satz 4.3** *Sei $\mathcal{U}$ die Menge der konvexen Unterguppen der Wertegruppe $G$ und $\mathcal{P}$ die Menge der Primideale von $B$. Dann ist die Abbildung*

$$f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{P}\,, \quad U \mapsto f(U) = \{x \in B \mid |x| \notin U\}$$

*eine antitione Bijektion.*

**Beweis:** 1.) Sei $U_1 \subseteq U_2$ und $x \in f(U_2)$. Aus $|x| \notin U_2$ folgt dann $|x| \notin U_1$, also $x \in f(U_1)$. Also ist $f(U_2) \subseteq f(U_1)$, d.h. $f$ ist antiton.
2.) Für $x \neq 0$ gilt

$$|x| \notin U \iff x \in f(U) \ \text{ oder } \ x^{-1} \in f(U).$$

*Beweis:* „$\Rightarrow$“: Ist $x \in B$, so folgt $x \in f(U)$ nach Definition von $f(U)$. Ist $x \notin B$, so ist $x^{-1} \in B$. Da $U$ Untergruppe von $G$ ist, gilt mit $|x| \notin U$ auch $|x^{-1}| = |x|^{-1} \notin U$, also ist $x^{-1} \in f(U)$.
„$\Leftarrow$“: Gilt $x \in f(U)$ oder $x^{-1} \in f(U)$, so ist notwendig $|x| \notin U$ oder $|x^{-1}| \notin U$. In beiden Fällen folgt $|x| \notin U$, weil $U$ eine Untergruppe ist.

Durch Kontraposition erhält man für $x \neq 0$

$$|x| \in U \iff x \notin f(U) \ \text{ und } \ x^{-1} \notin f(U). \tag{5}$$

3.) $f$ ist injektiv: Aus $f(U_1) = f(U_2)$ folgt wegen $(*)$

$$|x| \in U_1 \iff |x| \in U_2\,,$$

also $U_1 = U_2$.

4.) $f$ ist surjektiv: Definiere zu $P \in \mathcal{P}$

$$U := \{|x| \in G \mid x \neq 0,\, x \notin P,\, x^{-1} \notin P\}\,.$$

Dann gilt:
(a) $U$ ist eine Untergruppe von $G$:
Wegen $1 \notin P$ ist $|1| \in U$, also $U \neq \emptyset$. Seien $|x|, |y| \in U$, also $x, y, x^{-1}, y^{-1} \notin P$. Wegen Eigenschaft (P) folgt

$$xy^{-1} \notin P \quad \text{und} \quad yx^{-1} \notin P\,,$$

also $|xy^{-1}| = |x|\,|y|^{-1} \in U$.
(b) $U$ ist konvex: Seien $|x|, |y| \in U$ und $|z| \in G$ mit $|x| \leq |z| \leq |y|$.

$$\begin{aligned} \text{Aus } x = z\,(z^{-1}x) \notin P \ \text{ und } \ z^{-1}x \in B \quad &\text{folgt} \quad z \notin P\,, \\ \text{aus } y^{-1} = z^{-1}\,(zy^{-1}) \notin P \ \text{ und } \ zy^{-1} \in B \quad &\text{folgt} \quad z^{-1} \notin P\,. \end{aligned}$$

Also ist $|z| \in U$.
(c) Es ist $f(U) = P$: $x \in B$ und $x^{-1} \in P$ führt zu $1 = x^{-1}x \in P$, also zu einem Widerspruch. Damit ist für $x \neq 0$

$$x \in f(U) \iff x \in B \,\wedge\, |x| \notin U \iff x \in B \,\wedge\, (x \in P \,\vee\, x^{-1} \in P) \iff x \in P\,.$$

□

Sei $\mathcal{J}$ die Menge der gebrochenen Ideale $I$ bezüglich $B$. Definiere für $I \in \mathcal{J}$

$$I^* := \{x \in K \mid 1 \notin xI\}\,.$$

**eigenschaft**

(A) Es ist $I^* \in \mathcal{J}$.
*Beweis:* $x \in I^* \Rightarrow 1 \notin xI \Rightarrow 1 \notin xBI \Rightarrow xB \subseteq I^*$
Beachte $BI \subseteq I$ bei der zweiten Implikation.

(B) $I_1 \subseteq I_2 \implies I_2^* \subseteq I_1^*$.
*Beweis:* $x \in I_2^* \Rightarrow 1 \notin xI_2 \Rightarrow 1 \notin xI_1 \Rightarrow x \in I_1^*$.
Also ist $I_2^* \subseteq I_1^*$.

(C) $I^{**} = I$.

*Beweis:* Sei $x \neq 0$. Dann ist

$$x \notin I \iff 1 \notin x^{-1}I \iff x^{-1} \in I^*,$$

also

$$x \in I \iff x^{-1} \notin I^* \iff 1 \notin xI^* \iff x \in I^{**}.$$

(D) Die Abbildung

$$f : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}, \quad I \mapsto f(I) = I^*$$

ist eine antitone Bijektion.

*Beweis:* Wegen (B) ist $f$ antiton. Aus $I_1^* = I_2^*$ folgt

$$I_1 = I_1^{**} = I_2^{**} = I_2,$$

also ist $f$ injektiv. Ist $I \in \mathcal{J}$, so gilt $I = (I^*)^*$. Damit ist $f$ auch surjektiv.

Definition Ein Ring $R$ mit Einselement heißt ein *lokaler Ring*, wenn die nicht invertierbaren Elemente ein Ideal in $R$ bilden.

$$M = \{x \in R \mid x \text{ nicht invertierbar}\}$$

heißt *maximales Ideal* von $R$. Es enthält jedes echte Ideal $I$ von $R$, denn ist $x \in I$, so ist $x$ nicht invertierbar, weil andernfalls $1 = xx^{-1} \in I$, also $I = R$ wäre.

**Satz 4.4** *Jeder Bewertungsring ist ein lokaler Ring. Es ist $M = B^*$.*

**Beweis:** Ist $x \in B^*$, so folgt $1 \notin xB$, also $x^{-1} \notin B$. Weil $B$ ein Bewertungsring ist, folgt $x \in B$. Damit ist $B^* \subseteq B$ nach (A) ein Ideal in $B$. Wegen $1 \notin B^*$ und $1 \in B$ ist $B^*$ sogar ein echtes Ideal. Also enthält $B^*$ nur nicht-intervierbare Elemente. Zu zeigen bleibt noch, daß $B^*$ alle nicht-invertierbaren Elemente von $B$ enthält. Sei also $x \in B$ nicht invertierbar in $B$. Dann ist $1 \notin xB$, also $x \in B^*$. Damit ist $M = B^*$. (Nach Satz 3.5 gibt es eine Krullbewertung $|\ |$ mit $B = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$. Dann ist $B^* = M = \{x \in K \mid |x| < 1\}$.) $\square$

**Korollar 4.5** *Es ist* $M^* = B^{**} = B$. *Nach* (B) *gilt für* $I \in \mathcal{J}$

$$I \subseteq M \quad \Longrightarrow \quad B \subseteq I^* \qquad \textit{und} \qquad B \subseteq I \quad \Longrightarrow \quad I^* \subseteq M\,.$$

**Satz 4.6** *Sei* $\mathcal{P}$ *die Menge der Primideale von* $B$ *und* $\mathcal{O}$ *die Menge der Oberringe von* $B$. *Die Abbildung* $P \mapsto P^*$ *ist eine antitone Bijektion von* $\mathcal{P}$ *auf* $\mathcal{O}$.

**Beweis:** 1.) Sei $P \in \mathcal{P}$. Dann ist $P \subseteq M$, also $P^* \supseteq B$. Nach (A) ist $P^*$ ein gebrochenes Ideal, also bezüglich der Addition eine Gruppe. Zu zeigen bleibt noch, daß $P^*$ auch multiplikativ abgeschlossen ist. Seien also $x,\ y \in P^*$. Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so folgt $xy = 0 \subseteq B \subseteq P^*$. Man kann also $x, y \neq 0$ voraussetzen. Aus $x, y \in P^*$ folgt dann $1 \notin xP$ und $1 \notin yP$, also $x^{-1}, y^{-1} \notin P$. Weil $P$ ein Primideal ist, ist

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \notin P\,,$$

also $1 \notin xyP$, d.h. $xy \in P^*$. Damit ist $P^*$ ein Oberring von $B$.

2.) Sei $B' \in \mathcal{O}$. Dann ist $B'^* \subseteq M \subset B$ und $B'^* \in \mathcal{J}$, also ist $B'^*$ ein echtes Ideal von $B$. Ist $0 \neq xy \in B'^*$, so folgt

$$1 \notin xyB' \quad \Longrightarrow \quad y^{-1}x^{-1} \notin B'\,,$$

also $x^{-1} \notin B'$ oder $y^{-1} \notin B'$, d.h. $x \in B'^*$ oder $y \in B'^*$. Damit ist $B'^* \in \mathcal{P}$. □

**Korollar 4.7** *Ist der Rang der Krullbewertung gleich* $n$, *so existieren genau* $n$ *Oberringe von* $B$. *Die Bewertung ist genau dann reell (d.h. vom Rang* 1*), wenn* $B$ *ein maximaler Bewertungsring ist.*

Als Ergänzung zu Satz 4.3 und Satz 4.6 erhält man

**Satz 4.8** *Es gibt eine isotone Bijektion von der Menge* $\mathcal{U}$ *aller konvexen Untergruppen der Wertegruppe auf die Menge* $\mathcal{O}$ *aller Oberringe, die explizit durch*

$$U \mapsto B' = \{x \in K \mid |x| \in U\} \cup B$$

*gegeben ist.*

In Beispielen ist es häufig günstig, die Verknüpfung der Wertegruppe additiv zu schreiben und die Ordnung umzukehren. Anstelle der Absolutstriche benutzt man dann die Bezeichnung ord.

Sei $\Gamma$ eine additiv geschriebene Gruppe und $\widehat{\Gamma} = \Gamma \cup \{\infty\}$ mit

$$\gamma \leq \infty\,, \quad \gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty$$

für alle $\gamma \in \Gamma$.

Eine Abbildung

$$\mathrm{ord} : K \to \widehat{\Gamma}$$

heißt *additive Krullbewertung*, wenn

1. $\mathrm{ord}\, x = \infty \iff x = 0$
2. $\mathrm{ord}(x + y) \geq \min(\mathrm{ord}\, x, \mathrm{ord}\, y)$
3. $\mathrm{ord}\, xy = \mathrm{ord}\, x + \mathrm{ord}\, y$

für alle $x, y \in K$ gilt.

Jede Krullbewertung läßt sich in eine additive Krullbewertung umschreiben: Sei $|\ | : K \to \Gamma \cup \{0\}$ eine Krullbewertung. Definiere in $K$

$$a + b := a \cdot b\,, \qquad \text{und} \qquad a \sqsubseteq b \iff a \geq b\,.$$

Hierdurch wird $\Gamma$ eine additiv geschriebene geordnete Gruppe mit neutralem Element 0 (nach Umbenennung der 1 in 0). Man erweitere $\Gamma$ zu $\widehat{\Gamma} = \Gamma \cup \{\infty\}$ und definiere

$$\mathrm{ord}\, x = \begin{cases} |x| & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Für $x, y \in K$ gilt dann

1. $\mathrm{ord}\, x = \infty \iff x = 0$
2. $\mathrm{ord}(x + y) = |x + y| \leq \max(|x|, |y|) = \max(\mathrm{ord}\, x, \mathrm{ord}\, y)$, also
   $\mathrm{ord}(x + y) \sqsupseteq \min(\mathrm{ord}\, x, \mathrm{ord}\, y)$.
3. $\mathrm{ord}\, xy = |xy| = |x|\,|y| = \mathrm{ord}\, x \cdot \mathrm{ord}\, y = \mathrm{ord}\, x + \mathrm{ord}\, y$.

Also ist $\mathrm{ord} : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ eine additive Krullbewertung.

Analog ergibt sich aus einer additiven Krullbewertung eine multiplikative Krullbewertung.

Bezüglich einer additiven Krullbewertung ist

$$B = \{x \in K \mid \mathrm{ord}\, x \geq 0\} \quad \text{und} \quad M = \{x \in K \mid \mathrm{ord}\, x > 0\}\,.$$

**Beispiel**

Sei $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1, \ldots, x_n$ algebraisch unabhängig über $k$. $f \neq 0$ aus $K$ besitzt die Darstellung

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i} \frac{g(x_1, \ldots, x_n)}{h(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{6}$$

wobei $k_i \in \mathbb{Z}$ und $g, h$ zu $x_i$ teilerfremde Polynome sind, $i = 1, \ldots, n$. Definiere

$$\operatorname{ord} f := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \qquad \text{für } f \neq 0$$

und

$$\operatorname{ord} f = \infty \qquad \text{für } f = 0\,.$$

$\mathbb{Z}^n$ ist bezüglich der lexikographischen Anordnung und der komponentenweisen Addition eine additiv geschriebene geordnete Gruppe, und ord ist dann eine additive Krullbewertung mit

$$B = \{f \in K \mid \operatorname{ord} f \geq 0\}\,.$$

Die konvexen Untergruppen von $\mathbb{Z}^n$ sind

$$U_r = \{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid k_1 = \ldots = k_r = 0\}$$

für $r = 0, 1, \ldots, n$ und bilden eine Kette

$$U_0 = \mathbb{Z}^n \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n = \{0 = (0, \ldots, 0)\}\,.$$

Nach Satz 4.8 gibt es dann $n$ echte Oberringe von $B$ mit

$$B_0 = K \supset B_1 \supset \ldots \supset B_n = B$$

und

$$\begin{aligned} B_r &= \{f \in K \mid \operatorname{ord} f \in U_r\} \cup B \\ &= \{f \in K \mid \operatorname{ord} f = (k_1, \ldots, k_r) \in U_r \text{ oder } \operatorname{ord} f \geq 0\} \end{aligned}$$

für $r = 0, 1, \ldots, n$.

Die Primideale besitzen die Darstellung

$$P_r = \{f \in K \mid \operatorname{ord} f \notin U_r \text{ und } \operatorname{ord} f \geq 0\}$$

für $r = 0, 1, \ldots, n$.

# 5 Fortsetzungssatz für Krullbewertungen

Im Beweis des folgenden Satzes benötigen wir das

**Zornsche Lemma** *Jede nicht-leere induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element.*

Eine Menge $\mathcal{S}$ heißt *induktiv geordnet*, wenn $\mathcal{S}$ teilweise geordnet ist und jede linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{S}$ eine obere Schranke in $\mathcal{S}$ besitzt.

**Satz 5.1** (Chevalley) *Es sei $K$ ein Körper, $R_0$ ein Teilring von $K$ mit $1 \in R_0$ und $I_0$ ein echtes Ideal von $R_0$. Dann existiert ein Bewertungsring $B$ von $K$ mit*

$$R_0 \subseteq B \quad \textit{und} \quad I_0 \subseteq M\,,$$

*wobei $M$ das maximale Ideal von $B$ ist.*

**Beweis:** 1.) Es sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Paare $(R, I)$, wobei $R$ ein Teilring von $K$, $I$ ein echtes Ideal von $R$ und $R_0 \subseteq R$ sowie $I_0 \subseteq I$ ist. Wegen $(R_0, I_0) \in \mathcal{S}$ ist $\mathcal{S}$ nicht leer. Definiere für $(R, I)$, $(R', I') \in \mathcal{S}$

$$(R, I) \leq (R', I') \quad :\Longleftrightarrow \quad R \subseteq R' \text{ und } I \subseteq I'\,.$$

Hierdurch wird $\mathcal{S}$ zu einer teilweise geordneten Menge.
$\mathcal{S}$ ist induktiv geordnet: Sei

$$\cdots \leq (R_i, I_i) \leq \ldots \leq (R_j, I_j) \leq \cdots$$

eine Kette in $\mathcal{S}$. Definiere

$$R = \bigcup R_i \quad \text{und} \quad I = \bigcup I_i\,.$$

$R$ ist ein Teilring von $K$ und $I$ ein echtes Ideal von $R$:
Seien $x, y \in R = \bigcup R_i$. Dann gibt es $i, j$ mit $x \in R_i$ und $y \in R_j$. Sei etwa $(R_i, I_i) \leq (R_j, I_j)$, also $R_i \subseteq R_j$. Dann ist $x, y \in R_j$, also $x - y, xy \in R_j \subseteq R$.
Entsprechend zeigt man, daß $I$ ein Ideal ist. Wegen $1 \in R$ und $1 \notin I$ ist $I$ ein echtes Ideal von $R$.

Nach dem Zornschen Lemma existiert in $\mathcal{S}$ ein maximales Element $(B, I)$.

2.) $B$ ist ein Bewertungsring von $K$. Annahme: Es gibt ein $x \in K^\times$ mit $x \notin B$ und $x^{-1} \notin B$. Sei

$$B[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_0,\ a_i \in B \right\}$$

und

$$I[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_0,\ a_i \in I \right\}$$

$I[x]$ ist ein Ideal in $B[x]$. Wegen $x \notin B$ ist $B$ ein echter Teilring von $B[x]$. Weil $(B, I)$ maximales Element in $\mathcal{S}$ ist, folgt daher $(B[x], I[x]) \notin \mathcal{S}$, also $I[x] = B[x]$, also

$$1 \in I[x] .$$

Aus $x^{-1} \notin B$ folgt entsprechend

$$1 \in I[x^{-1}] .$$

Seien nun $n, m$ minimal gewählt, so daß

$$(7) \qquad 1 = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m , \qquad a_i \in I \text{ für } i = 0, 1, \ldots, m$$

$$(8) \qquad 1 = b_0 + b_1 x^{-1} + \ldots + b_n x^{-n} , \quad b_i \in I \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n$$

gilt. Sei etwa $m \geq n$. Aus (8) folgt nach Multiplikation mit $x^m$

$$(1 - b_0) x^m = b_1 x^{m-1} + \ldots + b_n x^{m-n}$$

und aus (7) folgt nach Multiplikation mit $1 - b_0$

$$1 - b_0 = (1 - b_0) a_0 + \ldots + (1 - b_0) a_m x^m ,$$

also

$$(9) \ 1 = b_0 + (1 - b_0) a_0 + \ldots + (1 - b_0) a_{m-1} x^{m-1} + a_m (b_1 x^{m-1} + \ldots + b_n x^{m-n}) .$$

Wegen $1 \notin I$ ist $n, m \geq 1$, und es folgt aus (9)

$$1 = a'_0 + \ldots + a'_{m-1} x^{m-1} \qquad \text{mit } a'_i \in I,\ 0 \leq i \leq m-1 .$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von $m$. Also ist $B$ ein Bewertungsring.
3.) Ist $M$ das maximale Ideal von $B$, so gilt

$$(B, I) \subseteq (B, M) \in \mathcal{S} .$$

Weil $(B, I)$ maximal in $\mathcal{S}$ ist, folgt $I = M$. □

BEMERKUNG Sei $R_0$ ein Teilring von $K$ mit $1 \notin R_0$ und $I_0$ ein echtes Ideal von $R_0$. Dann ist

$$R_0' = \{n \cdot 1 + x \mid n \in \mathbb{Z},\, x \in R_0\}$$

ein Teilring von $K$ mit $1 \in R_0'$. Da $I_0$ auch ein echtes Ideal von $R_0'$ ist, existiert nach dem Satz von CHEVALLEY ein Bewertungsring $B$ mit

$$R_0 \subseteq R_0' \subseteq B \quad \text{und} \quad I_0 \subseteq M\,.$$

Folglich kann man in Satz 5.1 die Voraussetzung $1 \in R_0$ fallen lassen.

Mit dem Satz von CHEVALLEY lassen sich jene Körper bestimmen, die nicht-triviale Krullbewertungen besitzen.

**Hilfssatz 5.2** *Gibt es in $K$ einen Teilring $R_0$ mit $1 \in R_0$, der kein Körper ist, so besitzt $K$ eine nicht-triviale Krullbewertung.*

**Beweis:** Sei $x \neq 0$ eine Nichteinheit in $R_0$. Das Hauptideal $I_0 = xR_0$ ist von 0 und $R_0$ verschieden, weil $1 \in R_0$ und $x^{-1} \notin R_0$ ist. Nach Satz 5.1 gibt es daher einen Bewertungsring $B$, so daß $I_0 \subseteq M$, also $M \neq 0$ ist. Damit ist $B \neq K$, also existiert eine nicht-triviale Krullbewertung von $K$. □

Für den Körper $K$ sind nun drei Fälle möglich:

1\. Fall: Ist $\operatorname{char} K = 0$, so ist

$$R_0 = \{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

ein solcher Teilring, also existiert eine nicht-triviale Krullbewertung.

2\. Fall: Ist $\operatorname{char} K = p$ und existiert ein über $\mathbb{Z}_p$ transzendentes Element $x \in K$, so ist $R_0 = \mathbb{Z}_p[x]$ ein solcher Teilring, d.h. es existiert auch in diesem Fall eine nicht-triviale Krullbewertung.

3\. Fall: Ist $\operatorname{char} K = p$ und $K$ algebraisch über $\mathbb{Z}_p$, so existiert keine nicht-triviale Krullbewertung, denn:

Sei $|\ |$ eine Krullbewertung von $K$ und $x \in K^\times$. Weil $K$ algebraisch über $\mathbb{Z}_p$ ist, ist $\mathbb{Z}_p(x)$ ein endlicher Körper. Ist $q$ die Anzahl der Elemente von $\mathbb{Z}_p(x)$, so ist die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Z}_p(x)$ eine Gruppe der Ordnung $q-1$. Nach dem Satz von LAGRANGE ist dann

$$x^{q-1} = 1\,, \quad \text{also} \quad |x|^{q-1} = 1\,.$$

Weil $|x|$ Element einer geordneten Gruppe ist, folgt $|x| = 1$. Also ist $|\ |$ die triviale Bewertung.

Wir erhalten

**Satz 5.3** *Ein Körper besitzt genau dann nur die triviale Krullbewertung, wenn er algebraisch über $\mathbb{Z}_p$ ist.*

DEFINITION $K_2$ sei ein Erweiterungskörper von $K_1$. Eine Bewertung von $K_2$ heißt eine *Fortsetzung* einer Bewertung von $K_1$, wenn eine isotone und injektive Abbildung

$$\imath : G_1 \to G_2$$

der Wertegruppen mit

$$|x|_2 = \imath |x|_1$$

für $x \in K_1^\times$ existiert.

**Hilfssatz 5.4** *Sei $K_2$ eine Erweiterungskörper von $K_1$ sowie $|\ |_1$ und $|\ |_2$ Bewertungen von $K_1$ und $K_2$. $|\ |_2$ ist genau dann eine Fortsetzung von $|\ |_1$, wenn für die zugehörigen Bewertungsringe und maximalen Ideale*

$$B_1 \subseteq B_2 \quad \textit{und} \quad M_1 \subseteq M_2$$

*gilt.*

**Beweis:** 1.) Sei $|\ |_2$ eine Bewertungsfortsetzung von $|\ |_1$. Dann gilt

$$x \in B_1 \;\Rightarrow\; |x|_1 \leq 1 = |1|_1 \;\Rightarrow\; |x|_2 = \imath |x|_1 \leq \imath |1|_1 = |1|_2 = 1 \;\Rightarrow\; x \in B_2$$

und

$$x \in M_1 \;\Rightarrow\; |x|_1 < |1|_1 \;\Rightarrow\; |x|_2 = \imath |x|_1 < \imath |1|_1 = |1|_2 \;\Rightarrow\; x \in M_2\,,$$

also $B_1 \subseteq B_2$ und $M_1 \subseteq M_2$.

2.) Seien nun $B_1 \subseteq B_2$ und $M_1 \subseteq M_2$. Dann gilt für $x, y \in K^\times$

$$(*) \qquad |x|_1 \leq |y|_1 \iff |x|_2 \leq |y|_2\,.$$

Die Richtung „⇒" folgt aus

$$|x|_1 \leq |y|_1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{x}{y}\right|_1 \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{y} \in B_1 \subseteq B_2 \;\Rightarrow\; \left|\frac{x}{y}\right|_2 \leq 1 \;\Rightarrow\; |x|_2 \leq |y|_2\,.$$

Die Richtung „⇐" folgt durch Kontraposition aus

$$|x|_1 > |y|_1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{y}{x}\right|_1 < 1 \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} \in M_1 \subseteq M_2 \;\Rightarrow\; \left|\frac{y}{x}\right|_2 < 1 \;\Rightarrow\; |x|_2 > |y|_2\,.$$

Definiere nun die Abbildung

$$\imath : G_1 \to g_2\,, \quad |x|_1 \mapsto |x|_2 \text{ für } x \in K_1^\times\,.$$

Wegen $(*)$ ist $\imath$ wohldefiniert, injektiv und isoton. Also ist $|\ |_2$ eine Bewertungsfortsetzung von $|\ |_1$. □

**Satz 5.5** *Ist $K_2$ ein Erweiterungskörper von $K_1$, so gibt es zu jeder Krullbewertung von $K_1$ eine Fortsetzung auf $K_2$.*

**Beweis:** Seien $B_1$ und $M_1$ der Bewertungsring und das maximale Ideal der Krullbewertung $|\ |_1$ von $K_1$. Dann ist $B_1$ ein Teilring von $K_2$ und $M_1$ ein echtes Ideal in $B_1$. Nach Satz 5.1 existiert dann ein Bewertungsring $B_2$ von $K_2$ mit

$$B_1 \subseteq B_2 \quad \text{und} \quad M_1 \subseteq M_2\,.$$

Zu $B_2$ gehört nach Satz 3.5 eine Krullbewertung $|\ |_2$ von $K_2$, die nach Hilfssatz 5.4 eine Fortsetzung der Bewertung von $K_1$ ist. □

Bei der Fortsetzung kann sich der Rang einer Krullbewertung ändern. Daher folgt aus diesem Satz nicht unmittelbar Korollar **??** über die Fortsetzung reeller nicht archimedischer Bewertungen auf algebraische Erweiterungskörper. Diese Lücke schließt aber

**Satz 5.6** *Ist $|\ |_2$ eine Fortsetzung von $|\ |_1$ auf eine algebraische Erweiterung $K_2$ über $K_1$, so ist der Rang von $|\ |_2$ gleich dem Rang von $|\ |_1$*

Zum Beweis benötigen wir zwei Hilfssätze.

**Hilfssatz 5.7** *Ist $a_1 + \ldots + a_n = 0$ für ein $n \geq 2$ mit $a_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$, so werden zwei Summanden gleich bewertet.*

**Beweis:** Sei etwa $|a_i| = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$. Wäre $|a_i| > |a_j|$ für alle $j \neq i$, so würde

$$|a_i| = \Big| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_j \Big| \leq \max_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} (|a_j|) < |a_j|\,,$$

also ein Widerspruch folgen. □

**Hilfssatz 5.8** *Seien $G_1$ und $G_2$ geordnete Gruppen und $G_1$ eine Untergruppe von $G_2$. Dann ist*

$$f : \mathfrak{U}_2 \to \mathfrak{U}_1\,, \quad f(U) = U \cap G_1 \text{ für } U \in \mathcal{U}_2$$

*eine isotone und surjektive Abbildung der Menge der konvexen Untergruppen von $G_2$ auf die Menge der konvexen Untergruppen von $G_1$. Gibt es zu jedem $a \in G_2$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n \in G_1$, so ist $f$ sogar bijektiv.*

**Beweis:** Offenbar ist $U \cap G_1$ für $U \in \mathcal{U}_2$ eine konvexe Untergruppe von $G_1$ und $f$ eine isotone Abbildung.
Sei $U_1$ eine konvexe Untergruppe von $G_1$. Dann ist

$$U = \{a \in G_2 \mid \exists\, b, c \in U_1 : b \leq a \leq c\}$$

eine konvexe Untergruppe von $G_2$ und $U_1 = U \cap G_1$. Also ist $f$ surjektiv.
Für $U, U' \in \mathcal{U}_\in$ sei $U \cap G_1 = U' \cap G_1$. Ist $a \in U$, so gibt es nach Voraussetzung ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n \in G_1$, also

$$a^n \in U \cap G_1 = U' \cap G_1 \subseteq U' .$$

Ist $1 \leq a$, so gilt $1 \leq a \leq a^n$, also $a \in U'$ wegen der Konvexität von $U'$.
Ist $a \leq 1$, so gilt $a^n \leq a \leq 1$, also ebenfalls $a \in U'$. Damit ist $U \subseteq U'$ gezeigt. Aus Symmetriegründen folgt auch $U' \subseteq U$. Insgesamt folgt also $U = U'$, d.h. $f$ ist injektiv. □

**Beweis von Satz 5.6**

Man kann annehmen, daß die Wertegruppe $G_1$ von $|\ |_1$ Untergruppe von $G_2$ ist. Da $K_2$ algebraisch über $K_1$ ist, gibt es zu jedem $x \in K_2^\times$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K_1$ mit

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 .$$

Nach Hilfssatz 5.7 gibt es verschiedene Indizes $i, j$, etwa $i > j$ mit

$$|a_i x^i|_2 = |a_j x^j|_2 \qquad (\text{für } i = n \text{ ist } a_n = 1) .$$

Damit ist

$$|x|_2^{i-j} = \left|\frac{a_j}{a_i}\right|_2 = \left|\frac{a_j}{a_i}\right|_1 \in G_1 .$$

Nach Hilfssatz 5.8 gibt es daher eine isotone Bijektion der konvexen Untergruppen von $G_2$ auf die konvexen Untergruppen von $G_1$. Also ist

$$\operatorname{Rang} G_1 = \operatorname{Rang} G_2 .$$

Definition Sei $R$ Teilring eines Körpers $K$. Ein Element $x \in K$ heißt *ganz* über $R$, wenn eine Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

mit $a_1 \ldots, a_n \in R$ besteht. Die Menge aller über $R$ ganzen Elemente von $K$ bzeichnet man als den *ganzen Abschluß* $\overline{R}$ von $R$. $R$ heißt *ganz-abgeschlossen*, wenn $R = \overline{R}$ ist.

**Satz 5.9** *Ist $K$ der Quotientenkörper von $R$, und ist $R$ ein Gaußscher Ring (d.h. ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung), so ist $R$ ganz abgeschlossen.*

**Beweis:** Sei $x \in K$ ganz über $R$, also

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in R$. Sei $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in R$ teilerfremd. Dann folgt

$$a^n = -(a_1 a^{n-1} + a_2^{n-2} b + \ldots + a_n b^{n-1}) b\,.$$

Ist $p$ ein Primelement, das $b$ teilt, so teilt $p$ auch $a$, d.h. $a$ und $b$ sind nicht teilerfremd. Es folgt $b = 1$, also $x = a \in R$. Damit ist $R$ ganz abgeschlossen. □

**Beispiel**

1.) $\mathbb{Z}$ ist in $\mathbb{Q}$, $k[x]$ in $k(x)$ ganz abgeschlossen.
2.) $R = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist nicht ganz-abgeschlossen in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$:

$$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$$

genügt der Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0\,,$$

ist also ganz über $R$, liegt jedoch nicht in $R$. ($R$ ist also auch kein Gaußscher Ring.)

**Satz 5.10** (Krull 1932) *Ist $R$ ein Teilring von $K$, so ist der ganze Abschluß $\overline{R}$ gleich dem Durchschnitt aller Bewertungsringe von $K$, die $R$ enthalten.*

**Beweis:** Sei $B$ ein Bewertungsring von $K$ mit $R \subseteq B$ und $x \neq 0$ aus $\overline{R}$, also

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in R$ oder

$$x = -(a_1 + \ldots + a_n x^{1-n})\,.$$

Ist $x^{-1} \in B$, so folgt hieraus $x \in B$. Ist $x^{-1} \notin B$, so folgt ebenfalls $x \in B$, weil $B$ ein Bewertungsring ist. In jedem Fall ist also $x \in B$. Also ist

$$\overline{R} \subseteq \bigcap_{B \supseteq R} B\,.$$

Sei nun $x \notin \overline{R}$ und $R_0 = R[x^{-1}]$. Wäre $x \in R_0$, so würde

$$x = a_0 + a_1 x^{-1} + \ldots + a_{m-1} x^{1-m}$$

mit $a_0, \ldots, a_{m-1}$, also
$$x^m - a_0 x^{m-1} - \ldots - a_{m-1} = 0$$
im Widerspruch zu $x \notin \overline{R}$ folgen. Also ist $x \notin R_0$. Daher ist $x^{-1}R_0$ ein echtes Ideal in $R_0$. Nach Satz 5.1 gibt es einen Bewertungsring $B$ mit

$$R \subseteq R[x^{-1}] \subseteq B \quad \text{und} \quad x^{-1} \in x^{-1}R_0 \subseteq M\,.$$

Aus $x^{-1} \in M$ folgt $x \notin B$, also $x \notin \bigcap_{B \supseteq R} B$. Damit ist

$$\overline{R} = \bigcap_{B \supseteq R} B\,.$$

□

**Korollar 5.11** *1.)* $\overline{R}$ *ist als Durchschnitt von Ringen ein Ring.*
*2.) Wegen* $R \subseteq B \iff \overline{R} \subseteq B$ *ist* $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$*.*
*3.) Die ganz-abgeschlossenen Teilringe von* $K$ *sind Durchschnitte von Bewertungsringen.*

Die Teilbarkeit in einem ganz-abgeschlossenen Ring wird durch die Bewertungen bestimmt: Ist $\overline{R} = \bigcap B_i$ und $|\ |_i$ die Bewertung zu $B_i$, so gilt für $a, b \in R = \overline{R}$:

$$a \mid b \iff |b|_i \leq |a|_i \ \text{ für alle } i\,.$$

**Literatur**


[1] Artin, E.: *Theory of Algebraic Numbers.*
Vorlesung Göttingen 1959

[2] Bachmann, G.: *Introduction to p-adic Numbers and Valuation Theory.*
Academic Press 1964

[3] Borevich, S. I. & Shafarevich, J. R.: *Zahlentheorie.*
Birkhäuser 1966

[4] Bourbaki, N.: *Algèbre Commutative.*
Hermann 1965
englisch: *Commutative Algebra.*
Addison-Wesley 1970

[5] Endler, O.: *Valuation Theory.*
Springer 1972

[6] McCarthy, P. J.: *Algebraic Extensions of Fields.*
Blaisdell 1966

[7] Nagata, M.: *Field Theory.*
Dekker 1977

[8] Ribenboim, P.: *Théorie des Valuations.*
Vorleung Montreal 1964

[9] Schilling, O. F. G.: *The Theory of Valuations.*
American Mathematical Society 1950

[10] van der Waerden, B. L.: *Algebra II.*
Springer 1936/67

[11] Zariski, O. & Samuel, P.: *Commutative Algebra I, II.*
Van Nostrand 1960

# Index